

УДК: 524.387—735.530.145

КОМПТОНИЗАЦИЯ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ

Л. Г. ТИТАРЧУК

Поступила 16 декабря 1987
Принята к печати 23 июня 1988

Рассматривается задача формирования спектра излучения в результате комптонизации собственного тормозного излучения среды. Приводится аналитическое решение уравнения Компанейца для изотермического случая, выраженное через гипергеометрические функции. Исследуются асимптотики полученного решения и зависимость решения от параметров задачи: температуры, плотности, геометрических размеров среды. Влияние неизотермичности среды на спектр излучения обсуждается в приложении. Там же приводится оценка спектральной температуры для рентгеновского источника Лебедь X-1, с учетом неизотермичности.

Впервые эта задача была рассмотрена Компанейцем еще в 1949 г. [1]. Им было показано, что отношение энергии, передаваемое комптоновским механизмом, к энергии, передаваемой квантами при испускании, равно $\frac{3}{4} \ln^2 \frac{2.35}{x_*}$. Причем x_* — это та граничная частота, на которой комптоновский процесс подхватывает фотон быстрее, чем он успевает поглотиться.

Этот результат был получен в приближении однородной среды, без учета границы и без учета диффузии излучения по пространству. Илларионов, Сюняев [2] исследовали роль комптоновского рассеяния в формировании и эволюции спектра излучения в однородной разреженной плазме при совместном действии тормозных процессов. Показано, что формирование чернотельного спектра идет по последовательности Бозе-эйнштейновских спектров с уменьшающимся со временем химическим потенциалом. Приближение к чернотельному излучению происходит гораздо (раз в $1 \div 100$) быстрее, чем в случае действия только тормозных процессов. Приводится также большое количество аналитических оценок, объясняющих результаты численных расчетов эволюции спектров. Предложен метод перехода от однородной задачи к облаку плазмы конечных размеров.

Реальные астрофизические объекты сильно отличаются от однородной среды (исключение составляют космологические модели). Обзор астрофизических объектов, где может работать рассматриваемый механизм формирования спектров излучения, приведен в обзоре [3]. Естественно задать вопрос, какой выигрыш в энергии мы получаем за счет комптоновского механизма в реальных моделях (полубесконечная атмосфера, плоский слой, сфера) и какой спектр при этом формируется.

Задача о формировании спектра в изотермической среде постоянной плотности сводится к решению диффузионного уравнения Компанейца

$$\frac{kT_e}{m_e c^2} \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) + \frac{1}{3} L_\tau n = \frac{\alpha_{ff}}{a_\tau} \left(n - \frac{B_\tau}{x^2} \right), \quad \tau_{rp} > \tau > 0, \\ 0 < x < \infty, \quad (1)$$

при

$$\tau = \tau_{rp} \quad l_\tau n|_{\tau=\tau_{rp}} = 0.$$

Здесь $n = J_\nu/x^3$ — число заполнения в фазовом пространстве фотонов, J_ν — интенсивность излучения, $x = h\nu/kT_e$, τ — оптическая координата ($\tau = z\sigma_T N_e$), z — геометрическая координата, N_e — плотность электронов, $\alpha_{ff}/a_\tau = Kg(x)(1 - e^{-x})/x^3$,

$$K = \frac{1.25 \cdot 10^{-12} N_e T_e^{-3.5}}{\sigma_T c} = 0.02 \left(\frac{N_e}{10^{21}} \right) \left(\frac{T_e}{10^7 K} \right)^{-3.5},$$

$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{x/2} K_0(x/2)$ — фактор Гаунта, L_τ — оператор диффузии по пространству (для сферы — $L_\tau = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} \right)$, плоского слоя $L_\tau = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$), l_τ — граничный оператор: сфера

$$l_\tau n = \frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{3}{2} n|_{\tau=0} = 0, \quad (2)$$

плоский слой —

$$l_\tau n = \frac{\partial n}{\partial \tau} - \frac{3}{2} n|_{\tau=0} = \frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{3}{2} n|_{\tau=2\tau_0} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) написано в предположении $\alpha_{ff}/a_\tau \ll 1$.

Линеаризованное уравнение (1) с краевыми условиями (2) или (3), в зависимости от геометрии задачи может быть решено методом разделения переменных,

$$n(x, \tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{3c_l}{\lambda_l^2} R_l(\tau) N_l(x), \quad (4)$$

где $R_l(\tau)$ — собственные функции соответствующего пространственного оператора

$$L_\tau R_l + \lambda_l^2 R_l = 0, \quad (5)$$

$$l_\tau R_l \Big|_{\tau=\tau_{\text{гр}}} = 0, \quad (6)$$

c_l — коэффициенты Фурье правой части (1), $\gamma_l = \lambda_l^2/3a$, $a = kT_e/m_e c^2$. Для $N_l(x)$ получаем стационарное уравнение Компанейца

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} x^4 \left(\frac{dN_l}{dx} + N_l \right) - \gamma_l N_l = -\gamma_l \frac{e^{-x} K g(x)}{x^3} \left(1 - \frac{3}{\lambda_l^2} N_l (e^x - 1) \right). \quad (7)$$

Формально решение этого уравнения можно записать, используя функцию Грина, полученную автором в работе [4].

$$N_l(x) = \int_0^{\infty} G_l(x, x_0) e^{-x_0} K g(x_0) \left(1 - \frac{3N_l(x_0)}{\lambda_l^2} (e^{x_0} - 1) \right) \frac{dx_0}{x_0}. \quad (8)$$

Однако этот интеграл нельзя вычислить, не зная $N_l(x)$. Эта трудность может быть преодолена, если мы найдем решение уравнения (7) при малых x и покажем, что характер поведения $N_l(x)$ при малых x полностью определяет вклад множителя $\left(1 - \frac{3N_l}{\lambda_l^2} (e^x - 1) \right)$ в интеграл (8).

Рассмотрим теперь решение уравнения (7) при малых x . Кроме этого будем предполагать, что эффектом отдачи, т. е. членом N_l по сравнению с $\frac{dN_l}{dx}$ можно пренебречь. Последнее допущение оправдано, если $x < 1$.

Таким образом уравнение (7) перепишется в виде

$$\frac{d}{dx} x^4 \frac{d\tilde{N}_l}{dx} - \left(\frac{\bar{K}}{a} + x^2 \gamma_l \right) \tilde{N}_l = -\frac{\bar{K} \gamma_l}{x} \quad (9)$$

Здесь $\bar{K} = K g(x)$.

Уравнение (9) решаем в два этапа. На первом пренебрегаем зависимостью $g(x)$ от частоты x , на втором этапе спектр излучения $N_l(x)$ при малых x получаем непосредственно из интеграла (9) с использованием низкочастотной асимптотики $G_l(x, x_0)$. При $\bar{K} = \text{const}$ решение однород-

ного уравнения выражается через цилиндрические функции мнимого аргумента

$$\bar{N}_l(x) = x^{-3/2} Z_{\sqrt{9/4 + \gamma_l}} \left(-\frac{i}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right). \quad (10)$$

Для построения функции Грина в качестве базисных функций используем

$$\bar{N}_l^{(1)}(x) = x^{-3/2} K_{\sqrt{9/4 + \gamma_l}} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right), \quad (11)$$

$$\bar{N}_l^{(2)}(x) = x^{-3/2} I_{\sqrt{9/4 + \gamma_l}} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right).$$

Таким образом для функции Грина имеем выражение

$$\begin{aligned} \bar{G}_l(x, x_0) = & \\ = & \begin{cases} - (xx_0)^{-3/2} K_{\sqrt{9/4 + \gamma_l}} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right) I_{\sqrt{9/4 + \gamma_l}} \left(\frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right), & 0 < x \leq x_0 \\ - (xx_0)^{-3/2} K_{\sqrt{9/4 + \gamma_l}} \left(\frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right) I_{\sqrt{9/4 + \gamma_l}} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right), & x_0 \leq x < \infty. \end{cases} \quad (12) \end{aligned}$$

При больших значениях порядка каждая из цилиндрических функций имеет асимптотику. В эту асимптотику входят асимптотики при больших

и малых значениях аргумента $\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}}$ [5],

$$\begin{aligned} & K_{\sqrt{9/4 + \gamma_l}} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right) \approx \\ & \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(9/4 + \gamma_l)^{1/4}} \frac{\exp(-\sqrt{9/4 + \gamma_l} \gamma)}{\left(1 + \frac{1}{9/4 + \gamma_l} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right)^2 \right)^{1/4}}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$I \sqrt{9/4 + \gamma_l} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(9/4 + \gamma_l)^{1/4}} \frac{\exp(\sqrt{9/4 + \gamma_l} \eta)}{\left(1 + \frac{1}{9/4 + \gamma_l} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a}} \right)^2 \right)^{1/4}},$$

$$\gamma_l = \sqrt{1 + Z^2} + \ln \frac{Z}{1 + \sqrt{1 + Z^2}}, \quad Z = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\bar{K}}{a(9/4 + \gamma_l)}}. \quad (13)$$

Используем эти асимптотики для построения аналитического решения уравнения (9)

$$\tilde{N}_l(x) = \gamma_l \int_0^{\infty} \tilde{G}_l(x, x_0) \frac{Kg(x_0)}{x_0} dx_0. \quad (14)$$

В Приложении А показано, что с помощью метода перевала можно проинтегрировать выражение (14)

$$\tilde{N}_l(x) = \frac{a\gamma_l}{x} \frac{Z^2}{Z^2 + 1} \frac{9/4 + \gamma_l}{\frac{9}{4} \left(1 - \frac{1}{(1 + Z^2)^2} \right) + \gamma_l}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что при $x \ll x_*^{(l)} = \sqrt{\frac{Kg(x_*)}{a(9/4 + \gamma_l)}}$, ($Z \gg 1$)

поле излучения близко к равновесному $\tilde{N}_l = \frac{\lambda_l^2}{3} \frac{1}{x}$. Сумма ряда $n(x, \tau)$ при любом τ также дает планковский спектр

$$n(x, \tau) = \frac{1}{x} \sum_{l=1}^{\infty} c_l R_l(\tau) = \frac{1}{x}. \quad (16)$$

Здесь c_l — коэффициенты Фурье функции $f(\tau) = 1$.

Очень важна самосогласованность решения (15), т. е. при подстановке $\tilde{N}_l(x)$ в правую часть (8) мы должны получить $\tilde{N}_l(x)$. Используя низкочастотную асимптотику функции Грина $G_l(x, x_0)$ уравнения (7) (см. [4]), получим, что при $x \ll x_*$

$$N_l(x) \cong \frac{9/4 + \gamma_l}{2 + \gamma_l} \frac{\lambda_l^2/3}{3}$$

т. е. с точностью диффузионного приближения самосогласованность выполняется. Аналогичный результат будет в другом пределе $x \gg x_*$.

Рассмотрим теперь конкретный случай астрофизического объекта—диск полутолщины τ_0 . В этом случае легко найти соответствующие собственные значения $\lambda_l \cong \frac{\pi(1+2k)}{2(\tau_0+2/3)}$, $l=1+2k$ ($k=0, 1, \dots$), коэффициенты Фурье $c_l = 2(-1)^{l-1}/(\lambda_l \tau_0)$ и значения собственной функции на границе $R_l(2\tau_0) \cong (-1)^{l-1} \frac{2}{3} \lambda_l$. Когда $\gamma_1 \gg 1$ или $\gamma_1 \lesssim 1$ и $x \lesssim x_1^1$, выражение

для $\bar{N}_l(x)$ из (15) записывается в виде

$$\bar{N}_l(x) \cong \frac{\gamma_l}{x^3} \frac{Kg(x)}{\frac{9}{4} + \gamma_l + \frac{Kg(x)}{a} \frac{1}{x^2}}. \quad (17)$$

Просуммируем теперь ряд (4), подставив туда вместо $N_l(x)$ выражение (17). Принимая во внимание формулу (5.1, 26.1) из [6] получим

$$n(x, 2\tau_0) = \frac{Kg(x)}{x^3} \frac{16(\tau_0 + 2/3)^2}{\pi^2 \tau_0} \frac{\pi}{4A} \operatorname{th} \frac{\pi A}{2}, \quad (18)$$

где

$$A^2 = \frac{4}{\pi^2} \left(\tau_0 + \frac{2}{3} \right)^2 \left(\frac{3Kg(x)}{x^2} + \frac{27a}{4} \right) = \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{Kg(x)}{ax^2} + \frac{9}{4} \right).$$

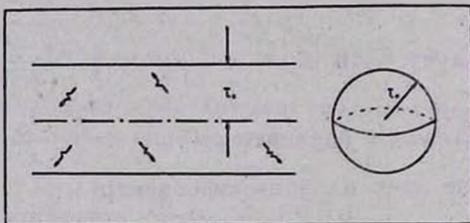


Рис. 1. Возможные геометрические модели облаков плазмы.

Формула (18), будучи умноженная на e^{-x} , определяет спектр выходящего излучения при всех значениях x , для $\gamma_1 \gg 1$ (когда комптон-эффектом можно пренебречь).

При

$$x \ll x_M = \frac{2}{\pi} \left(\tau_0 + \frac{2}{3} \right) \sqrt{3Kg(x_M)} (A \gg 1),$$

отсюда, в частности, следует хорошо известная асимптотика для полубесконечной атмосферы (см., например, [7]),

$$n(x, 2\tau_0) \simeq \frac{Kg(x)}{x^3} \frac{16(\tau_0 + 2/3)^2}{\pi^2 \tau_0} \frac{\pi}{4A} \simeq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{Kg(x)}}{x^2}. \quad (19)$$

На больших частотах $x > x_*$ ($A \ll 1$) из (18) следует другая асимптотика:

$$n(x, 2\tau_0) \simeq \frac{Kg(x)}{x^3} e^{-x} 2\tau_0. \quad (20)$$

На рис. 2 представлены спектры излучения для различных значений параметров γ . Вариант, соответствующий $\gamma_1 = 36.25$, $\tau_0 = 3$, $kT_e = 0.86$ кэВ, рассчитан по формуле (18). Хорошо видны обе асимптотики (19) и (20).

На частотах $x \geq x_*$ из (15) следует, что

$$\bar{N}_l(x) = \frac{9^{l/4} + \gamma_l}{\frac{9}{4} + \gamma_l + \frac{K}{a} \frac{g(x)}{x^2}} \frac{Kg(x)}{x^3} \quad (21)$$

для всех $l \geq 1$.

Просуммировав ряд (4), используя (21) и формулу (5.126.1) из [6], получим

$$n(x, 2\tau_0) = \frac{Kg(x)}{x^3} \left(2\tau_0 - \frac{3Kg(x)}{x^2} \frac{4}{\tau_0} \left(\frac{2(\tau_0 + 2/3)}{\pi} \right)^4 \frac{1}{A^2} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4A} \operatorname{th} \frac{\pi A}{2} \right) \right). \quad (22)$$

Таким образом, при небольших γ_1 ($\gamma_1 \lesssim 4$), т. е. при высоких электронных температурах T_e и больших оптических толщинах τ_0 , спектр почти плоский (см. (20)) для $x < 1$ вплоть до очень малых частот $x \sim x_*$. Выражение (22) можно обобщить и на случай $x \ll x_*$. В этом пределе из (22) следует длинноволновая асимптотика (18) и (19). При $a \rightarrow 0$ (монохроматический случай) (22) также переходит в (18).

Отметим еще раз основные различия в поведении спектра излучения для $x < 1$ при больших и малых γ_1 . При больших γ_1 комптон-эффект практически не сказывается на выходящем спектре. Изменением частоты фотона при рассеянии можно пренебречь, и влияние тормозного поглощения на спектр выходящего излучения сказывается на значительно больших частотах, чем в случае малых γ_1 . Переход к длинноволновой асимптотике

(19) в монохроматическом случае происходит при $x < x_M = \frac{2}{\pi} \left(\tau_0 + \frac{2}{3} \right) \sqrt{3Kg(x_M)}$, а в противоположном случае, когда комптон-эффект

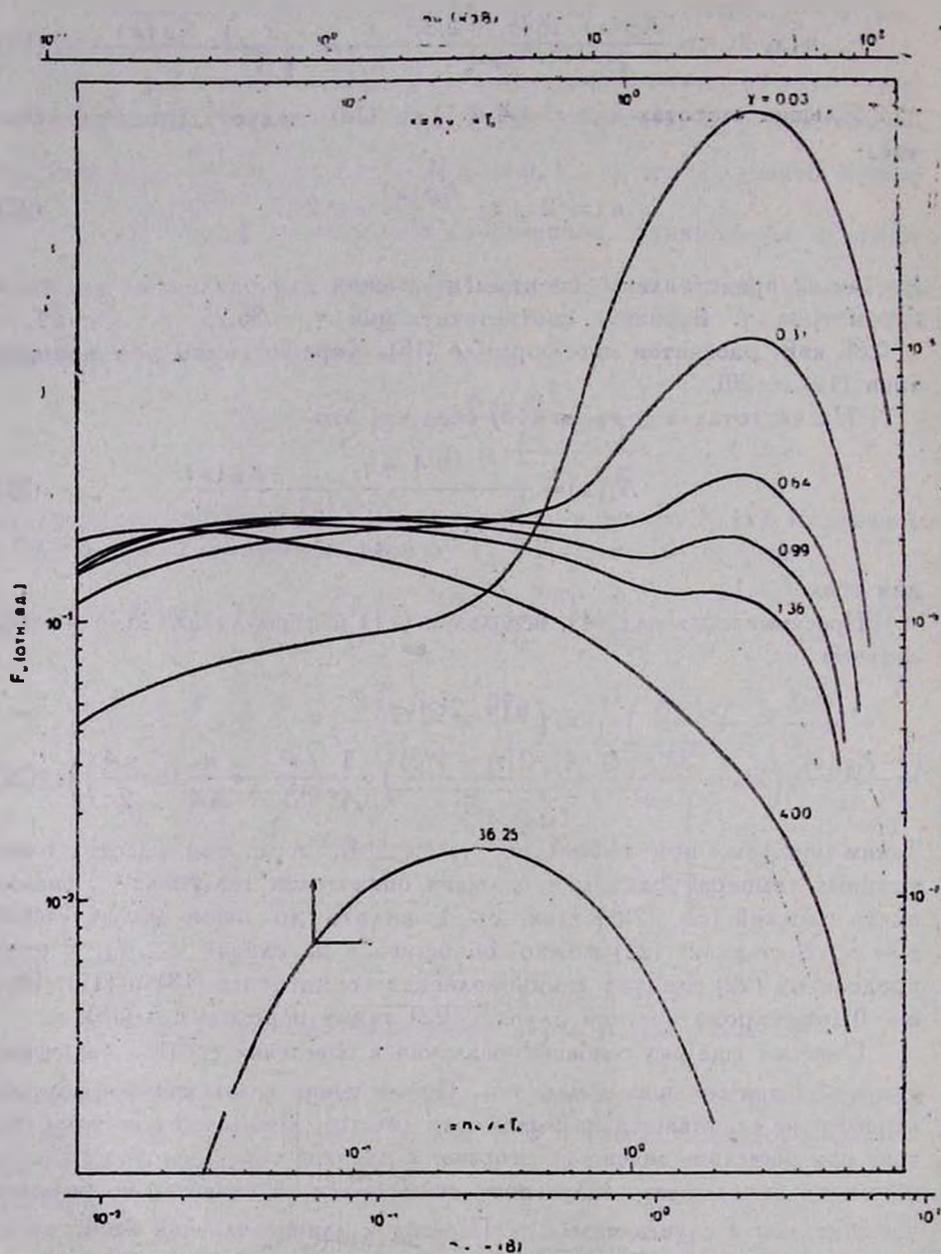


Рис. 2. Спектры излучения, формирующиеся в результате комптонизации собственного тормозного излучения в облаке высокотемпературной плазмы (диске подтоплива τ_0) с различными параметрами. Плотность электронов N_e полагалась $= 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Построенные спектры соответствуют двум температурам $kT_e = 0.86 \text{ кэВ}$ и 13.1 кэВ .

существенен, при $x < x_* = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{Kg(x_*)}{a}}$. Очевидно, что $x_* < x_M$ при $0 < \gamma < 4$. Уточним теперь решение (22).

Вид спектра излучения описывается с помощью интегрального представления (8), где в качестве подинтегрального выражения входит множитель

$$F_l(x) = 1 - \frac{3}{i_l^2} \tilde{N}_l (e^x - 1), \quad (23)$$

учитывающий поведение решения при малых x . Здесь вместо N_l мы подставили \tilde{N}_l , определенную формулой (15). Такая подстановка будет оправдана, если мы покажем, что уже при малых $x < 1$ $F_l(x)$ мало отличается от единицы и все отличия $F_l(x)$ определяются областью малых энергий.

Согласно (15)

$$F_l(x) = \left(\frac{9}{4} + \gamma_l \right) \frac{1 - \frac{9}{4} \left(\frac{9}{4} + \gamma_l \right) / Q_l^2}{Q_l - \frac{9}{4} \left(\frac{9}{4} + \gamma_l \right)^2 / Q_l^2}, \quad (24)$$

где

$$Q_l = \frac{9}{4} + \gamma_l + \frac{K}{a} \frac{g(x)}{x^2}.$$

На частотах $x \ll x_l^1$

$$F_l(x) = \frac{ax^2}{Kg(x)} \left(\frac{9}{4} + \gamma_l \right)$$

и в другом пределе $x \gg x_l^1$

$$F_l(x) \cong 1.$$

Отсюда видно, что для любого γ_l , N_l не влияет на $F_l(x)$ уже на ма-

лых частотах $x > x_0^0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{Kg(x_0^0)}{a}} > x_l^{(1)}$.

Левая ось ординат и нижняя ось абсцисс относятся только к кривой с $\gamma = 36.25$, $\tau_0 = 3$, $kT_e = 0.86$ кэВ. Правая ось ординат и верхняя ось абсцисс соответствуют кривым с $kT_e = 13.1$ кэВ и с $\gamma = 0.03$, $\tau_0 = 32$; $\gamma = 0.31$, $\tau_0 = 9.52$; $\gamma = 0.64$, $\tau_0 = 6.42$; $\gamma = 0.99$, $\tau_0 = 5$; $\gamma = 1.36$, $\tau_0 = 4.2$; $\gamma = 4$, $\tau_0 = 3$. Для того, чтобы перейти к реальным потокам в эрг $\text{см}^{-2} \text{с}^{-1} \text{кэВ}^{-1}$, надо значения по оси ординат умножить на коэффициент $C_N = 2\pi \cdot 3.7 \cdot 10^{23} (kT_e / 1.646 \text{ кэВ})^4 / kT_e$.

Пользуясь результатом работы [1], можно получить вид $F(x)$ в случае малых γ с учетом индуцированных эффектов

$$F(x) = \exp\left(-\frac{1}{x} \sqrt{\frac{Kg(x)}{a}}\right). \quad (25)$$

Следует обратить внимание на общее свойство множителей в (24) и (25). Обе эти функции гладким образом приближают θ -функцию

$$F_l(x) \cong \theta(x - x_l^{(l)}) = \begin{cases} 1 & x > x_l^{(l)} \\ 0 & x < x_l^{(l)} \end{cases} \quad (26)$$

Напомним асимптотику функции Грина $G_l(x, x_0)$ при малых x и x_0 [4]

$$G_l(x, x_0) = \frac{\gamma_l}{\sqrt{9 + 4\gamma_l}} \begin{cases} \frac{1}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{3/2 + \sqrt{9/4 + \gamma_l}} & \text{при } x \leq x_0 \\ \frac{1}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\sqrt{9/4 + \gamma_l} + 3/2} & \text{при } x \geq x_0. \end{cases} \quad (27)$$

Подставив (26) и (27) в (8), проинтегрируем последнее и просуммируем ряд (4)

$$J(x, 2\tau_0) = x^3 n(x, 2\tau_0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} K \left(\ln \frac{2.35}{x} + \frac{1}{a} \left(\frac{3}{3+a} \frac{\alpha+3}{2\alpha+3} \left(\frac{x_*}{x}\right)^\alpha \right) - \frac{\alpha+3}{2\alpha+3} \left(\frac{x_*}{x}\right)^\alpha \ln \frac{2.35}{x_*} \right). \quad (28)$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt{\frac{9}{4} + \gamma_l} - \frac{3}{2}. \quad (29)$$

При интегрировании (8) предполагалось, что

$$g(x) \cong \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{2.35}{x} \quad \text{при } x < 1. \quad (30)$$

Из (28) легко получить две асимптотики при $\alpha \ln \frac{1}{x_*} \ll 1$

$$J(x, 2\tau_0) \cong \frac{\alpha(\alpha+3)}{2\alpha+3} \frac{\sqrt{3}}{\pi} K \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x}{x_*} \ln \frac{2.35}{x_* x} + \frac{1}{\alpha+3} \left(\ln \frac{2.35}{x} - \frac{1}{\alpha+3} \right) \right] \quad (31)$$

и при $\alpha > 1$

$$J(x, 2\tau_0) \cong K \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{2.35}{x}. \quad (32)$$

Первая из асимптотик определяет рост спектра при $x > x_*$, а вторая, наоборот, убывание. Характер поведения второй асимптотики целиком определяется зависимостью Гаунт-фактора от частоты так же, как и для спектра (20).

Обе эти асимптотики легко прослеживаются для двух крайних случаев $\gamma = 0.03$ и $\gamma = 4$ (см. рис. 2). Рассмотрим теперь вид спектра на энергиях $h\nu \gtrsim kT_e$ ($x > 1$). При больших $\gamma_1 \gg 1$ спектр совпадает со спектром первичных источников

$$J_M(x, 2\tau_0) = x^3 n_M(x, 2\tau_0) = 2\tau_0 K g(x) e^{-x}. \quad (33)$$

При малых γ_1 спектр излучения стремится к виновскому.

В общем случае, как показано в приложении, решение (8) стационарного уравнения (7) можно выразить с помощью гипергеометрических функций. Из этого представления, в частности, следует асимптотика $J_l(x)$ при $x > 1$ для малых α_l ($\gamma_l \leq 1$)

$$J_l(x) = x^3 N_l(x) = A(x) x^3 e^{-x} \int_0^{\infty} t^{\alpha_l - 1} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\alpha_l + 3} dt, \quad (34)$$

где

$$\alpha_l = \sqrt{\frac{9}{4} + \gamma_l} - \frac{3}{2},$$

$$A(x) = K \left[\left(\ln 2.35 \cdot \gamma(\alpha_l, 1) - \frac{x^{\alpha_l}}{\alpha_l} \ln \frac{2.35}{x_*} + \frac{1}{\alpha_l^2} (1 - x_*^{\alpha_l}) \right) \frac{\sqrt{3}}{\pi} + \right. \\ \left. + \gamma(\alpha_l, x) - \gamma(\alpha_l, 1) \right] \alpha_l (\alpha_l + 3) / \Gamma(2\alpha_l + 4).$$

Здесь $\gamma(\alpha_l, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha_l - 1} dt$ — неполная гамма-функция. Отсюда можно получить предельную форму $J_l(x)$ при $\alpha_l \rightarrow 0$ и $x > 1$.

$$J_0(x) = x^3 N_0(x) = \frac{K\sqrt{3}}{2\pi} \ln^2 \frac{2.35}{x_*} \frac{x^3 e^{-x}}{2}. \quad (35)$$

Таким образом, при очень больших оптических толщинах $\tau_0 \gg 1$ ($\alpha_l \ll 1$)

спектр на больших энергиях ($x > 1$) стремится к виновскому. Согласно (4) и (35) имеем

$$J(x, 2\tau_0) \cong J_0(x) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{3}{\lambda_l^2} c_l R_l(2\tau_0) = \left(2\tau_0 + \frac{2}{3}\right) J_0(x). \quad (36)$$

При умеренных оптических толщинах, т. е. при $\gamma_1 \gtrsim \frac{1}{2}$ и $\alpha \gtrsim \frac{1}{6}$ основной вклад в сумму ряда (4) дает первый член (см. приложение Б)

$$J(x, 2\tau_0) = \frac{3c_1}{\lambda_1^2} R_1(2\tau_0) x^3 N_1(x) = \frac{16}{\pi^2} \tau_0 J_1(x). \quad (37)$$

Здесь $J_1(x)$ определяется выражением (34).

Следует еще раз обратить внимание на зависимость нормировки $A(x)$ от x_* . При $\alpha \rightarrow 0$ $A(x) \sim \ln^2 \frac{2.35}{x_*}$ и практически не зависит от x , но по мере увеличения α зависимость от x_* пропадает. Так при $\alpha = 1$

$$A(x) \cong K \left[0.82 + \frac{5}{4} (e^{-1} \Phi(1, 5, 1) - e^{-x} \Phi(1, 5, x)) \right]. \quad (38)$$

Здесь $\Phi(1, 5, x)$ — вырожденный гипергеометрический ряд.

На рис. 2 представлены спектры излучения при различных значениях оптической толщины τ_0 (или параметра γ) для двух температур $kT_e = 13.1$ кэВ и 0.86 кэВ. Для $kT_e = 13.1$ кэВ ($\gamma = 0.03 - 4$) высокочастотные хвосты спектров очень близки по форме к спектрам комптонизации, подробно описанным в [4]. Для $kT_e = 0.86$ кэВ спектр при $h\nu > kT_e$ совпадает со спектром первичных источников (см. (33)) и комптонизация не оказывает никакого влияния на формирование спектра излучения.

В заключение приведем оценки увеличения светимости за счет комптон-эффекта.

В предельном случае малых $\alpha_1 \ll 1$, согласно (36), будем иметь

$$\left(\frac{L}{L_M}\right)_{\alpha} = \frac{\int_0^{\infty} J(x, 2\tau_0) dx}{\int_0^{\infty} J_M(x, 2\tau_0) dx} \cong \frac{3}{4} \ln^2 \frac{2.35}{x_*}. \quad (39)$$

При $\gamma_1 \leq 1$, когда выходящее излучение определяется в основном первым членом ряда, аналогичную оценку можно получить интегрируя (37), используя результаты [8].

Легко показать, что при $z_1 \ll 1$

$$\frac{L}{L_M} \simeq \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{3}{4} \ln^2 \frac{2.35}{x_*} \right) = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{L}{L_M} \right). \quad (40)$$

Автор выражает признательность Р. А. Сюняеву за постоянное многолетнее внимание к работе, Ю. Э. Любарскому и А. Ф. Илларионову за плодотворные дискуссии и ряд ценных замечаний.

Приложение А

Решение стационарного уравнения Компанейца. Рассмотрим сначала низкочастотную асимптотику. При $x < 1$ уравнение (7) сводится к уравнению (9). Решение (14) уравнения (9) представляется в виде суммы двух интегралов. Эти интегралы можно найти методом перевала, заменяя переменную интегрирования x_0 на z_0 ,

$$H_{1,2}^{(0)}(x) = \frac{\lambda_1^2}{3 \sqrt{9 + 4\gamma_1}} \frac{z^2}{1 + z^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4} + \gamma_1 \pm \frac{3}{2} \frac{1}{(1 + z^2)^{3/2}}}}$$

Складывая эти интегралы, получим выражение (15).

Согласно (8) и [4] решение стационарного уравнения (7) имеет интегральное представление, ядром которого является функция Грина $G_I(x, x_0)$. Выражение для $G_I(x, x_0)$ приведено в [4]. Заменяя выражение для $F_I(x) = 1 - \frac{3}{\lambda_1^2} \tilde{N}_I(e^x - 1)$ формулой (26) и $g(x)$ на при-

ближенное выражение $g(x) \sim \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{2.35}{x}$ при $x < 1$ и $g(x) = 1$ при $x > 1$, интегралы, входящие в (8), можно оценить аналитически. Используя формулу (1.6.10.1) из справочника [6], получаем аналитическое выражение для первого из интегралов, входящих в (8). Так для

$\alpha \ll \frac{1}{2}$ и $x_* \ll 1$ приходим к формуле (34). Аналогичные выражения выписываются и для $\alpha \geq 1$ (см. (38)). Аналитическое выражение для второго из интегралов в (8) (в пределах от x до ∞) получаем,

используя асимптотику фактор-Гаунта $g(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{3}} x^{-1/2} (x \gg 1)$ и формулу (1.13.2) из [9]. Асимптотика для этого интеграла $I_2(x) \sim x^{-5.5} e^{-x}$ показывает, что $J_1(x) = x^3 N_1(x)$ при $x < 1$ полностью определяется первым слагаемым.

Комптонизация низкочастотного излучения в неизотермическом случае и задача определения средней эффективной температуры электронов в диске. Рассмотрим сначала изотермический случай. Для низкочастотного источника излучения, когда правая часть уравнения (1) записывается в виде $\frac{f(x, \tau)}{x^3} \sim \frac{\delta(x - x_0)}{x^3} f_1(\tau)$ ($x_0 \ll 1$), каждый член ряда (4) представляется с помощью функции Уиттекера (см. [4]). При $x_0 < x < 1$ асимптотика $J_l(x)$ степенная $J_l(x) \sim x_0^{2l-1} x^{-2l}$, а при $x \gg 1$ виновская $J_l(x) \sim x_0^{2l-1} x^{2l} e^{-x}$. Используя эти асимптотики при оценке сходимости ряда (4), можно показать, что для $\gamma_l > 1/2$ вкладом высших гармоник ($l > 1$) в сумму ряда можно пренебречь, $r_l(x, 2\tau_0)/J_l(x, 2\tau_0) \sim x_0^{2l-2} \ll 1$ для $x > x_0$. Решение определяется только первым членом $J(x, \tau) \sim J_1(x) R_1(\tau)$.

Оказывается, что аналогичная ситуация имеет место и в неизотермическом случае с той лишь разницей, что формирующийся спектр отвечает некоторой эффективной температуре T_0 , усредненной по первой собственной функции,

$$T_0 = \int_0^{2\tau_0} R_1(\tau) T(\tau) d\tau. \quad (1Б)$$

Убедимся в этом, записав уравнение (1) для случая переменной температуры

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} \frac{T(\tau)}{T_0} + n \right) + \frac{1}{3a} \frac{\partial^2 n}{\partial \tau^2} = - \frac{f(x, \tau)}{ax^3}. \quad (2Б)$$

Здесь $x = h\nu/kT_0$, $f(x, \tau)$ — источник низкочастотных фотонов $a = kT_0/m_e c^2$.

Преобразуем уравнение (2Б), представив его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) + \frac{1}{3a} \frac{\partial^2 n}{\partial \tau^2} = \\ & = - \frac{f(x, \tau)}{ax^3} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) \end{aligned} \quad (3Б)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$n(x, \tau) = \sum_{l=1}^{\infty} X_l(x) R_l(\tau). \quad (4Б)$$

Частотные функции $X_l(x)$ определяются из системы бесконечного числа уравнений

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} x^4 \left(\frac{dX_l}{dx} + X_l \right) - \gamma_l X_l = -\frac{3}{x^3} \frac{\gamma_l C_l(x)}{\lambda_l^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{lk} \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} x^4 \frac{dX_k}{dx}, \quad l = 1, 3, 5 \dots \quad (5B)$$

Здесь $R_l(\tau)$ — ортонормированные собственные функции $\left(\int_0^{2\tau_0} R_l^2(\tau) d\tau = 1 \right)$, $C_l(x)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x, \tau)$.

$$a_{ij} = \int_0^{2\tau_0} \left(1 - \frac{T(\tau)}{T_0} \right) R_i(\tau) R_j(\tau) d\tau. \quad (6B)$$

При постоянной температуре $T(\tau) = T_0$, $a_{ij} = 0$ (для $i \neq j$) и в правых частях (5B) отсутствуют ряды.

Можно показать, что в случае ненасыщенной комптонизации ($\gamma_1 > 1/2$) ряды в правой части (5B) значимы только вблизи x_0 , если приравнять коэффициент a_{11} к нулю. Выбирая T_0 таким образом, что $a_{11} = 0$ (см. (1B)), мы уничтожаем высокочастотный хвост первичных источников в первом уравнении системы (5B).

Рассмотрим теперь в качестве примера задачу определения средней эффективной температуры в диске. Согласно [8] распределение температуры электронов в диске описывается законом

$$kT_e(\tau) = \frac{m_e c^3}{6 \left(\tau_0 + \frac{2}{3} \right)^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 + \frac{2}{3}} \right)^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{4} \right) (1 - \alpha) kT_0. \quad (7B)$$

Здесь α — индекс степенной части спектра. Используя выражение (1B) для T_0 и выражение для собственной функции $R_1(\tau) = \frac{1}{\tau_0} \cos \frac{\pi}{2} \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0 + 2/3}$, получим формулу для определения T_0

$$kT_0 = \frac{0.81 m_e c^3}{(3 + \alpha) \alpha (\tau_0 + 2/3)^2}. \quad (8B)$$

Подставляя сюда конкретные значения $\tau_0 = 2.12$ и $\alpha = 0.57$ для случая

источника Лебедь X—1 [4], получим $kT_0 = 26.3$ кэВ, что в пределах точности измерений согласуется со значением $kT_0 = 27$ кэВ, полученным непосредственно по наблюдаемому спектру Лебеда X—1 [4].

Институт космических
исследований АН СССР

COMPTONIZATION OF FREE-FREE RADIATION IN THE ISOTHERMAL MEDIUM OF CONSTANT DENSITY

L. G. TITARCHUK

The problem of the formation of hard radiation spectrum via comptonization of free-free radiation is considered. The analytical solution of Kompaneets equation for the isothermal case is presented. The asymptotics of the solution and the solution dependence from the medium parameters (the electron temperature, density, the geometrical size of medium) are studied. The deviation from isothermal temperature distribution is discussed in the appendix. The estimation of the spectral temperature for hard radiation spectrum of Cyg X—1 is given there too.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Компанеесу, Ж. эксперим. и теор. физ., 31, 876, 1956.
2. А. Ф. Илларионов, Р. А. Сюняев, Астрон. ж., 51, 698, 1974.
3. Л. А. Повднюков, Н. М. Соболев, Р. А. Сюняев, Итоги науки и техн. (ВИНИТИ), Астрон., 21.
4. R. A. Sunyaev, L. G. Titarchuk, Astron. and Astrophys., 86, 121, 1980.
5. М. Абрамовиц, И. Стиган, Справочник по специальным функциям, Наука, М., 1979.
6. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, Интегралы и ряды. Элементарные функции, Наука, М., 1981.
7. Я. Б. Зельдович, Н. И. Шакура, Астрон. ж., 46, 225, 1969.
8. R. A. Sunyaev, L. G. Titarchuk, Astron. and Astrophys., 143, 374, 1985.
9. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, Интегралы и ряды. Доп. главы, Наука, М., 1986.