701.

51
S-54
513

ԽՈՆԱՐՀԱԳՈՅՆ

ՈՒՍՈՂՈՒԹԻՒՆ

ԶՈՐ ՅՕՐԻՆԵԱԼ Է

Հ. ՂՈՒԿԱՍ ՏԷՐՏԷՐԵԱՆՑ

ՅԱՇԱԿԵՐՏԱՑ ՄԵԾԻ ՀՕՐՆ

ՄԽԻԹԱՐԱՅ

Բ ՏՈՄԱՐ

ՊԱՐԶ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

Ի ՎԻԷՆՆԱ

Ի ՎԱՆՍ Պ. Ս. ԱՍՏՈՒԱԾԱԾՆԻ

ՌՄՂԵ · 1846

ԹԻՖԼԻՍ ՀԲԸՆ. ОСНОВ. 1894 ГОД. БИБЛІОТЕКА Арм. Благотв. О-ва на Кавк.
8 ІЮНЬ 1898

ՅԱՌԱՋԱԲԱՆ

Զկէտ նպատակին, որ վասն եկաք ի յօրինել զառաջիկայ մատեանս ուսողութեան, վաղու իսկ ծանուցեալ է մեր ի յառաջաբանի առաջնոյ տոմարին: Այս երկրորդ տոմար որ ունի յինքեան զպարզ երկրաչափութիւն, թէպէտ եւ չէր աշխատեցուցիչ իբրեւ զառաջինն ըստ նրբութեան եւ ըստ բարձրութեան հաշուոց, այլ սակայն ըստ այնց՝ զորոց ունէաք ճառել, ոչինչ խոնարհագոյն քան զայն: Քանզի յայսմ փոյթ մեր այն եղեւ, զի մի այն ինչ՝ որ կարեւորն էր առ կատարեալ ուսումն սորին գիտութեան, թողցի ի բաց. եւ դարձեալ զի մի այնք եւս, որ արտաքոյ իցեն, եւ չկարեւորք, եւ ծանրաբեռն առ ուսանելիս, առցին ի ներքս, քանզի բազմաժամանակեայ իսկ փորձն եցոյց մեզ, եթէ յորժամ չկարեւորքն, ոչ վասն իրիք օգտի, այլ վասն ազնուութեան եւեթ հաշուոցն, եւ կամ առ զբօսեցուցանելոյ յաւելցին ի վերայ, ուսանելիքն՝ ոչ միայն ի կարեւորացն զրկեսցին, այլ յամենայնէ իսկ բնաւին. քանզի ծանրացեալ միտք նոցա ի ծանրաբեռն բեռանց, զոր ունիցին տանել, կամ որոց ունիցին պատասխանի առնել առաջի ուսուցչաց ի ժամանակի հանդիսի քննութեան, չկարիցեն յանձանց զկարեւորսն ընտրել, եւ խառն ի խուռն տեսլեամբ գնասցեն կալ առաջի վարդապետաց: Վասն որոյ յորժամ չտեսանիցեն ընթերցանելիքն, ի մատենիս

խնդիրս գործականս, զերկինս կամ զընդարձակութիւնս աշխարհաց չափել, յօրինել յատակս, զնըկարագիրս երկրաչափական գործեաց, եւ զայլ նոյնպիսիս, մի ինչ զարմանայցեն, քանզի զսոցանէ անկ է ճառել ի գործական երկրաչափութիւնս. եւ կէտ նպատակի մերոյ ոչ է տալ թերակատար տեղեկութիւնս ինչ զամենայն իրաց, այլ զայն՝ զոր ուսուցանելն կամիցիմք, կատարեալ ուսուցանել, որ կարեւոր իսկ է յընթացս սոյնպիսի ուսմանց, որք որպէս զշղթայս իմն զմիմեանց յեռեալ կան. մանաւանդ զի եթէ զգործականն եւս մուծեալ ինչ էր մեր ի սա, ոչ սակաւ ստուարանայր մատեանս, նա՝ զի եւ ոչ պէտք ինչ են ի պարզ երկրաչափութեան գործական խնդրոց առ ընդելանելոյ աշակերտելոցն, որպէս ի նշանագրովք համարողութեան: Բայց սակայն որովհետեւ սովորութիւն իմն լեալ էր յազգի մերում զգործականն եւ զպարզ ի միասին խառն աւանդել առ զբօսուցանելոյ զուսանելիս, նմին իրի զի մի ամենեւին ի նոցունց զրկիցեմք զնոսա, յանձն առաք դնել ուրոյն ինչ ինչ ի գործականէն, այլ ի պարզագունիցն եւ ի կարի դիւրագունաց, եւ այն ի հարթաչափութեան: Ակն ունիմք եթէ գտանիցեն զսա ուսանելիքն կատարեալ եւ անթերի ըստ սահմանի պարզ խոնարհագոյն ուսողութեան, եւ ճիշդ ցուցմամբք, որպէս միանգամ յԵւրոպիա ի տիեզերական դպրոցս ճառիցի, ուրոյն եւ զատ ի գործականէ:

Խնդիրքն կան ի ներքոյ ընդ սկզբամբք, յորոց ծագեն, եւ ոչ ուրոյն յառանձինն տեղւոջ, որպէս զի դիւրաւ տեսանիցեն ուսանելիք, եթէ յորոց սկզբանց բղխիցեն:

Վասն սորին իսկ պատճառաց եւս ուր ուրեք ի կիր արկաք գնշանագրովք համարողութիւնն ի խնդիրս եւ ի ցուցմունս երկրաչափականս, եդաք ընդ յառաջադրութեամբք, զորոց ճառել առաջի կայր: Կարեն ընթերցանելիքն, որոց չիցէ ուսեալ գնշանագրովք համարողութիւն զանց առնել զնոքօք. Թէպէտ եւ զայն եւս պարտ եւ պատշաճ է ասել համարձակ, թէ սոքա երկոքին, այս է նշանագրովք համարողութիւն եւ երկրաչափութիւն նեցուկ իմն եւ հաստատութիւն են միմեանց, եւ թէ առանց միոյն օգնականութեան, չկարէ միւսն խաղալ յառաջադէմ, որպէս տեսանեմք իսկ յառաջին ժամանակս պատմութեան ուսողութեան, յորս թէպէտ եւ զատեալ որոշեալ էին ի միմեանց երկոքին գիտութիւնքս, բայց սակայն փոքր ինչ էր յառաջադիմութիւնն որ տեսանէր. մինչեւ երեւեալ երկոցունց նշանաւոր ուսողացն Վիետայ եւ Դեկարտեայ, յերկրաչափութիւն անդր մուծին գնշանագրովք համարողութիւն, եւ մարթ է ասել, եթէ անդէն իսկ ի գլուխ կատարմանն հասանէին երկոքեան, յորժամ միմեանց թիկունք օգնականութեան լինելոյ հիմն դնէր: Եւ այս այնչափ յառաջադէմ զարգացաւ յԵւրոպիա, մինչեւ բազմաց յուսողաց անտի դնել զատ եւ որոյն գլուխ մի առանձինն ի կիր արկանելոյ գնշանագրովք համարողութիւն յերկրաչափութեան:

Եթէ օգտակար ինչ լինիցի մատեանս ի յառաջադէմ խաղալ գիտութեանց յազգի մերում, այն վարձք եւ պսակ լինիցի մերոյ աշխատութեանս, զոր ի փառս Աստուծոյ եւ յօգուտ մերոյ ժողովրդեան առաք յանձն:

**

ԳԻՐ ԳԼԽՈՑ

Տեղեկութիւն 1

ՄԱՍՆ ԱՌԱՋԻՆ. ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ԳԼՈՒԽ Ա. Համօրէն սկզբունք 9
ԳԼՈՒԽ Բ. Յաղագս պատշաճականութեան երեքանկեանց, եւ ճշմարտութեանցն՝ որ ի նմին հաստատեալ են 36
ԳԼՈՒԽ Գ. Յաղագս հաւասար հեռաւոր գծից, համեմատական գծից, եւ վասն նմանութեան երեքանկեանց 55
ՀԱՏԱԾ Ա. Յաղագս գծից հաւասար հեռաւորաց . 55
ՀԱՏԱԾ Բ. Յաղագս համեմատական գծից . . . 64
ՀԱՏԱԾ Գ. Վասն նմանութեան երեքանկեանց . . 85
ԳԼՈՒԽ Դ. Յաղագս հաւասար հեռաւոր ձեւոց, եւ վասն բազմանկեանց 103
ԳԼՈՒԽ Ե. Յաղագս հանգամանաց բոլորակաց . . 114
ԳԼՈՒԽ Զ. Յաղագս ձգելոյ բազմանկիւն շուրջ զբոլորակաւ ներքոյ կամ արտաքոյ . . 152
ԳԼՈՒԽ Է. Յաղագս գտանելոյ զտարածութիւն երեսաց հարթ ձեւոց, եւ վասն համեմատութեանց եւ փոփոխմանց նոցա . . . 175

ԵՐԿՐՈՐԴ ՄԱՍՆ. ՀԱՍՏԱՏԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ԳԼՈՒԽ Ա. Յաղագս դրից ուղիղ գծից առ հարթ երեսս, եւ երեսացն առ միմեանս . . . 205
ԳԼՈՒԽ Բ. Յաղագս անկեանց մարմնոյ . . . 231
ԳԼՈՒԽ Գ. Վասն անկիւնաւոր մարմնոց . . . 244
ՀԱՏԱԾ Ա. Հասարակաց հանգամանք անկիւնաւոր մարմնոց 248
ՀԱՏԱԾ Բ. Առանձինն հանգամանք անկիւնաւոր մարմնոց, եւ նշանակք վասն նոցին հաւասարութեանց 259
ՀԱՏԱԾ Գ. Յաղագս նմանութեան անկիւնաւոր մարմնոց 275
ՀԱՏԱԾ Դ. Յաղագս չափելոյ եւ համեմատելոյ անկիւնաւոր մարմնոց 284
ՀԱՏԱԾ Ե. Յաղագս կարգաւոր մարմնոց . . . 306
ԳԼՈՒԽ Դ. Յաղագս բոլորշի մարմնոց . . . 314
ՀԱՏԱԾ Ա. Գլան 314
ՀԱՏԱԾ Բ. Կոն 321
ՀԱՏԱԾ Գ. Գունդ 330

***

4. Եզերք մարմնոյ ասին Արտաքին կամ Վերին երեւք։ Եթէ զմի արտաքին երեսս մարմնոյ, կամ զմի մասն միայն արտաքին երեսացն առնուցուս, եւ զայն ի մարմնոյ անտի զատեալ եւ որոշեալ զմտաւ ածիցես, ասի Երեւք։

5. Եզերք կամ սահման մարմնոյ չէ մասն մարմնոյ, այլ որպէս հուսկ վերջին եւ արտաքին ինչ համարի ի նմա. վասն այսորիկ երեւք մարմնոյ չեն մասն մարմնոյն, վասն որոյ չէ հնար մարմնոյ յերեւաց՝ որչափ եւ բազում իցեն թուով յարդարեալ կազմել, այլ հարկ է զի յայլոց մարմնոց յօրինիցի։

6. Մարթեմք զամենայն մարմին յայնպիսի ինչ մասունս բաժանեալ համարել, որպէս զի արտաքին երեւքն մասամբ իւիք զկատարած կամ զեզերս միոյ մասին, եւ մասամբ իւիք զսահմանս այլոց մասանցն յօրինիցէ կամ թէ արտաքին երեւքն բաժանիցին։ Սյա ուրեմն մարթ է զարտաքին երեսս, որով զերեսս իսկ ի գլխովին յայլոց մասանց յօդեալ հաշուել. զորոյ զհետ գայ, եթէ եւ երեւք քանիօնութիւն ինչ իցեն եւ վասն այնորիկ ընդ մաթեմատիկեան ճարտարութեամբ անկանիցին։

7. Յորժամ երեւք մարմնոյ յամենայն կողմանց շուրջ պատեալ փակիցին, անուանեալ կոչի Ձեւ, եւ քանիօնութիւնն՝ որ ի մէջ ձեւոյն որպէս եւ քանիօնութիւնն՝ որ յերեսս գտանիցի, կոչի Տարածութիւն երեսաց։

8. Զեզերս կամ զսահմանս ձեւոյն կոչեմք Շրջանակ։ Եթէ զշրջանակն կամ զմասն ինչ նորա զատեալ որոշեալ ի ձեւոյն համարիցիմք, անուանեալ կոչի Գիծ։

9. Զմարթի գիծն մասն ինչ լինել երեսաց, եւ ոչ երեւք ի գծից կազմել կարեն, թէպէտ եւ բազում իցեն թուով գիծքն, այլ երեւքն յայլոց [illegible]եսաց կազմեալ եւ յօրինեալ կան։

10. Մարթեմք զձեւն յայնպիսի ինչ մասունս հատեալ եւ որոշեալ համարել, որպէս զի շրջանակ նորին մասամբ իւիք զեզերս միոյ մասին, եւ մասամբ իւիք զսահմանս միւսոյ մասին յօրինիցէ կամ շրջանակն բաժանիցի։ Ապա ուրեմն մարթ է զշրջանակն ուստի եւ զգիծն յայլոց գծից յարդարեալ համարել. զորոյ զհետ գայ, եթէ եւ գիծքն քանիօնութիւնք իցեն եւ ընդ օրինօք ուսողութեանն անկանիցին։

11. Քանիօնութիւն գծին, անուանեալ կոչի Երկայնութիւն, իսկ ծագք կամ եզերքն ասին Կէտ։

12. Կէտն չէ մասն գծի. որով չէ հնար գծի ի կիտից, թէպէտ եւ բազում իցեն թուով՝ կազմել, այլ գիծն յայլոց գծից կազմեալ եւ կայ։

13. Զգիծն յորչափ բազում մասունս բաժանեալ համարիցիմք, չէ մարթ այնմ յայն չափ հասանել, որպէս զի սովաւ եւ կէտք ծագացն բաժանիցին։ Ապա ուրեմն չկարեմք զկէտն յայլոց համագի մասանց յօդեալ համարել. զորոյ զհետ գայ, եթէ կէտն չիցէ քանիօնութիւն, որով եւ չանկանի ընդ մաթեմատիկեան քննութեամբք։

14. Թիւն՝ որով յայտ առնիցի, եթէ քանի՛ ինչ այլ եւ այլ ուղղութեամբք մարթ իցէ չափել զքանիօնութիւն ինչ անջրպետութեամբ տարածեալ կամ թէ թիւն ազգիազգի սահմանաց, որ ի տարածեալ մարմնոյ վերայ գտանիցին, ասի Չափումն։ Արդ որովհետեւ (ըստ Հ. 4. 8. 11.) եզերք երկրաչափական մարմնոյ՝ են երկրաչափական երեսքն, եւ եզերք երկրաչափական երեսաց՝ գիծքն են, եւ եզերք գծից՝ կէտք. նմին իրի երեք չափմունք են երկրաչափական մարմնոց, բարձրութիւն կամ խորութիւն, լայնութիւն եւ երկայնութիւն. իսկ երկրաչափական երեսաց երկու, լայնութիւն եւ երկայնութիւն. իսկ գծի մի եւեթ այս ինքն է երկայնութիւն. կէտն ունի եւ ոչ զմի ի նոցանէ։

15. Արդ այն մասն պարզ ուսողութեան, որ զքանիոնութեամբք անջրպետութեամբ տարածելովք գայցէ կամ թէ՝ զանքակ իրաց ճառիցէ (Նշա. Համարող. Հ. 2.), անուանեալ կոչի Երկրաչափութիւն։ Ապա ուրեմն երկրաչափութիւնն պատաղի զգծովք, զերեսօք, զմարմնովք, վասն զհանգամանս նոցին քննելոյ, եւ իմանալոյ զկցորդութիւնս զոր ընդ միմեանս ունիցին, որչափ ինչ մաթեմատիկեան ճարտարութիւնն հասանել կարիցէ։

16. Երկու ազգք են երկրաչափութեան Պարզ կամ Սուրբ եւ Խառն կամ Արդեանց կամ Մերձեցուցեալ։ Ի պարզ երկրաչափութեան գտանին հանգամանք մարմնոյ, որ ծագիցին ի կցորդութենէ, որ կայ ի մէջ քանիոնութեանց անջրպետութեամբ տարածելոց. ի նմա գտանին կանոնք եւ խնդիրք՝ որք առաւել կարեւորքն են։ Իսկ սմին հակառակ խառն երկրաչափութիւն ուսուցանէ, եթէ որպէս զկանոնս պարզ երկրաչափութեան պարտ իցէ ի կիր արկանել ի չափել զերեսս երկրի, եւ յայլ ինչ նոյնպիսի իրս։

17. Թէպէտեւ ըստ ցարդ ասացելոցս մարթ էր զպարզ երկրաչափութիւն յերիս մասունս հատանել, յորոց յառաջնումն գտանիցին հանգամանք գծից եւ նոցին առ միմեանս փոխանակաւ կցորդութիւն, եւ յերկրորդումն կայցեն հանգամանք երեսաց. եւ յերրորդումն առանձինն ինչ իրք մարմնոյ, բայց սակայն կարի իմն դժուարին է զայն զայս բաժանումն ճշդիւ եւ հաւաստեաւ պահել, առանց բազում անգամ զնոյն բանս կրկնելոյ, քանզի յորժամ գիծք որպէս սահմանք ինչ երեսաց, նոյնպէս եւ երեսք որպէս սահմանք ինչ մարմնոյ ի քնին արկանիցին, առանց երկմտութեան զնոյն իրաց երկրորդ անգամ հարկ լինիցի ճառել։ Վասն այսորիկ պարտ եւ պատշաճ է այլազգ ինչ բաժանումն խնդրել, որով եւ կարգք միոյ միոյ ի մասանց երկրաչափութեան հաստատուն կայցեն։

18. Արդ՝ մարթ է զերկրաչափութիւն յերիս մասունս բաժանել.

Ա. Յուսումն գծից եւ երեսաց, որ ի վերայ միոյ տափարակի գտանիցին.

Բ. Յուսումն գծից եւ երեսաց, որք ոչ ի միում տափարակի կայցեն. եւ

Գ. Յուսումն մարմնոց եւ արտաքին երեսաց նոցա: Առաջինն յերից մասանցս անուանեալ կոչի Հարթաչափութիւն, իսկ երկոքին յետինքն միանգամայն յօրինեալ կազմեն զՀաստատաչափութիւն:

Հայեցեալ ընդ սահմանս քննութեանց, որպէս եւ պահանջէ իսկ բնութիւն մարմնոց անջրպետութեամբ տարածելոց, բաժանի երկրաչափութիւնն ի Խոնարհագոյն եւ ի Բարձրագոյն: Խոնարհագոյն երկրաչափութիւնն ճառէ զպարզ ինչ գծից այս ինքն զուղիղ գծից, զկոր ինչ գծից այս ինքն զգծից բոլորակի, դարձեալ զպարզ երեսաց, որ են հարթ երեսքն, եւ զմարմնոց՝ որոց հարթ երեսք իցեն, եւ զբոլորշի ինչ մարմնոց: Իսկ սմին հակառակ բարձրագոյն երկրաչափութիւն զկոր գծից եւ զամենայն ազգաց երեսաց եւ մարմնոց:

Թէպէտեւ ճառս, զոր առաջի կայ մեզ զերկրաչափութենէ յօրինել, իցէ Պարզ Խոնարհագոյն երկրաչափութիւն, այլ սակայն զի առաւել եւս անձկալի եւ զբօսեցուցիչ մեր մատեանս լինիցի, յանձն առաք եւ ինչ ինչ յԱրդեանց երկրաչափութենէ առնուլ: Եթէ յաջողեսցի մեզ, զԱրդեանց երկրաչափութենէ առանձինն ինչ մատեան տացուք ուսողաց մերոյ ազգիս:

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍՆ

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ԳԼՈՒԽ Ա

ՀԱՄՕՐԷՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔ

19. Եթէ կէտ մի յանջրպետութեան ուրեք շարժիցի, եւ հետս իմն ի տեղիսն՝ ընդ որ էանց, զհետ կնի թողուցու, ի շարժելոյ անտի ծնանի Գիծ: Սկիզբն յոր կէտն եդաւ, է կէտ սկզբան. իսկ վայրն՝ յորում դադարեաց ի շարժելոյ, է կէտ կատարածի. երկոքեանն եւս ասին Ծագ: Ինքնին իսկ յայտ է, թէ ամենայն կէտ շարժուն՝ ազգիազգի գիծս անհամարս թուով նկարել, կամ լաւ եւս ասել դրոշմել կարիցէ, որք միանգամայն զնոյն կէտ սկզբան ունիցին, այսինքն թէ ի ձեռն միոյ կիտի յանջրպետութեան շարժելոյ դրոշմին այլեւայլ գիծք անհամարք թուով:

20. Եթէ գիծ ինչ այնպիսի իմն հանգամանս ունիցի, որպէս զի յորժամ երկու կէտք նորա հաստատուն առանց փոփոխելոյ մնայցեն, չիցէ մարթ դրից նորա փոփոխել, անուանեալ կոչի գիծն այն Ուղիղ: Եւ եթէ չունիցի զայն հանգամանս, կոր: Որպէս ԱԲ գիծն (Ձեւ 1.) է ուղիղ. իսկ ԱԲ (Ձեւ 2.). է կոր: Ապա ուրեմն առ ի վերայ հաստանելոյ ուղղութեան եւ կորութեան գծին, պարտ եւ պատշաճ է զերկոսին կէտս նորա հաստատուն համարել, եւ տեսանել, եթէ մարթ ինչ իցէ արդեւք զդիրս նորա փոփոխել: Եթէ գիծ մի ի բազում ուղիղ գծից կազմիցի, անուանի Ուղիղ բեկեալ, որպէս ԱԲԳԴԵ (Ձեւ 3.): Իսկ եթէ ի բազում կոր գծից յօրինեալ

իցէ, որպէս ԱԲԳԴ (Ձեւ 4.), կոր բեկեալ։ Եւ եթէ ի կոր եւ յուղիղ գծից յօդեալ իցէ, խառն, որպէս ԱԲԳԴ (Ձեւ 5.)։

Ուղիղ գիծն պարզ ինչ տեսիլ է. զոր մեկնութեամբք յայտնապէս առաջի առնել կարի դժուարին է։ Վասն այսորիկ ասասցուք համառօտս թէ, Զուղիղ գիծն տեսանելով մարթ է իմանալ որպէս ի (Ձեւն 1.)։

Յուսողացն ոմանք զուղիղ գիծն զայս օրինակ որոշեցին. Ուղիղ գիծ այն է, որոյ ամենայն մասունքն զնոյն ուղղութիւն ունիցին։ Այլ այս ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ զուղիղ գիծն ուղիղ գծիւ որոշել, քանզի ամենայն մասունք գծին գիծք են, որով ասելն եթէ Ուղիղ գիծ այն է, որոյ մասունքն զնոյն ուղղութիւն ունիցին, յայտ առնէ եթէ Ուղիղ գիծ այն է, որ է ուղիղ։

Յասացելոցս զհետ գայ, եթէ

Ա. Իւրաքանչիւր մասն ուղիղ գծին է ուղիղ։ Քանզի եթէ յԱԲ ուղիղ գծէ անտի (Ձեւ 1.) առնուցումք զմասն ինչ ԳԴ, եւ համարիցիմք, եթէ առանց զԳ եւ զԴ կէտսն փոփոխելոյ, դիրք ԳԴ գծին փոփոխել կարիցէ, յայնժամ հարկ է եւ դրից ԱԲ բովանդակ գծին փոփոխել, թէպէտեւ Գ եւ Դ չփոփոխիցին, որ ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ ասել, թէ ԱԲ չէ ուղիղ։ Ապա ուրեմն եւ ԳԴ մասին հարկ է զնոյն հանգամանս չփոփոխելոյ դրից ունել, յորժամ հաստատուն իցեն Գ եւ Դ կէտքն, այս ինքն եթէ ԳԴ իցէ ուղիղ։

Բ. Եթէ երկուց ուղիղ գծից երկու կէտք իցեն հասարակաց, հարկ է նոցա, որչափ եւ երկայնեսցին, ի միմեանց վերայ անկանել, եւ զմի գիծ յօրինեալ կազմել։ Բայց սակայն մարթ է, զի մին ի նոցանէ արտաքոյ քան զմի կամ զերկուս եւս ծագս միւսոյն ելանիցէ եւ կամ զի մի ծագ միոյն արտաքոյ քան զմի ծագ միւսոյն, եւ միւս ծագ երկրորդին քան զերկրորդ ծագ առաջնոյն արտաքոյ դիպիցին։

Գ. Եթէ երկուց ուղիղ գծից ծագքն իցեն հասարակաց, յայնժամ երկու գիծքն ամենեւին ի

միմեանց վերայ անկանին։ Ապա եթէ երկու ուղիղ գիծք, որ մասամբ իւիք զմիմեանս ծածկիցեն, զմի եւեթ ծագ ունիցին հասարակաց, եւ միւս ծագ առաջին ուղիղ գծի կայցէ ի միջի ծագաց երկրորդին, յայտ է եթէ առաջինն մասն ինչ երկրորդին իցէ, եւ փոքրագոյն քան զայն։

Դ. Այլ եթէ երկոքին գիծքն, եւ ոչ զմի մասն ունիցին հասարակաց, մարթ է ի նոսա մի եւեթ կէտ հասարակաց գտանել որ յերկոսին ուղիղ գծսըն կայցէ։

Ե. Ընդ մէջ երկուց կիտից Մի եւեթ ուղիղ գիծ ձգել հնար է։

Զ. Ապա ուրեմն ի ձեռն երկուց կիտից գտանիցի ուղիղ գիծն, հանդերձ երկայնութեամբն իւրով։

21. Մարթ է զամենայն ուղիղ գիծ, արտաքոյ քան զիւր ծագս երկայնեալ համարել։

Դիցուք գրեսցուք, եթէ ԱԲ ուղիղ գիծն (Ձեւ 6.) երկրորդ անգամ դրոշմեալ իցէ ի ԳԴ. եւ համարեսցուք եթէ Գ մին ի ծագաց անկանիցի յԵ ի միջին վայրի ծագաց միւսոյն, եւ իցէ երկուցունց միւս եւս կէտ հասարակաց Բ, ուստի երկրորդ ծագն Դ ելանէ արտաքոյ քան զԲ ի Զ, քանզի ԳԴ > ԵԲ, կամ ԵԶ > ԵԲ։ Աստատին ծագէ գիծն ԱԶ, որ եւ ուղիղ իսկ է, եւ ծագէ յերկայնելոյ ԱԲ ուղիղ գծին արտաքոյ քան զծագն Բ։ Զնոյն մարթ է առնել եւ վասն Ա ծագին։

Որովհետեւ մարթ է զմի անգամ երկայնեալ գիծն միւսանգամ եւ զայն եւս դարձեալ երկայնել. զորին զհետ գայ, եթէ զուղիղ գիծ ինչ արտաքոյ քան զերկուս ծագս մարթ է, որչափ եւ կամիցի ոք երկայնեալ զմտաւ ածել։

22. Եթէ դնիցեմք կէտ մի ի միում գծի, անդստին գիծն բաժանի յերկուս մասունս, որ ասին կողմանք այնր կիտի։ Այնգունակ մարթի եւ ամենայն գիծ, որ ի միում երեսաց վերայ գտանիցի,

որպէս եզերք ինչ երկուց մասանց երեւացն համարել, որք եւ անուանեալ կոչին Կողմանք գծին: Վասն այսորիկ իսկ յորժամ ի միում կամ ի միւսում մասին երեւացն գտանիցի ինչ՝ ասի, եթէ այս ինչ ի վերայ երեւաց ի միում կամ ի միւսում կողման գծին կայցէ:

Աստատին յայտ է, զի եթէ ի վերայ միոյ կողման ուղիղ գծին, որ ուրեք յերեւաց վերայ ձգիցի, յարդարիցի կազմած ինչ, մարթի այնր կազմածոյ եւ ի վերայ միւսոյ կողման այնր ուղիղ գծի յօրինել:

23. Եթէ իցէ երկուց ԱԲ եւ ԳԴ գծից (Ձեւ 7.) մի եւ նոյն Գ կէտ հասարակաց, ասի Միմեանց ընդհարկանել: Ապա եթէ մեւս մասն գծին, որպէս ԳԵ, անցանիցէ ի մեւս կողմն ԱԲ գծին. ասի Հատանել զմիմեանս: Երկոցունց հասարակաց կէտն ասի Կէտ հատանելոյ, եւ մի մի ի գծից անտի, որ զմիմեանս հատանիցեն Հատանօղ:

Ա. Եթէ ուղիղ ինչ գիծ զերկուս կէտս դրոշմեալս յերկոսին կողմանս գծին ընդ միմեանս յօդեալ կապիցէ, ի հարկէ իսկ եւ զուղիղ գիծն հատանէ, եւ հատանօղն իւիք մասամբ ընդ մի կողմն եւ իւիք մասամբ ընդ մեւս կողմն կայ այնր գծի:

Բ. Երկու ուղիղ գիծք միայն ի միում կէտի կարեն զմիմեանս հատանել, քանզի եթէ երկու կէտք լինիցին նոցա հասարակաց, յայնժամ ի միմեանց վերայ անկանիցին:

24. Երեւքն անուանեալ կոչին Հարթ, յորժամ ամենայն ուղիղ գիծքն որ զերկուս որ զինչ եւ իցէ կէտս երեւացն ընդ միմեանս յօդիցեն, ամենեւին ի նմին երեւաց վերայ գտանիցին. իսկ Կոր ասին երեւքն, յորժամ եւ ոչ մի մասն նոցա հարթ իցէ: Եթէ երեւք ինչ ի բազում հարթ երեւաց կազմիցին, ասին Հարթ բեկեալ, այլ եթէ ի բազում կոր երեւաց յօրինեալ իցեն, ասին Կոր բեկեալ. եւ Խառն, եթէ ի հարթ եւ ի կոր երեւաց յօդեալ իցեն:

Եւ քանզի ուղիղ գիծն յայսկոյս եւ յայնկոյս ընդ երկուս կողմանս առանց սպառելոյ երկայնել կարէ, ուրեմն եւ երեւաց տարածանել հնար է։ Եւ քանզի մի անգամ տարածեալ երեւաքն, մարթին եւ միւսանգամ տարածանել, եւ դարձեալ երկայնել, ուրեմն կարեմք զերեսս ինչ, որչափ եւ կամք իցեն տարածեալ համարել։

Յասացելոյս զհետ գայ, եթէ ուղիղ գիծն ընդ երեւաց մի եւեթ կէտ կարէ ունել հասարակաց, եթէ չկայցէ ի նորին երեւաց վերայ կամ յերկայնութեան նորին։

25. Ի ձեռն երկուց կիտից կամ ի ձեռն միոյ ուղիղ գծի չսահմանին դիրք հարթ երեւաց։ Քանզի եթէ ի ձեռն երկուց կիտից կամ միոյ ուղիղ գծի երեսս ինչ եդեալս համարիցիմք, առանց սահմանելոյ կան մնան դիրք երեւացն այնոցիկ շուրջանակի զուղիղ գծիւն, կամ զուղիղ գծիւ՝ որ ձգիցի ընդ մէջ երկուց կիտիցն այնոցիկ։

Ապա ուրեմն որպէս զի դիրք երեւացն ճշդիւ սահմանիցին, գոնեա երից կիտից հարկ է գտանել, որ չկայցեն ի միում ուղիղ գծի, եւ կամ միոյ ուղիղ գծի եւ միոյ կիտի արտաքոյ նորա, եւ կամ երկուց գծից, որք զմիմեանս հատանիցեն։

Յորին զհետ գայ եթէ ընդ երիս կէտս, որք ոչ ի միում ուղիղ գծի կայցեն, մարթ է մի եւեթ երեսս ձգել։ Քանզի յորժամ ի ձեռն երկուց կիտից կամ միոյ ուղիղ գծի զերեսս ինչ եդեալ համարիցիմք, յայտ է եթէ երեսքն ի շրջել շուրջանակի զգծիւն, մի անգամ եւեթ այլում կիտի որ չկայ ի նմին գծի հանդիպել կարէ։ Ապա ուրեմն եթէ երկուց հարթ երեւաց, երեք կէտք, որ չկայցեն ի միում ուղիղ գծի կամ մի ուղիղ գիծ եւ մի կէտ՝ որ կայցէ արտաքոյ այնր ուղիղ գծի, եւ կամ երկու գիծք, որք ի միում կիտի զմիմեանս հատանիցեն, իցեն հասարակաց, երկոքին հարթ երեսքն ամենեւին ի մի-

մեանց վերայ անկանին, եւ յօրինեալ կազմեն զմի եւեթ հարթ երեսս:

26. Եթէ երկու կամ բազում երկրաչափական իրք յամենայն արտաքին նշանակս իւրեանց, այնպէս իմն միմեանց միաբան գտանիցին, որպէս զի մարթ իցէ զնոսա յայլեւայլ տեղիս եւեթ կամ յայլեւայլ ժամանակս միայն զմտաւ ածել, ասին միմեանց Պատշաճականք: Առ յայտ առնելոյ եթէ Ա եւ Բ միմեանց պատշաճականք իցեն, նշանակի զայս օրինակ Ա $\overline{\underline{\sim}}$ Բ:

Ապա ուրեմն, եթէ երկու իրք յամենայն արտաքին նշանակս, որով եւ ի քանակութեան եւս միմեանց միաբան իցեն, հարկ է նոցա եւ միմեանց հաւասարս լինել: Այլ սակայն չէ մարթ ամէն հակառակ, անդստին ի հաւասարութենէ նոցա, եւ զպատշաճական լինելն հաստատել, քանզի մարթեն այլովք նշանակօք ի միմեանց խտրել: Զոր օրինակ երկու մարգագետինք, որոց ձեւքն ի միմեանց կարի այլակերպք իցեն, հնար է թէ զհաւասար անջրպետութիւն երեսաց, զոր օրինակ երից հազար ձողոց տարածութիւն ունիցին:

27. Երկրաչափական իրք, որոց հարկ է ի վերայ կայցէ միմեանց պատշաճական լինել, յորժամ զնոսա միմեանց հաւասարս գնիցեմք, ասին Նման: Սոյնպիսիք, զայլ հասարակաց հանգամանսն պահեալ, ոչ գիծս հաւասարս եւ ոչ երեսս հաւասարս ունել կարեն, այլ համեմատականս: Նշանակ նմանութեան է այս (∼), զոր օրինակ Ա ∼ Բ:

Ապա ուրեմն, Եթէ երկու նման իրք, հաւասար եւս իցեն միմեանց, հարկ է նոցա եւ պատշաճականս լինել: Ուստի եւ իրացն պատշաճականութիւն հաստատեալ կայ ի Նմանութեան եւ ի Հաւասարութեան:

Զ26 եւ զ27 համարոց զհետ գայ, զի եթէ Երկու ուղիղ գծից հասարակաց իցեն ծագքն, հարկ

է նոցա միմեանց պատշաճականս լինել: Նոյն դարձեալ թէ ամենայն ուղիղ գիծք միմեանց նման իցեն:

28. Ուղիղ գիծն, զոր ի միոջէ կիտէ առ այլ կէտ ձգել կարիցեմք, ցուցանէ զՈւղղութիւն առաջնոյն առ երկրորդն: Ուղղութիւն երկրորդին յառաջինն կոյս, ասի Հակառակ առաջնոյն: Զոր օրինակ ուղղութիւն Ա կիտի ի Բ կոյս (Ձեւ 1.), եւ Բ կիտի յԱ կոյս միմեանց հակառակք են:

29. Հեռանալն ի միմեանց ուղղութեանց երկուց ԱԲ եւ ԱԳ գծից (Ձեւ 8.) որք ի միոջէ Ա կիտէ սկսանիցին յառաջ խաղալ, կամ միտելն երկուց գծից ի մի կէտ հասարակաց Ա, անուանի Անկիւն. երկուքին գիծքն՝ որ հեռանան, ասին Սրունք. իսկ հասարակաց կէտն Ա, Գագաթն եւ յանդիմանակաց կողմն որ է Գ եւ Բ, Բերան: Անկիւնն նշանակի նշանագրով որ ի գագաթան, եւ ընթերցեալ լինի Ա անկիւն. եւ կամ ի ձեռն երից նշանագրաց սրունից, եդեալ զնշանագիրն անկեան ի միջոցի, եւ ընթերցեալ լինի ԲԱԳ կամ ԳԱԲ անկիւն: Այլ դիւրագոյն եւս է զմի փոքր նշանագիր ի մէջ անկեանն դնել, եւ զայն այնուիկ ընթեռնուլ այսպէս, ա անկիւն:

Եթէ երկուքին սրունքն ԱԳ եւ ԳԲ (Ձեւ 7.) ի միում ուղիղ գծի կայցեն, ասի Հարթ անկիւն, որ նշանակի շ նշանագրով: Աստին ծագէ եթէ ամենայն հարթ անկիւնք միմեանց հաւասարք իցեն:

Մեկնութիւն իմն ընծայեցուցանել անկեան, վասն պարզ լինելոյ տեսլեանն, կարի դժուարին է. վասն որոյ ասասցուք համառօտս, եթէ զանկիւնն տեսանելով իմանամք:

Զասացելոյս զհետ գայ,

Ա. Հաւասար անկիւնք են, որոց սրունքն հաւասար ի միմեանս միտեալ իցեն:

Բ. Երկուքին սրունքն միոյ անկեան զդիրս հարթ ինչ երեսաց սահմանեն:

գ. Այնչափ ինչ մեծագոյն է անկիւնն, որչափ միանգամ սրունքն ի միմեանց բացարձակ իցեն։ Արդ ԱԳԵ > ԲԳԵ > ԴԳԵ (Ձեւ 9.)։

դ. Մեծութիւն անկեան չչափի յերկայնութենէ սրունից, այլ ի միտելոյ ի միմեանս երկոցունց սրունից. քանզի եթէ առաւել եւս երկայնեսցին սրունքն, չփոփոխի միտումն։ Զոր օրինակ ԴԳԵ = ՂԳԵ (Ձեւ 9.)։

ե. Եթէ զանկիւնս ԱԳԲ եւ ԲԳԴ (Ձեւ 9.) միանգամայն առնուցուս, ելանէ ԱԳԴ անկիւն։ Ապա եթէ յԱԳԵ անկենէ զԴԳԵ անկիւնն ի բաց հանցես, այլակերպութիւն երկոցունց անկեանց լինիցի ԱԳԴ։ Արդ որովհետեւ առաւելուն յաւելուածով եւ նուազեն համմամբ անկիւնքն, ապա ուրեմն քանիօնութիւնք են, եւ ընդ մաթեմատիկեան ճարտարութեամբ անկանին (Նշա. Համ. Հ. 1.)։

զ. Անկիւնքն՝ որ միմեանց հաւասար իցեն, հարկ է զի եւ միմեանց պատշաճականք լինիցին։ Ապա ուրեմն եւ ամենայն անկիւնք միմեանց նմանք են։

30. Առաջին։ Երկու անկիւնք զոր օրինակ ԲԳԴ եւ ԴԳԱ (Ձեւ 7.), որոց Գ գագաթն եւ մի սրունք ԳԴ իցեն հասարակաց, եւ որոց երկու այլ սրունքն ԳԱ եւ ԳԲ՝ մի ուղիղ գիծ իցեն, կամ մի հարթ անկիւն կազմիցեն, անուանեալ կոչին Կից անկիւնք, յորոց իւրաքանչիւրն ասի Կից անկիւն միւսոյն։

Երկրորդ։ Եթէ երկու անկիւնք միմեանց կիցք ԱԳԴ եւ ԲԳԴ (Ձեւ 10.) հաւասար իցեն միմեանց, որպէս զի մի մի ի նոցանէ իցէ կէս հարթ անկեան, իւրաքանչիւր յանկեանցն կոչի Ուղիղ անկիւն, որ նշանակի Ո կամ $\frac{Հ}{2}$ քանիօնութեամբ. զոր օրինակ անկ. ԱԳԴ $= Ո = \frac{Հ}{2}$։ Ապա եթէ երկուքին անկիւնքն միմեանց կիցք չիցեն հաւասար միմեանց, յայնժամ ասի Ծուռ անկիւն, եւ որ > Ո

իցէ ասի Բութ անկիւն. իսկ որ < Ո, կոչի Սուր անկիւն:

Երրորդ: Յորժամ ուղիղ ինչ գիծ ԳԴ (Ձեւ 10.) յօրինեալ կազմիցէ հաւասար կից անկիւնս, ասի եթէ ԳԴ կայ Ուղղորդ. եւ ուղիղ գիծն ԳԴ կոչի Ուղղորդ գիծ: Այսուհետեւ իբրեւ կամիցիմք յայտ առնել, եթէ Գ.Դ ուղիղ գիծն կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ գծին, նշանակեմք զայս օրինակ ԳԴ ⊥ ԱԲ: Ապա եթէ ԳԴ ուղիղ գիծն (Ձեւ 7.) եւ ԱԲ, չհաւասար կից անկիւնս յօրինիցեն ԱԳԴ եւ ԴԳԲ, յայնժամ ասի եթէ ԳԴ կայ Միտեալ յուղիղ գիծն ԱԲ: Յերկուց անկեանց, որոց բովանդակութիւնն = 2Ո իցէ, իւրաքանչիւրն յօրջորջի Լրումն միւսոյն, եւ ամէն հակառակ յերկուց անկեանց, որոց բովանդակութիւն Ո իցէ, իւրաքանչիւրն ասի Բովանդակումն միւսոյն:

Չորրորդ: Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 11.) զմիմեանս հատանիցեն, ծագեն չորք անկիւնք ա, բ, գ, դ, որոց հասարակաց գագաթն է կէտն հատանելոյ երկուց գծից զմիմեանս: Երկու երկու յանկեանցս զոր օրինակ ա եւ գ կամ բ եւ դ այնպէս իմն միմեանց հակառակ կան ի գագաթունս, որպէս զի սրունք միոյն է երկայնեալ սրունք միւսոյն, եւ ասին Գագաթան անկիւնք:

Զասացելոցս զհետ գայ,

Ա. Ի միջէ ԱԳԴ անկենէ (Ձեւ 7.) ծանուցելոյ, գտանի եւ կից անկիւնն նորին, յորժամ ոք զմի ի սրունիցն արտաքոյ քան զգագաթնն երկայնիցէ:

Բ. Եթէ երկու անկիւնք միմեանց հաւասարք իցեն. հաւասար են եւ նոցին կից անկիւնքն: Ապա եթէ երկու անկիւնք չհաւասարք իցեն միմեանց, չհաւասար են եւ նոցին կից անկիւնքն, եւ մեծի անկեան ի չհաւասարիցն կցուի փոքր կից անկիւն:

Գ. Երկու գագաթան անկիւնք ա եւ գ (Ձեւ 11.) հաւասարք են միմեանց. քանզի երկոքեանն եւս կից անկիւնք են միոյ երրորդ բ անկեան: Ուրեմն եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԴԵ (Ձեւ 10.) այնպէս իմն զմիմեանս հատանիցեն, որպէս զի մին յանկեանցն, որ ի հատանելոյ անտի ծնանիցի, ուղիղ իցէ, հարկ է եւ այլոց անկեանց ուղղոյ լինել:

Դ. Արունք ուղիղ անկեան կան ուղղորդ ի վերայ միմեանց:

Ե. Հաւասար անկեանց եւ հաւասար լրումն է, նոյնպէս եւ հաւասար բովանդակումն. եւ ամէն հակառակ՝ եթէ երկու անկիւնք հաւասար լրմունս եւ բովանդակմունս ունիցին, հարկ է եւ անկեանցն միմեանց հաւասարս լինել: Այլ եթէ երկու անկիւնք միմեանց չհաւասարք իցեն, յայնժամ եւ նոցին լրմունքն եւ բովանդակմունք չհաւասարք են եւ որ մեծն իցէ, ունի եւ փոքրագոյն լրումն եւ փոքրագոյն բովանդակումն:

Ապա ուրեմն յերկուց կից անկեանց իւրաքանչիւր միւսոյն լրումն է:

31. Եթէ ի միջէ Ա կիտէ (Ձեւ 8.) հարթ ինչ երեւաց ձգիցես երկուս ուղիղ գիծս, յայտ է եթէ հատանեն զհարթ եւ զանկատարած երեսն յերկուս մասունս, եւ յօրինեալ կողմեն երկուս անկիւնս, յորոց մին ա փոքր է քան զմի հարթ անկիւն, եւ անի Գոգաւոր. իսկ միւսն մեծ եւ յորջորջի Բարձրացեալ կամ Ուռուցեալ: Ի մէջ գոգաւոր ԲԱԳ անկեան կայ ∔, իսկ յուռուցեալն ԲԱԳ կէտն +: Արդ յորժամ հակառակ կողմն ԲԱԳ անկեան չիցէ արդեամբք իսկ դրոշմեալ, ցանգ ա անկիւնն գոգաւոր համարի:

32. Յամենայն ուղիղ գիծս ի միում կէտի միոյ կողման գծին, մարթ է մի եւեթ գիծ ուղիղ ուղղորդ ձգել:

Համարեսցուք եթէ (Ձեւ 10.) ԳԴ իցէ ուղ-

ղորդ ի վերայ ԱԲ գծի, եւ ԳԵ՛ այլ ինչ գիծ, որ կայցէ ի նմին կողման ԱԲ գծին, յայտ է եթէ անկ. ԱԳԵ՛ > ԱԳԴ, եւ զի ԱԳԴ = ԲԳԴ, ուրեմն ԱԳԵ՛ > ԲԳԴ. դարձեալ ԲԳԴ > ԲԳԵ՛, ապա ԱԳԵ՛ > ԲԳԵ՛: Ուրեմն ԳԵ՛ եւ ԱԲ յօրինեալ կողմէն չհաւասար կից անկիւնս, ուստի եւ ամենայն ուղիղ գիծ ԳԵ՛ կայ արտաքոյ ԳԴ գծի:

33. Ամենայն ուղիղ անկիւնք միմեանց հաւասարք են:

Իցէ (Ձեւ 12.) ԳԴ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ գծի, եւ ԷԸ ուղղորդ յԶԸ: Արդ զմտաւ ածցուք, եթէ կէտն Է այնպէս կայցէ ի Գ, որպէս զի ուղիղ գիծքն ԷԸ եւ ԳԲ ի միմեանց վերայ անկանիցին, յայնժամ հարկ է ԷԶ եւ ԳԱ գծից ի միմեանց վերայ անկանել: Արդ եթէ անկիւնքն ԲԳԴ եւ ԶԷԸ չիցեն միմեանց հաւասար, յայնժամ պարտ է զի ԷԸ ի ԳԴ ուղղութենէ այլակերպ իցէ, եւ դիցուք եթէ ի ԳԹ անկանիցի: Որով լինիցի երկուց ԳԹ եւ ԷԸ գծից լինել ուղղորդ ի վերայ ԱԲ կամ ԶԸ գծիցն, ուստի եւ երկուց գծից կալ ուղղորդ ի Գ, որ է հակառակ 32 համարոյ: Զորոյ զհետ գայ եթէ ուղիղ անկիւնքն ԲԳԴ եւ ԶԷԸ միմեանց հաւասարք իցեն:

34. Երկու միմեանց կից անկիւնք, միահամուռ գումարեալ, առնեն երկուս ուղիղ անկիւնս:

Եթէ երկոքին կից անկիւնքն միմեանց հաւասար իցեն, յայտ է եթէ իւրաքանչիւր ի նոցանէ հաւասար է միում ուղիղ անկեան, ուստի եւ երկոքինն միանգամայն երկուց ուղիղ անկեանց: Ապա եթէ չիցեն հաւասար, որպիսի ինչ են ԱԳԵ՛ եւ ԲԳԵ՛ (Ձեւ 10.), յայնժամ մարթ է ձգել ուղղորդ գիծն ԳԴ, յորմէ լինիցի ԱԳԵ՛ = ԱԳԴ + ԴԳԵ՛, եւ ԲԳԵ՛ = ԲԳԴ — ԴԳԵ՛, ուստի ԱԳԵ՛ + ԲԳԵ՛ = ԱԳԴ + ԴԳԵ՛ + ԲԳԴ — ԴԳԵ՛ = ԱԳԴ + ԲԳԴ = Ո + Ո = 2Ո:

35. Առ ի գտանել զչափ մեծութեան անկեան պարտ եւ պատշաճ է ի կշիռ համեմատութեան բերել զայն ընդ ուղիղ անկեան, կամ պարտ է զուղիղ անկիւն իբրեւ զմիութիւն անկեանց համարել: Սովոր են երկրաչափք զուղիղ անկիւն յ90 փոքրիկ մասունս հաւասարս կտորել, որ անուանին Աստիճանք: Դարձեալ զաստիճանն հատանեն ի 60 հաւասար մասունս, որ յորջորջին Վայրկեանք, եւ զվայրկեան բաժանեն ի 60 բաժինս՝ որ կոչին Երկրորդք:

Երկրորդն փոքրիկ անկիւն մի է, զոր իբրեւ 60իցս առնուցումք լինիցի մի Վայրկեան եւ այս եւս 60իցս առեալ գործէ մի աստիճան, որ եւ 90իցս առեալ, կազմէ մի ուղիղ անկիւն: Ապա ուղիղ անկիւնն է $= 90$ աստիճան $= 60 \cdot 90$ վայրկ. $= 60 \cdot 60 \cdot 90$ երկրորդ. կամ $Ո = 90^{\circ} = 5400^{\prime} = 324000^{\prime\prime}$, եւ $1^{\circ} = 60^{\prime} = 60 \cdot 60^{\prime\prime} = 3600^{\prime\prime}$:

Արդ յորժամ ասիցեմք, եթէ անկիւնն ա փակեալ բովանդակիցէ $73^{\circ}54^{\prime}28^{\prime\prime}$, յայտ առնէ, եթէ ա՝ 73 աստիճանաց, 54 վայրկենից, 28 երկրորդաց բովանդակութիւն իցէ, Որոյ զհետ գայ, եթէ կարիցեմք գտանել զկշռութիւն ա անկեան առ ուղիղ անկիւն. քանզի $ա = 73^{\circ}54^{\prime}28^{\prime\prime} = 4434^{\prime}28^{\prime\prime} = 266068^{\prime\prime}$, եւ $Ո = 90^{\circ} = 5400^{\prime} = 324000^{\prime\prime}$. ուրեմն

$$ա : Ո = 266068^{\prime\prime} : 324000^{\prime\prime},$$ ուստի եւ

$$ա = \frac{266068}{324000} \cdot Ո = \frac{66517}{81000} \cdot Ո :$$

36. Եթէ ի վերայ միոյ կողման ԱԲ ուղիղ ինչ գծի (Ձեւ 13.) ի միջէ Գ կիտէ նորին ի վերայ հարթ ինչ երեսաց ձգիցես բազում գիծս ուղիղս ԳԴ, ԳԵ եւ ԳԶ. բովանդակութիւն ամենայն անկեանցս հաւասար է երկուց ուղիղ անկեանց: Այս ինքն անկ. $ԱԳԴ + ԴԳԵ + ԵԳԶ + ԶԳԲ = 2Ո$:

Վասնզի ԱԳԵ + ԵԳԲ = 2Ո (Հ. 34.)․ իսկ արդ ԱԳԵ = ԱԳԴ + ԴԳԵ, եւ ԵԳԲ = ԵԳԶ + ԶԳԲ, ուրեմն ԱԳԴ + ԴԳԵ + ԵԳԶ + ԶԳԲ = 2Ո։

37. Եթէ ի միջէ Մ կիտէ ի վերայ միոյ հարթ երեսոյ (Ձեւ 14.) ձգիցեն այլեւայլ ուղիղ գիծս ԱՄ, ԲՄ, ԳՄ, ԴՄ, ԵՄ, ԶՄ, բովանդակութիւն ամենայն անկեանցն՝ որ ի նմին գոանիցեն, հաւասար է չորից ուղիղ անկեանց։ Այս ինքն է

ԱՄԲ + ԲՄԳ + ԳՄԴ + ԴՄԵ + ԵՄԶ + ԶՄԱ = 4Ո։

Վասնզի եթէ եւ երկայնիցեմք զմի ի գծիցն յայնցանէ, զոր օրինակ զԱՄ մինչեւ ցԼ, յորմէ եւ անկիւնն ԴՄԵ բաժանիցի յերկուս մասունս ǂ եւ †. (ըստ Հ. 36.) ԱՄԲ + ԲՄԳ + ԳՄԴ + ǂ = 2Ո, եւ

† + ԵՄԶ + ԶՄԱ = 2Ո,

արդ եթէ եւ ի միմեանս յաւելցին անկիւնքս, եւ ǂ + † = ԴՄԵ դիցի, ելանիցէ

ԱՄԲ + ԲՄԳ + ԳՄԴ + ԴՄԵ + ԵՄԶ + ԶՄԱ = 4Ո։

38. Եթէ երկուց ԱԳԴ եւ ԴԳԲ (Ձեւ 15.) անկեանց իցէ Գ գագաթն, եւ մին ի սրունից ԳԴ՝ հասարակաց, եւ բովանդակութիւն նոցա = 2Ո, յայնժամ հարկ է զի երկոքին սրունքն ԱԳ եւ ԳԲ ի միում ուղիղ ԱԳԲ գծի կայցեն։

Համարեսցուք եթէ ԱԳ եւ ԳԲ չիցեն ի միում ուղիղ գծի, որպէս զի ԱԳ յառաջ խաղացեալ ոչ ըստ ԳԲ, այլ ըստ ԳԵ ուղղութեան ի վերայ, կամ ըստ ԳԵ՛ ուղղութեան ի ներքոյ ԳԲ գծին։ Յառաջին դէպսն հարկ է զի ԱԳԴ + ԴԳԵ = 2Ո = ԱԳԴ +

ԴԳԲ լիցի, ուստի եւ ԴԳԵ = ԴԳԲ, որ է անպա-
տեհ: Իսկ յերկրորդ դէպս ԱԳԴ + ԴԳԵʹ =
2Ո = ԱԳԴ + ԴԳԲ, ուստի եւ ԴԳԵʹ = ԴԳԲ,
որ նոյնպէս անպատեհ իմն է: Արդ որովհետեւ չէ
մարթ երկայնութեան ԱԳ գծին ոչ ի ներքոյ եւ
ոչ ի վերոյ քան զԱԳ անկանել, ապա ուրեմն կայ ի
ԳԲ ուղղութեան:

39. Առաջին: Երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԳԴ
(Ձեւ 16 եւ 17.) որք կան ի միոյ հարթ երեսոյ
վերայ անջատեալք ի միմեանց, ունին հաստատուն
ինչ հաղորդութիւն ընդ միմեանս, որոյ իբրեւ ի վե-
րայ հասանել կամիցի ոք, պարտ է զնոսին երրորդ
ԵԶ գծիւ ընդ մէջ հատանել եւ զանկիւնսն ԵԷԲ
եւ ԵԹԴ, որ ի վերայ միոյ կողման հատանողին ի-
ցեն, ընդ միմեանս համեմատել: Եթէ երկոքին ան-
կիւնքն միմեանց հաւասարք իցեն, ասին գիծքն ԱԲ
եւ ԳԴ Հաւասար ուղղեալք (Ձեւ 16.) ապա թէ
ոչ Չհաւասար ուղղեալք (Ձեւ 17.):

Երկրորդ: Գիծք եւ երեսք եւ մարմինք ասին
Հաւասար հեռաւոր, յորժամ չկարիցեն զմիմեանս
հատանել, թէպէտեւ առանց կատարելոյ երկայնես-
ցին: Ուստի հաւասար հեռաւոր գիծք ԱԲ եւ ԴԳ (Ձեւ
17.) ըստ Մ ուղղութեան ասին Մերձեցեալ, իսկ
ըստ ամին հակառակ ուղղութեան Հեռացեալ կամ
Մեկնօղ: Նշանակ հաւասար հեռաւոր լինելոյ է այս
(||), զոր օրինակ ԱԲ || ԳԴ որ ընթերցեալ լինի, եթէ
ԱԲ է հաւասար հեռաւոր ի ԳԴ գծէ: Ապա եթէ ԱԲ
եւ հաւասար եւ հաւասար հեռաւոր իցէ ի ԳԴ գծէ
նշանակի ԱԲ ⋕ ԳԴ: Դարձեալ չհաւասար հե-
ռաւորն լինել յայտ առնի այսպէս ԱԲ ∧ ԳԴ:

Երրորդ: Յորժամ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ
եւ ԳԴ, որոց մարթ է հաւասար կամ չհաւասար
ուղղել (Ձեւ 17.) յերրորդ ԵԶ գծէ հատանիցին,
ծնանին ութ գոգաւոր անկիւնք. [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible],
[illegible], [illegible], +: Յութ անկեանց անտի չորք անկիւնքն,

որոց ի վերայ միոյ ի սոցունց կան երկուքին կէտքն հատանելոյ, կոչին Ներքին, որ են գ, դ, ե եւ զ. իսկ այլ չորք անկիւնքն Արտաքին անկիւնք։ Նոյ-կու երկու անկիւնք որք ի վերայ միոյ կողման հատանողին կայցեն, եւ հեռացեալ գիծքն իւրեանց ի նոյն ուղղութիւն շրջեալ իցեն, ասին Կշռեալ անկիւնք. իսկ ամն հակառակ երկու երկու անկիւնք որք ի վերայ այլեւայլ կողմանց հատանողին հաստատեալ իցեն, որք միանգամայն ներքին կամ արտաքին իցեն, այլ չիցեն կից անկիւնք, ասին Փոփոխ անկիւնք։ Արդ ա եւ ե, բ եւ զ, գ եւ է, դ եւ ը են կշռեալ անկիւնք. իսկ գ եւ զ, դ եւ ե ներքին փոփոխ անկիւնք եւ ը եւ ա, բ եւ է արտաքին փոփոխ անկիւնք։

Յորժամ հարթ ինչ երեսք հաւասար հեռաւոր կայցէ ընդ երեսաց ծովու կամ ջրոյ խաղաղացելոյ, ասի Հորիզոնական, եւ ամենայն ուղիղ գիծքն որ յայնց երեսաց վերայ ձգիցին ըստ նմին օրինակի ասին Հորիզոնական կամ ըստ ուղղութեան լծակի։ Եթէ ուղիղ ինչ գիծ կայցէ ուղղորդ ի կէտն հատանելոյ զմիմեանս երկուց Հորիզոնական գծից, ասի Ուղղաձիգ կամ Գագաթան գիծ, եւ ամենայն հարթ երեսք որ յուղղորդ գծէ անտի յօրինիցի, ասի Ուղղաձիգ երեսք։

Անդստին ի փորձոյ ուսանիմք, եթէ ուղղութիւն մարմնոյ՝ որ անարգել եւ անխափան անկանիցի, է ուղղորդ ի վերայ հորիզոնի, ուստի եւ ուղղաձիգ։ Արդ որպէս սովորութիւն է, կապեն ի ծագ սաղանոյ գնդակ մի փոքրիկ, եւ թողուն զգնդակն անկանել անխափան, եւ ի դրից անտի սաղանւոյն որ չշարժիցի, հասանեն ի վերայ ուղղութեան ուղղաձիգ գծի։

Զհասացելոցս զհետ գայ,

Ա. Յանձնէ իսկ յայտ է, զի եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԳԴ հաւասար ուղղեալք իցեն (Զեւ 16.), յայնժամ ոչ ընդ ԵԶ հատանողին եւեթ հաւասար կշռեալ անկիւնս գործիցեն, այլ եւ ընդ այլ որ զինչ եւ իցէ ԽԼ կամ ԺԻ գծին։ Նոյն ինքն եթէ $\angle ԼԱԲ = \angle ԼԳԴ$, եւ $\angle ԺԱԲ = \angle ԺԹԴ$։

Բ. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԳ եւ ԲԴ (Ձեւ 18.) հաւասար ուղղեալք իցեն, այս ինքն անկ. ԳԱԶ = ԴԲԶ իցէ, եւ երկայնեսցին երկոքին ուղիղ գիծքն արտաքս քան զծագսն Ա եւ Բ, յայնժամ անկ. Գ՛ԱԶ = Դ՛ԲԶ է իբրեւ կից անկիւն երկուց անկեանցն այնոցիկ, ապա ուրեմն եւ երկայնութիւնք ԱԳ՛ եւ ԲԴ՛ հաւասար ուղղեալք իցեն ի ներքոյ ԵԶ ուղիղ գծին: Կազմածքն՝ որ ի վերոյ եւ ի ներքոյ ԵԶ գծին յօրինեցան, միմեանց պատշաճականք են. քանզի եթէ հնար ինչ իցէ զի ԱԳ եւ ԲԴ ի վերին կողմն երկայնեալք միմեանց ընդհարկանիցին, ըստ նմին նմանութեան հարկ է զի իբրեւ եւ գիծքն ԱԳ եւ ԲԴ՛ ի ներքոյ երկայնեսցին, միմեանց ընդհարկանիցին, ուստի եւ պարտ էր ԳԳ՛ եւ ԴԴ՛ ուղիղ գծից յերկուս այլեւայլ կէտս զմիմեանս հատանել, որ անհնարին է: Զօրին զհետ գայ, եթէ հաւասար ուղղեալ գիծք չկարեն զմիմեանս հատանել, ուստի եւ են հաւասար հեռաւոր:

Գ. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԳԴ յերրորդ ԵԶ գծէ (Ձեւ 19.) այնպէս հատանիցին, որպէս զի իցէ

1) ſ = ɾ

հարկ է զի իցեն եւ

2) ъ = ɜ
3) ղ = ᐩ
4) ᴛ = ǂ
5) ղ = ɜ
6) ᴛ = ɾ
7) ſ = ǂ
8) ъ = ᐩ
9) ᴛ + ɜ = 2Ո
10) ղ + ɾ = 2Ո
11) ſ + ᐩ = 2Ո
12) ъ + ǂ = 2Ո

Քանզի ſ + ъ = 2Ո, եւ ɾ + ɜ = 2Ո, ուրեմն ſ + ъ = ɾ + ɜ, եւ զի ըստ մերոյ համարելոյ

ʃ = ɾ, ուրեմն ինքնին եղանէ 2) ŉ = ȝ: Սովին օրինակաւ ցուցանին եւ այլ տասն հաւասարութիւնք: Դարձեալ եւ այն եւս յայտ է, զի եթէ մին յերկոտասան հաւասարութեանց աստի ուղիղ համարիցի եւ ընդունելի, նովաւ մարթ է զայլ մետասան հաւասարութիւնս գտանել: Ապա ուրեմն, եթէ երկու ուղիղ գիծք այնպէս իմն հատանիցին յերրորդ գծէ, որպէս զի երկու կշռեալ անկիւնք եւ կամ երկու փոփոխ անկիւնք միմեանց հաւասարք իցեն, եւ կամ թէ՝ երկու ներքին կամ երկու արտաքին անկիւնք, որ ի նմին կողման հատանողին կայցեն, միանգամայն գումարեալ, իցեն = 2Ո, յայնժամ եւ այլ եւս կշռեալ անկիւնքն, նոյնպէս եւ փոփոխ անկիւնքն, երկու երկու միմեանց հաւասարք են, եւ երկու արտաքին եւ երկու ներքին անկիւնք, որ ի միում կողման հատանողին գտանիցին, առնեն 2Ո:

Գ. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 17.) այնպէս իմն հատանիցին, որպէս զի լինել

1) ŉ > ȝ,

յայնժամ հարկ է զի իցեն եւ

2) ŧ > ϖ	9) ϖ + ȝ < 2Ո
3) ʃ < ɾ	10) ʓ + ɾ > 2Ո
4) † < ʓ	11) ŉ + ŧ > 2Ո
5) ʓ > ȝ	12) ʃ + † < 2Ո
6) ϖ < ɾ	
7) ʃ < ŧ	
8) ŉ > †	

Որովհետեւ ŉ + ϖ = 2Ո, եւ ȝ + ŧ = 2Ո, ուրեմն եւ ŉ + ϖ = ȝ + ŧ, կամ ŉ − ȝ = ŧ − ϖ, եւ քանզի ըստ մերոյ համարելոյ ŉ > ȝ կամ ŉ − ȝ > 0, ուրեմն ŧ − ϖ > 0, կամ ŧ > ϖ: Նովին օրինակաւ ցուցանին եւ այլ եւս տասն չհաւասա-

րութիւնքն: Գործեալ եւ այն եւս յայտ է, զի եթէ մին յերկոտասան չհաւասարութեանց ատի ուղիղ եւ ընդունելի համարիցի, եւ այլ մետասան չհաւասարութիւնքն զնորին զհետ գան:

40. Յամենայն կողմանց շուրջ փակեալ երեսք (Հ. 7.) կամ ձեւն՝ ասի Հարթ կամ Կոր, ըստ հարթ կամ կոր լինելոյ երեսացն: Աստէն զհարթ երեսաց են միայն բանքս: Եթէ եզերք ձեւոյն ուղիղ գիծք իցեն՝ ասի Ուղղագիծ ձեւ, ապա թէ ոչ Կորագիծ. գիծքն՝ որ զեզերս ձեւոյն կազմիցեն ասին Կողմանք կամ Կողք, որոց բովանդակութիւնն է շրջանակ ձեւոյն (Հ. 8.):

Յասացելոցս զհետ գայ, եթէ ամենայն հարթ ձեւ մասն է հարթ ինչ երեսաց, որ յօրինեալ կազմի ի կիտէ իմէքէ շարժելոյ ի վերայ երեսաց ընդ այլեւայլ ուղղութիւնս, եւ ապա ուրեմն յիւր կէտն սկզբան կատարելոյ: Ապա ուրեմն եթէ ի վերայ հարթ ինչ երեսաց ձեւ ինչ դրոշմիցի, իւրաքանչիւր կէտ երեսացն կայ կամ ի վերայ շրջանակի, կամ ի միջի եւ կամ արտաքոյ ձեւոյն: Արդ եթէ կէտ մի ի մէջ ձեւոյն կայցէ, ամենայն ուղիղ գիծ որ ի կիտէ անտի ձգիցի ի կէտ մի, որ արտաքոյ կայ, հատանէ զշրջանակն. եւ եթէ ի կիտէ իմէքէ, որ արտաքոյ, ձգիցես գիծ ի կէտ ինչ ի ներքս ձեւոյն, հարկ է զի այն գիծ եւս զշրջանակն հատանիցէ:

Ձեւքն ի թուոյ անտի կողմանցն կամ անկեանց ճանաչին. վասն որոյ եւ ասի Եռեքկողմեան ձեւ կամ Եռեքանկիւն (Δ), Չորեքկողմեան ձեւ կամ Չորեքանկիւն. Հնգկողմեան ձեւ կամ Հնգանկիւն, այլովքն հանդերձ: Եւ ձեւքն՝ յորս առաւել քան զչորս կողմանք իցեն անուանեալ կոչին Բազմանկիւնք: Անկիւնն՝ որ յերկուց կողմանց բազմանկեանն յօրինեալ իցէ, ասի Անկիւն շրջանակի կամ բազմանկեան. եթէ սրունք անկեան շրջանակի արտա-

քոյ քան զձեւն իցեն երկայնեալ, ասի անկիւնն Արտաքս ոստուցեալ, ապեթէ ի ներքս կոյս իցեն երկայնութիւնքն, ի ներքս ամփոփեալ:

Եթէ կողմանք բազմանկեանն միմեանց հաւասարք իցեն, ասի Հաւասարակող, իսկ իբրեւ հաւասար իցեն անկիւնքն, Հաւասարանկիւն: Ապա եթէ եւ կողմանքն եւ անկիւնքն հաւասար իցեն, կոչի կարգաւոր կամ կանոնաւոր. իսկ եթէ սմին հակառակն դիպիցի, Անկարգ կամ Անկանոն: Եթէ ի բազմանկեան երկու երկու կողմանքն հաւասար հեռաւոր իցեն, ասի Համաչափ:

Ուղիղ գիծն՝ որ զգագաթունս երկուց անկեանց բազմանկեան, որ չկայցեն ի վերայ միոյ կողման, ընդ միմեանս յօդիցէ, ասի Անկիւնագիծ: Իսկ գիծն՝ յորոյ վերայ բազմանկիւնն յօրինեալ համարիցի, ասի Խարիսխ: Միջոց քանիօնութեան ձեւոյն է կէտն՝ ընդ որ եթէ գիծ ինչ ուղիղ յոր զինչ եւ իցէ կիտէ շրջանակի ձեւոյն յայլ կէտ ինչ նորին ձգիցի, եւ գիծն եւ բազմանկիւնն յերկուս հաւասար մասունս բաժանիցին, որպէս դէպ լինի ի համաչափ բազմանկեան:

Ա. Որովհետեւ ի բազմանկիւնս իւրաքանչիւր կողմն ընդ զկնի եկեալ կողման, եւ դարձեալ վերջինն ընդ առաջնոյն մի անկիւն յօրինեալ կազմեն, ուրեմն թիւ համարոյ կողմանցն եւ թիւ համարոյ անկեանց միմեանց հաւասարք են:

Բ. Երկու ուղիղ գիծք չկարեն ձեւ ինչ շուրջանակի փակել:

Գ. Ապա ուրեմն քան զամենայն բազմանկիւնս, երեքանկիւնն սակաւագոյն անկիւնս եւ. կողմանս ունի:

41. Զորեքկողմեան ձեւք բաժանին ի Հաւասար հեռաւոր ձեւ, ի Սեղան եւ ի Սեղանակերպ: Զորեքկողմեան ձեւն, որոյ յանդիմանակաց կողմանքն հաւասար հեռաւոր իցեն, ասի Հաւասար հեռաւոր ձեւ:

Ուղղորդ գիծն, որ ի միոջէ կիտէ միոյ կողման մինչեւ ցիւր հաւասար հեռաւորն ձգիցի, առի Բարձրութիւն հաւասար հեռաւոր ձեւոյն, իսկ կողմն յորոյ վերայ կայ ուղղորդ գիծն, Խարիսխ: Սեղան է չորեքանկիւնն, եթէ երկու կողմանքն եւեթ հաւասար հեռաւոր իցեն. իսկ Սեղանակերպ, որոյ եւ ոչ մի կողմն հաւասար հեռաւոր է: Որպիսի ինչ (Ձեւ 123.) ԵԶԳԺ է սեղան, իսկ ԱԵԶԳ (Ձեւ 124.) սեղանակերպ:

42. Բոլորակն է հարթ ինչ ձեւ, որոյ ամենայն կէտքն շրջանակին հաւասար հեռի են ի հաստատուն ինչ կիտէ, որ կայցէ ի մէջ ձեւոյն: Կոր գիծն, որ զերեսն շուրջ փակիցէ, առի Շրջապատ, որոյ իւրաքանչիւր մասն կոչի Աղեղն (Ձեւ 20.). իսկ Կ կէտն յորմէ ամենայն կէտք շրջապատին հաւասար հեռի են՝ Կենդրոն կամ Միջոց բոլորակի: Ամենայն ուղիղ գիծ ԿԱ, ԿԲ, ԿԵ . . . . ի Կ կենդրոնէ անտի ձգեալ առ շրջապատ բոլորակին, յորջորջի Կէս երկակտուր կամ Ճառագայթ: ԱԴ ուղիղ գիծն՝ որ զերկուս Ա եւ Դ կէտս շրջապատին ընդ միմեանս յօդիցէ, առի Լար: Լարն որ ընդ կենդրոնն անցանէ, զոր օրինակ ԱԲ, ԴԵ, առի Երկակտուր: Կէսն բոլորակին առի Կէս բոլորակի, իսկ չորրորդ մասն բոլորակի Չորրորդ բոլորակի: Կողմն բոլորակին կամ աղեղան կամ կոր գծի, որ այնպիսի իմն հանդամանս ունիցի, որպէս զի եթէ երկու կէտք նորա ուղիղ գծիւ ընդ միմեանս յօդիցին, ուղիղ գիծն կայցէ ամենեւին ի նոյն կողմն շրջապատին կամ կոր գծին, առի Գոգաւոր, սմին հակառակ կողմն՝ Ուռուցեալ կամ Բարձրացեալ:

Ա. Արդ ուրեմն ի միում բոլորակի ամենայն կէս երկակտուրքն միմեանց հաւասար են, զոր օրինակ ԿԱ = ԿԲ = ԿԵ = ... , եւ բոլորակքն որ նովին կէս երկակտրով նկարիցին, միմեանց ամենեւին յամենայն նշանակս հաւասարք (պատշաճականք) են (Հ. 26.):

Բ. Որովհետեւ ամենայն երկակտուրք հաւասարակին ի կենդրոնի, քանզի ԱԲ = ԿԱ + ԿԲ = ԱԿ + ԿԱ = 2ԿԱ, ուրեմն ամենայն երկակտուրք միոյ բոլորակի միմեանց հաւասարք են։

Գ. Կէս երկակտուրն եւ շրջապատն ունին մի կէտ հասարակաց, իսկ երկակտուրն եւ շրջապատն երկուս։

43. Եթէ երկու գիծք, որ ի միոյ երեսաց վերայ կայցեն, կամ մի գիծ եւ բոլորակ կամ աղեղն այնպէս իմն ի միում կէտի զմիմեանս բախիցեն, որպէս զի մասունքն միոյ գծին կամ բոլորակին որ կան յերկոսին կողմանս այնր կէտի, ի միում կողման միւսոյ գծին գտանիցին, ասի Շօշափել զմիմեանս, եւ երկոքին գիծքն ասին Շօշափօղք։ Զոր օրինակ ՇՀ (Ձեւ 20.) է շօշափօղ, եւ Ա կէտ շօշափելոյ։ Ապա բաց ի կէտէ շօշափման ամենայն կէտք ՇՀ շօշափօղին են արտաքոյ շրջապատին։

44. Եթէ ոք յոր զինչ եւ իցէ կէտէ շրջապատին ձգիցէ ուղղորդ ինչ գիծ ՄՊ (Ձեւ 20.) ի վերայ ԱԲ երկակտորոյն, անուանեալ կոչի այն՝ Կարգած. իսկ ԱՊ եւ ԲՊ մասունք ԱԲ երկակտորոյն, Հատած։

Մասն ինչ ԱՄԴԱ երեսաց բոլորակի, շուրջ փակեալ ի միջէ ԱՄԴ աղեղանէ եւ յԱԴ լարէ այնր աղեղան, անուանի Հատած բոլորակի։ Իսկ մասն բոլորակի, որ յերկուց կէս երկակտորոց, եւ յաղեղանէ՝ որ ի միջի նոցա կայցէ՝ շուրջանակի սահմանիցի, կոչի Բաժանած բոլորակի, որպիսի ինչ ԱԿԴՄԱ կամ ԱԿԵՄ։

Բոլորակք՝ որոց նոյն կենդրոն իցէ, ասին Կենդրոնակից. իսկ որոց այլեւայլք իցեն միջոցքն՝ Այլակենդրոն։ Ուղիղ գիծն, որ զկենդրոնս երկուց այլակենդրոն բոլորակաց ընդ միմեանս յօդիցէ, անուանի Գիծ կենդրոնական։

Անկիւնք ի բոլորակի են, որոց գագաթունքն կան ի մէջ երեսաց բոլորակի, որպիսի ինչ անկիւնն ԱԵԷ (Ձեւ 21.)։ Եթէ գագաթն միոյ անկեան ի-

ցէ ի կենդրոնի, եւ որոնքն իցեն կէս երկակորուրք, անուանեալ կոչի Կենդրոնական անկիւն։ Ապա եթէ գագաթն անկեան իցէ ի շրջապատին եւ որոնքն իցեն լարք, ասի Անկիւն շրջապատի։ Յորժամ գագաթն միոյ անկեան արտաքոյ կայցէ բոլորակի, ուստի եւ հատանօղքն կամ շօշափօղք որոնք իցեն նորին կամ մին ի որոնից հատանօղ, եւ միւսն շօշափօղ իցէ; ասի եթէ Անկիւնն կայ արտաքոյ բոլորակի, որպիսի ինչ (Ձեւ 95.) ԲԱՀ, ԷԱՀ, ԴԱՀ, ԲԱԷ.... են անկիւնք արտաքոյ բոլորակի։

Աղեղունքն, որք այլեւայլ կէս երկակորոց կշռիցին, այլ հաւասար կենդրոնական անկեանց, ասին Նման աղեղունք բոլորակի. իսկ բաժանածք բոլորակի, որ նման աղեղունս ունիցին, ասին Նման բաժանածք։

45. Շրջապատն որպիսի ինչ եւ կէս երկակորով ձգեալ իցէ, յ360 մասունս հատանի, որք եւ անուանեալ կոչին Աստիճանք։ Մի մի աստիճան բաժանի դարձեալ ի 60 հաւասար մասունս, որ անուանին Վայրկեանք, եւ մի մի վայրկեան ի 60 հաւասար մասունս, որ ասին Երկրորդք։ Արդ 25°46'28" յայտ արարեալ ցուցանէ աստիճանս 25, վայրկեանս 46 եւ երկրորդս 28։ Գաղղիացիք զշրջապատն ի 400 հաւասար մասունս կոտորեն որով, եւ զկէս բոլորակ յ200, եւ զչորրորդն բոլորակի, զոր իբրեւ մի միութիւն դնեն, ի 100 հաւասար մասունս։ Աստիճանքս անուանին Տասներորդական աստիճանք, եւ որ ըստ մերոյ կարգին՝ են Վաթսներորդականք։ Արդ մի տասներորդական աստիճան է = 0°,9 = 54' ըստ մերոյ կարգին, մի տասներորդական վայրկեան է = 32",4, մի տասներորդական երկրորդ է = 0°,324, այլովքն հանդերձ։

Արդ եթէ աղեղն ինչ բոլորակի ի ձեռն աստիճանացս, այս ինքն է աստիճանօք, վայրկենիւք եւ երկրորդօք յայտ առնիցի, աստի չէ մարթ զա-

ռանձինն մեծութիւն աղեղանն (զայն՝ որ կախի զճառագայթէն) գտանել, այլ զհամեմատութիւն նորին ընդ բովանդակ շրջապատին. որպիսի ինչ եթէ որ զինչ եւ իցէ աղեղն $+ = 15^{0}36'24''$ իցէ, սովիմք $+ : Հ = 15^{0}36'24'' : 360^{0} = 56184'' : 1296000'' = 2341 : 54000$, ուստի եւ լինիցի

$$+ = \frac{2341}{54000} \cdot \text{Հ} = 0,04335 \cdots \text{Հ}$$

46. Որպէս մարթ է զուղիղ գիծն ի յառաջադէմ խաղալոյ միոյ կիտի ըստ միոյ ուղղութեան ծագեալ համարել, նոյնգունակ կարեմք զմտաւ ածել եթէ անկիւնն ի շրջուն շարժմանէ ուղիղ ինչ գծի շուրջանակի զհաստատուն ինչ կիտիւ, ծագիցէ: Այս ինքն, համարիմք եթէ ուղիղ գիծն ԲԿ (Ձեւ 22.) կացեալ ի սկզբան ի վերայ ԱԿ ուղիղ գծի, շուրջ զհաստատուն Կ կիտիւ շարժիցի, կացեալ ի միոյ երեսաց վերայ, յորմէ ծնանի ԱԿԲ անկիւնն:

Ապա անկիւնն է այլակերպութիւն երկուց ուղղութեանց յօրինեալ ի շրջուն շարժմանէ, որոյ մեծութիւնն (այս է այլակերպութեան) կախի զսակաւ կամ զշատ յառաջադէմ խաղալոյ շրջուն շարժմանն, որ պահանջին. ի ձեռն այսր շարժման մարթին երեւել հաստատուն ինչ շարք այլեւայլ ուղղութեանց:

Շարժումն՝ որ յառաջադէմն խաղայ, գնայ ցանդ ի նոր կէտս, եւ ոչ երբէք դառնայ ի կէտսն ընդ որ միանգամ էանց, ուստի եւ հնար է նմա առանց կատարելոյ մեծանալ երկայնել, այլ սմին հակառակ շրջուն շարժումնն, չէ հնար զի առանց կատարելոյ յանբաւս նովին օրինակաւ յառաջադէմ գնայցէ, քանզի ամենայն ազգիազգի հնարաւոր ուղղութիւնք որ ի Կ կիտէ ի վերայ միոյ երեսաց ձգիցին, կատարին, յորժամ ԲԿ ուղիղ գիծն յԱԿ սկզբան ուղղութենէ արարեալ սկիզբն՝ դարձեալ ի

նոյն ԱԿ ուղղութիւն դարձ առնիցէ։ Որդ թէ առաւել յառաջ խաղայցէ շարժումն, կրկնին միւսանգամ առաջին ուղղութիւնքն ընդ որս միանգամ էանց ԲԿ։

Բովանդակ շրջապատն գործէ զկարի իմն մեծագոյն անկիւն յանկեանց, զորս հնար իցէ ի միջէ կիտէ գագաթան ձգել, որոյ անկեան երկրորդ սրունքն ընդ առաջնոյն ի միասին ի միում վայրի գտանին։

Եթէ ԱԿ սրունքն առցի իբրեւ ուղղութիւն սկզբան, եւ երկրորդ սրունքն ԲԿ սկիզբն արարեալ այնչափ յառաջադէմ խաղայցէ մինչեւ եկեալ կայցէ ի ԿԵ յերկայնութեան ԱԿ գծին, յայնժամ դրոշմիցի մի հարթ անկիւն, ուստի եւ կատարիցի կէսն շրջապատին, ապա եթէ յառաջ եւս խաղայցէ շարժուն սրունքն, յայնժամ մարթեմք զամենայն վայրս իբրեւ երկայնութիւնս այլոց ուղղութեանց ընդ որս յառաջագոյն անցեալ իցէ, զմտաւ ածել։ Որդ ամենայն գոգաւոր անկիւնքն պահանջեն սակաւ, իսկ ուռուցեալ անկիւնքն առաւել քան զկէս շրջապատին։ Ուղիղ անկիւն, որպէս առ կէս հարթ անկեան, պահանջէ չորրորդ մասն շրջապատին։

Ի ժամանակի շրջուն շարժման, Ա, ա եւ ա կէտքն շարժուն սրունից ձգեն զաղեղունս ԱԲ, աբ, եւ աբ։ Իբրեւ շարժուն սրունքն կատարեալ ընուցու զչորրորդն իւրոյ շրջապատին, եկեալ կայցէ ուղղորդ որպէս ԿԴ, ի վերայ ԱԿ ուղղութեան սկզբան, յայնժամ եւ ա կատարիցէ զչորրորդն իւրոյ շրջապատին։ Ըստ սմին օրինակի եթէ շարժուն սրունքն կայցէ ի միասին ընդ ԿԵ երկայնութեան ԱԿ ուղղութեան սկզբբան, յայնժամ եւ ա կատարիցէ զտէ կէս շրջապատին, եւ յաւարտել բովանդակ շրջապատին անցանիցէ եւ ա ընդ բովանդակ շրջապատն։

Զսորին զհետ գայ, եթէ երեքին կէտքն Ա, ա եւ ա միանգամայն ի հաւասար ժամանակի զնոյն

մասնաւոր մասն իւրեանց առանձինն ճանապարհին հատանեն, եւ ի հաւասար ժամանակի ընդ Ղ, ղ, Հ, շրջապատոն որ միում միում ի նոցանէ կշռիցեն, անցանեն։ Ապա ուրեմն հարկ է զի եւ աղեղունքն ԱԲ, ա՛բ՛, աբ այնպէս կշռիցեն ընդ միմեանս, որպէս եւ Ղ, ղ, Հ շրջապատքն կշռեն ընդ միմեանս, այս ինքն հարկ է զի իցէ ԱԲ : ա՛բ՛ : աբ = Ղ : ղ : Հ, յորմէ

$$\text{ԱԲ} : \text{ա՛բ՛} : \text{աբ} = \frac{\text{Ղ}}{4} : \frac{\text{ղ}}{4} : \frac{\text{Հ}}{4},\ \text{այս է}$$

$$\text{ԱԲ} : \frac{\text{Ղ}}{4} = \text{ա՛բ՛} : \frac{\text{ղ}}{4} = \text{աբ} : \frac{\text{Հ}}{4}$$

այս ինքն, եթէ աղեղն բոլորակի ԱԲ, որ ի Կ գագաթանէ ԱԿԲ անկեան որ զինչ եւ իցէ ԱԿ ճառագայթիւ ընդ մէջ երկուց սրունից ձգեալ իցէ, ունի ընդ չորրորդ մասին իւրոյ բոլորակին հաստատուն կշռութիւն։ Արդ եթէ ԱԲ աղեղն բոլորակի՝ իցէ Ներրորդ մասն $\frac{\text{Ղ}}{4}$ մասին, որ նովին երկակտրով ձգեալ իցէ, յայնժամ եւ ա՛բ՛ աղեղն, որ ի Կ գագաթանէ իբրեւ ի կենդրոնէ ի մէջ սրունից ա՛կ երկակտրով ձգիցի իցէ Ներրորդ մասն չորրորդ մասին բոլորակի, որ կշռի նմին։

Յայնց որ ասացանն կարիցես ինքնին իմանալ եթէ զա՛բ՛ աղեղն բոլորակի որ ի Կ գագաթանէ ԱԿԲ անկեան իբրեւ ի կենդրոնէ որ զինչ եւ իցէ ա՛կ կէս երկակտրով ընդ մէջ երկուց սրունիցն ձգեալ իցէ, մարթ է իբրեւ չափ ինչ ԱԿԲ անկեան համարել։ Քանզի եթէ ԿԴ $\perp$ ԱԿ իցէ, ուստի եւ ա՛բ՛դ՛ չորրորդ բոլորակի. եւ դիցուք դրեսցուք եթէ

$\text{ա՛բ՛} : \text{ա՛բ՛դ՛} = 1 : \text{Ն}$, յայնժամ հարկ է զի եւ

$\text{ԱԿԲ} : \text{Ո} = 1 : \text{Ն}$ համեմատիցի, յորմէ

$$\text{աղ.}\ \text{ա՛բ՛} : \text{աղ.}\ \text{ա՛բ՛դ՛} = \text{անկ.}\ \text{ԱԿԲ} : \text{Ո}։$$

Արդ չորրորդ մասն բոլորակի համարի որպէս միու-

թիւն չափելոյ զբոլորակս, եւ ուղիղ անկիւնն, որպէս միութիւն չափելոյ զանկիւնս. եւ նշանակի առաջինն $1^{\text{ղ}}$, իսկ երկրորդն $1^{\text{ա}}$ նշանակօք, որով եւ համեմատութիւնն զոր վերագոյն յիշատակեցաք լինիցի

$$\text{աբ} : 1^{\text{ղ}} = \text{անկ.}\ \text{ԱԿԲ} : 1^{\text{ա}}$$

եւ աստուստի ծագէ

$$\text{անկ.}\ \text{ԱԿԲ} = \frac{1^{\text{ա}}}{1^{\text{ղ}}} \cdot \text{աղ.}\ \text{աբ} = \text{աղ.}\ \text{աբ}$$

Արդ յորժամ ասիցեմք եթէ անկ. ԱԿԲ ունի իւր չափ զաբ աղեղն բոլորակի, որ ձգեալ է ի Կ գագաթանէ որ զինչ եւ իցէ աԿ կէս երկակտորով ի մէջ որունից անկեանն, յայտ արարեալ ցուցանեմք, եթէ իւրաքանչիւր անկիւն այնպէս իմն համեմատի ընդ միոյ ուղիղ անկեան, որպէս աղեղն այն կշռիցի ընդ չորրորդ մասին շրջապատին:

Յասացելոցս զհետ գայ, եթէ

Ա. Ուղիղ անկիւնն ունի մի եւեթ չորրորդ մասն շրջապատի այս է աղեղն 90° իւր չափ, իսկ մի հարթ անկեան է չափ աղեղն 180°: Արդ եթէ ա եւ բ կից անկիւնք իցեն, յայտ է եթէ ա + բ = 180°: Ուստի եւ անկիւնն լման կատարի ի 180°, իսկ անկիւնն բովանդակման յ90°:

Բ. Ամենայն երկակտուր հատարակէ զշրջապատն. իսկ երկու երկակտուրք ուղղորդք ի միմեանց վերայ հաստատեալք, ի չորս հաւասար մասունս բաժանեն:

Գ. Անկիւնքն՝ որոց չափք իցեն հաւասար (նովին կէս երկակտորով ձգեալ) աղեղունք, են հաւասար միմեանց, նոյնպէս եւ սմին հակառակն:

Դ. Ապա անկիւնքն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս չափք նոցա ընդ միմեանս, ուստի եւ՝ որպէս աղեղունքն (նովին ճառագայթիւ ձգեալ,) որ անկեանցն այնոցիկ կշռիցին:

47. Եթէ շրջապատն անցանիցէ ընդ ամենայն անկիւնս շրջանակի իւիք ձեւոյ, կամ որ նոյն ինչ իրք են, եթէ ամենայն կողմանք ձեւոյն լարք իցեն միոյ բոլորակի, ասի Բոլորակին շուրջանակի ձգեալ զձեւովն արտաքոյ, կամ Ձեւոյն ի ներքոյ ձգեալ բոլորակի: Ապա եթէ ամենայն կողմանք ձեւոյն, շօշափօղք իցեն բոլորակի, ասի Բոլորակին ի ներքոյ ձգեալ ձեւոյն կամ Ձեւոյն շուրջանակի զբոլորակաւ:

48. Զքանիօնութիւն ինչ երկրաչափական չափել ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ գտանել զհամեմատութիւնն՝ որ կայցէ ի միջի այնր չափելի քանիօնութեան, եւ այլոյ համազգի քանիօնութեան որ իբրեւ միութիւն հաստատեալ է. կամ գտանել եթէ քանիցս արդեւք, քանիօնութիւնն զոր իբրեւ միութիւն համարիցիմք յայլ ինչ համազգի չափելի քանիօնութեան կայցէ:

Ապա ուրեմն մարթ է գծից՝ գծովք եւեթ, եւ երեսաց՝ երեսօք միայն, եւ մարմնոց՝ մարմնովք միայն չափել, զի չափն իբրեւ մասն չափելի քանիօնութեան համարի, կամ թէ համազգի ընդ նմա, քանզի մարթ է դիպել զի չափելին փոքր քան զեւր չափն լինիցի:

49. Զ26 համարոյ զհետ գայ, եթէ յորժամ երկու հարթ ձեւք միմեանց պատշաճականք իցեն՝ հարկ է զի անկիւնք եւ կողմանք նոցա միով կարգաւ միմեանց հաւասարք լինիցին: Զհաւասար անկիւնս եւ զկողմանս երկուց պատշաճական ձեւոց կոչեմք Միաբանս:

Նոյնպէս ի նման ձեւս կողմանքն, յորս յերկոսին եւս ձեւս հաւասար անկիւնք գտանին, ասին Միաբան, նոյնպէս եւ անկիւնքն որ կան ի նոսա:

ԳԼՈՒԽ Բ

ՅԱՂԱԳՍ ՊԱՏՇԱՃԱԿԱՆՈՒԹԵԱՆ ԵՐԵՔԱՆԿԵԱՆՑ, ԵՒ ՃՇՄԱՐՏՈՒԹԵԱՆՑՆ ՈՐ Ի ՆՄԻՆ ՀԱՍՏԱՏԵԱԼ ԵՆ

50. ԵՐԵՔԱՆԿԻՒՆՆ` յորում երեք կողմանքն հաւասար իցեն միմեանց անուանեալ կոչի Հաւասարակող. իսկ երեքանկիւնն, որոյ երկու կողմանքն եւեթ հաւասարք իցեն, կոչի Հաւասարասրուն. իսկ երեքանկիւնն` որոյ եւ ոչ մի կողմն հաւասար միւսումն իցէ, ասի Չհաւասարակող: Ի հաւասարասրուն երեքանկեան հաւասար կողմանք յորջորջին Սրունք, իսկ երրորդ չհաւասար կողմն Խարիսխ:

Գագաթն անկեան որ կայ յանդիման խարսխի երեքանկեան, ասի Ծայր կամ Գագաթն երեքանկեան, եւ ուղղորդ գիծն, որ ի ծայրէ անտի երեքանկեան ի վերայ խարսխին անկանիցի, ասի Բարձրութիւն երեքանկեան:

Զոր կողմն հաւասարակող երեքանկեան եւ կամիցի ոք, մարթ է խարիսխ համարել:

Զատուցելոցս զհետ գայ, եթէ ամենայն հաւասարակող երեքանկիւնք են եւ հաւասարասրուն, այլ ոչ այն հակառակ:

Յորժամ երկայնեսցի ԱԲ կողմն ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 23.) ի Դ կոյս, ԳԲԴ անկիւնն որ ծագէ, յորջորջի Արտաքին անկիւն, եւ երկոքին ԲԱԳ եւ ԱԳԲ անկիւնքն երեքանկեան, որ չեն կից ԳԲԴ արտաքին անկեան, ասին Ներքին հակառակ անկիւնք:

Եթէ ի միում ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 24.), մի անկիւնն Ա = Ո իցէ, անուանեալ կոչի երեքանկիւնն Ուղղանկիւն, իսկ եթէ մի անկիւնն ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 25.) Ա > Ո իցէ, ասի Բթանկիւն. այլ եթէ երեք անկիւնքն եւս ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 26.) սուր իցեն, ասի Սրանկիւն: ՅԱԲԳ (Ձեւ 24.) ուղղանկիւն երեքանկեան կողմն ԲԳ որ կայ յանդիման ուղիղ անկեան, կոչի Ներքնաձիգ,

խակ կողմանքն ԱԲ եւ ԱԳ, որք զուգէղ անկիւնն ի միջի փակիցեն, ԷՋք։

51. Եթէ երկուց երեքանկեանց երկու անկիւնքն եւ մի կողմն որ իցէ ի միջի անկեանցն այնոցիկ փոխանակաւ հաւասարք իցեն միմեանց, երկոքին երեքանկիւնքն միմեանց պատշաճականք են։

Համարեսցուք եթէ իցէ անկ. Ա = Դ, եւ անկ. Բ = Ե (Ձեւ 27.) եւ կողմն ԱԲ = ԴԵ։ Արդ զմտաւ ածցուք եթէ կողմն ԴԵ այնպէս իմն եդեալ կայցէ ի վերայ ԱԲ կողման, որպէս զի ծագքն Ա ի Դ, եւ Բ յԵ անկանիցին, եւ ΔԴԵԶ կայցէ ի նմին կողման ԱԲ գծին, յորում գտանիցի ΔԱԲԳ։ Արդ որովհետեւ անկ. Դ = Ա, եւ անկ. Բ = Ե, ուրեմն հարկ է զի ԴԶ յԱԳ եւ ԵԶ ի ԲԳ ուղղութեան վերայ անկանիցին, քանզի հաւասարութիւն անկեանց ի հաւասար հեռացեալն լինել սրունիցն կայ։ Նաեւ քանզի կէտն Զ կայ եթէ ի ԴԶ եւ եթէ յԵԶ գիծս, ապա ուրեմն եւ ի հարկէ խակ կայցէ եւ յԱԳ եւ ի ԲԳ, ուստի եւ ի Գ կէտ հատանելոյ զմիմեանս երկուց գծիցն այնոցիկ։ Այսուիկ տեսանես եթէ ΔԴԵԶ այնպէս իմն եդեալ է ի տեղի ԱԲԳ երեքանկեան, որպէս զի երկոքեանն եւս ի մէջ նոյն սահմանաց փակեալ են, յորմէ եւ կարիցեմք ասել եթէ երկոքեանն եւս նոյն են։ Ապա ուրեմն Δ ԱԲԳ ≅ ΔԴԵԶ (Հ. 26.)։

Զսորին զհետ գայ, եթէ յերկուս պատշաճական երեքանկիւնս ամենայն կողմանքն եւ ամենայն անկիւնքն հաւասար են միմեանց փոխանակաւ. եւ թէ յանդիման հաւասար կողմանց կան հաւասար անկիւնք, եւ թէ ի մէջ հաւասար կողմանց կան հաւասար անկիւնք. եւ ի մէջ հաւասար անկեանց կան հաւասար կողմանք։ Վասնզի կարեմք զմին ի պատշաճական երեքանկեանց այնպէս փոխանակ միւսոյն դնել, որպէս զի չիցէ այլակերպութիւն ինչ ի միջի։

52. Եթէ երկուց ԱԲԳ եւ ԴԵԶ (Ձեւ 27.) երեքանկեանց երկու կողմանքն եւ անկիւնքն՝ որ ի

նոսին կայցեն, միմեանց հաւասարք իցեն, երեքանկիւնքն այնուքիկ միմեանց պատշաճականք են. այս ինքն եթէ ԱԲ = ԴԵ, ԲԳ = ԵԶ, եւ անկիւնն Բ = Ե, յայնժամ ΔԱԲԳ ≅ ΔԴԵԶ:

Զմտաւ ածցուք եթէ ΔԴԵԶ այնպէս իմն զետեղեալ կայցէ յΔԱԲԳ, որպէս զի Ե գագաթան ի Բ անկանել, եւ ԵԶ կողման ի ԲԳ, այսու եւ ԴԵ եւս յԱԲ անկանիցի, վասն հաւասար հեռացեալ լինելոյ սրունիցն. ուստի եւ ըստ մերոյ համարելոյ եւ կէտն Զ ի Գ, եւ Դ յԱ կայցէ. ապա ուրեմն կողմն ԱԳ = ԴԶ (Հ. 20. Ե.) եւ անկիւնն Ա = Դ, անկ. Գ = Զ, ուստի ΔԱԲԳ ≅ ΔԴԵԶ (Հ. 51.):

53. Եթէ ի միում ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 28.) երկու կողմանքն ԱԲ եւ ԱԳ միմեանց հաւասար իցեն, եւ յանդիմանակաց անկիւնքն կողմանցն այնոցիկ Ն եւ Տ միմեանց հաւասարք են. եւ սմին հակառակ, եթէ յերեքանկեան ԱԲԳ (Ձեւ 29.) երկու անկիւնքն ԱԳԲ եւ ԱԲԳ միմեանց հաւասարք իցեն, յայնժամ եւ յանդիմանակաց կողմանքն ԱԲ եւ ԱԳ միմեանց հաւասարք են:

Երկայնեսցուք զկողմն ԱԲ որչափ եւ կամք իցեն մինչեւ ցԴ, ըստ նմին օրինակի եւ զկողմն ԱԳ, որպէս զի լինել ԳԵ = ԲԴ. յետ այսորիկ ձգեալ զուղիղ գիծսն ԳԴ եւ ԲԵ, յայտ է եթէ (Հ. 52.) ΔԱԳԴ ≅ ΔԱԲԵ, քանզի ԱԲ = ԱԳ ըստ մերոյ համարելոյ, եւ ԱԴ = ԱԵ ըստ կազմածոյն, եւ անկ. ԲԱԵ = անկ. ԳԱԴ, ուստի եւ ԳԴ = ԲԵ եւ անկ. Դ = անկ. Ե: Արդ որովհետեւ ԲԴ = ԳԵ, ԳԴ = ԲԵ, եւ անկ. Դ = Ե են, ուրեմն եւ (Հ. 52.) ΔԲԳԴ ≅ ΔԲԳԵ, ուստի եւ անկ. ԴԲԳ = անկ. ԲԳԵ. որով եւ անկ. ԱԲԳ = ԱԳԲ կամ Տ = Ն (Հ. 30. Բ.)

Ըստ սմին օրինակի ցուցանի եւ երկրորդ մասն: Քանզի եթէ չլինէր ԱԲ = ԱԳ (Ձեւ 29.) յայնժամ հարկ ի վերայ կայր ԱԲ ≷ ԱԳ լինել: Արդ եթէ իցէ ԱԲ > ԱԳ, յայտ է եթէ անտի կարիցեմք մասն

ինչ հատանել ԲԴ = ԱԳ, որով եւ (Հ. 52.) վասն ԲԴ = ԱԳ, ԲԳ = ԳԲ, եւ անկ. Բ = ԲԳԱ լինելոյ, ΔԲԳԴ ≅ ΔԱԲԳ լինիցի, որ անպատեհ իմն է։ Այնգունակ երեւի եւ անպատեհութիւն, յորժամ ԱԲ < ԱԳ դնիցեմք։ Արդ որովհետեւ ոչ ԱԲ > ԱԳ, եւ ոչ ԱԲ < ԱԳ, ուրեմն ԱԲ = ԱԳ։

Ա. Ապա ուրեմն ի հաւասարասրուն երեքանկեան հաւասար են եւ անկիւնքն ի խարիսխ. եւ խոտորնակն եթէ երկու անկիւնքն երեքանկեան հաւասար իցեն, երեքանկիւնն է հաւասարասրուն։

Բ. Արդ եթէ երեքանկիւնն ԱԲԳ հաւասարակող իցէ, ԲԳ = ԱԳ = ԱԲ, յայնժամ եւ երեք անկիւնքն եւս հաւասարք են, Ա = Բ = Գ. եւ սմին հակառակ, եթէ հաւասարանկիւն իցէ ԱԲԳ երեքանկիւնն, յայնժամ եւ երեք կողմանքն եւս միմեանց հաւասարք են, ուստի եւ երեքանկիւնն ԱԲԳ կարգաւոր։

Գ. Յամենայն երեքանկիւնս հանդէպ հաւասար կողմանց կան հաւասար անկիւնք, եւ յանդիման հաւասար անկեանց հաւասար կողմանք։

54. Երկու երեքանկիւնք միմեանց պատշաճականք են եթէ երեք կողմանք միոյն երից կողմանց միւսոյն փոխանակաւ հաւասարք իցեն։ Որպէս (Ձեւ 30.) ԱԳ = ԴԶ, ԱԲ = ԴԵ, ԲԳ = ԶԵ, ուստի ΔԱԲԳ ≅ ΔԴԵԶ։

Դիցուք գրեսցուք եթէ ΔԴԵԶ այնպէս իմն զետեղեալ կայցէ ի վերայ ԱԲԳ երեքանկեան, որպէս զի Դ անկանիցի յԱ, Ե ի Բ, եւ Զ ի Զ՛. եւ ընդ միմեանս յօդիցին երկոքին ծայրքն Գ եւ Զ՛ գծիւս ԳԶ՛։ Աստատին ծագեն երկու հաւասարասրուն երեքանկիւնք ԱԳԶ՛ եւ ԳԲԶ՛, քանզի ըստ մերոյ համարելոյ ԱԳ = ԱԶ՛, ԲԳ = ԲԶ՛, ուստի եւ ճ = ն, եւ ր = ց, որով եւ ճ + ր = ն + ց, կամ անկ. ԱԳԲ = ԱԶ՛Բ = ԴԶԵ, ուստի ΔԱԳԲ ≅ ΔԴԶԵ (Հ. 52.)

Մարթեն երկոքին երեքանկիւնքն այնպիսի իմն կերպարանս ունել, որպէս զի յորժամ ըստ յառաջագոյն տացեալ օրինակին ի միմեանց վերայ հաստատիցին, ԳԱԶ՛ անկիւնն բարձրացեալ լինիցի եւ կամ հարթ։ Յառաջին դէպսն ուղիղ գիծն ԳԶ՛ կայ արտաքոյ ԱԳԲԶ՛ չորեքկուսի ձեւոյն, իսկ յերկրորդումն ԱԳ եւ ԱԶ՛ կան ի միում ուղիղ գծի, յորոյ վերայ անկանի եւ ԳԶ՛. յերկոսին եւս դէպսն մարթ է դիւրաւ զճշմարտութիւն մերոյ կանոնիս ցուցանել։

55. Խնդիր։ Ի վերայ միոյ Գ կիտի ՄՆ ուղիղ գծին (Ձեւ 31.) յօրինել անկիւն ինչ, որ հաւասար իցէ ա անկեան ծանուցելոյ։

Լուծումն։ Ի վերայ սրունից ա անկեան դիջիր ա եւ բ կէտս որպէս եւ կամք իցեն քեզ. հատ ԳԱ = դա, այնուհետեւ յԱ կիտէ իբրեւ ի կենդրոնէ ԱԲ = աբ կէս երկակտրով ձգեա աղեղն մի ձ, եւ ապա ի Գ կիտէ իբրեւ ի կենդրոնէ ԳԲ = դբ կէս երկակտրով մեւս եւս աղեղն պք, որ զձ հատանիցէ ի Բ կիտի անդ։ Իբրեւ ձգիցես զուղիղ գիծն ԳԲ, լինիցի անկիւնն ԱԳԲ = ա։ Վասնզի եթէ ձգիցեմք զուղիղ գիծսն ԱԲ եւ աբ, ելանիցեն երկու երեքանկիւնք պատշաճականք ԱԲԳ եւ աբդ (Հ. 54.) ուստի եւ անկ. ԱԳԲ = ադբ = ա, քանզի կան հանդէպ հաւասար ԱԲ եւ աբ կողմանց։

56. Խնդիր։ Ձգել հաւասարակող երեքանկիւն, յորժամ ԱԲ կողմն (Ձեւ 32.) ծանուցեալ իցէ։

Լուծումն։ Ձգեա յԱ եւ ի Բ կիտից ԱԲ կէս երկակտրով զփոքր աղեղունսն պք եւ ձ։ Ի Գ կիտէ հատանելոյ զմիմեանս երկուց աղեղանց ձգեա ուղիղ գիծս ԱԳ եւ ԲԳ, որով ելանիցէ ΔԱԲԳ հաւասարակող։ Վասնզի ԱԳ = ԲԳ, զի ճառագայթք են ի նմին աղեղան ըստ մեծութեան ԱԲ գծին, ուրեմն ԱԲ = ԱԳ = ԲԳ։

Օ. սորին զհետ գայ, եթէ մարթ է նովին օրինակաւ հաւասարասրուն երեքանկիւն կազմել, յորժամ զԱԲ կողմն ծանուցեալ դնիցես եւ անտի ձգիցես բոլորակ կամ աղեղն, եւ զծայրս երկուց ճառա-

գայթից բոլորակի կամ աղեղան ուղիղ գծիւ ընդ միմեանս յօդիցես։

57. Եթէ երկուց հաւասարասրուն երեքանկեանց, մի հասարակաց խարիսխ իցէ, ուղիղ գիծն, որ զգագաթունս երկուց երեքանկեանց ընդ միմեանս յօդիցէ, եւ մինչեւ ի խարիսխն երկայնեսցի, ի հարկէ իսկ հասարակէ 1) զանկիւնս ծայրիցն, 2) զերեքանկիւնան գլխովին յերկուս պատշաճական երեքանկիւնս, 3) զխարիսխն, եւ 4) կայ ուղղորդ ի վերայ խարսխին։

Իցէ (Ձեւ 33.) ԱԲ = ԱԳ, եւ ԲԴ = ԳԴ. որովհետեւ եւ ԱԴ = ԱԴ, ուրեմն ΔԱԲԴ ≅ ΔԱԳԴ (Հ. 54.), ուստի եւ 1) յ = ‡, ∫ = ն. եւ քանզի ԱԲ = ԱԳ, ԱԶ = ԱԶ եւ յ = ‡, ապա 2) ΔԱԲԶ ≅ ΔԱԶԳ։ Նոյնգունակ ցուցանի, եթէ ΔԲԴԶ ≅ ΔԳԴԶ, ուրեմն եւ 3) ԲԶ = ԶԳ, եւ անկ. ԱԶԲ = ԱԶԳ, ուստի եւ 4) ԱԶ ⊥ ԲԳ (Հ. 30. Երր.)։

Եթէ հաւասարասրուն ΔԲԵԳ իցէ ի ներքոյ ΔԱԲԳ. յայնժամ պարտ է զԱԵ գիծն մինչեւ ի խարիսխ անդր երկայնել, որով եւ նովին օրինակաւ որպէս ասացաք լինիցի ցուցումն։

58. Խնդիր։ Ծանուցեալ ինչ անկիւն ԲԱԳ (Ձեւ 34.) հասարակել։

Լուծումն։ Արա Ա∫ = Ան, եւ ի վերայ Ֆ խարսխին յօրինեա հաւասարասրուն ΔՖԳ. ուղիղ գիծն ԱԴ հասարակիցէ զԱ անկիւնն (Հ. 57.)։

Արդ եթէ զմի մի մասն դարձեալ նովին օրինակաւ հասարակիցես, յայնժամ անկիւնն այն ի չորս հաւասար մասունս բաժանիցի, եւ նոյնգունակ կրկնելով, մարթ է զմի անկիւնն յ8, 16, 32..... եւ հասարակաց օրինակաւ յ2^n հաւասար մասունս բաժանել։

59. Խնդիր։ Ծանուցեալ ուղիղ ինչ գիծ հասարակել։

Լուծումն։ Ի վերայ ուղիղ գծին ծանուցելոյ, զոր օրինակ ԲԳ գծի (Ձեւ 33.) յօրինեա երկուս ԱԲԳ

եւ ԲԳԴ կամ ԲԳԵ հաւասարասրուն երեքանկիւնս, եւ ձգեա զուղիղ գիծն ԱԴ կամ ԱԵ, որով գիծն այն ԲԳ հասարակիցի ի կէտն Զ կամ թէ ԲԶ=ԳԶ (Հ. 57.):

Եթէ սոյին օրինակաւ ԲԶ եւ ԳԶ դարձեալ հասարակիցին, յայնժամ ԲԳ ի չորս հաւասար մասունս հատանիցի: Արդ մարթի զուղիղ գիծ ինչ մի ըստ միջէ հասարակելով յ8, 16, 32....2^n մասունս բաժանել:

60. Խնդիր: Ի վերայ ուղիղ ինչ ԲԳ գծի (Ձեւ 35.) ի միում Ա կիտի ձգել գիծ ուղղորդ:

Լուծումն: ՅԱ կիտէ անտի ընդ երկոսին կողմանս հատ մասունս հաւասարս ԱՄ=ԱՆ, ապա ի վերայ ՄՆ գծին յօրինեա հաւասարասրուն ΔՄՆԴ, եւ ձգեա զուղիղ գիծն ԴԱ, որով լինիցի ԴԱ ⊥ ԲԳ: Վասնզի է ԱՄ=ԱՆ, ՄԴ=ՆԴ, եւ ԱԴ=ԱԴ, ուստի եւ ΔՄԱԴ ≅ ΔՆԱԴ, ուրեմն անկ. ՄԱԴ=անկ. ՆԱԴ, որով, եւ ԱԴ ⊥ ԲԳ (Հ. 30. Եւր.):

61. Արտաքին անկիւնն ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 23.) մեծագոյն է քան զմի մի ներքին հակառակ անկիւն, այս ինքն է ԳԲԴ > ԲԳԱ եւ > ԳԱԲ:

Հասարակեա զԲԳ յԷ, եւ ձգեա գիծ ուղիղ ԱԵ, եւ արա ԷԵ=ԱԷ: Յետ այսորիկ ձգեա զԲԵ, յայնժամ ΔԲԷԵ ≅ ΔԱԷԳ (Հ. 52.): Ապա ուրեմն է պ=գ, ուստի եւ պ+փ կամ ԳԲԴ > գ: Իբրեւ երկայնիցեմք զԳԲ ի Զ կողմն, եւ հասարակիցեմք զԱԲ, յայնժամ երեւիցի դարձեալ եթէ ԱԲԶ > ԲԱԳ: Եւ քանզի ԱԲԶ=ԳԲԴ (Հ. 30. Գ.), ուրեմն եւ ԳԲԴ > ԲԱԳ:

Ա. Որովհետեւ անկ. ԳԲԴ + ԳԲԱ = 2Ո (Հ. 34.). այլ սակայն ԳԲԴ > ԲԳԱ, եւ եւս > ԳԱԲ. ապա ուրեմն եթէ ԲԳԱ + ԳԲԱ < 2Ո, եւ եթէ ԲԱԳ + ԳԲԱ < 2Ո, այս ինքն, յամենայն երեքանկիւնս երկու անկիւնքն միանգամայն են < 2Ո կամ < 180°:

Բ. Ապա ուրեմն յամենայն երեքանկիւնս մարթ է միոյ եւեթ ուղիղ անկեան գտանել, կամ միոյ եւեթ բութ անկեան։ Վասնզի եթէ յ∆ԱԲԳ մի անկիւնն զոր օրինակ Ա ուղիղ իցէ, յայնժամ քանզի (ըստ Ա.) եթէ Ա + Բ < 2Ո, եւ եթէ Ա + Գ < 2Ո լինելոց են, ուրեմն ի հարկէ իսկ Բ < Ո, եւ Գ < Ո լինիցին։ Ըստ նմին օրինակի եթէ յ∆աբգ անկ. ա > Ո, յայնժամ ա + բ < 2Ո եւ ա + գ < 2Ո լինելոյ (ըստ Ա.), հարկ է վերայ կայ բ < Ո, եւ գ < Ո լինել։

Գ. Ի հաւասարասրուն ԱԲԳ երեքանկեանս (Ձեւ 28.) անկիւնքն ի խարսխի անդ սուր են։ Որովհետեւ ե + դ < 2Ո, եւ ե = դ (Հ. 53. Ա.), ուրեմն 2ե < 2Ո, եւ 2դ < 2Ո, կամ ե < Ո, դ < Ո։ Ուրեմն ի հաւասարակող երեքանկեան ամենայն անկիւնքն սուրք են։

Դ. Յուղղանկիւն երեքանկեան սուր են երկոքին անկիւնքն որ ի ներքնաձիգն, եւ եթէ ի միում երեքանկեան մի բութ անկիւն գտանիցի, մի մի յերկուց անկեանցն մնացելոց սուր են (ըստ Բ.)։ Զօրոյ զհետ գայ,

Ե. Յուղղանկիւն երեքանկեան ուղիղ անկիւնն մեծագոյն է քան զայլ անկիւնս, եւ ի բութանկիւն երեքանկեան բութ անկիւնն։

62. Խնդիր։ Ի վերայ ԲԳ գծի (Ձեւ 35.), յայլմէ Դ կէտէ, որ արտաքոյ կայցէ այնր գծին, ձգել գիծ ուղղորդ։

Լուծումն։ Ի Դ կէտէ անտի որ զինչ եւ իցէ ԴԵ կէս երկակտրով ձգեա աղեղն, որ զԲԳ ուղիղ գիծն ի ս եւ ի ն կէտս հատանիցէ։ Հատարակեա զգիծն սն (Հ. 59.) յԱ, եւ ձգեա զԴԱ, որով լինիցի ԴԱ $\perp$ ԲԳ. (Հ. 57.)։ Յանձնէ իսկ յայտ է եթէ ի դէպս ինչ, ուր պէտք լինիցին մարթ է զԲԳ գիծն երկայնել։

63. Ի միոջէ Գ կիտէ (Ձեւ 36.) մարթ է միոյ միայնոյ ուղղորդ գծի անկանել յԱԲ:

Համարեսցուք եթէ ԳԴ ⊥ ԱԲ, եւ մեւս եւս ԳԵ ⊥ ԱԲ: Արդ ուրովհետեւ ի ԳԴԵ երեքանկեան Տ = Ո, ուրեմն Ն < Ո (Հ. 61. Դ.). ուրեմն ԳԵ կայ միտեալ ի գիծն ԱԲ:

Ա. Եթէ ուղիղ գիծ ինչ ԳԵ կայցէ միտեալ ի վերայ ԱԲ ուղիղ գծի, յայնժամ ուղղորդ գիծն՝ որ ի Գ գագաթանէ ի վերայ ԱԲ ուղղութեան ձգիցի, կայ ի կողմն սուր անկեան: Քանզի եթէ գիծն՝ որ կայցէ ուղղորդ, անկանիցի ի ԳԵ, յայնժամ անկ. ԳԵԱ = ԳԵԲ, որ հակառակ է մերոյ ԳԵԱ < ԳԵԲ համարելոյ: Ապա եթէ կայցէ ուղղորդ գիծն ի կողմն բութ անկեան ի ԳԶ, լինիցի յ∆ԳԵԶ, անկ. ԳԵԶ > Ո, եւ ԳԶԵ = Ո, ուստի եւ ԳԵԶ + ԳԶԵ > 2Ո, որ անպատեհ իմն է (Հ. 61. Ա.):

Բ. Եթէ ոք ի գագաթանէ միոյ երեքանկեան ձգիցէ գիծ ուղղորդ ի վերայ խարսխին, հարկ է զի անկանիցի այն ի ներքին կողմն երեքանկեան, եթէ երկոքին անկիւնքն՝ որ ի խարսխի անդ՝ սուրք իցեն: Ապա եթէ մին յանկեանց անտի բութ իցէ, յայնժամ գիծն ուղղորդ՝ կայ արտաքոյ երեքանկեան եւ ի կողմն բութ անկեան: Քանզի եթէ ի սրանկիւն երեքանկեան ԳԲԱ (Ձեւ 26.) անկանիցի արտաքոյ ի կողմն ԱԲԴ՝ բութ անկեան յԱԴ՝, յայնժամ լինէին յ∆ԳԲԴ՝ մի ուղիղ անկիւն ԳԴ՝Բ եւ մի բութ ԳԲԴ՝, որ է անպատեհ (Հ. 61. Ա.): Ապա եթէ (Ձեւ 25.) բութ իցէ ԳԱԲ, հարկ է ուղղորդ ԳԴ գծին ի կողմն բութ անկեանն (ըստ Ա.) անկանել, ուստի եւ արտաքոյ երեքանկեան:

64. Յամենայն երեքանկեան հանդէպ մեծագոյն կողման կայ եւ մեծագոյն անկիւն, նոյնպէս եւ խոտորնակի յանդիման մեծագոյն անկեան կայ եւ մեծագոյն կողմն:

Դիցուք գրեսցուք, եթէ յΔԱԲԳ (Ձեւ 37.) իցէ ԲԳ > ԱԲ, յայնժամ եւ ԲԱԳ > Գ: Վասն-զի իբրեւ ԲԴ = ԲԱ առնիցեմք, եւ ձգիցեմք զԱԴ, լինիցի Ս = Ն (Հ. 53.), ուստի եւ Ս + Պ > Ն կամ Ա > Ն: Եւ զի Ն > Գ (Հ. 61.), որչափ եւս առա-ւել Ա > Գ:

Ըստ սմին օրինակի ցուցանի եւ երկրորդ մասն: Համարեսցուք եթէ անկ. Ա > Գ. հարկ է զի իցէ եւ ԲԳ > ԲԱ: Վասնզի եթէ չլինէր ԲԳ > ԲԱ, պարտ էր կամ ԲԳ = ԲԱ կամ ԲԳ < ԲԱ լինել: Յառա-ջին դէպսն լինէր Գ = Ա (Հ. 53. Գ.), իսկ յերկ-րորդ դէպսն լինէր Ա < Գ (ըստ առաջնոյ մասին), եւ երկոքին եւս են հակառակ մերոյ Ա > Գ հա-մարելոյ, ապա ուրեմն ...:

Ա. Յուղղանկիւն երեքանկեան ներքնաձիգն իսկ ի բթանկիւն երեքանկեան՝ յանդիմանակաց կողմն բութ անկեան, է մեծագոյն կողմն: Գոր-ծեալ ի չհաւասարակող երեքանկեան ամենայն ան-կիւնքն միմեանց չհաւասարք են, եւ հանդէպ մեծա-գոյն կողման կայ եւ մեծագոյն անկիւն, եւ յան-դիման փոքրագոյն կողման փոքրագոյն անկիւն. եւ եթէ ամենայն անկիւնքն երեքանկեան չհաւա-սարք իցեն միմեանց, հարկ է զի երեքանկիւնն չհաւասարակող իցէ, ուստի եւ յանդիման մեծա-գոյն անկեան կայ եւ մեծագոյն կողմն, եւ հանդէպ փոքրագոյն անկեան փոքրագոյն կողմն:

Ապա ուրեմն եւ հանդէպ հաւասար կողմանց կան եւ հաւասար անկիւնք, եւ սմին հակառակ, այլովքն հանդերձ:

Բ. Վասն զամենայն ուղիղ գծս, զորս մարթ իցէ ի միջէ Գ կիտէ ձգել առ այլ ԱԲ ուղիղ գիծ, ուղղորդ գիծն ԳԴ կարճագոյն է (Ձեւ 36.): Իցէ ԳԶ միտեալ ի վերայ ԱԲ գծի, յայտ է եթէ ԳԴԶ = Ռ, ուրեմն (ըստ Ա.) ներքնաձիգն ԳԶ > ԳԴ: Նաց-արձակութիւն միոյ գծի ի միջէ կիտէ չափի ի ձեռն

ուղղորդ գծին, որ ձգիցի ի կիտէ անտի ի վերայ այնր ուղիղ գծի։

Գ. Եթէ ոք յոր զինչ եւ իցէ Գ կիտէ ԳԴ ուղղորդ գծին, ձգիցէ ուղիղ գիծս առ երկուս Զ եւ Է կէտս ԱԲ գծին, որ միով չափով հեռի իցեն յոտից ԳԴ ուղղորդ գծին, յայնժամ երկոքին գիծքն միմեանց հաւասարք են։ Վասնզի ԴԷ = ԴԶ, ԳԴ = ԳԴ եւ ւ = ո, ուրեմն ΔԳԷԴ ≅ ΔԳԴԶ, ուստի եւ ԳԷ = ԳԶ (Հ. 51.)։

Դ. Յերկուց ԳԵ եւ ԳԶ ուղիղ գծից, որք կան ի միում կողման ԳԴ ուղղորդ գծին, մեծագոյն այն է, որոյ կէտն կատարածի հեռագոյն իցէ ի Դ ոտից ԳԴ ուղղորդ գծին։ Վասնզի յΔԳԴԵ է ւ = ո, ուստի եւ ն < ո (Հ. 61. Դ.) եւ փ > ո, որով եւ փ > ր, ուրեմն ԳԶ > ԳԵ։ Նոյն եթէ ԳԵ եւ ԳԷ յերկոսին կողմանս կայցեն ԳԴ գծին, ցուցանի ճշմարտութիւն ասացելոցս, եթէ ԴԷ = ԴԶ դնիցեմք, քանզի յայնժամ (ըստ Գ.) ԳԶ = ԳԷ ուստի եւ ԳԷ > ԳԵ։

Ե. Զասացելոցս (որ ի Գ եւ ի Դ) զհետ գայ, եթէ ի միջէ Գ կիտէ չէ հնար երիս գիծս ուղիղս հաւասարս առ ԱԲ ձգել, քանզի յԱԲ ուղիղ գծի չէ մարթ երիս կէտս գտանել՝ որ հաւասար հեռի իցեն ի Դ ոտիցն։

65. Յամենայն երեքանկիւնս բովանդակութիւն երկուց կողմանցն մեծագոյն, իսկ այլակերպութիւն երկուց կողմանց փոքրագոյն է քան զերրորդ կողմն։ Զոր օրինակ յΔԱԲԳ (Ձեւ 37.) ԱԲ + ԱԳ > ԲԳ, այլ սակայն ԲԳ — ԱԲ < ԱԳ։

Եթէ իցէ ԱԳ = ԲԳ, եւ կամ ԱԳ > ԲԳ, յայնժամ չեն ինչ կարեւոր պէտք զյառաջադրութիւնս ցուցանելոյ, քանզի ինքնին իսկ յայտ է։ Արդ դիցուք գրեսցուք եթէ ԲԳ > ԱԳ եւ > ԱԲ. երկայնեա զԱԳ, որպէս զի լինել ԱԵ = ԱԲ, եւ լինիցի յΔԱԲԵ անկ. բ = ե (Հ. 53.), ուստի եւ բ + գ կամ ԵԲԳ > ե, որով եւ ԳԵ > ԲԳ (Հ. 64.)։ Նւ

զի ԳԵ = ԱԳ + ԱԵ = ԱԳ + ԱԲ, ուրեմն եւ ԱԳ + ԱԲ > ԲԳ։

Ըստ սմին օրինակի ցուցանի եւ երկրորդ մասն։ Վասնզի ԲԳ < ԱԳ + ԱԲ, ուրեմն ԲԳ — ԱԲ < ԱԳ + ԱԲ — ԱԲ կամ ԲԳ — ԱԲ < ԱԳ։

Ի ձեռն կազմածոյ ձեւոյն ցուցանին բանք մեր։ Համարեսցուք եթէ իցէ մի ի կողիցն երեքանկեան զոր օրինակ ԲԳ > ԱԲ· արդ առնիջիր ԲԴ = ԲԱ, եւ ձգեա զԱԴ, եւ լինիցի (Հ. 53.) Տ = Ն, այլ Ն > Պ (Հ. 61.)· եւ քանզի Ն < Ո (Հ. 61. Բ.), ապա որչափ եւս առաւել Պ < Ո, այլ Փ > Ո, ուստի եւ ԱԳ > ԳԴ (Հ. 64.)։ Նաեւ արդ որովհետեւ ԳԴ = ԲԳ — ԲԴ = ԲԳ — ԲԱ, ուրեմն ԱԳ > ԲԳ — ԲԱ։

Ա. Վասն կազմածոյ երեքանկեանն երից ուղիղ գծից պէտք են. արդ իբրեւ սոքա առնուցուն, յայնժամ եւեթ հնարաւոր է երեքանկիւնն, յորժամ երկու ի նոցանէ միահամուռ գումարեալ, մեծագոյն քան զերրորդն իցեն կամ թէ այլակերպութիւնն երկոցունց գծից փոքրագոյն քան զերրորդ ուղիղ գիծն գտանիցի։ Արդ եթէ վասն կազմածոյ միոյ երեքանկեան երկու կողքն եւեթ առնուցուն, երրորդ կողմն ըստ հաճոյից մարթ է լինել, այլ սակայն հարկ է նմա զհանգամանս, զորմէ ի վեր անդր ասացաք, ունել։

Բ. Ամենայն բեկեալ գիծ ԱԳԴԵԶԲ (Ձեւ 38.), որ ի մէջ երկուց Ա եւ Բ կիտից ձգիցի կամ կոր գիծն ԱՄՆԲ, մեծագոյն է քան զուղիղ գիծն ԱԲ։ Վասնզի իբրեւ ձգիցեմք զուղիղ գիծսն ԱԴ, ԱԵ եւ ԱԶ, յայնժամ ԱԳ + ԳԴ > ԱԴ, եւ ԱԴ + ԴԵ > ԱԵ, եւ ԱԵ + ԵԶ > ԱԶ, եւ ԱԶ + ԶԲ > ԱԲ, զորս իբրեւ ի միմեանս յաւելուցումք լինիցի

ԱԳ + ԳԴ + ԱԴ + ԴԵ + ԱԵ + ԵԶ + ԱԶ + ԶԲ > ԱԴ + ԱԵ + ԱԶ + ԱԲ ուստի եւ

ԱԳ + ԳԴ + ԴԵ + ԵԶ + ԶԲ > ԱԲ,

Ըստ նմին օրինակի եթէ զկոր գիծն ԱՄՆԲ յանհամար մասունս մանունս կոտորեալ համարիցիմք, ապաքէն կարիցեմք զմի մի մասն ուղիղ վարկանել, ուստի եւ զկոր գիծն զլսովին իբրեւ գիծ մի որ ի մասունս անթիւս բեկեալ իցէ. եւ աստի կարիցեմք ի միտ առնուլ որպէս վերագոյն, եթէ ԱՄՆԲ > ԱԲ իցէ:

Գ. Ապա ուրեմն ուղիղ գիծն կարճագոյն է քան զայլ գիծս, զորս հնար իցէ յԱ կիտէ ի Բ ձգել. որ եւ անուանի Բացարձակութիւն կամ Հեռաւորութիւն ի միմեանց երկուց Ա եւ Բ կիտից:

Դ. Եթէ ի միոյ երեսոյ վերայ ի մէջ երկուց Ա եւ Բ կիտից երկու որ զինչ եւ իցէ ուղիղ բեկեալ գիծք՝ ԱԳԴԵԶԲ եւ ԱԷԸԹԺԲ ի միում կողման ԱԲ ուղիղ գծին ձգիցին, ցանգ արտաքին բեկեալ գիծն, քան զներքինն մեծագոյն է, յորժամ ամենայն անկիւնքն յետին բեկեալ գծին որ յԱԲ կոյս շրջեալ իցեն, են գոգաւոր անկիւնք: Քանզի անկիւնքն ի Գ, Դ, Ե, Զ (որ յԱԲ կոյս) գոգաւոր են, վասն այսորիկ իբրեւ ուղիղ գիծքն ԱԳ, ԳԴ, ԴԵ, ԵԶ երկայնեսցին, չկարիցեն բնաւ զուղիղ գիծն ԱԲ ի միջոցի Ա եւ Բ կիտից հատանել, այլ հատանիցեն զգիծն ԱԷԸԹԺԲ, ուստի եւ ի կէտսն Ի, Լ, Խ, Ծ: Եւ քանզի (ըստ Բ.) են ԱԷ + ԷԻ > ԱԳ + ԳԻ, ԳԻ + ԻԸ + ԸԼ > ԳԴ + ԴԼ, եւ ԴԼ + ԼԹ + ԹԽ > ԴԵ + ԵԽ, եւ ԵԽ + ԽԺ + ԺԾ > ԵԶ + ԶԾ, եւ ԶԾ + ԾԲ > ԶԲ. արդ իբրեւ զսոսա ի միմեանս յաւելուցումք, եւ զգիծսն որ յերկոսին կողմանս չհաւասարութեանն գտանիցին, ջնջիցեմք, ելանէ

ԱԷ + ԷԻ + ԻԸ + ԸԼ + ԼԹ + ԹԽ + ԽԺ + ԺԾ + ԾԲ > ԱԳ + ԳԴ + ԴԵ + ԵԶ + ԶԲ, կամ

ԱԷ + ԷԸ + ԸԹ + ԹԺ + ԺԲ > ԱԳ + ԳԴ + ԴԵ + ԵԶ + ԶԲ

Եթէ փոխանակ երկուց ուղիղ բեկեալ գծից գնիցեմք երկուս կոր գիծս յորոց ներքնոյն գոգաւոր կողմն յԱԲ կոյս շրջեալ իցէ, յայնժամ արտաքին կոր գիծն քան զներքինն մեծագոյն է։ Եւ այս յայտ առնի լինի, յորժամ զերկոսին կոր գիծսն յօդեալս յանհամար գծից բեկելոց գնիցեմք։

66. Եթէ երկուց ԱԲԳ եւ ԲԴԳ (Ձեւ 39.) երեքանկեանց նոյն ԲԳ խարիսխ իցէ հասարակաց, եւ Դ գագաթն միոյն կայցէ ի ներքոյ քան զմիւսոյն, յայնժամ անկիւնն ԲԴԳ > ԲԱԳ, այլ բովանդակութիւն սրունիցն ԲԴ + ԴԳ < ԱԲ + ԱԳ։

Երկայնեա զԲԴ մինչեւ հատանել զԱԳ յԵ. յայնժամ Տ > Ն, եւ Ն > Ա (Հ. 61.), ապա որչափ եւս առաւել Տ > Ա։

Նոյնպէս եւ երկրորդ մասնն ցուցանի ըստ (Հ. 65. Դ.)։

67. Եթէ երկուց երեքանկեանց երկու անկիւնք միմեանց հաւասարք իցեն փոխանակաւ, եւ մի կողմն եւս յանդիմանակաց միոյ ի հաւասար անկեանց անտի հաւասար, երկոքին երեքանկիւնքն միմեանց պատշաճականք են։ Զոր օրինակ եթէ յԱԲԳ եւ յաբգ երեքանկիւնս (Ձեւ 40.) իցեն Բ = բ, Գ = գ, եւ ԱԲ = աբ, յայնժամ ΔԱԲԳ ≅ Δաբգ։

Համարեսցուք, եթէ Δաբգ այնպէս իմն զետեղեալ կայցէ ի վերայ ԱԲԳ երեքանկեան, որպէս զի բ ի Բ, եւ բա ի ԲԱ անկանիցին, յայնժամ հարկ է զի ա եւս յԱ անկանիցի, քանզի ԱԲ = աբ, եւ բգ կայ ի վերայ ԲԳ գծին, քանզի Բ = բ։ Արդ եթէ Գ կէտն չանկանիցի ի Գ, հարկ է, զի գ իցէ կամ ի միջին վայրի Բ եւ Գ կիտից եւ կամ արտաքոյ քան զԳ յերկայնեալ կողմն ԲԳ գծին։ Դիցուք գրեսցուք եթէ կայցէ ի Դ, յայնժամ եւ ագ կայցէ յԱԴ գիծս, եւ ΔԱԲԴ ≅ Δաբգ (Հ. 52.), ուստի եւ անկ. ԱԴԲ = գ, եւ դարձեալ զի գ = Գ, ըստ մերոյ համարելոյ, ապա ուրեմն լինիցի ԱԴԲ = Գ, որ

անհնարին է (Հ. 61.)։ Սոյնգունակ մարթ է յայտ արարեալ ցուցանել, եթէ կէտն գ, եւ ոչ յերկայնեալ կողմն ԲԳ գծին կարիցէ կալ։ Արդ որովհետեւ գ, ոչ ի միջի Բ եւ Գ կիտից, եւ ոչ արտաքոյ քան զԳ կալ կարէ, ուրեմն հարկ է զի անկանիցի ի Գ, ուստի եւ կայցէ ագ յԱԳ (Հ. 20. Ե.)։

68. *Երկու երեքանկիւնք միմեանց պատշաճականք են, եթէ երկու կողմանք նոցա, եւ անկիւնքն յանդիմանակաց մեծագոյն կողման, միմեանց հաւասարք իցեն։*

Յերեքանկիւնսն ԱԲԳ *եւ* աբգ (Ձեւ 40.) *իցէ* ԱԳ > ԱԲ, *եւ* ագ > աբ, *այլ* ԱԲ = աբ, ԱԳ = ագ, *եւ* Բ = բ։ *Արդ նկարեսցուք ի միտս մեր, եթէ* Δաբգ *այնպէս իմն զետեղեալ կայցէ ի վերայ* ԱԲԳ *երեքանկեան, որպէս զի* բ *կիտին անկանել ի* Բ, *եւ* բա *գծի ի* ԲԱ, *յայնժամ հարկ ի վերայ կայ* ա *կիտին յ*Ա *լինել, քանզի* աբ = ԱԲ, *եւ* բգ *կողման ի* ԲԳ, *քանզի* Բ = բ։ *Արդ եթէ երկոքին երեքանկիւնքն չիցեն պատշաճականք, յայնժամ հարկ է* ԲԳ $\gtrless$ բգ *լինել։ Համարեսցուք եթէ իցէ* ԲԳ > բգ, *ուստի եւ դիցուք եթէ* ԲԴ = բգ. *յայնժամ լինիցի* ΔԱԲԴ $\cong$ Δաբգ (Հ. 52.) *յորմէ եւ* ԱԴ = ագ։ *Այլ քանզի ըստ մերոյ համարելոյ է եւ* ԱԳ = ագ, *ուրեմն եւ* ԱԴ = ԱԳ, *եւ ի հաւասարասրուն* ΔԱԳԴ *անկ.* ԱԴԳ < Ո (Հ. 61. Գ.), *եւ լրումն* ԱԴԲ > Ո, *ուստի յ*ΔԱԲԴ *կողմն* ԱԲ > ԱԴ *կամ* > ԱԳ (Հ. 64. Ա.), *որ մերոյ համարելոյս հակառակ է։ Ըստ սմին օրինակի ցուցանի եթէ չէ հնար եւ* ԲԳ < բգ *լինել։ Իսկ արդ որովհետեւ չէ մարթ* ԲԳ $\gtrless$ բգ *լինել, ուրեմն հարկ է զի իցէ* ԲԳ = բգ, *ուստի եւ* ΔԱԲԳ $\cong$ Δաբգ։

Զայսրին զհետ գայ, եթէ Երկու ուղղանկիւն երեքանկիւնք միմեանց պատշաճականք են, յորժամ նոցա ներքնաձիգքն եւ մի էջն հաւասարք իցեն։

ՅԴԱԲԴ (Ձեւ 41.) իցեն կողմանքն ԲԴ > ԱԴ > ԱԲ։ Փոքրագոյն ԱԲ կողմամբն յԱ կէտէ իբրեւ ի կենդրոնէ ձգեա աղեղն, որ զԲԴ ի Գ հատանիցէ, եւ ձգեա զԱԳ, յայտ է եթէ յերեքանկիւնսն ԱԳԴ եւ ԱԲԴ, կողմն ԱԳ = ԱԲ ըստ կազմածոյն զոր յօրինեցաք, եւ կողմն ԱԴ եւ անկիւնն Դ, որ կայ դէմ յանդիման ԱԳ = ԱԲ կողման, են երկոցունց երեքանկեանցն հասարակաց, այլ սակայն երեքանկիւնքն չեն միմեանց ապատշաճականք։ Մեծագոյն ԱԴ կողմամբն ձգեա աղեղն բոլորակի, որ հատանէ զերկայնութիւն ԲԴ գծին յԵ։ Ձգեա զԱԵ, եւ գտանիցես եթէ յերեքանկիւնսն ԱԴԲ եւ ԱԲԵ, յորս ԱԲ = ԱԲ, ԱԴ = ԱԵ. եւ մ = ն, նոյն չպատշաճականութիւն երեւիցի։ Ապա ուրեմն, եթէ երկուց երեքանկեանց երկու կողմանքն եւ մի յանդիմանակաց անկիւնն հաւասար իցեն, յայնժամ եւեթ զնոցայն պատշաճականութիւն կարիցեմք հաստատել, յորժամ անկիւնն հաւասար յանդիման մեծագոյն կողման գտանիցի։

69. Եթէ երկուց երեքանկեանց երկու կողմանքն միմեանց հաւասար իցեն փոխանակաւ, այլ անկիւնն որ ի նոցանէն կազմիցի չհաւասար, յերեքանկեանն՝ յորում անկիւնն մեծագոյն իցէ, մեծագոյն է եւ երրորդ կողմն երեքանկեան։ Եւ խոտորնակն. Յորժամ երկուց երեքանկեանց երկու կողմանքն հաւասարք իցեն փոխանակաւ, այլ երրորդ կողմանքն չհաւասարք, յերեքանկեանն՝ յորում երրորդ կողմն մեծագոյն իցէ, մեծագոյն է եւ անկիւնն յանդիմանակաց այնր երրորդ կողման, քան զանկիւնն՝ որ ի միւսում երեքանկեան կայ յանդիման երրորդ կողման։ Այս ինքն, եթէ յերեքանկիւնսն ԱԲԳ եւ աբգ (Ձեւ 42.) ԱԲ = աբ, ԱԳ = ագ, եւ անկ. ԲԱԳ > բագ, յայնժամ եւս ԲԳ > բգ, նոյնպէս եթէ ԱԲ = աբ, ԱԳ = ագ, այլ ԲԳ > բգ, յայնժամ եւ անկ. ԲԱԳ > բագ։

Դիցուք դրեսցուք, եթէ յԴԱԲԳ իցէ ԱԳ > ԱԲ, ուստի եւ ագ > աբ։ Ի փոքրագոյն ԱԲ կողման յօրինեա յԱ կէտն անկիւն ա = ա, որոյ մի սրունքն զԲԳ յԵ կէտն հատանիցէ։ Անկիւնն ԱԵԳ > ն (Հ. 61.) եւ ն > չ ըստ մերոյ համարելոյ՝ թէ ԱԳ > ԱԲ, ուրեմն որչափ եւս առաւել ԱԵԳ > չ, որով եւ

ԱԳ > ԱԵ իցէ: Արդ երկայնեա զԱԵ, մինչեւ լինել ԱԴ = ԱԳ, եւ ձգեա զԲԴ եւ ԳԴ գիծս, աստուստին յայտ է եթէ ի հաւասարասրուն երեքանկեանս ԴԱԳ, անկիւնն ԱԴԳ = ջ + ր, ուստի եւ ԱԴԳ > ջ, ապա ուրեմն որչափ եւս առաւել ԲԴԳ > ջ, յորմէ եւ ԲԳ > ԲԴ (Հ. 64.): Իսկ արդ որովհետեւ △ԱԲԴ ≅ △աբգ (Հ. 52.), ուրեմն ԲԴ = բգ, ուստի ԲԳ > բգ:

Սա նմին օրինակի ցուցանի եւ երկրորդ մասն: Եթէ չլինէր Ա > ա, հարկ էր կամ Ա = ա, եւ կամ Ա < ա լինել: Յառաջին դէպս զհետ գայ (Հ. 52.) պատշաճականութիւն երկուց երեքանկեանցն, յորմէ եւ ԲԳ = բգ, իսկ յերկրորդումն հարկ է ըստ առաջնոյ ցուցմանս բգ > ԲԳ լինել: Այլ երկոքին եւս հակառակ են մերոյ ԲԳ > բգ համարելոյս: Արդ որովհետեւ ոչ Ա = ա եւ ոչ Ա < ա, ուրեմն Ա > ա:

70. Ի հաւասարասրուն երեքանկեան ուղղորդ գիծն որ ի գագաթանէ անտի անկանիցի ի վերայ խարսխին հասարակէ զխարիսխն եւ զանկիւնն որ ի գագաթան:

Իցէ ԱԲ = ԱԳ, ուստի եւ △ԱԲԳ հաւասարասրուն (Ձեւ 33.): Եթէ ԱԶ ⊥ ԲԳ, յայնժամ △ԱԲԶ ≅ △ԱԳԶ (Հ. 68.), ուստի եւ ԲԶ = ԳԶ, եւ ջ = ֆ:

71. Ուղիղ գիծն որով կապիցին ընդ միմեանս գագաթն եւ միջավայրն խարսխի հաւասարասրուն երեքանկեան, է ուղղորդ ի վերայ խարսխին եւ հասարակէ զանկիւնն որ ի գագաթան:

Իցէ ԲԶ = ԶԳ, յայնժամ △ԱԲԶ ≅ △ԱԳԶ (Հ. 54.), ուրեմն եւ անկ. ԱԶԲ = ԱԶԳ, ուստի եւ ԱԶ ⊥ ԲԳ, եւ ջ = ֆ:

72. Եթէ ոք ի միջավայրն խարսխի հաւասարասրուն երեքանկեան կանգնիցէ գիծ ուղղորդ, անցանէ այն ընդ գագաթնն, եւ հասարակէ զանկիւնն որ ի նմին:

Համարեսցուք եթէ ՀԶ = ԳԶ: Եթէ ուղ-

ղորդ գիծն՝ որ կանգնիցի չանցանիցէ ընդ Ա գագաթնն, հարկ ի վերայ կայ նմա ընդ մի կէտ շրջանակի, զոր օրինակ ընդ Կ անցանել, որով լինիցի ԿԴ ⊥ ԲԳ։ Իբրեւ ձգիցեմք զԱԴ, յայնժամ եւ լինիցի ԱԴ ⊥ ԲԳ (Հ. 71.), ուստի եւ լինիցին ի վերայ միոյ Դ կիտի երկու ուղղորդ գիծք ի ԲԳ, որ անհնարին է (Հ. 32.)։ Ուրեմն ուղղորդ գիծն՝ որ ի Դ կանգնիցի, հարկ է զի անցանիցէ ընդ Ա գագաթնն, ուստի եւ 3 = 4 (Հ. 71.)։

73. Եթէ անկիւնն գագաթան հաւասարասրուն երեքանկեան հատարակիցի ուղիղ գծիւ, յայնժամ ուղիղ գիծն կայ ուղղորդ ի խարիսխն եւ հատարակէ զայն։

Գիցուք գրեսցուք եթէ իցէ 3 = 4, յայնժամ ΔԱԲԴ ≅ ΔԱԳԴ (Հ. 52.), ուստի ԲԴ = ԳԴ եւ անկ. ԱԴԲ = անկ. ԱԴԳ, յորմէ եւ ԱԴ ⊥ ԲԳ, եւ ԲԴ = ԳԴ։

Յայնցանէ զորս ցայս վայր ասացաք, յայտ առնի, եթէ մարթեմք զպատշաճականութիւն երկուց երեքանկեանց հաստատել, յորժամ նոցա

Ա. մի կողմն, եւ երկու անկիւնքն՝ որ ի նմին կողման իցեն, հաւասարք իցեն փոխանակաւ (Հ. 51.). Բ. Յորժամ երկու կողմանք նոցա եւ անկիւնք՝ որ ի նոցանէն փակիցին, հաւասարք իցեն (Հ. 52.). Գ. Եթէ երեք կողմանքն եւս միմեանց հաւասար իցեն փոխանակաւ (Հ. 54.). Դ. Եթէ երկու անկիւնք նոցա միմեանց հաւասարք իցեն փոխանակաւ, եւ մի կողմն եւս յանդիմանակաց միոյն ի հաւասար անկեանցն հաւասար իցէ (Հ. 67.). Ե. Իբրեւ երկու կողմանք նոցին, եւ անկիւնն որ կայ յանդիման մեծագոյն կողման հաւասարք իցեն (Հ. 68.)։

Եւ արդ որովհետեւ համօրէն միմեանց պատշաճական քանիօնութիւնք, եւ առանձինն երեքանկիւնք, ոչ այլ իւիք այլակերպք ի միմեանց են, եթէ ոչ այլեւայլ տեղեօքն, յորս հաստատեալք իցեն, եւ այլեւայլ ժամանակօքն, յորս կազմեալք իցեն, կամ այլակերպութեամբ եւ տեղեացն եւ ժամանակաց, աստուստի յայտ է, եթէ կերպարանք եւ մեծութիւն միոյ երեքանկեան գտանիցի, յորժամ Ա. կամ մի կողմն եւ երկու անկիւնքն ծանուցեալ իցեն, Բ. եւ կամ եթէ երկու կողմանքն եւ անկիւնն՝ որ ի նոցանէն փակիցի կամ անկիւնն յան-

դիմանակաց մեծագոյն կողման, ծանուցեալ իցեն, եւ Գ. եթէ երեք կողմանքն ծանուցեալ իցեն։ Արդ ի մէջ ծանուցեալ մասանցս հարկ է միոյ կողման գտանել, որպէս տեսեր։

Արդ գլխաւոր մասունքս կամ տարերքս, որք ի դէպսն ասացեալս վասն կազմածոյ երեքանկեան, առնուցուն, ոչ են կախեալ զմիմեանց, այլ են ամենեւին ըստ հաճոյից, բայց սակայն այլ մասունքն Δեան զայսոցիկ մասանց կամ տարերաց կախին, քանզի մեծութիւն երեքանկեանն առաջնովքն եւեթ սահմանի։

Գ Լ Ո Ւ Խ Գ

ՅԱՂԱԳՍ ՀԱՒԱՍԱՐ ՀԵՌԱՒՈՐ ԳԾԻՑ, ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԳԾԻՑ ԵՒ ՎԱՍՆ ՆՄԱՆՈՒԹԵԱՆ ԵՐԵՔԱՆԿԵԱՆՑ

Հ Ա Տ Ա Ծ Ա

ՅԱՂԱԳՍ ԳԾԻՑ ՀԱՒԱՍԱՐ ՀԵՌԱՒՈՐԱՑ

74. Եթէ *ուղիղ գիծքս* ԴԵ *եւ* ՁԷ (Ձեւ 43.) *յ*ԸԹ *միտեալ իցեն նովին ուղղութեամբ, այսինքն է անկ.* ԷԲԹ = ԵԱԹ, *ուստի եւ երկու ուղիղ գիծքս* ԴԵ *եւ* ՁԷ *հաւասար ուղղեալք, որով եւ հաւասար հեռաւոր իցեն, յայնժամ չէ հնար նոցա զմիմեանս հատանել, թէպէտեւ առանց կատարելոյ երկայնեացին: Ապա եթէ կամք իցեն զի ուղիղ գիծն* ԴԵ *զիւր դիրս առանց փոփոխելոյ պահիցէ, եւ գիծն* ՁԷ *այնպէս իմն զ*ԴԵ *հատանիցէ, որպէս զի ի վերին կողմն* ԱԲ *գծին ծնանիցի երեքանկիւն ինչ, յայնժամ հարկ ի վերայ կայ* ՁԷ *գծին, շուրջ զ*Բ *կիտիւ յահեակ կողմն շրջել, եւ զուղղութիւնն զորօրինակ զ*Ձ՛Է՛ *առնուլ, որով լինիցի նմա զ*ԴԵ *ի* Գ *հատանել, յորմէ եւ ծնանիցի* ΔԱԲԳ: *Այլ սակայն շրջելովն* ՁԷ *գծին փոփոխի եւ միտութիւն նորին ի* ԲԹ, *որով եւ անկիւնն* ԳԲԹ > ԷԲԹ, *ուստի անկ.* ԳԲԹ > *անկ.* ԵԱԹ. *նոյնգունակ է եւ անկ.* ԳԲԹ > ԳԲԷ, *կամ, քանզի* ԳԲԷ = Է՛ԳԵ (Հ. 39. Գ.) = ԱԳԲ, *ապա անկ.* ԳԲԹ > ԱԳԲ, *այսինքն Արտաքին անկիւնն* ԱԳԲ *երեքանկեան մեծագոյն է քան զմի մի ի ներքին հակառակ անկեանց զորմէ վերագոյն* (Հ. 61.) *տեսաք:*

75. *Արտաքին անկիւնն երեքանկեան հաւասար է բովանդակութեան ներքին հակառակ անկեանց:*

Իցէ (Ձեւ 43.) *ի* Բ *գագաթանէ* ԱԲԳ *երեքանկեան ձգեալ գիծ* ՁԷ, *որ ընդ* ԱԳ *գծին հաւասար ուղղեալ իցէ, յայտ է եթէ անկ.* ԷԲԹ = ԳԱԲ,

եւ անկ․ ԷԲԳ = ԵԳԷ′ = ԱԳԲ, ուստի յաւելլով
ի միմեանս զերկոսին հաւասարութիւնս ելանէ

ԷԲԹ + ԷԲԳ = ԳԱԲ + ԱԳԲ, կամ
անկ․ ԳԲԹ = ԳԱԲ + ԱԳԲ։

76․ Երեք անկիւնքն միոյ երեքանկեան միահամուռ գումարեալ առնեն երկուս ուղիղ անկիւնս։

Եթէ երկայնիցեմք զԱԲ կողմն ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 43․) ի Թ կոյս որչափ եւ կամք իցեն, յայնժամ ըստ 75 համարոյ անկ․ ԳԲԹ = ԲԱԳ + ԱԳԲ, եւ քանզի ԳԲԹ + ԱԲԳ = 2Ո (Հ․ 34․), ուրեմն իբրեւ զհաւասարսն փոխանակիցեմք, ելանէ

անկ․ ԲԱԳ + ԱԳԲ + ԱԲԳ = 2Ո։

Ա․ Ապա ուրեմն բովանդակութիւն երից անկեանց երեքանկեան հաստատուն է, յորմէ մարթես խելամուտ լինել, եթէ ի կազմած երեքանկեան կարեմք զոր եւ իցէ զերկուս անկիւնսն միայն առնուլ, եւ այնու զերրորդն գտանել, պահեալ զօրէնսն որ ի (Հ․ 61․ Ա․)։

Բ․ Եթէ ի միում երեքանկեան մին յանկեանցն ուղիղ իցէ, բովանդակութիւն երկուց անկեանցն միացելոց առնէ մի ուղիղ անկիւն․ եւ սմին հակառակ, Եթէ բովանդակութիւն երկուց անկեանց երեքանկեան հաւասար իցէ միոյ ուղիղ անկեան, երեքանկիւնն այն է ուղղանկիւն, կամ յանդիմանակաց կողմանք անկեանցն այնոցիկ կան ուղղորդ ի վերայ միմեանց.

Դարձեալ եթէ բովանդակութիւն երկուց անկեանցն < Ո իցէ, երեքանկիւնն բթանկիւն է, ապա եթէ իցէ > Ո, յայնժամ երեքանկիւնն սրանկիւն է։

Գ․ Եթէ երկուց երեքանկեանց երկու անկիւնքն միմեանց հաւասարք իցեն փոխանակաւ, եւ երրորդ անկիւնն եւս միոյն՝ երրորդ անկեան միւսոյն

հաւասար է. եւ եթէ երկուց երեքանկեանց մի անկիւնն հաւասար իցէ, յայնժամ բովանդակութիւն երկուց անկեանցն մնացելոց յերկոսին եւս երեքանկիւնսն հաւասար է:

Դ. Եթէ ուղղանկիւն երեքանկիւն ինչ եւ հաւասարասրուն եւս իցէ, յայնժամ մի մի անկիւն ի խարսխի անդ է $= \frac{1}{2}$ Ո $= \frac{Հ}{4} = 45$:

Ե. Յորժամ ի հաւասարասրուն երեքանկեան զմի անկիւնն առնուցումք, մարթեմք երկոցունց մնացեալ անկեանցն ի վերայ հասանել:

Զ. Ի հաւասարակող երեքանկեան մի մի իւրաքանչիւր անկիւն է

$$= \frac{2}{3}\text{ Ո} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Հ}{2} = \frac{Հ}{3} = 60^0 :$$

Է. Իբրեւ յԱ գագաթանէ ԲԱԳ ուղիղ անկեան (Ձեւ 44.) յառաջ խաղացեալ ի միոյ զօր օրինակ յԱԳ սրունիցն հատանիցես կոտոր ինչ ԱԴ, եւ ի վերայ մասինս այսորիկ յօրինեալ կազմիցես հաւասարակող երեքանկիւն ԱԴԵ, եւ հասարակիցես զանկ. ԳԱԵ, ԱԶ ուղիղ գծիւ յայնժամ անկ. ա $=$ բ $=$ գ $= \frac{1}{3}$ Ո $= \frac{Հ}{6} = 30^0$, կամ որ նոյն ինչ իցէ են ուղիղ անկիւնն յերիս մասունս հաւասարս բաժանեալ է: Վասնզի բ $+$ գ $= \frac{2}{3}$ Ո (ըստ Զ.) եւ բ $=$ գ $=$ $\frac{1}{3}$ Ո, ուրեմն եւ ա $= \frac{1}{3}$ Ո:

Ը. Իբրեւ ի հաւասարասրուն ԱԲԳ երեքանկեանս (Ձեւ 45.) յորում ԱԳ $=$ ԲԳ, զմին ի սրունիցն, զոր օրինակ զԲԳ երկայնիցեմք արտաքս քան զԳ գագաթնն, եւ եթէ զերկայնութիւնն ԳԴ $=$ ԱԳ $=$ ԳԲ գործիցեմք, եւ ձգիցեմք զուղիղ գիծն ԱԴ, յայնժամ ԱԴ ⊥ ԱԲ: Վասնզի է մ $=$ Բ, եւ ն $=$ Դ (Հ. 53.), ուստի եւ մ $+$ ն $=$ Բ $+$ Դ. եւ

քանզի յ△ԱԲԴ է մ + ն + Բ + Դ = 2Ո, ուրեմն փոխանակելով մ + ն + մ + ն = 2Ո, յորմէ մ + ն = Ո գտանիցի։

Ասստին մարթես ի վերայ հաստանել, եթէ կարիցես ի ծայրն ուղիղ ինչ գծի կանգնել գիծ ուղղորդ առանց զայն (ըստ Հ. 62.) երկայնելոյ։

77. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԳԳ′ եւ ԴԴ′ (Ձեւ 18.), որ ի միոյ երեսաց վերայ կայցեն, հատանիցին յերրորդ ԵԶ գծէ, երկոքին գիծքն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են, Ա. Եթէ ներքին կամ արտաքին անկիւնքն՝ որ կան ի միում կողման հատանողին միանգամայն = 2Ո իցեն, Բ. Եթէ երկու երկու կշռեալ անկիւնքն հաւասարք իցեն, եւ Գ. Եթէ ներքին եւ արտաքին փոփոխ անկիւնքն հաւասարք իցեն։

Համարեսցուք եթէ իցէ պ + ն = 2Ո։ Արդ եթէ իցէ ԳԳ′ ∧ ԴԴ′, յայնժամ իբրեւ երկայնիցին յերկոսին կողմանս, յայտ է եթէ երկոքին գիծքն ի միում վայրի զոր օրինակ ի Մ միմեանց ընդհարկանիցին, որով եւ լինիցին յ△ՄԱԲ երկու անկիւնքն պ + ն = 2Ո, որ անհնարին ինչ է (Հ. 76.)։ Ապէթէ ասիցեմք եթէ ի Ն վայրի զմիմեանս բախիցեն երկոքին գիծքն, յայնժամ հարկ է զի յ△ՆԱԲ բովանդակութիւնն մ + փ < 2Ո իցէ (Հ. 76.)։ Այլ քանզի մ + ն + պ + փ = 4Ո, եւ ըստ մերոյ համարելոյ ն + պ = 2Ո, ուստի եւ հանելով մ + փ = 2Ո. ապա ուրեմն չէ հնար մ + փ < 2Ո լինել, որոյ հարկ իսկ էր լինել, եթէ երկոքին գիծքն զմիմեանս ի Ն հատանէին։ Իսկ արդ որովհետեւ գիծքս ԳԳ′ եւ ԴԴ′ ըստ երկու ուղղութիւնս եւս երկայնեալ չկարեն զմիմեանս հատանել, ապա հաւասար հեռաւորք են։

Սոյնգունակ ցուցանի եւ Բ։ Իցէ ր = ն։ Յաւելեալ յերկոսին կողմանս հաւասարութեան եւ զանկիւնն պ, լինիցի ր + պ = ն + պ։ Այլ քանզի

ր + ղ = 2Ո, ուրեմն եւ ն + ղ = 2Ո, ուստի եւ ԳԳ′ ∥ ԴԴ′ (ըստ Ա.):

Սոյնպէս եւ Գ. Իցէ ա = ն: Քանզի ա = ր որպէս գագաթան անկիւն, ուրեմն եւ ր = ն յորմէ եւ ԳԳ′ ∥ ԴԴ′ (ըստ Բ.):

Իցէ ր = յ: Քանզի յ = ն, ուրեմն եւ ր = ն. ուստի ԳԳ′ ∥ ԴԴ′ (ըստ Բ.):

Օստացելոցս զհետ գայ, եթէ ուղիղ գիծքն որք յերեսս ինչ ի վերայ միոյ ուղիղ գծի ուղղորդ կայցեն, հաւասար հեռաւորք են:

78. Խնդիր: Ի միջէ Թ կիտէ ծանուցելոյ, որ կայցէ արտաքոյ ԱԲ գծի (Ձեւ 16.), ձգել գիծ հաւասար հեռաւոր առ ԱԲ:

Լուծումն: Ի Թ կիտէ անտի ձգեա առ որ զինչ եւ իցէ կէտ ԱԲ գծին զոր օրինակ առ Ա, ուղիղ գիծ ԹԱ, եւ կազմեա ի Թ որպէս ի գագաթան՝ անկիւն ս = ն (Հ. 55.). որունքն ԳԹ կամ ԳԹ ∥ ԱԲ (Հ. 77.):

Մարթ է զխնդիրս եւ զայս օրինակ եւս լուծանել: Ի Թ կիտէ ձգեա զԹԷ′ ⊥ ԱԲ եւ ի Թ կանգնեա ԳԹ ⊥ ԹԷ′, լինիցի ԳԹ ∥ ԱԲ (Հ. 77.):

Վասն ձգելոյ ի վերայ քարտիսի գիծ հաւասար հեռաւոր հնարեալ է անուանեալ Քանոնն հաւասար հեռաւոր որ կազմի յերկուց սովորական քանոնաց, որք կապեալ են ընդ միմեանս պղնձի յեռուածով, որք շարժականք են, եւ ի շարժելն ցանգ մնան հաւասար հեռաւորք ի միմեանց, Այնպիսի քանոնք գտանին առընթեր մաթեմատիկեան գործեաց: Դարձեալ մարթի ի ձեռն երկուց ուղղանկիւն երեքանկեանց ձգել գիծ հաւասար հեռաւոր: Զիա՞րդ.

79. Եթէ երկու ուղիղ գիծք (Ձեւ 17.) ԱԲ եւ ԳԴ յերրորդ ինչ ԵԶ գծէ հատանիցին, եւ բովանդակութիւն երկուց ներքին անկեանց, որ կայցեն ի միում կողման հատանողին, այս ինքն ա + յ < 2Ո իցէ, յայնժամ մերձենան ի միմեանս ուղիղ գիծքն անայնուքիկ ի Բ եւ ի Դ կոյս, յորում կողման կան ան-

կիւնքն այնոքիկ, եւ որչափ ինչ պէտք իցեն ըստ նոյն ուղղութիւն երկայնեալ ընդհարկանին միմեանց ։

Որովհետեւ տ + ց < 2Ո է ըստ մերոյ համարելոյ, ուրեմն ն > ց է (Հ. 39. Դ.), ուստի չեն հաւասար ուղղեալք ԱԲ եւ ԳԴ, որով եւ ոչ հաւասար հեռաւորք իցեն ։ Արդ եթէ ոք ընդդէմ բախիցէ եւ ասիցէ, եթէ ուղիղ գիծքն այնոքիկ ըստ հակառակ Ա եւ Գ ուղղութեան միմեանց ընդհարկանիցին, յայնժամ յահեակ կողմն ԵԶ հատանողին ծնանիցի եռեքանկիւն ինչ, յորում բովանդակութիւն անկեանցն ղ + ը ի խարսխին (Հ. 61. Ա.) պարտ է զի իցէ < 2Ո. եւ ի նմին ժամանակի ըստ մերոյ համարելոյ տ + ց < 2Ո, յորմէ հարկ է զի իցէ ղ + ը > 2Ո (Հ. 39. Դ.)։ Արդ այս ուղիղ զհետ գայ, որոյ ամենեւին հակառակ է այն՝ որ զմերոյ համարելոյ զհետ գայ. ապա ուրեմն գիծք ԱԲ եւ ԳԴ ի ձախակողմն կոյս ի միմեանս մերձենալ չկարեն. եւ զի, որպէս ասացաւ, չկարեն հաւասար հեռաւոր լինել, ապա հարկ է զի ըստ Բ եւ Դ ուղղութեան ի միմեանս մատչիցին ։

80. Եթէ երկու ԱԲ եւ ԳԴ հաւասար հեռաւոր գիծք հատանիցին յերրորդ ԵԶ գծէ (Ձեւ 19.), յայնժամ, առաջին՝ ներքին անկիւնքն՝ որ կան ի միում կողման հատանողին միանգամայն գումարեալ տ + ց = ը + ղ = 2Ո, երկրորդ՝ Երկու երկու կշռեալ անկիւնքն հաւասար են, ն = ց, մ = ը, ... եւ երրորդ փոխանակաւ անկիւնքն ղ = ց, տ = ը, ն = +, ...։

Առաջինն ։ Քանզի եթէ չլինէր տ + ց = 2Ո, հարկ ի վերայ կայր տ + ց ≷ 2Ո լինել։ Արդ եթէ լինիցի տ + ց < 2Ո, յայնժամ պարտ եւ պատշաճ է ԱԲ եւ ԳԴ գծից ըստ Դ եւ Բ ուղղութեան ի միմեանս մերձենալ. եւ եթէ լինէր տ + ց > 2Ո, յայնժամ պարտ էր նոցա ըստ Ա եւ Գ ուղղութեան յի-

րեարս մատչել (Հ. 79.) ուստի եւ ԱԲ եւ ԳԴ լինէին իսկ ոչ ի միմեանց հաւասար հեռաւորք, որ է հակառակ մերոյ համարելոյ. ապա ուրեմն հարկաւ փ + ց = 2Ո = ր + ղ:

Երկրորդն: Որովհետեւ փ + ց = 2Ո ըստ առաջնոյն, ուրեմն ն = ց, ս = ր, փ = ֆ, ... (Հ. 39. Գ.):

Երրորդն. Քանզի ն = ց ըստ երկրորդին, եւ ղ = ն (Հ. 30. Գ.), ուրեմն եւ ղ = ց:

Զատացելոցս զհետ գան,

Ա. Եթէ երկու գիծք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 46.) հաւասար հեռաւորք իցեն, եւ մին զոր օրինակ ԱԲ կայցէ ուղղորդ ի վերայ երրորդ ԷԸ գծի, յայնժամ եւ միւսն եւս ԳԴ ⊥ ԱԲ, կամ Եթէ մին յերկուց հաւասար հեռաւոր գծից կայցէ ուղղորդ ի վերայ երրորդ գծի, յայնժամ եւ միւսն եւս կայ ուղղորդ. եւ սմին հակառակ Եթէ մի եւ նոյն ուղիղ գիծ իցէ ուղղորդ ի վերայ երկուց գծից, գիծքն այնուքիկ հաւասար հեռաւորք են:

Բ. Ամենայն ուղղորդ գիծք, որ ձգիցին ի մէջ գծից հաւասար հեռաւորաց են հաւասար միմեանց: Համարեսցուք եթէ իցէ ԱԲ ∥ ԳԴ (Ձեւ 46.) եւ ԵԶ եւ ԷԸ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ եւ ԳԴ գծիցն: Ձգեա զԵԸ, յայնժամ ս = ն, ղ = փ (Հ. 80.), եւ ԵԸ = ԵԸ, ուրեմն ΔԵԶԸ ≅ ΔԵԷԸ (Հ. 51.). յորմէ ԵԶ = ԷԸ, եւ ԵԷ = ԶԸ: Ապա ուրեմն հաւասար հեհեռաւոր գիծքն կան յամենայն կէտս հաւասար հեռի ի միմեանց: Ուստի եւ բոլորակք կենդրոնակիցք, կամ կենդրոնակից աղեղունք, հաւասար հեռաւորք են. քանզի ամենայն կէտքն հաւասար հեռի կան ի միմեանց:

Գ. Ի միջէ Թ կիտէ մարթ է միոյ եւեթ գծի ԷԸ հաւասար հեռաւոր ի ԳԴ գծէ անտի ձգել (Ձեւ 47.): Արդ դիցուք եթէ իցէ եւս ԱԲ ∥ ԳԴ. իբրեւ ձգիցեմք զհատանողն ԵԶ ընդ Թ, յայնժամ, որովհետեւ ԷԸ ∥ ԳԴ, փ = ս + փ: Արդ եթէ լինէր

եւս ԱԲ || ԳԴ, հարկ ի վերայ կայր փ = ֆ լինել, ուստի եւ լինէր ֆ = ֆ + պ, այսինքն մասն հաւասար բոլորին, որ անհնարին է։

Դ. ԱԲ ուղիղ գիծն, որ զմին յերկուց գծից հաւասար հեռաւորաց հատանիցէ, հատանէ եւ զմեւսն եւս։ Իցէ ԷԸ || ԳԴ, եւ ԷԸ հատանիցի յԱԲ գծէ ի Թ։ Արդ եթէ երկայնեսցի ԱԲ, եւ չհատանիցէ զԳԴ, յայնժամ հարկ էր ԱԲ || ԳԴ լինել (Հ. 39.). ուստի եւ ի միջէ Թ կիտէ մարթ էր երկուս գիծս հաւասար հեռաւորս առ ԳԴ ձգել, որ չկարէ լինել (ըստ Գ.)։

Ե. Եթէ սրունք երկուց համազգի անկեանց, (այս ինքն է անկեանց որոց երկոքեանն եւս սուրք կամ երկոքեանն եւս բութք իցեն կամ բերանք երկոցունցն ըստ նոյն ուղղութեան իցեն), միմեանց հաւասար հեռաւորք իցեն եւ անկիւնքն եւս նոցա հաւասարք են։ Իցէ (Ձեւ 48.) ԱԳ || աէ, եւ ԳԲ || էբ, յայնժամ եթէ երկայնեսցի աէ, ի հարկէ իսկ զԳԲ ի Դ հատանիցէ (ըստ Դ.), որով եւ ֆ = պ = գ (Հ. 80.)։ Իբրեւ երկայնեսցի բէ, հատանիցէ զԱԳ յԻ եւ լինիցի ֆ = ն = գ։

Զ. Եթէ ի վերայ երեսաց իրիք՝ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 49.) չիցեն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք, եւ ի վերայ միոյ միոյ ի նոցանէ ուղղորդ գիծս ձգիցէ ոք, ուղղորդ գիծքն այնուքիկ զմիմեանս հատանեն, յորժամ որչափ պէտք իցեն, երկայնեսցին։ Դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ ԵԶ ⊥ ԳԴ, եւ ԷԸ ⊥ ԱԲ, ուստի եւ ԷԸԱ + ԵԶԱ = 2Ո. զորին զհետ գայ, եթէ ա + բ < 2Ո, յորժամ ԶԸ ուղիղ գիծս ձգիցի. ուստի եւ հարկ է զի ուղղորդ գիծքն այնուքիկ զմիմեանս հատանիցեն (Հ. 79.)։

81. Ուղիղ գիծքն ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 50.), որք յերրորդ ԵԶ գծէ հաւասար հեռաւորք իցեն, են եւ հաւասար հեռաւորք ի միմեանց։

Զգեա գիծ մի ուղիղ ԷԸ, որ զերիս հաւասար

հեռաւորման ի Թ, Ժ եւ Ի (Հ. 80. Դ.) հատանիցէ։ Որովհետեւ ԱԲ || ԵԶ, յայտ է եթէ ժ = պ (Հ. 80.), եւ զի ԳԴ || ԵԶ, ուրեմն ն = պ, ուստի եւ ժ = ն, ապա եւ ԱԲ || ԳԴ (Հ. 77.)։

82. Եթէ երկու հաւասար հեռաւոր գիծք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 46.) հատանիցին յերկուցԵԶ եւ ԷԸ գծից հաւասար հեռաւորաց, յայնժամ յանդիմանակաց հատածքն հաւասարք են, այս է ԵԷ = ԶԸ, ԵԶ = ԷԸ. եւ սմին հակառակ, Եթէ երկու ուղիղ գիծք հատանիցեն զայլ երկուս ուղիղ գիծս, եւ յանդիմանակաց հատածքն հաւասարք իցեն, յայնժամ երկու երկու ուղիղ գիծքն՝ են հաւասար հեռաւոր ի միմեանց։

Ձգեա զգիծն ԵԸ, ուստի լինիցի ժ = ն, փ = պ (Հ. 80.), եւ ԵԸ = ԵԸ, յորմէ ΔԵԷԸ ≅ ԵԶԸ (Հ. 51.). ուրեմն ԵԷ = ԶԸ, եւ ԵԶ = ԷԸ։

Այնպէս եւ երկրորդ մասն։ Համարեսցուք եթէ իցէ ԵԷ = ԶԸ եւ ԵԶ = ԷԸ։ Իբրեւ ձգիցես դարձեալ զԵԸ, լինիցի ΔԵԷԸ ≅ ΔԵԶԸ (Հ. 51.), ուստի ժ = ն, եւ պ = փ, յորմէ ԵԷ || ԶԸ, եւ ԵԶ || ԷԸ (Հ. 77.)։

Յսորին զհետ գայ, զի եթէ զծայրս երկուց հաւասար գծից հաւասար հեռաւորաց կապիցես ընդ միմեանս ուղիղ գծիւք, որ զմիմեանս ոչ հատանիցեն, ուղիղ գիծքն այնուքիկ են հաւասար հեռաւոր ի միմեանց, եւ հաւասար։

83. Եթէ ի վերայ ԱԲ միոյ ի սրունից որ զինչ եւ իցէ ԲԱԳ (Ձեւ 52.) անկեան, սկիզբն յԱ գագաթանէ արարեալ՝ առնուցուս մասունս որչափ եւ կամք իցեն, հաւասարս միմեանց ԱԴ = ԴԵ = ԵԶ = ԶԷ = ԷԲ այլովքն հանդերձ եւ ընդ կէտս ծայրից նոցա ձգիցես գիծս ուղիղս ԴԹ, ԵԺ, ԶԻ, ԷԼ, ԲԳ, եւ զայլս նոյնպիսիս որք ի միմեանց հաւասար հեռաւորք իցեն, եւ զմեւս սրունս անկեանն ի կէտսն Թ, Ժ, Ի, Լ, Գ հատանիցեն, յայնժամ եւ մա-

սունքն, որ յերկրորդ սրունան ելանեն են միմեանց հաւասարք, այս ինքն է ԱԹ = ԹԺ = ԺԻ = ԻԼ = ԼԳ:

Ի Թ, Ժ, Ի, Լ կիտից ձգեա ուղիղ գիծս ԹԽ, ԺԾ, ԻԿ, ԼՀ հաւասար հեռաւորս յԱԲ սրունից, յայտ է եթէ (Հ. 82.) ԹԽ = ԴԵ, ԺԾ = ԵԶ, ԻԿ = ԶԷ, եւ ԼՀ = ԷԲ, այլ քանզի ԴԵ = ԵԶ = ԶԷ = ԷԲ են ըստ մերոյ համարելոյ, ապա ուրեմն եւ

ԹԽ = ԺԾ = ԻԿ = ԼՀ = ԱԴ:

Դարձեալ է անկ. ա = բ = գ = դ (Հ. 80.) եւ անկ. ե = զ = է = ը = թ (Հ. 80. Ե), ուստի եւ (Հ. 51.) ΔԱԴԹ ≅ ΔԺԹԽ ≅ ΔԺԻԾ ≅ ΔԻԼԿ ≅ ΔԳԼՀ, ուրեմն ԱԹ = ԹԺ = ԺԻ = ԻԼ = ԼԳ:

Սորին զհետ գայ,

Ա. Եթէ ԱԲ մի կողմն ԱԲԳ երեքանկեան, ի հաւասար մասունս որչափ եւ կամք իցեն, բաժանիցի, եւ յամենայն կիտիցն բաժանելոյ ձգիցին գիծք հաւասար հեռաւորք ի միոյ յերկոցունց կողմանցն, զոր օրինակ ի ԲԳ կողմանէ, յայնժամ երրորդ ԱԳ կողմն բաժանի յայնչափ մասունս միմեանց հաւասարս:

Բ. Եթէ երկու ուղիղ գիծք այնպէս հատանիցին յերկուց կամ ի բազում հաւասար հեռաւոր գծից, որպէս զի մասունք բաժանեալք ի միում յուղիղ գծիցն, միմեանց հաւասարք իցեն, հարկ է եւ մասանցն միւսոյ ուղիղ գծին միմեանց հաւասար լինել:

ՀԱՏԱԾ Բ

ՑԱՂԱԳՍ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ԳԾԻՑ

84. Խնդիր: Գտանել զմեծագոյն համօրէն կշիռ կամ չափ (Նշա. Համ. Հ. 132.) երկուց աբ եւ ԱԲ ուղիղ գծից (Ձեւ 51.):

Լուծումն: Զփոքր ուղիղ գիծն աէ ածեալ դիջիր այնչափ ինչ նուագ ի վերայ ԱԲ գծին, որչափ հնար իցէ, եթէ չյաւելուցու մնացորդ, յայտ է եթէ աէ է խնդրեալ մեծագոյն համօրէն կշիռն երկուց գծից:

Արդ եթէ աէ երկիցս գտանիցի յԱԲ եւ ԳԲ մնացորդ չափելի, որ քան զաէ փոքր իցէ, յայնժամ յայտ է եթէ լինիցի

ա) ԱԲ = 2 · աէ + ԳԲ:

Արդ խնդրեա դարձեալ, եթէ քանիցս մնացորդն ԳԲ գտանիցի յաէ գծին. դիցուք գրեսցուք եթէ մի անգամ եւեթ հնար իցէ յա կիտէ մինչեւ ցե, եւ մնայցէ նոր մնացորդ եէ < ԳԲ, ուստի եւ աէ = աե + եէ = 1 · ԳԲ + եէ, զոր իբրեւ փոխանակիցեմք յա հաւասարութեան, լինիցի

բ) ԱԲ = 2 · ԳԲ + 2 · եէ + ԳԲ = 3 · ԳԲ + 2 · եէ:

Արդ համարեսցուք եթէ յետին մնացորդն եէ գտանիցի ի ԳԲ եւթնիցս, այս ինքն ի Գ կիտէ մինչեւ ցԴ, եւ մնայցէ դարձեալ մնացորդ ԴԲ < եէ. եղանէ ԳԲ = ԳԴ + ԴԲ = 7 · եէ + ԴԲ, զորս իբրեւ փոխանակիցեմք ի վերջին երկու հաւասարութիւնս, ծագեն

գ) { աէ = 7 · եէ + ԴԲ + եէ = 8 · եէ + ԴԲ
{ ԱԲ = 21 · եէ + 3 · ԴԲ + 2 · եէ = 23 · եէ + 3 · ԴԲ

Եթէ զայս օրինակ մի ըստ միոջէ յառաջ խաղայցեմք, որպէս զի լինել եէ = եզ + զէ = 1 · ԴԲ + զէ, յորում զէ < ԴԲ. եւ ի կատարած ԴԲ = 2 · զէ առանց մնացորդի. յայնժամ լինիցի եէ = 3զէ. ուստի եւ փոխանակելով ի Գ հաւասարութեան ելանէ

աբ = 8·3 դբ + 2·դբ = 26·դբ, եւ
ԱԲ = 22·3·դբ + 2·3 դբ = 75·դբ·

Ապա ուրեմն յայս դէպս դբ է խնդրեալ մեծագոյն համօրէն կշիռ աբ եւ ԱԲ. գծից։

Այլ եթէ յետ բազում անգամ զնոյն գործ կրկնելոյ ցանգ մնայցէ մնացորդ ինչ, նշանակ է այն եթէ ի մէջ երկուց աբ եւ ԱԲ գծիցն չգտանի համօրէն հասարակաց կշիռ ինչ։ Յայս դէպս ԱԲ գիծն վասն այսր կցորդութեան զոր ընդ աբ գծին ունիցի, անուանեալ կոչի Անչափական գիծ, իսկ ի հակառակ դէպսն ասի Չափելի։ Բայց սակայն մարթի ի ձեռն բազում անգամ չափելոյ, զանչափական մնացորդն կարի իմն փոքրագոյն գործել որով եւ ի բաց թողուլ· քանզի յորժամ զաբ յայնչափ ինչ հաւասար մասունս բաժանեալ համարիցիմք, կամ արդեամբք իսկ կտորիցեմք, որպէս զի եթէ մի փոքրագոյն հաւասար մասն աբ գծին այնչափ, որչափ ինչ հնար իցէ դիցի ի վերայ ԱԲ երկայնութեան, յայնժամ մասնն՝ զոր դեռեւս չափել առաջի կայցէ, հայեցեալ ընդ չափեալ մասունսն, որպէս ոչինչ համարիցի, որով եւ մարթ իցէ զայն ի բաց թողուլ, քանզի այն մասն չզօրէ ինչ առ բովանդակութեան չափելի մասանցն։

Ըստ ասացելոցս զհետ գայ, եթէ կշռութիւն երկուց աբ եւ ԱԲ գծիցն օգնականութեամբ օրինակին զորմէ վերագոյն ճառեցաք, մարթի առանց աշխատութեան թուովք յայտ յանդիման կացուցանել, կամ ճշդիւ եւ կամ օրինակաւ մերձաւորութեան, ըստ լինելոյ երկոցունց գծիցն չափելի կամ անչափական։ Ի դէպսն զորմէ բանքս են.

աբ : ԱԲ = 26·դբ : 75·դբ կամ
աբ : ԱԲ = 26 : 75

Յորմէ եւ ԱԲ = $\frac{75}{26}$·աբ։ Արդ եթէ ուղիղ գիծս

-քէ իբրեւ միութիւն երկայնութեան համարիցի, զոր օրինակ երկայնութիւն միոյ ոտին, յայնժամ

$$\text{ԱԲ} = \left(\frac{75}{26}\right)^{\text{Ը}} = 2^{\text{Ը}},8846 \ldots :$$

85. Եթէ ի միում եռանկեան ձգիցես գիծ հաւասար հեռաւոր ի միջէ կողմանէ եռանկեան, յայնժամ միւս երկու կողմանքն հատանին ուղիղ համեմատականք միմեանց, այս ինքն եթէ յ△ԱԲԳ (Ձեւ 53.) իցէ ԴԵ || ԲԳ, յայնժամ ԱԲ : ԱԳ = ԱԴ : ԱԵ = ԲԴ : ԳԵ :

Եթէ կարիցեմք ցուցանել, եթէ այնու հանգամանօք, զոր ասացաք, իցէ ԱԲ : ԱԳ = ԱԴ : ԱԵ, կամ ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ, յայնժամ ցուցանի եւ մեր կանոնն, քանզի ի համեմատութենէ աստի այլ երկուքն ինքնին ծագեն : Ի սմին երկուց դիպաց մարթ է դիպել. զի կշռութիւնն ԱԲ : ԱԴ կամ չափելի է եւ կամ անչափական: Դիցուք գրեսցուք եթէ

Առաջին: Կշռութիւնս ԱԲ : ԱԴ իցէ չափելի, ուստի եւ իցէ ԱԲ : ԱԴ = մ : ն, յորում մ եւ ն թիւս ինչ հաստատականս ցուցանիցեն: Արդ զմտաւ ածցուք, եթէ ԱԲ ի մ հաւասար մասունս բաժանեալ իցէ, ուստի եւ ԱԴ ի ն հաւասար մասունս նոյնպիսիս, եւ յամենայն կիտից ծայրից մասանցն ձգիցին գիծք հաւասարք հեռաւոր ի ԲԳ կողմանէ, յայտ է եթէ (Հ. 83.) եւ ԱԳ ի մ հաւասար մասունս բաժանիցի, յորոց գիծն ԱԵ զն մասունս միայն բովանդակէ: Ուրեմն լինիցի եւ ԱԳ : ԱԵ = մ : ն, ուստի եւ ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ :

Երկրորդ: Այլ եթէ անչափական իցէ կշռութիւնս ԱԲ : ԱԴ, եւ չիցէ հաւասար ընդ ԱԳ : ԱԵ կշռութեան, հարկ է ԱԲ : ԱԴ ≷ ԱԳ : ԱԵ լինել:

Արդ իցէ

1) ԱԲ : ԱԴ > ԱԳ : ԱԵ, կամ $\frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԱԴ}} > \frac{\text{ԱԳ}}{\text{ԱԵ}}$:

Որովհետեւ $\frac{ԱԲ}{ԱԳ}$ քանորդն մեծագոյն է, ուրեմն ԱԳ բաժանարարն իցէ փոքրագոյն. արդ համարեաց եթէ իցէ մեծագոյն բաժանարար ինչ, զոր օրինակ ԱԴ, որ այնպիսի իմն ունիցի հանգամանս, որպէս զի $\frac{ԱԲ}{ԱԴ}=\frac{ԱԳ}{ԱԵ}$, կամ

ա) ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ ։

Արդ համարեսցուք եթէ ԱԲ ի հաւասար մասունս, որչափ եւ կամք իցեն, բաժանեալ իցէ, յորոց մասանց մի մի մասն > ԳԴ իցէ, որով եւ մի կէտ բաժանմանն գտանեալ անկանիցի ի մէջ Գ եւ Դ կիտից զորօրինակ յԷ, եւ եթէ ընդ Է ձգիցեմք ԷԸ ∥ ԲԳ, յայնժամ (ըստ առաջնոյն) ծագիցէ համեմատութիւնս ԱԲ : ԱԷ = ԱԳ : ԱԸ ։ Իբրեւ ընդ միմեանս հարկանիցեմք զայս համեմատութիւն եւ զայն զոր վերագոյն ի հակառակէն ընկալաք որ է ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ, անդստին ի նոցին համեմատութենէն գտանիցեմք եթէ ԱԴ : ԱԷ = ԱԵ : ԱԸ, յորում առ ի լինել միմեանց հաւասար երկոցունց կշռութեանցն հարկ է, զի իցէ ԱԵ > ԱԸ, քանզի ԱԴ : ԱԷ, է նուազօղ կշռութիւն. որ անպատեհ իմն է. վասն այսորիկ չկարեմք յանձն առնուլ, եթէ ԱԲ : ԱԳ > ԱԳ : ԱԵ ։

2) Այլ եթէ ոք առիցէ եթէ ԱԲ : ԱԳ < ԱԳ : ԱԵ, եւ թէ

բ) ԱԲ : ԱԹ = ԱԳ : ԱԵ,

համարեսցուք, որպէս վերագոյն, զգիծն ԱԲ յայնչափ ինչ հաւասար մասունս բաժանեալ, որպէս զի կէտ մի հատանելոյ Ժ անկանիցի ի մէջ երկուց Դ եւ Թ կիտից, յորմէ եւ ձգիցի ԺԻ ∥ ԲԳ, յայնժամ (ըստ առաջնոյն) ԱԲ : ԱԺ = ԱԳ : ԱԻ ։ Իբրեւ համեմատիցեմք զայս ընդ բ, ելանէ ԱԹ : ԱԺ = ԱԵ : ԱԻ, եւ

քանզի աստէն ի սմին ԱԹ < ԱԺ է, պարտ է ըստ օրինաց երկրաչափական համեմատութեան եւ ԱԵ < ԱԻ լինել, որ անպատեհ է, որով եւ երկրորդն եւս չկարէ լինել:

Արդ որովհետեւ ԱԲ : ԱԴ կշռութիւնս ոչ մեծ եւ ոչ փոքր կարէ լինել քան զԱԳ : ԱԵ, ուրեմն պարտի

ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ կամ ԱԲ : ԱԳ = ԱԴ : ԱԵ

լինել: Իսկ քանզի այս համեմատութիւն ամենայն դիպաց պատշաճական է, ուրեմն եւ որ ի սմանէն յառաջ գայցէ, համօրէն ամենայնի պատշաճիցի, այս ինքն ԱԴ : ԱԲ — ԱԴ = ԱԵ : ԱԳ — ԱԵ, կամ ԱԴ : ԲԴ = ԱԵ : ԳԵ կամ ԱԴ : ԱԵ = ԲԴ : ԳԵ, ուստի եւ հասարակաց օրինակաւ

ԱԲ : ԱԳ = ԱԴ : ԱԵ = ԲԴ : ԳԵ:

Ա. Եթէ ձգիցեմք ԵԼ || ԱԲ, յայնժամ ԱԳ : ԱԵ = ԲԳ : ԲԼ, կամ, որովհետեւ ԲԼ = ԴԵ (Հ. 82.) է, ԱԳ : ԱԵ = ԲԳ : ԴԵ. եւ քանզի ԱԳ : ԱԵ = ԱԲ : ԱԴ, ուրեմն եւ ԱԲ : ԱԴ = ԲԳ : ԴԵ, յորմէ եւ

ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ = ԲԳ : ԴԵ, կամ
ԱԲ : ԱԳ : ԲԳ = ԱԴ : ԱԵ : ԴԵ:

Ուրեմն. Եթէ ի միում ԱԲԳ երեքանկեան ձգիցես առ մի կողմն ԲԳ՝ գիծ հաւասար հեռաւոր, յայնժամ երեք կողմունքն երեքանկեանն այնորիկ առ երիս կողմանս փոքր երեքանկեան կարգաւ համեմատականք են:

Բ. Որովհետեւ ԺԻ || ԴԵ || ԷԸ || ԲԳ, ուրեմն եւ ԱԲ : ԱԳ = ԲԷ : ԳԸ, ԱԲ : ԱԳ = ԲԴ : ԳԵ, ԱԲ : ԱԳ : = ԲԺ : ԳԻ, եւ ԱԲ : ԱԳ = ԱԺ : ԱԻ, ուստի եւ է

ԲԷ : ԳԸ = ԲԴ : ԳԵ = ԲԺ : ԳԻ = ԱԺ : ԱԻ

յորմէ դիւրաւ կարիցեմք գտանել, եթէ

ԲԷ : ԳԸ = ԷԴ : ԸԵ = ԴԺ : ԵԻ = ԺԱ : ԻԱ

Ուրեմն. Եթէ զերկուս կողմանս երեքանկեան բազում ուղիղ գծիւք հատանիցես, որք յերրորդ կողմանէ հաւասար հեռաւորք իցեն, յայնժամ հատածքն՝ որ փակիցին ի մէջ հաւասար հեռաւոր գծից, միմեանց ուղիղ համեմատականք են:

86. Եթէ երկու կողմանք միոյ երեքանկեան՝ միմեանց համեմատականք հատանիցին յուղիղ ինչ գծէ, ուղիղ գիծն այն հաւասար հեռաւոր է յերրորդ կողմանէ: Զոր օրինակ եթէ յΔԱԲԳ (Ձեւ 54.), գտանիցէ տեղի համեմատութիւնս ԱԲ : ԱԳ = ԱԴ : ԱԵ = ԲԴ ; ԳԵ, հարկ է ԴԵ || ԲԳ լինել:

Քանզի եթէ իցէ ԴԵ ∧ ԲԳ, յայտ եթէ մարթ է ի Դ կիտէ ձգել գիծ հաւասար հեռաւոր առ ԲԳ. արդ դիցուք գրեսցուք եթէ ԴԶ || ԲԳ, ուստի եւ (Հ. 85.) ԱԲ : ԱԳ = ԱԴ : ԱԶ եւ քանզի ԲԱ : ԱԳ = ԱԴ : ԱԵ ըստ մերոյ համարելոյ է, ուրեմն հարկ է ԱԶ = ԱԵ լինել, զի յերկոսին համեմատութիւնս երեք առաջին անդամքն կշիռ հաւասար են միմեանց. որ է անպատեհ: Ապա ուրեմն ԴԶ որ յանդիման կացուցանէ մեզ զամենայն ուղիղ գիծ այլակերպ ի ԴԵ գծէ, որ ընդ կէտն Դ անցանիցէ, չկարէ հաւասար հեռաւոր լինել ի ԲԳ գծէ, եւ քանզի մի հաւասար հեռաւոր գիծ ի Դ կիտէ մարթ է ձգել, ուրեմն է ԴԵ:

87. Ուղիղ գիծն՝ որ զմի անկիւն երեքանկեանն հատանիցէ, զկողմն յանդիմանակաց այնմ անկեան, հատանէ յերկուս մասունս, որք ուղիղ համեմատին ընդ առընթերն կացեալ կողմանս երեքանկեան. նոյնպէս եւ սմին հակառակ:

Դիցուք գրեսցուք եթէ ուղիղ գիծն ԱԴ (Ձեւ 55.) հատանիցէ զանկիւնն ԲԱԳ, կամ իցէ ա = բ.

արդ կայ մեզ առաջի ցուցանել եթէ ԲԴ:ԳԴ=ԱԲ:ԱԳ: Երկայնեա զԱԳ կողմն, եւ արա ԱԵ=ԱԲ, եւ ձգեա զգիծն ԲԵ. յայտ է եթէ անկիւնն գ=ե (Հ. 53.), եւ ա+բ=գ+ե (Հ. 75.) կամ 2ա=2գ, ուստի եւ ա=գ, յորմէ եւ ԲԵ || ԱԴ (Հ. 77.). ուրեմն (ըստ Հ. 85.) ելանէ մօտաւոր համեմատութիւնս ԲԴ:ԱԵ=ԳԴ:ԱԳ, կամ ԲԴ:ԳԴ=ԱԲ:ԱԳ:

Ըստ սմին օրինակի եւ երկրորդ մասնն: Քանզի, եթէ իցէ համեմատութիւնս ԲԴ : ԳԴ = ԱԲ : ԱԳ, եւ յօդիցեմք զԴ կէտն հատանելոյ ընդ Ա գագաթան անկեանն, որ կայ հանդէպ այնմ կողման, հատարակիցի անկիւնն, այս ինքն ա=բ: Քանզի իբրեւ ձգիցեմք ընդ Բ զուղիղ գիծն ԲԵ || ԱԴ, եւ երկայնիցեմք զԳԱ կողմն մինչեւ յԵ կէտն հատանելոյ հաւասար հեռաւոր գծին, յայնժամ բ=ե, ա=գ (Հ. 80.), եւ (ըստ Հ. 85.) ԲԴ:ԳԴ=ԱԵ:ԱԳ, եւ ըստ մերոյ համարելոյ ԲԴ:ԳԴ=ԱԲ:ԱԳ: Արդ իբրեւ ի կշիռ համեմատութեան բերիցեմք զերկուս համեմատութիւնս գտանի ԱԵ=ԱԲ. ուրեմն եւ Բ=Ե, որով եւ ա=բ:

88. Եթէ երկու հաւասար հեռաւորք Ադ եւ աէ (Ձեւ 56.), հատանիցին ի բազում ՐԱ, ՐԳ. ՐԴ... ուղիղ գծից, որք ի միում Ր վայրի միմեանց միանգամայն ընդհարկանիցին, հատուածքն հաւասար հեռաւոր գծից, որ ի մէջ միոյ միոյ յուղիղ գծիցն գտանիցին են միմեանց համեմատականք, եւ ուղիղ գիծքն ի գլխովլն ի համեմատական մասունս բաժանին ի գծից հաւասար հեռաւորաց:

Յերեքանկիւնան ՐԱԳ եւ Րաէ (Հ. 85. Ա.) է ՐԳ:Րէ=ԳԱ:էա, եւ յերեքանկիւնան ՐԳԴ եւ Րէդ է ՐԳ:Րէ=ԳԴ:էդ. ուրեմն ԳԱ:էա=ԳԴ:էդ, կամ եթէ միջին անդամքն փոփոխիցին ԳԱ:ԳԴ=էա:էդ: Զայս օրինակ ցուցանի եթէ ԳԴ:ԴԵ=էդ:դե, այլովքն հանդերձ: Ուրեմն է

ԳԱ : գա = ԳԴ : գդ = ԴԵ : դե = ԵԶ : եզ = ԶԲ : զբ

Միանգամայն եւ երկրորդ մասնն: Այս ինքն է Բա: աԱ = Բգ : գԳ = Բդ : դԴ = Բե : եԵ այլովքն հանդերձ (Հ. 85. Ա.):

89. Խնդիր: Առ երիս գիծս ծանուցեալս ա, բ, գ, (Ձեւ 57.) զչորրորդ համեմատականն $+ = \frac{բգ}{ա}$ կազմելով գտանել:

Լուծումն: Յօրինեա որ զինչ եւ իցէ անկիւն մի ԲԱԳ որպէս եւ կամք իցեն, եւ հատ ի վերայ սրունից նորա ԱՄ = ա, ԱՆ = բ, եւ ԱՊ = գ. յետ այնորիկ ձգեա զՄՆ, եւ ընդ Պ զհաւասար հեռաւորն ՊՏ, յայտ է եթէ $ԱՏ = + = \frac{բգ}{ա}$: Քանզի (Հ. 85.) ԱՄ : ԱՆ = ԱՊ : ԱՏ, այս ինքն

$$ա : բ = գ : ԱՏ \left(= \frac{բգ}{ա}\right):$$

Զսորին զհետ գայ, զի եթէ առ երկուս ա եւ բ գիծս ծանուցեալս զմիջին երկրաչափական համեմատականն (Նշա. Համ. Հ. 313.) առաջի կայցէ մեզ գտանել այս ինքն $+ = \frac{բ^2}{ա}$, յայնժամ պարտ է ըստ նմին նմանութեան յօրինել անկիւն մի ԲԱԳ (Ձեւ 58.) եւ ի վերայ սրունից նորին հատանել ԱՄ = ա, ԱՊ = բ = ԱՆ, եւ ապա ձգել զՄՆ, եւ ընդ Պ զհաւասար հեռաւոր գիծն ՊՏ. յայտ է եթէ ԱՄ : ԱՆ = ԱՊ : ԱՏ, կամ

$$ա : բ = գ : ԱՏ \left(= \frac{բ^2}{ա}\right),$$

ուրեմն ԱՏ իցէ երրորդ համեմատականն առ ա եւ բ:

Այլ սակայն եթէ զա իբրեւ միջին համեմատա-

կան գնիցեմք, յայնժամ պարտ եւ պատշաճ է ի վերայ սրունից Ա՛ անկեան զԱ՛մ մասն = բ, Ա՛գ = Ան = ա հատանել, եւ ապա ձգել զնդ || գդ․ լինիցի ի ամին Ա՛դ երրորդ համեմատականն։ Քանզի է

Ա՛մ : Ան = Ա՛գ : Ա՛դ, կամ բ : ա = ա : Ա՛դ $\left(= \frac{ա^2}{բ}\right)$։

90․ Խնդիր։ Օծանուցեալ ինչ գիծ ԱԲ այս ինչ կամ այն ինչ կշռութեամբ բաժանել։

Լուծումն։ Համարեսցուք եթէ զգիծ ինչ զոր օրինակ զԱԲ (Ձեւ 59․) առաջի կայցէ մեզ յերիս մասունս բաժանել, որք ընդ միմեանս կշռիցին որպէս համեմատիցին ընդ միմեանս Մ, Ն, Պ։ Ձգեա զԴԵ || ԱԲ, եւ արա ԵԷ = Մ, ԷԶ = Ն, ԶԴ = Պ, եւ ձգեա զգիծսն ԱԴ եւ ԲԵ, զորս իբրեւ երկայնիցես, հատանիցեն զմիմեանս ի Գ, եթէ ԴԵ < ԱԲ․ յետ այնորիկ ձգեա ի Գ կիտէ ընդ Զ եւ ընդ Է՝ ուղիղ գիծս ԳԸ եւ ԳԹ, որք զգիծն ԱԲ նովին համեմատութեամբ բաժանիցեն։ Քանզի ըստ 88 համարոյ

ԲԹ : ԹԸ : ԸԱ = ԵԷ : ԷԶ : ԶԴ = Մ : Ն : Պ։

Ապա եթէ ԴԵ > ԱԲ իցէ, յայնժամ ԱԴ եւ ԲԵ գիծքն իբրեւ ընդ հակառակ ուղղութիւն երկայնեսցին, հատանիցեն զմիմեանս։ Այլ եթէ ուրուք կամք իցեն, զի կէտն հատանելոյ գծիցն զմիմեանս՝ իցէ ի Գ, յայնժամ պարտ եւ պատշաճ է, եթէ Մ + Ն + Պ > ԱԲ իցէ, ընդ ԱԲ գծիւ ձգել զԺԻ հաւասար հեռաւորն, եւ զնոյն, որպէս վերագոյն ասացաք կատարել։ Այլ եթէ իցէ Մ + Ն + Պ = ԱԲ = ԴԵ, յայտ է եթէ չէ հնար գտանել կէտ, յորում ԱԴ եւ ԲԵ զմիմեանս կարիցեն հատանել, վասն այսորիկ պարտ է յայս դէպս ընդ Զ եւ ընդ Է կէտսն ձգել գիծս հաւասար հեռաւորս առ ԱԴ եւ կամ հարկ է զՄ եւ զՆ կարակինիւ ի վերայ ԱԲ գծին տանել։

Մարթ է զխնդիրս եւ այլով իմն օրինակաւ լուծանել: Զգեա (Ձեւ 60.) յԱ ծայրէ անտի որ զինչ եւ իցէ անկեամբ ուղիղ ինչ գիծ ԱԳ, եւ արա Ամ = Մ, մն = Ն, նպ = Պ, եւ ձգեա զգիծն պԲ: Արդ եթէ ի մ եւ ի ն կիտիցն ձգիցես զհաւասար հեռաւոր գիծս ՄԵ, ՆԶ առ Բպ, յայնժամ

ԱԵ : ԵԶ : ԶԲ = Ամ : մն : նպ (Հ. 88.) = Մ : Ն : Պ :

Զատուցելոյս զհետ գայ

Ա. Եթէ ԱԲ յերիս մասունս հաւասարս բաժանելոց իցէ, պարտ է, որպէս վերագոյն՝ զգործն կատարել, այլ այսմ եւեթ միտ եդեալ նայել, զի յայս դէպս (Ձեւ 59.) ԴԶ = ԶԷ = ԵԷ, կամ ԺԼ = ԼԽ = ԽԻ լինիցի եւ (Ձեւ 60.) Ամ = մն = նպ: Ապա եթէ ԱԲ ի բազում մասունս կտորելոց իցէ, յայնժամ առանց փոփոխելոյ մնայ նոյն օրինակ գործոյն:

Բ. Եթէ կշռութիւնն՝ որով ԱԲ բաժանելոցն իցէ, թուովք իցէ յայտ արարեալ, զոր օրինակ եթէ ԱԲ բաժանիցի յերիս մասունս, որք ընդ միմեանս կշռիցեն որպէս 1 : 3 : 5, յայնժամ պարտ է ի վերայ ԴԵ կամ ԺԻ (Ձեւ 59.) գծիցն 1 + 3 + 5 = 9 մասունս, որպէս եւ կամք իցեն հաւասարս յԵ կամ յԻ կիտէ սկիզբն արարեալ բաժանել, եւ զգիծսն ԲԵ եւ ԱԴ մինչեւ ցԳ կէտ երկայնել, եւ անտի ընդ 1 եւ 4 ձգել գիծս ԳԹ եւ ԳԸ, որով լինիցի ԲԹ : ԹԸ : ԸԱ = 1 : 3 : 5: Նոյն օրինակաւ վճարին իրքն ի Ձեւն 60:

91. Խնդիր: Զգիծ ինչ ի 1000 հաւասար մասունս բաժանել, այս ինքն երկրաչափական աստիճանս յօրինել:

Լուծումն: Համարեսցուք եթէ իցէ ԱՔ (Ձեւ 61.), զոր կամք իցեն մեզ բաժանել: Զառաջինն բաժանեա զայն ի 10 հաւասար մասունս, այս ինքն է արա ԱԲ = ԲԳ = ԳԴ = ... = $\frac{1}{10}$ · ԱՔ. յետ այնորիկ յԱ, Բ, Գ, Դ, ... կիտիցն ձգեա ուղիղ գիծս

ԱԵ, ԲԶ, ԳԻ, … ուղղորդս ի վերայ ԱՔ գծին, եւ բաժանեա զառաջին հատածն ԱԲ ի տասն հաւասար մասունս, այս ինքն է արա

$$(Ա,9)=(9,8)=(8,7)=\dots=(1,Բ)=\tfrac{1}{10}\cdot ԱԲ$$
$$=\tfrac{1}{100}\cdot ԱՔ։$$

Նոյնգունակ եւ ի վերայ ԱԵ ուղղորդ գծին արա տասն հաւասար մասունս, սկիզբն յԱ կիտէ արարեալ յԵ կոյս, այս ինքն

$$(Ա,9)=(9,8)=(8,7)=\dots=(1,Ե).$$

յետ այնորիկ ի կիտից բաժանման ձգեա ուղիղ գիծս ԵԶ, (1, ա), (2, բ), (3, գ), …. հաւասար հեռաւորս յԱՔ գծէ, յորմէ ելանիցէ ԱԵ = ԲԶ = ԳԻ = ԴԼ = …., եւ մի մի ուղղորդ գիծ, որպիսի ինչ ԲԶ ի ձեռն հաւասար հեռաւոր գծիցն ի տասն հաւասար մասունս Զա = աբ = բգ = … կտորիցի (Հ. 82.) Ապա յետ այնորիկ յօդեա զկէտն Զ ընդ 1 որ կայ յԱՔ գծին, եւ ձգեա ընդ 2, 3, 4, … Ա կէտսն, որ յԱՔ զուղիղ գիծսն (2, 1), (3, 2), (4, 3), …(Ա, 9) հաւասար հեռաւոր առ ծուռ գիծն (խոտորնակութիւն) (Զ, 1), որով ամենայն ուղիղ գիծքն հաւասար հեռաւորք առ ԱԲ որք գտանիցին ի միջի ԱԵ եւ ԲԶ գծիցն ի տասն հաւասար մասունս կտորիցին։

Դարձեալ յΔԲԶ,1 է աժ ‖ Բ, 1, ուստի եւ (Հ. 85. Ա.) ԲԶ : Զա = Բ,1 : աժ, եւ քանզի ըստ կազմածոյն եւս ԲԶ : Զա = 10 : 1, ուրեմն Բ, 1 : աժ = 10 : 1, յորմէ եւ

$$աժ=\tfrac{1}{10}\cdot Բ,1=\tfrac{1}{10}\cdot\tfrac{1}{10}\,ԱԲ=\tfrac{1}{100}\cdot ԲԱ$$
$$=\tfrac{1}{1000}\cdot ԱՔ$$

Նոյնպէս ի ԲԶ,1 եւ Զէբ երեքանկեանցն գտանի փոքր մասնս

$$բէ=\tfrac{2}{10}\cdot Բ,1=\tfrac{2}{100}\cdot ԱԲ=\tfrac{2}{1000}\cdot ԱՔ.$$

եւ նոյն օրինակաւ

$$ԶՒ = \frac{3}{1000} \cdot ԱՔ,\ ԴԽ = \frac{4}{1000} \cdot ԱՔ,$$
$$ԵԾ = \frac{5}{1000} \cdot ԱՔ, \ldots ։$$

Դարձեալ ինքնին իսկ յայտ է, զի եթէ զԱԺ իբրեւ միութիւն երկայնութեան, որպիսի ինչ երկայնութիւն միոյ գծի համարիցիմք, ուստի եւ ԱԺ $= 1^{\text{գ}}$ համարիցիմք, յայնժամ լինիցին ԷԸ $= 2^{\text{գ}}$, ԶՒ $= 3^{\text{գ}}, \ldots$ եւ Բ, $1 = 10^{\text{գ}} = 1^{\text{մ}} =$ միոյ մատին (ըստ տասներորդական բաժանմանց)։

Ըստ ասացելոցս է Բ,$1 = 1,2 = \cdots = (9,$Ա$) = 1^{\text{մ}}$, ուրեմն

$$(Ա,8) = 2^{\text{մ}} = 20^{\text{գ}} = (Բ,2)$$
$$(Ա,7) = 3^{\text{մ}} = 30^{\text{գ}} = (Բ,3)$$
$$(Ա,6) = 4^{\text{մ}} = 40^{\text{գ}} = (Բ,4)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(Ա,1) = 9^{\text{մ}} = 90^{\text{գ}} = (Բ,9)$$
$$ԱԲ = 10^{\text{մ}} = 100^{\text{գ}} = 1^{\text{ո}} = \text{միոյ ոտին}$$

Եւ որովհետեւ ԱԲ $= 1^{\text{ո}} = 10^{\text{մ}} = 100^{\text{գ}}$, ուրեմն

$$ԱԳ = 2^{\text{ո}} = 20^{\text{մ}} = 200^{\text{գ}}$$
$$ԱԴ = 3^{\text{ո}} = 30^{\text{մ}} = 300^{\text{գ}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$ԱՔ = 10^{\text{ո}} = 100^{\text{մ}} = 1000^{\text{գ}}։$$

Իսկ եթէ ԱԺ զերկայնութիւն միոյ մատին ցուցանիցէ, յայտ է եթէ Բ,1 է երկայնութիւն միոյ ոտին, ԱԲ երկայնութիւն 10 ոտից (մի ձող) եւ ԱՔ երկայնութիւն 100 ոտից. այնօրինակ եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ։

Այնպիսի ատիճանք անուանեալ կոչին փոքրկացեալ ատիճանք։

Յանձնէ իսկ յայտ է եթէ մարթի սոյին օրինակաւ փոքրկացեալ ատիճանս եւ վասն երկոտասներորդական բաժանմանց յօրինել։

Վասն ուսանելեացն դիւրութեան արկցուք ի

կէր զաստիճանս։ Եթէ ԱՔ գիծն 10 ձողս նշանակիցէ, յայնժամ մի մի մասն, զոր օրինակ ԱԲ, ԱԳ ... է $= 1^{\circ}$, իսկ

$$1, Բ = Զ, 1 = 1^{\prime}, աժ = 1^{\prime\prime}, բէ = 2^{\prime\prime}, զէ = 6^{\prime\prime}, \ldots :$$

Ա. Եթէ կամք իցեն զգիծ ինչ երկայնել, զոր օրինակ $2^{\circ}4^{\prime}5^{\prime\prime}$ երկայնութեամբ, պարտ է կարակնիւ չափել զերկայնութիւնն ՑՓ, քանզի

$$ՑՓ = ԵՓ + Եծ + ծՑ = ԲԴ + 5\,աժ + (Զ, 4) = 2ԱԲ + 4\cdot(Բ, 1) + 5\cdot աժ = 2^{\circ}4^{\prime}5^{\prime\prime} :$$

Այլ եթէ կամիցի ոք զերկայնութիւն ծանուցեալ ինչ գծի ըստ աստիճանացս այսոցիկ գտանել, պարտ է զգիծն զայն առնուլ կարակնիւ, եւ զծագս կարակնի ածել դնել ի վերայ ԱԲ գծի, որպէս զի մի ծագ կարակնի զմին ի կիտից բաժանման Գ, Դ, Ե ունիցի, եւ միւս ծագն հասանիցէ ի միջին կողմն Ա եւ Բ կիտից։ Զոր օրինակ եթէ առաջին ծագ կարակնի կայ ԺԵ, եւ միւսն հաւաստեաւ ի մի ի կիտից հատանելոյ ԱԲ գծին, զոր օրինակ Ժ7, յայտ է եթէ ծանուցեալ գիծն է $= 370$ աստիճանաց $= 3^{\circ}7^{\prime}$։ Ապա եթէ երկրորդ ծագն կարակնի չիցէ ճշդիւ Ժ7 կէտն բաժանման, այլ ի մէջ երկուց կիտից նոյնպիսեաց, զոր օրինակ ի միջին վայրի 7 եւ 8 կիտից, յայնժամ պարտ է քեզ շարժել տանել զկարակնդ ի վեր ի հաւասար հեռաւոր գծս ԺԶԹ կոյս մինչեւ միւս ծագ կարակնին ճշդիւ զմի ի խոտորնակութեանցն շօշափիցէ։ Եթէ այս ի Ր կէտն դիպիցի, գիծն այն է $= ՐՏ = 373^{\prime\prime} = 3^{\circ}7^{\prime}3^{\prime\prime}$։ Իսկ եթէ ծանուցեալ գիծն $>$ ԱՔ իցէ, պարտ է զբովանդակ երկայնութիւն աստիճանացն առնուլ, եւ խնդրել եթէ քանիցս անգամ արդեւք գտանիցի այն ի ծանուցեալ գիծն, եւ ապա զմնացորդն չափել ըստ օրինակին՝ զոր վերագոյն յայտ արարեալ ցուցաք։ Զոր օրինակ եթէ

բովանդակ երկայնութիւն աստիճանացն չորից դատանիցի յայն գիծ, եւ մնայցէ մնացորդ = 8Փ, յայտ է եթէ գիծն այն է = 4Ա.Ք + 8Փ = $40^{0} + 2^{0}4^{\text{ւ}}5^{\text{ր}} = 42^{0}4^{\text{ւ}}5^{\text{ր}}$ = 4245 մասանց աստիճանացն։

Բ. Գրոշմել երկուս գիծս՝ որք այս ինչ կամ այն ինչ կշռութեամբ ընդ միմեանս համեմատիցին. զոր օրինակ որպէս 325:480։

Յաստիճանացն առ մասունս 325 կամ $3^{0}2^{\text{ւ}}5^{\text{ր}}$, եւ ած զայն ի վերայ որ զինչ եւ իցէ իրիք գծի։ Ըստ նմին օրինակի առ եւ 480 մասունս կամ $4^{0}8^{\text{ւ}}$, եւ բերեալ դրոշմեա զայն ի վերայ քարտիսի։ Մարթ է զկշռութիւնս զայս կարճ ի կարճոյ դրոշմել, եւ զերկոսին գիծսն ըստ 65:96 կշռութեանս յօրինել։ Եւ զայս պարտ է առնել, յորժամ թիւքն կշռութեան կարի իմն մեծք իցեն։ Այլ սմին հակառակ, եթէ թիւքն կշռութեան կարի իմն փոքր իցեն, պարտ է զայն համարակաց ինչ առնելեաւ բազմացուցանել։ Ապա եթէ առանց համատատութեան իցէ կշռութիւնն, զոր օրինակ $\sqrt{3} : \sqrt{15}$, պարտ եւ պատշաճ է զարմատոն օրինակաւ մերձաւորութեան խնդրել. կամ այլով իմն օրինակաւ դրոշմի կշռութիւնն, յորժամ գրեթէ $\sqrt{3} : \sqrt{15} = 1 : \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = 1 : \sqrt{5} =$
$1 : 2{,}236068 = 1000000 : 2236068 = 1000 : 2236$ դնիցեմք, եւ ապա որպէս վերագոյն՝ զիրսն վճարիցեմք։

Գ. Զգիծ ինչ ԱԲ (Ձեւ 60.) յերիս մասունս բաժանել, որ կշռիցին ընդ միմեանս, որպէս 13 : 19 : 23։ Գտեալ յաստիճանացն զերկայնութիւնն $13 = 1^{0}3^{\text{ւ}}$, ձգեա զայն յԱ կիտէ ի Տ կոյս, եւ ի Տ կիտէ ի Ն կոյս զ19 մասունս = $1^{0}9^{\text{ւ}}$, եւ յետ այսորիկ ի Ն կիտէ ցԴ 23 մասունս կամ $2^{0}3^{\text{ւ}}$։

Այլ առաւել դիւրագոյն կատարի իրքն ըստ օրինակին՝ որ առաջիս կայ։ Յետ ԱՏ = $1^{0}3^{\text{ւ}}$ առնելոյ, առջիր 13 + 19 = 32 մասունս յաստիճանացն,

եւ ձգեա զայն յԱ կիտէ մինչեւ ի Ն. ապա այնուհետեւ 32 + 23 = 55 մասունս, զորս բերեալ դիջիր յԱ կիտէ մինչեւ ի Դ: Եթէ ԱԳ նովին կշռութեամբ հատեալ իցէ, յետ այնորիկ արա ըստ 90 համարոյ:

Այլ եթէ կամք իցեն քեզ առանց զհաւասար հեռաւոր գծման ձգելոյ կատարել. առնիջիր զայս օրինակ: Քննեա եւ տես եթէ որչափ ըստ աստիճանացն մեծ իցէ բաժանելի գիծն. զթիւն՝ որ զերկայնութիւնն յայտ արարեալ ցուցանէ, բաժանեա ընդ բովանդակութիւն ծանուցեալ թուոց կշռութեանն: Արդ արդիւնք քաներորդին եւ միոյ միոյ ի թուոց կշռութեանն ցուցանէ զերկայնութիւն իւրաքանչիւր մասին ըստ մասանց աստիճանացն: Այլ այս կարգ յայնժամ եւեթ ի կիր արկանի, յորժամ քաներորդն ողջոյն թիւ իցէ: Դիցուք դրեսցուք եթէ իցէ ԱԲ = 385 մասանց աստիճանացն, յայտ է եթէ

$$\frac{385}{13+19+23}=\frac{385}{55}=7:$$

Արդ իբրեւ առնիցի ԱԵ = 7·13 = 91, ԵԶ = 7·19 = 133, եւ ԶԲ = 7·23 = 161, յայնժամ լուծանի խնդիրն. քանզի

$$91:133:161=13:19:23:$$

Եթէ զիա՛րդ պարտ իցէ կատարել, յորժամ գիծ ինչ ի բազում մասունս բաժանելոցն իցէ, ինքնին իսկ յայտ է: Նոյնպէս եւ այն եւս յայտ է, եթէ զիա՛րդ եւ ո՛րդունակ գիծ ինչ ի բազում հաւասար մասունս բաժանիցի:

Ցայս սկզբունս հաստատեալ է յօրինուած համեմատական կարակնի: Այս գործի կազմի յերկուց հաւասար քանոնաց, որ են (Ձեւ 63.) ԱԲԳԴ եւ ԳԵԷԶ, որք որպէս զորունան կարակնի շարժականք են ի Գ: Երկու

հաւասար ԳՍ եւ ԴՋ անկիւնագիծք կամ հաւասար ինչ գիծք երկայնութեան քանոնաց բաժանին ի հաւասար մասունս (ի մեր օրինակի ի 100), եւ առաջի մասանցն նշանակք թուոց կան։ Արդ եթէ կամք իցեն այսու գործեաւ զգիծ ինչ, զոր օրինակ զՄՆ ի հաւասար ինչ, զոր օրինակ յ9 մասունս բաժանել, պարտ է զառաջինն ի վերայ միոյ ի սրունից համեմատական կարակնի գտանել թիւ ինչ, որ ճշդիւ բաժանիցի յ9, կամ յոր զգիծն բաժանելոց իցես։ Արդ ընտրեալ առցուք զ90. ի վերայ այսր թուոյ դիջիր զմի ծայր սովորական կարակնի, եւ զմեւս ծայրն տարջիր ի մեւս սրունան ԱԳ, որպէս զի բացարձակութիւնն 90 եւ 90 աստիճանաց իցէ գիծն ՄՆ։ Թող զգործին առանց շարժելոյ, եւ կարակնիւդ չափեա ի 10է մինչեւ ց10 (որ է 9երորդ մասն 90 թուոյ) եւ այս է մասն զոր խնդրես, որով ՄՆ յ9 մասունս հատանիցի։ Կարես ի մտաց իմանալ թէ զիարդ երկու գիծք այս ինչ կամ այն ինչ կշռութեամբ ի հաւասար մասունս բաժանիցին։

92. Աստիճանքն՝ զորոց ի (Հ. 91.) ճառեցաք՝ բազում անգամ ոչ սակաւ օգնականութիւն մատուցանեն ի կազմել կամ ի գտանել զհաւասարութիւն ինչ, զոր բազում աշխատութեամբ կարեն կատարել նորոգ սկսանողքն. առ ի ցուցանել շատ լիցի խնդիրս։

Խնդիր։ Առ ա եւ բ ծանուցեալ գիծս, գտանել երկուս միջին համեմատականս փ եւ ք. այսինքն $ա : փ : ք : բ$։

Լուծումն։ Ըստ հանգամանաց խնդրոյս է

$$ա)\quad ա : փ = փ : ք,$$
$$բ)\quad փ : ք = ք : բ$$

Յա համեմատութենէ ծագէ $ք = \frac{փ^2}{ա}$. իբրեւ զզօրութիւնս զայս հաստատիցեմք ի բ, ելանէ

$$փ : \frac{փ^2}{ա} = \frac{փ^2}{ա} : բ,$$

յորմէ եւ $փ^3 = ա^2բ$, եւ $փ = \sqrt[3]{ա^2բ}$. ուստի եւ $ք = \frac{(\sqrt[3]{ա^2բ})^2}{ա} = \sqrt[3]{\frac{ա^4բ^2}{ա^3}} = \sqrt[3]{աբ^2}$։ Արդ եթէ զքանիս-

նութիւնս ա եւ բ ի ձեւն աստիճանացն թուովք յանդիման կացուցանիցեմք, կարիցեմք եւ զգ եւ զդ մասամբք աստիճանացն թուել: Համարեսցուք եթէ իցէ ա $=7$, եւ բ $=448$ մասանց աստիճանացն. յայնժամ գտանիցի գ $=28$, եւ դ $=112$. որոց ի ձեւն աստիճանացն եւեթ ի վերայ հասաք:

93. Խնդիր: Զաղեղն ինչ բոլորակի ի կարի իմն փոքր մասունս իւր մերձաւորութեան օրինակաւ բաժանել:

Լուծումն: Իցէ (Ձեւ 63.) ԱԲ որ զինչ եւ իցէ աղեղն բոլորակի, որ յիւր առանձինն աստիճանս յա⁰, բ⁰, գ⁰,... կէտսն բաժանեալ իցէ: Արդ առաջի կայ զմի մի աստիճան ի ն հաւասար մասունս բաժանել: Զգեա որպիսի ինչ եւ իցէ կէս երկակորով ի Կ կենդրոնէ զկենդրոնակից աղեղն աա՛ յայտ է եթէ եւ այն եւս ի Կա⁰, Կբ⁰, Կգ⁰... ուղիղ գծիցն բաժանիցի յիւր առանձինն աստիճանս 1⁰, 2⁰, 3⁰: Արդ համարեսցուք եթէ Աա մասն ԱԿ կէս երկակորոյն ի բ, գ, դ,... կէտսն յայնպիսի ինչ ն մասունս հատանիցի, որպէս զի եթէ ընդ նոսա կենդրոնակից աղեղունքն բբ՛, գգ՛, դդ՛,... եւ խոտորնակութիւնքն աա⁰, 1⁰բ⁰, 2⁰գ⁰,... ձգիցին, կէս երկակտուրքն Կ,1, Կ,2, Կ,3 ձգեալք ընդ մ, ն, պ, փ, ր կէտսն հատանելոյ, զաղեղն Աա⁰ ի ն մասունս հաւասարս հատանիցեն: Այս ուրեմն առաջի կայ մեզ զայն ուսուցանել, եթէ որպէս պարտ իցէ զմեծութիւն Կբ, Կգ, Կդ,.... ճառագայթիցն գտանել: Վասն կարի իմն սակաւ եւ փոքր լինելոյ այլակերպութեան բմ, գն, դպ,... աղեղանցն յուղիղ գծից, մարթ է առանց ինչ մեծամեծս սխալելոյ, որպէս ուղիղ գիծս համարել զնոսա: Իսկ որովհետեւ յերեքանկիւնսն Կբմ եւ ԿԱ,1, եւ դարձեալ յաբմ եւ աԱա⁰ երեքանկիւնսն (Հ. 85.) է ԿԱ : Ա,1 = Կբ : բմ, եւ Աա⁰ : Աա = բմ : աբ. արդ իբրեւ ընդ միմեանս յօդիցին երկոքին համեմատութիւնքն, ելանէ Աա⁰ × ԿԱ : Աա ×

28 ИЮН 1900

$Ա,1 = կբ : աբ$ ։ Դնիցուք գրեսցուք եթէ իցէ կէս եր-կակտուրն $Ակ = ծ$, մասնն $Աա = ա$, անծանօթ ճառագայթն $կբ = ց$, եւ $աբ = կբ - կա = ց - (ծ - ա)$, եւ աղեղն $Աա^0 = բ$, ուստի եւ ըստ հանգամանաց խնդրոյն $Ա,1 = \frac{բ}{ն}$. արդ իբրեւ զայսոսիկ փոխանակիցեմք ի վերջին համեմատութեանն, ծագիցէ

$$բ \,.\, ծ : ա \,.\, \frac{բ}{ն} = ց : ց - ծ + ա \text{ ։}$$

Ուստի ծագէ

$$\frac{աբ}{ն} \cdot ց = բծց - բծ(ծ - ա), \text{ կամ}$$

$$\left(բծ - \frac{աբ}{ն}\right) ց = բծ(ծ - ա) = \frac{բ(նծ - ա)ց}{ն}$$

$$\text{եւ } ց = \frac{նծ(ծ - ա)}{նծ - ա} \text{ ։}$$

Արդ եթէ յառանձինն դէպս զզօրութիւն $ց$ քանիօ-նութեան հաշուիցեմք, եւ զգտեալ երկայնութիւնն յաստիճանացն չափեալ առնուցումք, եւ այնու եր-կայնութեամբ ի $կ$ կենդրոնէ ձգիցեմք կարակնիւ զաղեղն $բբ'$ յայնժամ $կ,1$ կէս երկակտուրն, որ ընդ $ն$ ձգիցի, հատանէ աղեղն $Ա,1 = \frac{Աա^0}{ն}$ ։ Իբրեւ հա-մեմատիցին ընդ միմեանս երեքանկիւնքն $կԱ,2$, եւ $կփն$, ծագէ համեմատութիւնս $կփ : փն = կԱ : Ա,2$ կամ $ե : փն = ծ : \frac{2բ}{ն}$, եւ $յ\triangle ափն$ եւ $յ\triangle աԱա^0$ է $աե : փն = Աա : Աա^0$, կամ $ե - (ծ - ա) : փն = ա : բ$, ուստի $փն = \frac{2բ}{նծ} \cdot ե = \frac{բե - բ(ծ - ա)}{ա}$, յորմէ $ե = \frac{նծ^2 - անծ}{նծ - 2ա} = \frac{նծ(ծ - ա)}{նծ - 2ա}$ գտանիցի ։ Այնգունակ ի վերայ հաստանի-

ցեմք երրորդ կէս երկակորոյն, այս ինքն կդ $=$ + $= \frac{\text{նճ}(\text{ճ} - \text{ա})}{\text{նճ} - 3\text{ա}}$, սոյնպէս եւ այլոցն մի ըստ միոջէ: Արդ եթէ Աա^0 մի ատրիճան ցուցանիցէ. եւ համարեսցուք եթէ այն ի վեց մասունս հաւասարս որ է ի տասն երկրորդէ ի տասն երկրորդ բաժանելոց իցէ, յայտ է եթէ ն $= 6$. եւ եթէ ճ $= 100$, եւ Աա $=$ ա $= 10$ իցեն, յայնժամ գտանիցի

$$\text{յ} = \frac{6 \cdot 100\,(100 - 10)}{6 \cdot 100 - 10} = \frac{600 \cdot 90}{590} = 91,52 \cdots$$

$$\text{ǂ} = \frac{600 \times 90}{580} = 93,103 \cdots, \text{ եւ}$$

$$+ = \frac{600 \times 90}{600 - 30} = 94,7368.$$

Սոյին օրինակաւ գտանին եւ այլ եւս կէս երկակտուրքն:

94. Եւ միւս եւս օրինակ վասն զմանր մանր մասունս ատրիճանացն գտանելոյ, զորմէ ասասցուք փոքր ի շատէ: Համարեսցուք եթէ (Զեւ 64.) երկայնութիւնքն ԱԲ եւ ԳԴ հաւասար իցեն, յորոց մին ԱԲ ի 5 մասունս հաւասարս եւ միւսն ի 6 մասունս հաւասարս բաժանեալ իցեն, մին ի կէտսն 1, 2, 3, ... եւ միւսն ի 11, 12, ...: Երկայնութիւնն Ա,11՝ զոր ա քանիօնութեամբ յանդիման կացուցանեմք, է $\frac{1}{5}$ ԱԲ երկայնութեան կամ ա $= \frac{1}{5}$ ԱԲ, իսկ Գ,1 ունի $\frac{1}{6}$ մասն յԱԲ երկայնութենէ, ուստի եւ Ա, 11 $-$ Գ, 1 $= \frac{1}{5}$ ԱԲ $- \frac{1}{6}$ ԱԲ $= \frac{1}{30}$ ԱԲ կամ $\frac{1}{6}$ ա: Արդ երկոքին քանոնքն այնպէս ի միմեանց վերայ դտանիցին, որպէս զի Ա ի Գ եւ Դ ի Բ կայցէ, յայնժամ կէտն հատանելոյ 11 ի 1 կիտէ անտի $\frac{1}{6}$ ա իւ չափ, եւ կէտն բաժանման 12 յ2 կիտէ հատանելոյ $\frac{2}{6}$ ա իւ չափ, 13 ի 3 կիտէ $\frac{3}{6}$ ա իւ չափ հեռացեալ մեկուսի գտանիցի: Արդ զայս եդեալ, իբրեւ գտանիցէ ոք, եթէ երկայնութիւն

ինչ չափեալ ի վերայ աստիճանացն ի դատարկ (0) կիտէ մինչեւ ցկէտն է հաստանիցէ, յայտ է եթէ իցէ երկայնութիւնս 13 մասն եւ է, 13 մասն կոտորեալ, զոր առաջին կայ մեզ գտանել: Վասն այսորիկ պարտ է բերել զԳԴ քանոնն, որ անուանեալ կոչի Նօնիոս կամ Վերնիէր անուամբ գտողին, ի Գ՛Դ դիրս, ըստ ԱԲ ուղղութեան, որպէս զի Գ՛ եկեալ կայցէ ի կէտն է: Արդ իբրեւ մանր ի քնին արկանիցեմք զկէտն բաժանելոյ, գտանիցի եթէ երկու կէտք բաժանմանն այս է Ը եւ 5 ի միմեանց վերայ պատահեն, որով կէտն 17 ի 4 կիտէ անտի հաստանելոյ $\frac{1}{6}$-իւ չափ, եւ կէտն հաստանելոյ 16 յ3 կիտէ անտի $\frac{2}{6}$-իւ չափ հեռացեալ է, այնպէս եւ այլքն մի ըստ միոջէ. եւ ի կատարած 13 հեռի կայ ի Գ՛ կամ յէ կիտէ $\frac{5}{6}$-իւ չափ, ուստի եւ է,13 է $=\frac{5}{6}$ - եւ 13 $\frac{5}{6}$ - է երկայնութիւնն:

Զկէտսն բաժանելոյ պարտ է որչափ մարթ իցէ մօտ առ միմեանս դնել, որպէս զի կոտորքն փոքրագոյն լինիցին. եւ զարձեալ ճշդիւ եւ հաւաստեաւ քննել զհանդիպել ի վերայ միմեանց կիտից հաստանելոյ: Արդ եթէ Ն — 1 մասունք ԱԲ երկայնութեան Ն մասանց ԳԴ Նոնիոսի կշռիցին, յայնժամ ԳԴ ցուցանէ զՆերրորդ մասն միոյ մասին աստիճանաց: Ապա եթէ զմիմեանս հաստանելն ի էերորդն Նոնիոսի դիպեցաւ, յայնժամ ելանէ կոտորն $\frac{է}{Ն}$: Եւ համառօտիւք իսկ ասել, ողջոյն թիւքն ցուցանին նշանակօք թուոց ԱԲ աստիճանաց. իսկ մասունք կոտորեալք ի ձեռն ԳԴ Նոնիոսի: Այն սկիզբն ի կիր արկանի եւ ի մասունս աղեղան բոլորակի:

ՀԱՏԱԾ Գ

ՎԱՍՆ ՆՄԱՆՈՒԹԵԱՆ ԵՐԵՔԱՆԿԵԱՆՑ

95. Ի Հ. 27. *ասացելոցս, մարթես ինքնին իմանալ, եթէ երկու երեքանկիւնք միմեանց նման են յորժամ երեք կողմանք միոյն երից կողմանց միւսոյն համեմատականք իցեն, եւ անկիւնք միոյն՝ անկեանց միւսոյն կարգաւ հաւասարք իցեն:* Արդ եթէ յերեքանկիւնսն ԱԲԳ եւ աբգ (Ձեւ 65.) ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ = ԲԳ : բգ, եւ Ա = ա, Բ = բ, եւ Գ = գ, յայնժամ եւ ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ: Քանզի այլակերպութիւն երկուց երեքանկեանց չհաւասարութիւնն է, քանզի եթէ լինէր ԱԲ = աբ, յայնժամ հարկ ի վերայ կայր ԱԳ = ագ, եւ ԲԳ = բգ լինել, որով երեքանկիւնքն լինէին պատշաճականք:

96. Զսորին զհետ գայ, զի եթէ ի միում ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 54.) առ ԲԳ կողմն ձգիցեմք գիծ հաւասար հեռաւոր զԴԵ, փոքր երեքանկիւնն ԱԴԵ իցէ նման ԱԲԳ երեքանկեան: Քանզի (Հ. 85. Ա.) է ԱԴ : ԱԲ = ԱԵ : ԱԳ = ԴԵ : ԲԳ. եւ որովհետեւ ԴԵ ∥ ԲԳ, ուրեմն (Հ. 77.) եւ անկ. ԱԴԵ = Բ, եւ անկ. ԱԵԴ = Գ, ուստի եւ ΔԱԴԵ ∾ ΔԱԲԳ:

97. *Եթէ երկու երեքանկիւնքն հաւասարանկիւնք իցեն, յայնժամ եւ միաբան կողմանքն միմեանց համեմատականք են, (ուստի եւ երկոքին երեքանկիւնքն նման միմեանց). եւ խոտորնակս:*

Ա մասն: Դիցուք գրեսցուք եթէ (Ձեւ 65.) իցէ Ա = ա, Բ = բ, Գ = գ, եւ ԱԲ > աբ: Արդ իբրեւ ԱԴ = աբ, ԱԵ = ագ առնիցեմք, եւ ձգիցեմք զԴԵ, այս է եթէ լինիցի ΔԱԴԵ ≅ Δաբգ (Հ. 52.), ուստի եւ ԴԵ = բգ, ԱԴԵ = բ = Բ, որով ԴԵ ∥ ԲԳ (Հ. 77.), եւ ԱԴ : ԱԲ = ԱԵ : ԱԳ = ԴԵ : ԲԳ (Հ. 85.), կամ աբ : ԱԲ = ագ : ԱԳ = բգ : ԲԳ, այս ինքն եթէ՝ միաբան կողմանքն երկուց երեքանկեանց կարգաւ համե-

մատականք են, ուստի եւ երեքանկիւնքն նման միմեանց։

Բ մասն։ Իցէ (Ձեւ 65.) ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ = ԲԳ : բգ։ Եթէ գնիցեմք ԱԴ = աբ, եւ ձգիցեմք ԴԵ || ԲԳ, յայնժամ ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ = ԲԳ : ԴԵ։ Որովհետեւ ԱԴ = աբ, ուրեմն ագ = ԱԵ, եւ բգ = ԴԵ, ուստի եւ հաւասար են երեքանկիւնքն ԱԴԵ եւ աբգ, որով եւ հաւասար են փոխանակաւ անկիւնքն ԱԲԳ եւ աբգ երեքանկեանց։

Զսորին զհետ գայ, եթէ

Ա. Երկու երեքանկիւնք նման են միմեանց, եթէ երկու անկիւնք նոցա հաւասարք իցեն միմեանց փոխանակաւ (Հ. 76. Գ.)։

Բ. Յերկուս նման երեքանկիւնս ԱԲԳ եւ աբգ ուղղորդ գիծքն որ ի միջէ Ա = ա անկենէ ձգիցին կամ բարձրութիւնք երկուց երեքանկեանցն համեմատականք են ընդ միաբան կողմանս նոցին։ Վասն զի որովհետեւ Բ = բ, եւ անկ. ԱՊԲ = ապբ = Ո, ուրեմն ΔԱԲՊ ∾ Δաբպ, ուստի եւ ԱՊ : ապ = ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ : . . . . ։

Նոյն օրինակաւ ցուցանի կանոնս, յորժամ ուղղորդ գիծքն զերկայնեալ կողմանս խարսխին հատանիցեն։

98. Երկու երեքանկիւնք նման են, եթէ Ա) կողմանք նոցա ի միմեանց հաւասար հեռաւորք իցեն փոխանակաւ, եւ կամ Բ) կողմանք նոցա կամ երկայնութիւնքն կայցեն ուղղորդ ի վերայ միմեանց։

Դիցուք գրեսցուք եթէ (Ձեւ 65.) ԱԳ || ագ, ԱԲ || աբ, եւ ԲԳ || բգ, յայնժամ (Հ. 80. Ե.) Բ = բ, եւ Ա = ա, ուստի եւ Գ = գ, եւ ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ (Հ. 97. Ա.)։

Միօրինակ եւ երկրորդ մասն։ Համարեսցուք եթէ իցէ (Ձեւ 66.) բգ ⊥ ԲԳ յԵ, ագ ⊥ ԱԳ ի Զ, եւ աբ ⊥ ԱԲ ի Դ, յայտ է եթէ ΔաԴԷ ∾ ΔԱԶԷ. քանզի անկ. Դ = Ո = Զ, եւ անկ. ԴԷա = ԱԷԶ,

ուստի եւ ա = Ա: Դարձեալ ΔԲԴԹ ∾ ΔԵԹբ, քանզի է անկ. Դ = Ո = Ե, եւ անկ. ԴԹԲ = բԹԵ, ուստի եւ Բ = բ: Նոյն արդ որովհետեւ Ա = ա, Բ = բ, ուրեմն եւ Գ = գ, որով եւ ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ (Հ. 97. Ա.):

Որպէս տեսանես միաբան կողմանքն յօրինակիս այնոքիկ են՝ որ կան ուղղորդ ի վերայ միմեանց:

99. Երկու երեքանկիւնքն նմանք են միմեանց, եթէ մի անկիւն նոցա հաւասար իցէ, եւ երկոքին կողմանքն՝ որ զանկիւնն զայն ի միջի փակիցեն, համեմատականք:

Իցէ (Ձեւ 65.) Ա = ա, եւ ԱԲ : ԱԳ = աբ : ագ: Արդ առնիջիր ԱԴ = աբ, ԱԵ = ագ, եւ ձգեա զԴԵ, յայտ է եթէ ΔԱԴԵ ≅ Δաբգ ուստի եւ ԱԲ : ԱԳ = ԱԴ : ԱԵ, ուստի ԴԵ ∥ ԲԳ (Հ. 86.), եւ անկ. ԱԴԵ = Բ. եւ քանզի ԱԴԵ = բ ուրեմն Բ = բ: Արդ որովհետեւ Ա = ա, Բ = բ, ուրեմն Δաբգ ∾ ΔԱԲԳ (Հ. 97. Ա.)

100. Երկու երեքանկիւնք ԱԲԳ եւ աբգ (Ձեւ 65.) նմանք են միմեանց, եթէ երեք կողմանք միոյ երեքանկեան երից կողմանց միւսոյն կարգաւ համեմատականք իցեն:

Իցէ ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ = ԲԳ : բգ: Արդ առնիջիր ԱԴ = աբ, եւ ձգեա ԴԵ ∥ ԲԳ, յայնժամ ԱԲ : ԱԴ = ԱԳ : ԱԵ = ԲԳ : ԴԵ (Հ. 85. Ա.). եւ զի ըստ մերոյ համարելոյ եւս է ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ = ԲԳ : բգ, աստի եւս աբ : ԱԴ = ագ : ԱԵ = բգ : ԴԵ. եւ որովհետեւ աբ = ԱԴ, ուրեմն հարկ է եւ ԱԵ = ագ, եւ ԴԵ = բգ լինել, ուստի եւ ΔԴԱԵ ≅ Δաբգ (Հ. 54.), այս ինքն եթէ երկոքին երեքանկիւնքն եւ հաւասարք եւ նմանք են: Արդ քանզի ΔԱԲԳ ∾ ΔԱԴԵ, ուրեմն եւ ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ:

101. Եթէ երկու կողմանք միոյ ԱԲԳ (Ձեւ 67.) երեքանկեան ուղիղ համեմատականք իցեն երկուց կողմանց միւսոյ աբգ երեքանկեան, եւ անկիւնքն

յանդիմանակաց մեծագոյն կողմանն հաւասարք իցեն միմեանց, երեքանկիւնքն այնուքիկ միմեանց նմանք են։

Իսկ ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ, ԱԳ > ԱԲ, ագ > աբ, Բ = բ։ Արդ եթէ ուրանայցեմք զնմանութիւն երեքանկեանցն, յայնժամ հարկ ի վերայ կայ ԲԳ : բգ կշռութեանս կամ > եւ կամ < ԱԲ : աբ լինել։ Յառաջին դէպս դիցուք գրեսցուք, եթէ իցէ ԱԲ : աբ = ԲԴ : բգ, յայնժամ, որովհետեւ Բ = բ, լինիցի ΔԱԲԴ ∾ Δաբգ (Հ. 99.), եւ ապա եւս ԱԲ : աբ = ԱԴ : ագ։ Նա քանզի ըստ մերոյ համարելոյ եւս է ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ, նոյն իրի ԱԳ : ագ = ԱԴ : ագ, այս ինքն է ԱԳ = ԱԴ, վասն որոյ ն = գ < Ո (Հ. 53. եւ 61. գ.) յորմէ ճ > Ո, ուրեմն եւ ԱԲ > ԱԴ (Հ. 64.), եւ զի ԱԴ = ԱԳ, ուրեմն լինէր եւ ԱԲ > ԱԳ, որ հակառակն է մերոյ համարելոյ։

Իսկ յերկրորդ դէպսն համարեսցուք եթէ իցէ ԱԲ : աբ = ԲԳ : բդ։ Յայնժամ վասն Բ = բ լինելոյ, լինիցի եւ Δաբդ ∾ ΔԱԲԳ, ուստի եւ ԱԲ : աբ = ԱԳ : ադ։ Նա որովհետեւ ըստ մերոյ համարելոյ եւս է ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ, ուրեմն եւ ագ = ադ, յորմէ եւ, որովհետեւ ի հաւասարասրուն ագդ երեքանկեան անկիւնն դ < Ո, է > Ո, ուստի եւ աբ > ադ կամ աբ > ագ վասն ադ = ագ լինելոյ, որ հակառակ է ագ > աբ համարելոյ։ Արդ որովհետեւ ԱԲ : աբ կշռութիւնն չմարթի ոչ մեծագոյն, եւ ոչ իսկ փոքրագոյն քան զԲԳ : բգ լինել, ապա ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ, յորմէ եւ ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ (Հ. 99.)։

102. Խնդիր։ Յօրինել երեքանկիւն ինչ (Զեւ 65.), որ այլում ԱԲԳ երեքանկեան ծանուցելոյ նման իցէ։

Լուծումն։ Զգեա զբգ միաբան ընդ ԲԳ կողման, եւ ի կէտն բ յօրինեա անկիւն ինչ գբա = ԳԲԱ, եւ ի գ մեւս եւս անկիւն բգա = ԲԳԱ, յորմէ գտանիցի եւ կէտն ա, յորում երկոքին գիծքն աբ եւ գա զմիմեանս հատանիցեն։

103. Եթէ յուղղանկիւն իւիք երեքանկեան ի գագաթանէ ուղիղ անկեան ձգիցի գիծ ուղղորդ ի վերայ ներքնաձգին, յայնժամ Ա) Հատանի երեքանկիւնն յերկուս փոքր երեքանկիւնս, որք նման են եւ ողջոյն երեքանկեան, եւ միմեանց իսկ ի գլխովին: Բ) Ուղղորդ գիծն այն է միջին համեմատական հատածոց ներքնաձգին, եւ Գ) Մի մի յիջիցն երեքանկեան է միջին համեմատական ինքեան առընթերակաց հատածոյն եւ ներքնաձգին:

Իցէ յԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 68.) անկ. ԲԱԳ = Ո, եւ ԱԴ ⊥ ԲԳ: Արդ աստստին յայտ է, եթէ անկիւնն ԱԴԲ = ԲԱԳ = Ո, ԴԲԱ = ԳԲԱ, ուստի եւ Ս = Գ, աստի իսկ $Δ$ԱԲԴ ∾ $Δ$ԱԲԳ: Ըստ նմին օրինակի է անկիւնն ԱԴԳ = ԲԱԳ = Ո, ԴԳԱ = ԲԳԱ, եւ Ն = Բ, ուստի եւ $Δ$ԱԴԳ ∾ $Δ$ԱԲԳ (Հ. 97. Ա.) սովին պատճառաւ եւ $Δ$ԱԴԳ ∾ $Δ$ԱԲԴ, յորմէ եւ ծագէ երկրորդ մասն կանոնին եթէ ԲԴ : ԱԴ = ԱԴ : ԴԳ, եւ զի $Δ$ԱԲԴ ∾ $Δ$ԱԲԳ, ուրեմն եւ ԲԴ : ԱԲ = ԱԲ : ԲԳ: Իբրեւ համեմատիցեմք ընդ միմեանս զնմանութիւն ԱԴԳ եւ ԱԲԳ երեքանկեանց, գտանեմք եթէ ԳԴ : ԱԳ = ԱԳ : ԲԳ, որ է երրորդ մասնն:

Ա. Զի ԲԴ : ԱԲ = ԱԲ : ԲԳ եւ ԳԴ : ԱԳ = ԱԳ : ԲԳ համեմատութեանցս զհետ գայ, եթէ $\overline{ԱԲ}^2$ = ԲԳ . ԲԴ, եւ $\overline{ԱԳ}^2$ = ԳԴ . ԲԳ, ուստի եւ $\overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԱԳ}^2$ = ԲԳ . ԲԴ : ԲԳ . ԳԴ = ԲԴ : ԳԴ, այս ինքն է Երկրորդ կարողութիւնք իջիցն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս նոցին առընթերն կացեալ հատածքն ներքնաձգին ընդ միմեանս կշռիցին: Դարձեալ զ$\overline{ԱԲ}^2$ = ԲԳ . ԲԴ ըզհետ գայ $\overline{ԲԳ}^2 : \overline{ԱԲ}^2$ = ԲԳ : ԲԴ. յորժամ $\overline{ԱԲ}^2$ = ԲԳ. ԲԴ ընդ ԲԳ. բազմացուցանիցի:

Զգիծս պարտ եւ պատշաճ է թուով յայտ արարեալս զմտաւ ածել, որպէս եւ ի մերձաւոր խնդիրսն:

Բ. Իբրեւ ի միմեանս յաւելուցումք զերկուս հաւասարութիւնս զայսոսիկ $\overline{ԱԲ}^2$ = ԲԳ . ԲԴ, եւ

$\overline{\text{ԱԳ}}^2 = \text{ԲԳ} . \text{ԳԴ}$, ելանէ $\overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԱԳ}}^2 = \text{ԲԳ} . \text{ԲԴ} + \text{ԲԳ} . \text{ԳԴ} = \text{ԲԳ} (\text{ԲԴ} + \text{ԳԴ}) = \overline{\text{ԲԳ}}^2$ ։ Ուրեմն ցուղղանկիւն երեքանկիւնս երկրորդ կարողութիւն ներքնաձգին հաւասար է երկրորդ կարողութեան երկուց կիցն միանգամայն։ Ապա ուրեմն եթէ յուղղանկիւն երեքանկեան ծանուցեալ իցեն երկոքին կողմանքն, նոքօք մարթ է եւ երրորդ անծանօթ կողմանն ի վերայ հասանել։ Քանզի զ$\overline{\text{ԲԳ}}^2 = \overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԱԳ}}^2$ հաւասարութեան զհետ գայ $\text{ԱԲ} = \sqrt{(\overline{\text{ԲԳ}}^2 - \overline{\text{ԱԳ}}^2)}$, եւ $\text{ԱԳ} = \sqrt{(\overline{\text{ԲԳ}}^2 - \overline{\text{ԱԲ}}^2)}$։ Եթէ զոր օրինակ $\text{ԲԳ} = 5$, $\text{ԱԳ} = 3$ իցէ, յայնժամ $\text{ԱԲ} = \sqrt{(25 - 9)} = \sqrt{16} = 4$։ Ապա ուրեմն երեք գիծք, որք համեմատիցին ընդ միմեանս որպէս 3, 4, 5, կազմեն ուղղանկիւն երեքանկիւն ինչ։ Արդ եթէ չուան ինչ չափելոյ այսու կշռութեամբ բաժանիցի, մարթ է այնուիկ կանգնել ուղղորդ ինչ գիծ ի վերայ դաշտի, եւ կազմածով եւս զերրորդ կողմն գտանել։

Այլ եթէ ուղղանկիւն երեքանկիւնն՝ հաւասարասրուն եւս իցէ, այս ինքն $\text{ԱԲ} = \text{ԱԳ}$, յայնժամ $\overline{\text{ԱԲ}}^2 = \overline{\text{ԱԳ}}^2$, որով $\overline{\text{ԲԳ}}^2 = \overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԱԲ}}^2 = 2\overline{\text{ԱԲ}}^2$ յորմէ $\text{ԲԳ} = \text{ԱԲ} \sqrt{2}$, եւ $\text{ԱԲ} = \frac{\text{ԲԳ}}{\sqrt{2}} = \frac{\text{ԲԳ} \sqrt{2}}{2}$։

Այս կանոն կամ հրաման անուանեալ կոչի Պիւթագորեան՝ յանուն Պիւթագորայ իմաստնոյ, որ գտիչն եղեւ. եւ այս իսկ է աղբեւր յորմէ բղխեն ելանեն բազում ճշմարտութիւնք երկրաչափութեան ։

Գ. Աստատին հաստատի եւ սմին խոտորնակն. զի եթէ ի միում ԱԲԳ երեքանկեան երկրորդ կարողութիւն մեծագոյն կողման հաւասար իցէ բովանդակութեան երկրորդ կարողութեանց այլոց երկուց կողմանց, երեքանկիւնն այն է ուղղանկիւն, այս ինքն եթէ $\overline{\text{ԱԲ}}^2 = \overline{\text{ԱԳ}}^2 + \overline{\text{ԲԳ}}^2$, յայնժամ $\text{Տ} = \text{Ո}$ (Հեւ 69.)։ Քանզի եթէ ի Գ

կանգնիցեմք ԳԴ ⊥ ԱԳ, եւ ԳԴ $=$ ԳԲ գործիցեմք, յայտ է եթէ $\overline{\text{ԱԴ}}^2 = \overline{\text{ԱԳ}}^2 + \overline{\text{ԳԴ}}^2$ (Բ.), քանզի Ն $=$ Ո ըստ կազմածոյն: Նւ զի ԳԴ $=$ ԲԳ, ուրեմն եւ $\overline{\text{ԱԴ}}^2 = \overline{\text{ԱԳ}}^2 + \overline{\text{ԲԳ}}^2$, ուստի $\overline{\text{ԱԴ}}^2 = \overline{\text{ԱԲ}}^2$ կամ ԱԴ $=$ ԱԲ, ուրեմն ΔԱԳԴ $\cong$ ԱԲԳ (Հ. 54.). զորոյ զհետ գայ եթէ Մ $=$ Ն $=$ Ո:

Դ. Նթէ մի էջն ուղղանկիւն երեքանկեան երկպատիկ մեծ իցէ քան զմեւս էջն, եւ ի ներքնաձգէ անտի առցես մասն ինչ հաւասար փոքր իջին, մնացեալ մասնն է միջին համեմատական մեծի իջին, եւ այլակերպութեանն՝ որ գտանի, յորժամ զայն մնացեալ մասն ներքնաձգին հանցես ի մեծագոյն իջէն: Դնիցուք գրեսցուք եթէ յուղղանկիւն երեքանկեանս (Ձեւ 70.) իցէ ԱԲ $=$ 2ԱԳ, եւ ԳԴ $=$ ԱԳ: Նւ քանզի ԲԳ $= \sqrt{(\overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԱԳ}}^2)} = \sqrt{(4\overline{\text{ԱԳ}}^2 + \overline{\text{ԱԳ}}^2)} = \sqrt{5\overline{\text{ԱԳ}}^2} =$ ԱԳ $\sqrt{5}$, ապա եւս ԲԴ $=$ ԲԳ $-$ ԳԴ $=$ ԱԳ $\sqrt{5} -$ ԱԳ, եւ $\overline{\text{ԲԴ}}^2 = \overline{\text{ԱԳ}}^2 (\sqrt{5} - 1)^2 = \overline{\text{ԱԳ}}^2 (6 - 2\sqrt{5})$: Դարձեալ գտանի ԱԲ $-$ ԲԴ $=$ 2ԱԳ $-$ (ԱԳ $\sqrt{5} -$ ԱԳ) $=$ ԱԳ $(3 - \sqrt{5})$, եւ ապա ԱԲ (ԱԲ $-$ ԲԴ) $=$ 2ԱԳ $\cdot$ ԱԳ $(3 - \sqrt{5}) = \overline{\text{ԱԳ}}^2 (6 - 2\sqrt{5})$: Նպա ուրեմն է ԱԲ (ԱԲ $-$ ԲԴ) $= \overline{\text{ԲԴ}}^2$, յորմէ ԱԲ : ԲԴ $=$ ԲԴ : ԱԲ $-$ ԲԴ:

104. Խնդիր: Գտանել, եթէ որով հանգամանօք արդեւք երեք կողմանք ուղղանկիւն երեքանկեան չափելի իցեն կամ թէ հաստատուն ինչ կշռութիւն ընդ միմեանս ունիցին:

Լուծումն: Զներքնաձիգն նշանակեսցուք գ, եւ զմին յիջիցն ա, եւ զմեւսն բ նշանագրովք, ուստի եւ $գ^2 = ա^2 + բ^2$: Նրդ դիցուք գրեսցուք եթէ $ա = տ$, $բ = պտ$ եւ $գ = րտ$, յայտ է եթէ իբրեւ փոխանակիցեմք զզօրութիւնս զայսոսիկ ի $գ^2 = ա^2 + բ^2$, լինիցի $ր^2տ^2 = տ^2 + պ^2տ^2$, կամ $ր^2 = 1 + պ^2$, ուստի եւ $ր = \sqrt{(1 + պ^2)}$:

Արդ եթէ ր հաստատուն (Նշ. Համ. Հ. 245.) լինելոց իցէ, հարկ է $1+\text{տ}^2$ քանիօնութեանն լինել կատարեալ երկրորդ կարողութիւն. եւ համարեսցուք եթէ այնպէս իսկ իցէ: Ուրեմն $\text{ր}=\sqrt{(1+\text{տ}^2)}=\text{տ}+\frac{1}{\text{ն}}$. ասաստին յայտ է եթէ լինիցի

$$1+\text{տ}^2=\left(\text{տ}+\frac{1}{\text{ն}}\right)^2=\text{տ}^2+\frac{2\text{տ}}{\text{ն}}+\frac{1}{\text{ն}^2}$$

կամ $\frac{2\text{տ}}{\text{ն}}=1-\frac{1}{\text{ն}^2}$, յորմէ $\text{տ}=\frac{\text{ն}^2-1}{2\text{ն}}$

ուստի եւ $\text{ր}=\text{տ}+\frac{1}{\text{ն}}=\frac{\text{ն}^2-1}{2\text{ն}}+\frac{1}{\text{ն}}=\frac{\text{ն}^2+1}{2\text{ն}}$:

Ասաստին եղանէ

փոխանակ միոյն յիշիցն $\text{ա}=+$ որ զինչ եւ իցէ երկայնութիւն,

" միւսոյ " $\text{բ}=\left(\frac{\text{ն}^2-1}{2\text{ն}}\right)\cdot +$, եւ

" ներքնաձգին $\text{գ}=\left(\frac{\text{ն}^2+1}{2\text{ն}}\right)\cdot +$,

կամ եթէ $\text{ա}=+=2\text{ն}$ դնիցեմք, յայնժամ մեւս էջն $\text{բ}=\text{ն}^2-1$, եւ ներքնաձիգն $\text{գ}=\text{ն}^2+1$, որով եւ երեք կողմանքն եւս չափելի իցեն, եթէ փոխանակ ն քանիօնութեան դիցի թիւ ինչ այլակերպ ի միութենէ, եւ մեծագոյն քան զ1: Զոր օրինակ եթէ $\text{ն}=2$, յայնժամ $\text{ա}=4$, $\text{բ}=3$, եւ $\text{գ}=5$, եւ $5^2=4^2+3^2$: Ըստ նմին օրինակի եղեալ $\text{ն}=\frac{3}{2}$, գտանիցեմք $\text{ա}=3$, $\text{բ}=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$, եւ ներքնաձիգն $\text{գ}=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$:

105. Խնդիր: Գտանել զերկուսին էջսն ա եւ բ,

ծանուցեալ զներքնաձիգն դ, եւ զբովանդակութիւն կամ զայլակերպութիւն իջիցն ա եւ բ:

Լուծումն: Ա. Իցէ $ա + բ = Բ$. յայտ է եթէ $(ա + բ)^2 = ա^2 + 2աբ + բ^2 = Բ^2$, կամ $2աբ = Բ^2 - (ա^2 + բ^2) = Բ^2 - դ^2$: Եթէ զհաւասարութիւնս զայս հանիցեմք ի մօտաւոր յայսմ $ա^2 + բ^2 = դ^2$ հաւասարութենէ, լինիցի $ա^2 + բ^2 - 2աբ = 2դ^2 - Բ^2$, կամ $ա - բ = \sqrt{(2դ^2 - Բ^2)}$: Եւ քանզի բովանդակութիւնն եւ այլակերպութիւնն ծանուցեալ են, ուրեմն

$$ա = \tfrac{1}{2}(Բ + \sqrt{[2դ^2 - Բ^2]}) \text{ եւ } բ = \tfrac{1}{2}(Բ - \sqrt{[2դ^2 - Բ^2]}):$$

Բ. Համարեսցուք եթէ $ա - բ = Ա$ իցէ, ուստի եւ $(ա - բ)^2 = ա^2 - 2աբ + բ^2 = Ա^2$, կամ $2աբ = ա^2 + բ^2 - Ա^2 = դ^2 - Ա^2$: Իբրեւ զայս հաւասարութիւն յաւելուցումք ի մօտաւորս $ա^2 + բ^2 = դ^2$, ելանէ $ա^2 + բ^2 + 2աբ = 2դ^2 - Ա^2$, կամ $ա + բ = \sqrt{[2դ^2 - Ա^2]}$: Եւ քանզի այլակերպութիւնս եւս $ա - բ = Ա$ ծանուցեալ է, ուրեմն

$$ա = \tfrac{1}{2}(\sqrt{(2դ^2 - Ա^2)} + Ա), \text{ եւ } բ = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2դ^2 - Ա^2) - Ա}):$$

Լուծ եւ խնդիրս: Ծանուցեալ զմին յիջիցն եւ զբովանդակութիւն կամ զայլակերպութիւն ներքնաձգին եւ միւսոյ իջին, գտանել զերկոսին էջսն:

Լուծումն Ա. Իցէ մին յիջիցն $= ա$, եւ $Բ = գ + բ$, ուստի եւ $բ = Բ - գ$: Իսկ արդ է $գ^2 = ա^2 + բ^2 = ա^2 + (Բ - գ)^2$, ուստի եւ $գ^2 = ա^2 + Բ^2 - 2գԲ + գ^2$, յորմէ եւ $գ = \frac{Բ^2 + ա^2}{2Բ}$ գտանիցի, եւ

$$բ = Բ - գ = Բ - \frac{Բ^2 + ա^2}{2Բ} = \frac{Բ^2 - ա^2}{2Բ}:$$

Բ. Եթէ իցէ ա մին յիջիցն, եւ $Ա = գ - բ$, ուստի եւ $բ = գ - Ա$, յայնժամ եւ $գ^2 = ա^2 + բ^2 = ա^2 + (գ - Ա)^2 = ա^2 + գ^2 - 2գԱ + Ա^2$, յորմէ $գ = \frac{ա^2 + Ա^2}{2Ա}$, եւ $բ = գ - Ա = \frac{ա^2 + Ա^2}{2Ա} - Ա = \frac{ա^2 - Ա^2}{2Ա}$:

106. Խնդիր: Ի կողմանցն ծանուցելոց հաւասարակող երեքանկեան զբարձրութիւն երեքանկեանն գտանել:

Լուծումն: Համարեսցուք եթէ յ$\triangle$ԱԲԳ (Ձեւ 32.) կողմն $ԱԲ = ԱԳ = ԲԳ = ա$, եւ $ԳԴ \perp ԱԲ$. յայտ է եթէ $ԱԴ = \frac{1}{2} ԱԲ = \frac{1}{2} ա$ (Հ. 70.), ուստի եւ (Հ. 103. Բ.) $\overline{ԳԴ}^2 = \overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԱԴ}^2 = ա^2 - \frac{1}{4} ա^2 = \frac{3}{4} ա^2$ կամ $ԳԴ = \frac{1}{2} ա \sqrt{3}$:

Սորին զհետ գայ, զի եթէ $\triangle$ԱԲԳ հաւասարասրուն եւեթ իցէ $ԱԳ = ԲԳ = ա$, եւ $ԱԲ = բ$, յայնժամ $ԳԴ = \sqrt{[ա^2 - \frac{1}{4} բ^2]} = \frac{1}{2} \sqrt{(4ա^2 - բ^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{[(2ա + բ)(2ա - բ)]}$:

107. Խնդիր: Յերից կողմանց ծանուցելոց միոյ ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 68.) զԱԴ բարձրութիւնն եւ զհատածսն խարսխին ԲԴ եւ ԳԴ՝ գտանել:

Լուծումն: Դիցուք գրեսցուք, եթէ իցէ $ԲԳ = ա$, $ԱԲ = գ$, $ԱԳ = բ$, եւ բարձրութիւնն $ԱԴ = ք$, մի հատածն $ԲԴ = ֆ$, եւ միւսն $ԳԴ = ա - ֆ$: Յուղղանկիւն երեքանկեան ԱԲԴ է $\overline{ԱԴ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 - \overline{ԲԴ}^2$, այս ինքն $ք^2 = գ^2 - ֆ^2$, եւ դարձեալ յԱԴԳ ուղղանկիւն երեքանկեան է $\overline{ԱԴ}^2 = \overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԳԴ}^2$ կամ $ք^2 = բ^2 - (ա - ֆ)^2 = բ^2 - ա^2 + 2աֆ - ֆ^2$ (Հ. 103. Բ.): Արդեմն եւ $գ^2 - ֆ^2 = բ^2 - ա^2 + 2աֆ - ֆ^2$, յորմէ եւ $ԲԴ = ֆ = \frac{ա^2 + գ^2 - բ^2}{2ա}$ գտանիցի:

Աստուստին ծագէ եւ միւս հատածն $ԳԴ = ա - ֆ = ա - \frac{ա^2 + գ^2 - բ^2}{2ա} = \frac{2ա^2 - ա^2 - գ^2 + բ^2}{2ա} = \frac{ա^2 + բ^2 - գ^2}{2ա}$:

Իբրեւ զզօրութիւն ֆ քանիօնութեան հաստատիցեմք ի $ք^2 = գ^2 - ֆ^2$, ելանէ

$$ք^2 = գ^2 - \left(\frac{ա^2 + գ^2 - բ^2}{2ա}\right)^2 = \frac{4ա^2 գ^2 - (ա^2 + գ^2 - բ^2)^2}{4ա^2}$$

$$=\frac{(2ագ+ա^2+գ^2-բ^2)(2ագ-ա^2-գ^2+բ^2)}{4ա^2}$$

$$=\frac{[(ա+գ)^2-բ^2][բ^2-(ա-գ)^2]}{4ա^2}$$

$$=\frac{(ա+գ+բ)(ա+գ-բ)(բ+ա-գ)(բ-ա+գ)}{4ա^2}$$

$$=\frac{(ա+բ+գ)(բ+գ-ա)(ա+գ-բ)(ա+բ-գ)}{4ա^2}$$

ուստի եւ

$$դ=\frac{1}{2ա}\sqrt{[(ա+բ+գ)(բ+գ-ա)(ա+գ-բ)(ա+բ-գ)]}:$$

Արդ վասն համառօտիւք զերան վճարելոյ, դիցուք եթէ $ա+բ+գ=2ք$, յայտ է եթէ իցէ $ք=\frac{ա+բ+գ}{2}$, եւ $բ+գ-ա=2(ք-ա)$, $ա+գ-բ=2(ք-բ)$, եւ $ա+բ-գ=2(ք-գ)$, զորս իբրեւ փոխանակեսցեմք ի յետին հաւասարութեան, լինիցի

$$դ=\frac{1}{2ա}\sqrt{[2ք.2(ք-ա)2(ք-բ)2(ք-գ)]}$$

$$=\frac{1}{2ա}\sqrt{[16ք(ք-ա)(ք-բ)(ք-գ)]}$$

$$=\frac{2}{ա}\sqrt{[ք(ք-ա)(ք-բ)(ք-գ)]}:$$

Զգուշացելոցս պճետ գայ, զի Եթէ ի հաւասարական օրինակն $ե=\frac{ա^2+գ^2-բ^2}{2ա}$, $բ^2>ա^2+գ^2$ իցէ, յայնժամ ե ուրացական լինիցի, որ եւ յայտ արարեալ ցուցանէ, եթէ ե հատածն արտաքոյ կայ եռեքանկեան, որով եւ է յերկայնեալ կողմն խարսխին, յորմէ յայտ է, եթէ ուղղորդ գիծն արտաքոյ կայ ե-

րեքանկեանն. եւ այս յայնժամ եւեթ դիպի, յորժամ մի անկիւնն ի խարսխի անդ > Ո իցէ (Հ. 63. Բ.)։ Զոր օրինակ իցէ $ա = 12$, $բ = 16$, $գ = 10$, յայնժամ

$$ք = \frac{12^2 + 10^2 - 16^2}{2 \cdot 12} = -\frac{1}{2}\text{ ։}$$

108. Խնդիր։ Զծանուցեալ գիծ ինչ ԱԲ ըստ արտաքին եւ միջին կշռութեան բաժանել, այս ինքն որպէս զի մեծագոյն մասն իցէ միջին երկրաչափական համեմատական փոքր մասին եւ ողջոյն գծին, որպիսի ինչ $ԱԵ : ԵԲ = ԵԲ : ԱԲ$ (Ձեւ 70.)։

Լուծումն։ Ա. Ի կէտն Ա կանգնեա զուղղորդ գիծն $ԱԳ = \frac{1}{2} ԱԲ$, յետ այնորիկ ձգեա զԲԳ, հատ յայնմ գծէ մասն ինչ $ԳԴ = ԱԳ = \frac{1}{2} ԱԲ$, եւ ԲԴ մնացորդաւն ձգեա ի Բ կիտէ զԴԵ աղեղն, որ հատանիցէ զԱԲ յԵ՝ արտաքին եւ միջին կշռութեամբ։

Վասնզի (Հ. 103. Բ.) է $\overline{ԲԳ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^3 = \overline{ԱԲ}^2 + \frac{1}{4}\overline{ԱԲ}^2$, կամ $(ԲԴ + ԳԴ)^2 = (ԲԵ + \frac{1}{2} ԱԲ)^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \frac{1}{4}\overline{ԱԲ}^2$, այս ինքն $\overline{ԲԵ}^2 + ԲԵ \cdot ԱԲ + \frac{1}{4}\overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԲ}^2 = \frac{1}{4}\overline{ԱԲ}^2$, ուստի եւ $\overline{ԲԵ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 - ԲԵ \cdot ԱԲ = (ԱԲ - ԲԵ)\, ԱԲ = ԱԵ \cdot ԱԲ$, յորմէ $ԱԵ : ԲԵ = ԲԵ : ԱԲ$։

Բ. Արժէ է զխնդիրս եւ զայս օրինակ լուծանել։ Զերկայնութիւն ԱԲ գծին առջիր կարակնիւ, եւ որոնեա զայն ի փոքրկացեալ աստիճանսն։ Արդ դիցուք եթէ իցէ $= ա$ մասանց աստիճանացն, եւ մի մասն ծանուցեալ գծին $= ք$, ուստի եւ երկրորդն $= ա - ք$, որով եւ ըստ հանգամանաց խնդրոյս եթէ $ք$ զփոքր մասնն ցուցանիցէ, արդ

$$ք : ա - ք = ա - ք : ա$$

յորմէ $աք = (ա - ք)^2 = ա^2 - 2աք + ք^2$, կամ $ք^2 - 3աք = -ա^2$, ուստի $ք = \frac{ա}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ գտանիցի,

յորմէ եւ մեծագոյն մասն

$$\text{ա} - \text{խ} = \text{ա} - \frac{\text{ա}}{2}(3 \pm \sqrt{5}) = \frac{\text{ա}}{2}[2 - (3 \pm \sqrt{5})] = \frac{\text{ա}}{2}(-1 \mp \sqrt{5}):$$

Յորում յայտ է եթէ զհաստատական արմատն պարտ է առնուլ:

Ա. Եթէ խարիսխն ԱԲ (Ձեւ 71.) հաւասարասրուն ինչ ԱԲԳ երեքանկեան հաւասար իցէ ԳԴ մեծագոյն հատածի ԲԳ սրունից, որ բաժանեալ իցէ ըստ արտաքին եւ միջին կշռութեան, յայնժամ եւ մի մի անկիւն խարսխին՝ է երկպատիկն անկեան գագաթան, եւ նոյնպէս սորին խոտորնակն: Քանզի ըստ մերոյ համարելոյ է ԲԴ : ԳԴ = ԳԴ : ԲԳ, կամ որովհետեւ ԳԴ = ԱԲ, ուրեմն եւ ԲԴ : ԱԲ = ԱԲ : ԲԳ, եւ անկիւնն ԱԲԴ = ԱԲԳ, ուրեմն եւ ΔԱԲԴ $\sim$ ΔԱԲԳ (Հ. 99.), ուստի եւ ն = գ, եւ ժ = ԲԱԳ = բ. ապա եւս է (Հ. 53.) ԱԲ = ԱԴ. բայց քանզի ԱԲ = ԳԴ, ուրեմն եւ ԱԴ = ԳԴ, եւ ստորին իսկ ղ = գ: Արդ որովհետեւ ղ = գ, եւ ն = գ, ուրեմն ղ + ն = 2գ, այս ինքն Ա = Բ = 2գ: =

Բ. Ուրեմն Ա + Բ + գ = 5գ = 180° (Հ. 76.) կամ

$$\text{գ} = \frac{180}{5} = 36^{0}, \text{ եւ } \text{Ա} = \text{Բ} = 72^{0}:$$

Գ. Եթէ զԲԵ կանգնիցեմք ուղղորդ ի վերայ ԲԳ ուղիղ գծի, լինիցի անկիւնն ԱԲԵ = ԳԲԵ — ԳԲԱ = $90^{0} - 72^{0} = 18^{0} = \frac{1}{5}$ Ո: Ուրեմն մարթ է զուղիղ անկիւն ի հինգ հաւասար մասունս բաժանել:

Խնդիր Բ: Գտանել զմիջին երկրաչափական համեմատական երկուց ա եւ բ գծից:

Լուծումն: Զգեա զուղիղ գիծն ԲԳ (Ձեւ 72.), եւ արա ԱԲ = բ, ԱԳ = ա, եւ յԱ կանգնեա ԱԴ $\underset{5}{\perp}$ ԲԳ,

եւ հատարակեա զԲԳ ի կէտն Մ: Ի Մ միջոյէ անտի $ԳՄ = \frac{1}{2}$ ԲԳ կէս երկակորով ձգեա աղեղն՝ որ զուղղորդ գիծն ԱԴ ի Դ հատանիցէ, որով եւ ԱԴ լինիցի խնդրեալ միջին համեմատականն: Քան-զի եթէ ձգիցեմք եւ զուղիղ գիծսն ԳԴ, ԲԴ եւ զԴՄ, յայնժամ յուղղանկիւն երեքանկիւնսն ԱԳԴ եւ ԲԱԴ լինիցի ֆ + ն = Ո = պ + ռ + ր, եւ քանզի ֆ = ն + ր, եւ պ = ռ (Հ. 53.) ուստի եւ փոխանակելով է 2ն + ր = 2ռ + ր, այս ինքն է ն = ռ, ապա ֆ = ր + ռ, ուրեմն է ΔԱԳԴ ∾ ΔԱԲԴ (Հ. 97.)· որով եւ ԱԳ : ԱԴ = ԱԴ : ԱԲ, այս ինքն ա : ԱԴ = ԱԴ : բ:

Յասացելոցս զհետ գայ· Որովհետեւ ֆ = ֆ, եւ պ = ն, յայտ է եթէ եւ անկ· ԳԴԲ = ԳԱԴ = Ո, այս ինքն Անկիւն ի կէս բոլորակի է ուղիղ: Ապա ուրեմն ի ԲԳԴ ուղղանկիւն երեքանկեանս $\overline{ԳԴ}^2$ = ԲԳ · ԱԳ, եւ $\overline{ԲԴ}^2$ = ԲԳ · ԱԲ (Հ. 102.):

109. ՅԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 32.) երկրորդ կարողութիւն ԱԳ կողման, որ կայ դէմ յանդիման Բ սուր անկեան, փոքրագոյն է քան զերկրորդ կարողութիւն երկուց ԱԲ եւ ԲԳ կողմանցն որ զԲ անկիւնն ի միջի փակիցեն, եւ է փոքր երկպատիկ արդեամբք չափ միոյ ի կողմանցն յայնցանէ, եւ հատածին նորա, որ կայ, ի մէջ գագաթան Բ անկեան եւ ԳԴ ուղղորդ գծին, որ ի Գ գագաթանէ յանդիմանակաց անկեանն անկանիցի ի վերայ այնր կողման· այս ինքն է $\overline{ԱԳ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԲԳ}^2 - 2ԱԲ \cdot ԲԴ$:

Ցուշ լինիցի ուսանելեաց, եթէ կողմանք երեքանկեանն պարտին միով համօրէն կշռով չափել, եւ թուովք յանդիման կացուցեալ համարել:

Ցուցումն: Կամ ուղղորդ գիծն անկանի ի մէջ երեքանկեան (Ձեւ 32.), յորժամ Ա անկիւնն սուր իցէ, եւ կամ արտաքոյ երեքանկեան, եթէ Ա բութ իցէ (Ձեւ 25.):

Առաջինն․ Եթէ ուղղորդ գիծն անկանիցի ի մէջ երեքանկեան (Ձեւ 32․) լինիցի ԱԴ = ԱԲ — ԲԴ, ուստի $\overline{ԱԴ}^2 = (ԱԲ - ԲԴ)^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԲԴ}^2 - 2ԱԲ \cdot ԲԴ$, եթէ յերկոսին կողմանս հաւասարութեան յաւելուցումք $\overline{ԳԴ}^2$, ելանիցէ $\overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԱԴ}^2 = \overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԲԴ}^2 - 2ԱԲ \cdot ԲԴ$․ կամ որովհետեւ $\overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԱԴ}^2 = \overline{ԱԳ}^2$, եւ $\overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԲԴ}^2 = \overline{ԲԳ}^2$ է, փոխանակելով $\overline{ԱԳ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԲԳ}^2 - 2ԱԲ \cdot ԲԴ$։

Երկրորդն․ Այլ սակայն եթէ ուղղորդ գիծն անկանիցի արտաքոյ երեքանկեան (Ձեւ 25․), յայնժամ ԴԱ = ԲԴ — ԱԲ, եւ $\overline{ԱԴ}^2 = (ԲԴ - ԱԲ)^2 = \overline{ԲԴ}^2 + \overline{ԱԲ}^2 - 2ԱԲ \cdot ԲԴ$, եւ եթէ յերկոսին կողմանս եւս հաւասարութեանն յաւելուցումք $\overline{ԳԴ}^2$, լինիցի $\overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԱԴ}^2 = \overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԲԴ}^2 + \overline{ԱԲ}^2 - 2ԱԲ \cdot ԲԴ$, կամ որպէս վերագոյն $\overline{ԱԳ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԲԳ}^2 - 2ԱԲ \cdot ԲԴ$։

110․ Ի բթանկիւն ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 25․) երկրորդ կարողութիւն ԲԳ կողման՝ որ կայ յանդիման Ա բութ անկեան, հաւասար է երկրորդ կարողութեանց այլոց երկոցունց կողմանցն, յոր յաւելուցու եւ երկպատիկ արդիւնք ԱԲ միոյ կողմանն, եւ ԱԴ հատածին, որ կայ ի մէջ գագաթան բութ անկեան, եւ ուղղորդ գծին, որ ձգիցի ի գագաթանէ յանդիմանակաց անկեան ի վերայ ԱԲ ուղիղ գծի․ այս ինքն է $\overline{ԲԳ}^2 = \overline{ԱԳ}^2 + \overline{ԱԲ}^2 + 2ԱԲ \cdot ԱԴ$։

Յօրինակիս ԳԴ ուղղորդ գիծն անկանի արտաքոյ երեքանկեան ի վերայ կողման ԳԱԴ լրման ԲԱԳ անկեան։ Արդ է ԲԴ = ԱԲ + ԱԴ, եւ $\overline{ԲԴ}^2 = (ԱԲ + ԱԴ)^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԴ}^2 + 2ԱԲ \cdot ԱԴ$, յորմէ եւ $\overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԲԴ}^2 = \overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԴ}^2 + 2ԱԲ \cdot ԱԴ$․ եւ քանզի $\overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԲԴ}^2 = \overline{ԲԳ}^2$, եւ $\overline{ԳԴ}^2 + \overline{ԴԱ}^2 = \overline{ԱԳ}^2$, ուրեմն $\overline{ԲԳ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2 + 2ԱԲ \cdot ԱԴ$։

111. Որպէս խարիսխ զմտաւ ածեալ կողմն երեքանկեան համեմատի առ բովանդակութիւն այլոց երկուց կողմանց, որպէս համեմատիցի այլակերպութիւն նոյին երկուց կողմանցն առ այլակերպութիւն կամ բովանդակութիւն հատածոցն, յոր խարիսխն ի ձեռն բարձրութեանն բաժանիցի, ըստ անկանելոյ ուղղորդ գծին ի մէջ կամ արտաքոյ երեքանկեան: Այս ինքն եթէ ԳԴ $\perp$ ԱԲ (Ձեւ 25 եւ 32.), ծագեն համեմատութիւնքս ԱԲ : ԱԳ + ԲԳ = ԱԳ — ԲԳ : ԱԴ — ԲԴ (Ձեւ 32.), կամ ԱԲ : ԱԳ + ԲԳ = ԲԳ — ԱԳ : ԱԴ + ԲԴ (Ձեւ 25.):

Ըստ 102 համարոյ Բ. է

ա) $\overline{ԱԳ}^2 = \overline{ԱԴ}^2 + \overline{ԳԴ}^2$:

բ) $\overline{ԲԳ}^2 = \overline{ԲԴ}^2 + \overline{ԳԴ}^2$,

արդ իբրեւ զյետին հաւասարութիւնն յառաջնոյն հանիցեմք գտանիցի $\overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԲԳ}^2 = \overline{ԱԴ}^2 - \overline{ԲԴ}^2$, կամ (ԱԳ + ԲԳ) (ԱԳ — ԲԳ) = (ԱԴ + ԲԴ) (ԱԴ — ԲԴ) (Նշ. համ. Հ. 129. Ա.) = ԱԲ (ԱԴ — ԲԴ), յորմէ եւ ԱԲ : ԱԳ + ԲԳ = ԱԳ — ԲԳ : ԱԴ — ԲԴ:

Այնպէս եւ երկրորդ մասն: Զանզի զա եւ զ բ հաւասարութիւնս մարթ է եւ վասն երկրորդ դիպացն (Ձեւ 25.) ի կիր արկանել. վասն այնորիկ իբրեւ հանիցեմք զա ի բ հաւասարութենէ անտի, գտանիցեմք $\overline{ԲԳ}^2 - \overline{ԱԳ}^2 = \overline{ԲԴ}^2 - \overline{ԱԴ}^2$, կամ (ԲԳ + ԱԳ) (ԲԳ — ԱԳ) = (ԲԴ + ԱԴ) (ԲԴ — ԱԴ) = (ԱԴ + ԲԴ) ԱԲ, յորմէ եւ համեմատութիւնս ԱԲ : ԲԳ + ԱԳ = ԲԳ — ԱԳ : ԱԴ + ԲԴ:

Եթէ այնպէս իմն դրոշմիցեմք զԱԲԳ (Ձեւ 32.) որպէս զի իցէ ԲԳ > ԱԳ, ըստ ցուցման առաջնոյ մասին կանոնացս գտանիցեմք ԱԲ : ԲԳ + ԱԳ = ԲԳ — ԱԳ : ԲԴ — ԱԴ, զոր մարթ է ընդ համեմատութեան երկրորդ դիպացն յօդել, եւ գրել

ԱԲ : ԲԳ + ԱԳ = ԲԳ — ԱԳ : ԲԴ $\mp$ ԱԴ:

կամք են մեզ գնել յայսմ վայրի խնդիրս ինչ յարգեանց երկրաչափութենէ, որք ի վերայ օրինացս ասացելոց հաստատեալ են:

Խնդիր Ա: Գտանել զերկայնութիւն ուղիղ ինչ գծի, որոյ ի ծայրս միայն հնար իցէ գնալ, եւ ոչ ընդ բովանդակ երկայնութիւնն:

Լուծումն: Դիցուք, եթէ ասացեալ գիծն կամ երկայնութիւնն ի դաշտի ուրեք իցէ ԱԲ (Ձեւ 53.): Պարտ եւ պատշաճ է այնպիսի իմն Գ կէտ խնդրել, որպէս զի մարթ իցէ անտի մինչեւ ցԱ եւ ցԲ չափել. արդ կաց ի վերայ այսր Գ կիտի, եւ ձգեա զանկիւնն ԱԳԲ. ի վերայ սրունից այսր անկեան, փոքրկացեալ աստիճանօք ած կացո զբացարձակութիւնսն ԳԱ, ԳԲ (այս ինքն չափեալ յառաջագոյն զայնս ձողով կամ այլ ինչ չափով), եւ զգտեալ կէտսն Լ եւ Ե յօդեա ընդ միմեանս ԼԵ գծիւ. այս ԼԵ գիծս ըստ փոքրկացեալ աստիճանաց ցուցանէ թէ որչափ իցէ ԱԲ հեռաւորութիւնն:

Խնդիր Բ: Գտանել զբացարձակութիւն երկուց Բ եւ Գ վայրաց (Ձեւ 65.) յորժամ ի մին եւեթ ի վայրացն, զոր օրինակ ի Բ գնալ հնար իցէ:

Լուծումն: Կաց ուրեք ի տեղւոջ, զոր օրինակ յԱ, յորմէ զԲ եւ զԳ տեսանել, եւ զբացարձակութիւնն ԲԱ չափել կարիցես: Ձգեա ի վերայ քարտի գիծ ինչ ուղիղ, յորոյ վերայ ըստ փոքրկացեալ աստիճանացն ած կացո զչափեալ հեռաւորութիւնն ԱԲ. դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ այն աբ. ի վերայ այսր գծի յա եւ ի բ յօրինեա անկիւնս հաւասարս Ա եւ Բ անկեանց, յայտ է եթէ սրունքն ագ եւ բգ ի գ վայրի զմիմեանս հատանիցեն: Արդ բգ ըստ փոքրկացեալ աստիճանացն ցուցանէ զբացարձակութիւնն ԲԳ:

Խնդիր Գ: Զերկայնութիւն ԴԲ գծի գտանել (Ձեւ 73.), յորժամ չիցէ մարթ յերկոսին կէտսն Դ եւ Բ գնալ:

Լուծումն: Ընտրեա քեզ ի տեղւոջ ուրեք գիծ ինչ չափելի ՄՆ, յորոյ Մ եւ Ն ծայրիցն տեսանիցին Դ եւ Բ: Արդ ձգեա զանկիւնսն որք ի բացարձակութեանց Դ եւ Բ կիտից ի Մ եւ ի Ն յօրինիցին. յետ այսորիկ ած զՄՆ ըստ փոքրկացեալ աստիճանաց ի վերայ քարտի եւ ի մ եւ ի ն յօրինեա անկ. բմն = ԲՄՆ, անկ. մնբ = ՄՆԲ, անկ. դմն = ԴՄՆ, անկ. դնմ = ԴՆՄ. ապա յայտ է թէ գիծքն մդ եւ նդ ի դ վայրի, եւ մբ եւ նբ ի կէտն բ հատանեն զմիմեանս. իսկ իբրեւ զբդ ըստ փոքրկացեալ աստիճանացն խնդրիցես, գտանես զԴԲ երկայնութիւն:

Խնդիր Դ: Զբարձրութիւն ինչ ԱԲ (Ձեւ 53.) զոր օրինակ ծառոյ, կամ ապարանից գտանել:

Լուծումն: Կանգնեա ձող ինչ ԵԼ ի վերայ գետնոյ, հայեաց յԵ կիտէ յԱ, եւ նշանակեա զվայրն Գ,

յորում ԱԵ ուղղութիւնն զգետինն հարթ հատանիցէ։ Յայտ է թէ ԼԳ : ԼԵ = ԳԲ : ԱԲ, յորում ԱԲ միայն է անծանօթ, ուստի եւ $ԱԲ = \frac{ԼԵ \cdot ԳԲ}{ԼԳ}$ ։

Յի կէր արկանել զայս գործ, վարին մարդիկ ստուերաւ չափելն իրացն. եւ սովաւ իսկ վարէր Թաղէս փիլիսոփոս յոյն ազգաւ, որ զբարձրութիւն պիւրամիդացն եգիպտացւոց յերկայնութենէ ստուերի նոցա չափել ուսուցանէր։

ԳԼՈՒԽ Գ

ՑԱՂԱԳՍ ՀԱՒԱՍԱՐ ՀԵՌԱՒՈՐ ՁԵՒՈՑ, ԵՒ ՎԱՍՆ ԲԱԶՄԱՆԿԵԱՆՑ (Հ. 40.)

112. ՀԱՒԱՍԱՐ հեռաւոր ձեւն բաժանի ի Հաւասարակող եւ ի Չհաւասարակող: Հաւասարակող հաւասար հեռաւոր ձեւն անուանեալ կոչի Չորեքկուսի (կարգաւոր չորեքանկիւն), յորժամ ուղիղ իցեն ամենայն անկիւնքն որ ի նմին. իսկ Ռոմբոս (Յածած) ասի եթէ ծուռ անկիւնք ի նմին գտանիցին: Զոր օրինակ ԱԲԳԴ հաւասար հեռաւոր ձեւն (Ձեւ 117.) է չորեքկուսի, քանզի ԱԲ = ԱԴ = ԴԳ = ԲԳ, եւ Ա = Բ = Գ = Դ = Ո է, իսկ ձեւն ԱԲԳԴ (Ձեւ 120.) է ռոմբոս, քանզի ԱԲ = ԱԴ = ԴԳ = ԳԲ, եւ Ա = Գ < Ո: Իսկ չհաւասարակող հաւասար հեռաւոր ձեւն ասի Ուղղանկիւն, յորժամ ուղիղ իցեն անկիւնք նորին, իսկ Ռոմբոսակերպ, յորժամ ծուռ անկիւնս ունիցի: Որպիսի ինչ դժզե (Ձեւ 123.) է ուղղանկիւն, քանզի ժե > ժդ, եւ ժ = ե = զ = դ = Ո. եւ սմին հակառակ աբզդ (Ձեւ 123.) է ռոմբոսակերպ, քանզի ադ > աբ, եւ ա = զ < Ո, ուստի բ = դ > Ո:

113. Զթիւ համարոյ անկիւնագծից ի բազմանկեան՝ որոյ ն կողմանք իցեն, մարթի դիւրաւ գտանել, քանզի յիւրաքանչիւր գագաթանէ անկեան ցայլ գագաթն, բաց յինքենէ եւ յայլ երկուց առընթերակաց անկեանց, հնար է մի անկիւնագիծ եւեթ ձգել, յորմէ ելանէ ն(ն — 3) թիւ անկիւնագծից: Նա քանզի մի մի անկիւնագիծ երկիցս գտանի ի ն(ն — 3), ուրեմն թիւ համարոյ անկիւնագծիցն է $= \frac{\text{ն}(\text{ն}-3)}{2}$: Զոր օրինակ յեւթնանկեան են $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ անկիւնագիծք, իսկ յերեքանկեան

$\frac{3(3-3)}{2}=0$, այս ինքն եւ ոչ մի անկիւնագիծ գտանի։

114. Յամենայն հաւասար հեռաւոր ձեւս բովանդակութիւն երկու երկու անկեանց, որ ի նմին կողման գտանիցին, է = 2Ո, եւ երկու յանդիմանակաց անկիւնքն միմեանց հաւասարք են։

Իցէ ԱԲԳԴ (Ձեւ 74.) հաւասար հեռաւոր ձեւ։ Վասն ԱԳ || ԲԴ լինելոյ, հարկ է (Հ. 39. գ.) զի Ա + Բ = 2Ո, եւ Գ + Դ = 2Ո իցեն, նոյնպէս վասն ԱԲ || ԳԴ լինելոյն իցէ Ա + Գ = 2Ո, եւ Բ + Դ = 2Ո. ուրեմն եւ Ա + Բ = Ա + Գ, եւ Ա + Բ = Բ + Դ, յորոց ելանեն Բ = Գ, եւ Ա = Դ։

Օորէն զհետ գայ Ա. Եթէ մի անկիւն հաւասար հեռաւոր ձեւոյ, զոր օրինակ Ա ուղիղ իցէ, վասն Ա + Բ = Ա + Գ = 2Ո, եւ Ա = Դ լինելոյ, հարկ է զի իցեն եւ այլ անկիւնքն Բ եւ Գ եւ Դ ուղիղ։

Բ. Չորք անկիւնքն հաւասար հեռաւոր ձեւոյ միահամուռ գումարեալ են = 4Ո։

115. Յամենայն հաւասար հեռաւոր ձեւս երկու երկուն հաւասար հեռաւոր կողմանքն միմեանց հաւասարք են։

Որովհետեւ հաւասար հեռաւորքն ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 74.) են ի մէջ ԱԳ եւ ԲԴ հաւասար հեռաւոր գծից, եւ ԱԳ եւ ԲԴ ի մէջ ԱԲ եւ ԳԴ գծից գտանին, ուրեմն (Հ. 82.) ԱԲ = ԳԴ, եւ ԱԳ = ԲԴ։

116. Հաւասար հեռաւոր ձեւն ի ձեռն միոյ անկիւնագծի բաժանի յերկուս երեքանկիւնս միմեանց պատշաճականս։

Յերեքանկիւնսն ԱԲԳ եւ ԲԳԴ (Ձեւ 74.), յորս ԱԲԳԴ հաւասար հեռաւոր ձեւն ի ձեռն ԲԳ անկիւնագծի բաժանեալ է, է ԱԲ = ԳԴ, ԱԳ = ԲԴ, ԲԳ = ԲԳ, ուրեմն ΔԱԲԳ $\cong$ ΔԲԳԴ։

117. Երկու անկիւնագիծք հաւասար հեռաւոր ձեւոյ հատանեն զմիմեանս փոխանակաւ, եւ ուղիղ գիծն որ ձգիցի ընդ կէտն հատանելոյ անկիւնագծիցն

զմիմեանս մինչեւ ի կողմանս ձեւոյն, բաժանի եւ բաժանէ զզուգահեռակ հաւասար հեռաւոր ձեւն յերկուս հաւասար մասունս:

ԱԴ եւ ԲԳ իցեն անկիւնագիծքն ԱԲԳԴ հաւասար հեռաւոր ձեւոյ: Որովհետեւ ԱԲ = ԳԴ, փ = պ, եւ ս = ն, ուրեմն ΔԱԲԵ ≅ ΔԳԴԵ, ուստի եւ ԱԵ = ԵԴ, եւ ԳԵ = ԵԲ:

Նոյնգունակ եւ երկրորդ մասն: Իցէ ԶԷ ուղիղ գիծն՝ որ ձգիցի ընդ կէտն Ե: Որովհետեւ ԱԵ = ԵԴ, եւ անկ. ԱԵԶ = ԷԵԴ, եւ պ = փ, ուրեմն ΔԱԵԶ ≅ ΔԴԵԷ, ուրեմն ԵԶ = ԵԷ: Վասն այսոցիկ պատճառաց է ΔԳԵԷ ≅ ΔԲԵԶ, եւ զի ΔԲԵԴ ≅ ΔԱԳԵ, ուրեմն ԵԷԴ + ԴԵԲ + ԵԲԶ = ԱԵԶ + ԱԵԳ + ԳԵԷ, այս ինքն ԲԶԷԴ = ԱԳԷԶ:

> կէտն հատարակաց, յորում անկիւնագիծքն կամ այլ գիծք հատարակիցեն, ասի Միջոց հաւասար հեռաւոր ձեւոյ:

118. Եթէ ի չորեքանկեան ինչ երկու երկու յանդիմանակաց կողմանքն միմեանց հաւասարք իցեն, չորեքանկիւնին է հաւասար հեռաւոր ձեւ:

Իցէ յԱԲԳԴ չորեքկողմեան ձեւն ԱԲ = ԳԴ, եւ ԱԳ = ԲԴ: Որովհետեւ եւ ԲԳ = ԲԳ, ուրեմն ΔԱԲԳ ≅ ΔԲԳԴ, ուստի եւ անկ. ԱԳԲ = ԳԲԴ, եւ անկ. ԱԲԳ = ԲԳԴ. յորմէ եւ ԱԲ ∥ ԳԴ, եւ ԱԳ ∥ ԲԴ:

119. Եթէ ի չորեքանկեան երկու յանդիմանակաց կողմանքն միայն միմեանց հաւասար եւ հաւասար հեռաւոր իցեն, չորեքանկիւնին է հաւասար հեռաւոր ձեւ:

Դիցուք գրեսցուք, եթէ ԱԲ = ԳԴ (Ձեւ 74.), եւ ԱԲ ∥ ԳԴ: Որովհետեւ ն = ս, եւ ԲԳ = ԲԳ, ուրեմն ΔԱԲԳ ≅ ΔԲԳԴ, յորմէ ԱԳԲ = ԳԲԴ. որով եւ ԱԳ ∥ ԲԴ:

120. Եթէ չորեքկողմեան ինչ ձեւ միով անկիւնագծիւ յերկուս պատշաճական երեքանկիւնս հատանիցի, է հաւասար հեռաւոր ձեւ:

Քանզի եթէ ΔԱԲԳ $\cong$ ΔԳԲԴ գտիցեմք, յայնժամ եւ ԱԲ = ԳԴ, եւ ԱԳ = ԲԴ, ուստի եւ ԱԲ || ԳԴ, եւ ԱԳ || ԲԴ:

121. Ամենայն բազմանկիւն ի ձեռն անկիւնագծից բաժանի յերեքանկիւնս, որոց թիւ համարոյ երկուքումք չափ փոքրագոյն է քան զթիւ համարոյ կողմանց բազմանկեանն:

Քանզի յորժամ ի գագաթանէ միոյ յանկեանցն ձգիցեմք անկիւնագիծ մի, յայտ է եթէ բազմանկիւնն յերկուս մասունս բաժանիցի, յորս առանձինն թիւ համարոյ կողմանցն սակաւագոյն է քան յառաջինն: Եթէ զնոյն կատարիցեմք ի նոր բազմանկիւնսն, եւ ընդ բազմանկիւնսն եւս որ անտի ծնանիցին, եւ այնօրինակ մի ըստ միոջէ, թիւ համարոյ կողմանցն յիւրաքանչիւր բազմանկիւնսն երթայ եւ նուազի. մինչեւ ի կատարած՝ ծագեն ողջոյն երեքանկիւնք, որք միահամուռ գումարեալ զծանուցեալ բազմանկիւնն գործեն: Վասն զթիւ համարոյ երեքանկեանցն գտանելոյ, պարտ է այսպիսի ինչ ածել զմտաւ: Դիցուք դրեսցուք եթէ բազմանկիւն ինչ իցէ Նկողմեան, որ ի ձեռն անկիւնագծից ի ֆ երեքանկիւնս բաժանեալ իցէ: Արդ միոյ յերեքանկեանցն երեք կողմանք են, ուստի եւ թիւ համարոյ կողմանց երեքանկեանցն է = 3ֆ: Եւ քանզի յ3ֆ թիւս գտանին եւ Ն կողմանք բազմանկեանն, յորոց իւրաքանչիւրն է սահման միոյ եւեթ երեքանկեան, ուստի եւ մնան 3ֆ—Ն կողմանք երեքանկեանցն, որք են անկիւնագիծք բազմանկեան: Եւ քանզի մի մի անկիւնագիծ սահման է երկուց երեքանկեանց, որ կան յերկուս կողմանս նորին, ուրեմն թիւ համարոյ անկիւնագծիցն է $\frac{3ֆ—Ն}{2}$: Եւ զի յերկուս կողմանս իւրաքանչիւր անկիւնագծի մի մի երեքանկիւն գտանի, ուրեմն թիւ համարոյ անկիւնագծից, միով թուով խոնարհագոյն է քան զթիւ

համարոյ երեքանկեանցն. որով $\frac{3Ս-Ն}{2} = Ս - 1$, եւ $3Ս - Ն = 2Ս - 2$, ուստի $Ս = Ն - 2$:

122. Բովանդակութիւն ամենայն անկեանց բազմանկեան հաւասար է երկպատիկ այնչափ ինչ ուղիղ անկեանց, որչափ կողմանս ունիցի բազմանկիւնն, նուազ չորիւք ուղիղ անկեամբք:

Դիցուք գրեսցուք, եթէ բազմանկիւնին Նկողմեան զոր օրինակ ԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 75.) բաժանիցի անկիւնագծիւք յերեքանկիւնս. թիւ համարոյ երեքանկեանցն է $Ն - 2$: Ի միում միում երեքանկեան՝ անկիւնքն երկուց ուղիղ անկեանց հաւասար են. ուրեմն անկիւնքն ամենայն երեքանկեանց միանգամայն $= (Ն - 2)2Ո$ կամ $2ՆՈ - 4Ո$: Այլ որովհետեւ անկիւնք երեքանկեանցս այսոցիկ միանգամայն գործեն զանկիւնս բազմանկեանն, ուրեմն անկիւնք Նկողմեան բազմանկեանն են $= 2ՆՈ - 4Ո$:

Ա. Որովհետեւ ըստ Հ. 122. բովանդակութիւն ամենայն անկեանց Նկողմեան բազմանկեան զոր կամք են մեզ Բ քանիօնութեամբ նշանակել $= 2ՆՈ - 4Ո = Բ$, ուստի եւ ա) $Բ + 4Ո = 2ՆՈ$. եւ դարձեալ քանզի մի մի անկիւն բազմանկեանն հանդերձ իւրով կից անկեամբ $= 2Ո$. ուրեմն, եթէ բ զբովանդակութիւն արտաքին անկեանցն նշանակիցէ, բ) $Բ + բ = 2ՆՈ$: Զա եւ զբ հաւասարութեանց զհետ գայ $Բ + բ = Բ + 4Ո$, ուստի $բ = 4Ո$, այս է Յամենայն բազմանկիւնս բովանդակութիւն ամենայն արտաքին անկեանց, որք ծագիցին յերկայնելոյ կողմանց բազմանկեանն, է հաւասար չորից ուղիղ անկեանց: Այս յառաջադրութիւնս զօրէ վասն բազմանկեանց, որոց բովանդակ անկիւնքն շրջանակին բարձրացեալ իցեն:

Բ. Եթէ կամք իցեն զանկիւնս բազմանկեանն թուովք աստիճանացն նշանակել, պարտ է $Ո = 90^\circ$ դնել, որով եւ բովանդակութիւն անկեանց Նկողմեան բազմանկեանն $= Ն \cdot 180^\circ - 360^\circ$: Զոր օրինակ

ի չորեքանկիւնի ձեւ ինչ ամենայն անկիւնքն միանգամայն $= 4 \cdot 180^0 - 360^0 = 360^0 = 4Ո$, ի հնգանկիւնի ձեւ ինչ $= 540^0$, ի վեցանկիւնին $= 720^0$, այլովքն հանդերձ։

Գ. Եթէ բազմանկիւնին հաւասարանկիւն իցէ, յայնժամ հարկ է զի իւրաքանչիւր անկիւն իցէ Ն-երորդ մասն բովանդակութեան ամենայն անկեանց, այս ինքն $= \frac{2ՆՈ - 4Ո}{Ն} = 2Ո - \frac{4Ո}{Ն} = 180^0 - \frac{360^0}{Ն}$, եթէ Ն կողմանք իցեն բազմանկեանն։ Զոր օրինակ եթէ Ն $= 5$ իցէ, յայնժամ մի մի անկիւն $= 180^0 - \frac{360^0}{5} = 108^0$, իսկ եթէ Ն $= 6$ յայնժամ $= 120^0$, եւ յեւթնանկիւնի ձեւն $= 180^0 - \frac{360^0}{7} = \left(128\frac{4}{7}\right)^0$։

123. Երկու բազմանկիւնք որոց հաւասար իցէ թիւ համարոյ կողմանցն՝ միմեանց պատշաճականք են, եթէ ամենայն անկիւնք նոցա բաց ի միոյն կարգաւ, եւ ամենայն կողմանքն, որ ի մէջ հաւասար անկեանցն գտանիցին միմեանց հաւասար իցեն։

Ի բազմանկիւնսն ԱԲԳԴԵԶԷ, աբգդեզէ (Ձեւ. 76.) իցէ Ա = ա, Բ = բ, Գ = գ, Դ = դ, Ե = ե, Զ = զ, եւ ԱԲ = աբ, ԲԳ = բգ, ԳԴ = գդ, ԴԵ = դե, ԵԶ = եզ։ Համարեսցուք եթէ ա անկիւնն ի տեղի Ա հաւասար անկեան եդեալ իցէ, յայտ է եթէ վասն ԱԲ = աբ լինելոյ, հարկ է զի բ կէտն ի Բ գտանիցի, ուստի եւ անկիւնն բ եւ Բ ի միում վայրի գտանիցին։ Զսորին զհետ գայ, եթէ գ ի Գ, դ ի Դ, ե ի Ե, զ ի Զ կայցեն ի միասին. յորմէ եւ աէ եւ զէ ուղիղ գիծքն ի միում վայրի հանդիպիցին, ընդ ԱԷ եւ ԶԷ ուղիղ գծից։ Ապա ուրեմն բազմանկիւնին աբգդեզէ այնպէս ի տեղւոջ ԱԲԳԴԵԶԷ բազմանկեան դնել կարէ, որպէս զի երկոցունցն զմի եւ զնոյն ձեւ յօրինեալ կազմել, ուրեմն են պատշաճական։

124. Եթէ յերկուս հաւասար հեռաւոր ձեւս երկու չհաւասար հեռաւոր կողմանքն հանդերձ անկեամբն որ ի նմին գտանիցի, առանձինն միմեանց հաւասար իցեն, հաւասար հեռաւոր ձեւքն են միմեանց պատշաճական։

Իցէ (Ձեւ 74.) ԱԳ = ագ, ԳԴ = գդ, եւ Գ = գ։ Ըստ 114 համարոյ է Ա + Գ = ա + գ, Ա + Բ = ա + բ, յորմէ եւ Ա = ա, Բ = բ. ուրեմն (Հ. 122.) ԱԲԳԴ ≌ աբգդ։

Զսորին զհետ գայ, եթէ երկու ուղղանկիւնք միմեանց պատշաճականք են, եթէ երկու չհաւասար հեռաւոր կողմանք նոցա հաւասար իցեն. եւ երկու չորեքկուսիք պատշաճականք են, եթէ մի կողմն նոցա հաւասար իցէ։

125. Խնդիրք։ Ա. Ի վերայ ուղիղ ինչ գծի ծանուցելոյ գրոշմել չորեքկուսի։

Բ. Ծանուցեալ զմի ուղիղ գիծ, եւ զմի ծուռ անկիւն, յօրինել ռոմբոս, յորում նոյն անկիւնն գտանիցի, եւ ուղիղ գիծն լինիցի մի կողմն նորին։

Գ. Ծանուցեալ զերկուս ուղիղ գիծս եւ զմի անկիւն, ձգել ձեւ հաւասար հեռաւոր. յորում նոյն անկիւնն գտանիցի, եւ ուղիղ գիծքն լինիցին կողմանք ձեւոյն։

Դ. Գրոշմել հաւասար հեռաւոր ձեւ ինչ, որ այլում իմիք պատշաճական իցէ։

Լուծումն։ Զլուծմունս խնդրոցս թողումք ուսանելեաց ինքնին գտանել։

126. Երկու պատշաճական բազմանկիւնք միաբան անկիւնագծիւք ի պատշաճական երեքանկիւնս բաժանին. եւ սմին հակառակ, եթէ երկու բազմանկիւնք բաժանիցին միաբան անկիւնագծիւք յերեքանկիւնս կարգաւ միմեանց պատշաճականս, են բազմանկիւնքն այնոքիկ պատշաճականք։

Քանզի յամենայն երկու երկու երեքանկիւնս, որք յերկուց միաբան կողմանց եւ ի միջէ անկիւնագծէ փակիցին, երկու երկու կողմանքն միմեանց հաւասարք են. ուստի եւ երեքանկիւնքն միմեանց պատշաճականք:

Յուցանի եւ երկրորդ մասն: Քանզի յամենայն զոյգս երեքանկեանցն ամենայն կողմանքն եւս եւ ամենայն անկիւնքն կարգաւ միմեանց հաւասարք են, արդ եթէ այնպիսի երեքանկիւնք միով օրինակաւ ընդ միմեանս յօդիցին, որպէս զի ծագք միաբան անկեանցն ի միմեանց վերայ անկանիցին, յայտ է, եթէ բազմանկիւնքն, որ անտի ծնանիցին՝ ունիցին կողմանս եւ անկիւնս միմեանց հաւասարս, ուստի եւ պատշաճականք իցեն:

127. Երկու բազմանկիւնք, որք ի հաւասար թուով, եւ կարգաւ ի նման երեքանկեանց կազմեալ իցեն, միմեանց նմանք են, եւ խոտորնակս երկու նման բազմանկիւնք կազմին յերեքանկեանց, որոց թիւ համարոյն հաւասար է, եւ կարգաւ միմեանց նմանք են:

Իցէ (Ձեւ 77.) ΔՄ ∾ Δմ, ΔՆ ∾ Δն, եւ ΔՊ ∾ Δպ, եւ ΔՏ ∾ Δտ: Որովհետեւ Մ ∾ մ, ուրեմն անկ. Բ = բ, եւ անկ. ԲԳԱ = անկ. բգա, եւ անկ. ԲԱԳ = անկ. բագ: Իսկ ի նման երեքանկիւնսն Ն եւ ն է անկ. ԱԳԴ = անկ. ագդ, եւ անկ. ԳԱԴ = անկ. գադ, ուստի եւ անկ. ԲԳԱ + անկ. ԱԳԴ = անկ. բգա + անկ. ագդ կամ Գ = գ: Սոյնն օրինակաւ ցուցանի եթէ Դ = դ, Ե = ե, Զ = զ, եւ Ա = ա իցեն: Ի նմանութենէ Մ եւ մ, Ն եւ ն, Պ եւ պ, Տ եւ տ երեքանկեանցն ծագեն մօտաւոր համեմատութիւնքս ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ = ԱԳ : ագ, եւ ԱԳ : ագ = ԳԴ : գդ = ԱԴ : ադ, եւ ԱԴ : ադ = ԴԵ : դե = ԱԵ : աե, եւ ԱԵ : աե = ԵԶ : եզ = ԱԶ : ազ, յորոց ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ = ԳԴ : գդ = ԴԵ : դե = ԵԶ : եզ = ԱԶ : ազ, այս ինքն եթէ ամենայն կողմանք ԱԲԳԴԵԶԱ, եւ աբգդեզա

բազմանկեանցն համեմատականք են, եւ որպէս վերագոյն ասացաւ միաբան անկիւնքն միմեանց հաւասարք են, ուրեմն միմեանց նման են բազմանկիւնքն։

Ցուցանի եւ երկրորդ մասն։ Իցէ բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵԶԱ ∾ աբգդեզա։ Ի գագաթանէ Ա եւ ա անկեանց ձգեա անկիւնագիծս. յայտ է եթէ վասն նմանութեան բազմանկեանցն՝ զոր համարեցաք, յերեքանկիւնսն Մ եւ մ գտանիցի համեմատութիւնս ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ, եւ անկիւնն Բ = բ. ուրեմն եւ երկոքին երեքանկիւնքն նման են (Հ. 99.)։ Յորոյ զհետ գայ, եթէ եւ անկ. ե = ե′, եւ անկ. ԲԳԱ = բգա, եւ ԲԳ : բգ = ԳԱ : գա։ Յմերոյ համարելոյ զհետ գայ եւս ԲԳ : բգ = ԳԴ : գդ. ուստի եւ ԳԱ : գա = ԳԴ : գդ. եւ զի անկ. ԲԳԴ = բգդ, եւ անկ. ԲԳԱ = բգա, ուրեմն եւ ԲԳԴ — ԲԳԱ = բգդ — բգա, կամ անկ. ԱԳԴ = անկ. ագդ. ուստի եւ ΔՆ ∾ Δն։ Սոյն օրինակաւ ցուցանի եւ նմանութիւն Պ եւ պ, Տ եւ տ երեքանկեանցն։

Ուրեմն նման բազմանկիւնք ի միաբան անկիւնագծից բաժանին ի նման երեքանկիւնս։

Ա. Ուրեմն ի նման բազմանկիւնս միաբան անկիւնագիծք, ուղիղ համեմատականք են ընդ միաբան կողմանս։

Բ. Կարգաւոր բազմանկիւնքն, որոց հաւասար թուով կողմանք իցեն, նմանք են միմեանց, քանզի ամենայն անկիւնք նոցա հաւասարք են (Հ. 122. Գ.), եւ ամենայն կողմանքն համեմատականք, քանզի յամենայն կարգաւոր բազմանկեան կողմանքն միմեանց հաւասարք են, եւ հաւասար իրաց հաւասար կշռութիւն է առ միմեանս։

Գ. Եթէ զերկուս որ զինչ եւ իցէ կէտս շրջանակի ԱԲԳԴ.... բազմանկեան ուղիղ գծիւ ընդ միմեանս յօդիցես, եւ դարձեալ զերկուս նման կէտս այլոյ աբգդ.... բազմանկեան ընդ միմեանս յօդիցես, բազմանկիւնքն յերկուս մասունս հատանիցին, որոց

համեմատեալ բազմանկիւնքն միմեանց նմանք են: Ըստ նմին օրինակի եւ գիծքն բաժանման ուղիղ համեմատականք են ընդ միաբան անկիւնագիծս:

128. Խնդիր: Ի վերայ աբ գծի կանգնել բազմանկիւն որ այլում ԱԲԳԴԵԶ բազմանկեան նման իցէ (Ձեւ 77.):

Լուծումն Ա: Զբազմանկիւնն ԱԲԳ... բաժանեա անկիւնագծիւք յերեքանկիւնս. ի վերայ աբ գծի դրոշմեա Δաբգ ∾ ΔԱԲԳ, առարեալ Բ=բ, եւ ր=ր', յորմէ եւ զգ կէտն գտանել կարիցես: Նովին օրինակաւ եւ ի վերայ ագ ուղղութեան դրոշմեսջիր Δագդ ∾ ΔԱԳԴ, որով եւ զդ գտանիցես: Զսոյն ձեւ օրինակի եւ զայլ եւս կէտսն ե, զ, որով եւ զբազմանկիւնն աբգդեզ յօրինիցես, որ նման իսկ է ծանուցեալ ԱԲԳԴԵԶ բազմանկեանն (Հ. 127.):

Բ. Լուծանի խնդիրս եւ այլով իմն օրինակաւ: Զգիծն աբ ածեալ դիջիր ի վերայ ԱԲ ուղղութեան, յԱ կիտէ մինչեւ ցբ', եւ ի բ' կիտէ ձգեա բ'գ' || ԲԳ, եւ ընդ գ' զգիծն գ'դ' || ԳԴ, եւ ընդ դ' զգիծն դ'ե' || ԴԵ, եւ ընդ ե' զգիծն ե'զ' || ԵԶ. եւ լինիցի բազմանկիւնն Աբ'գ'դ'ե'զ' ∾ ԱԲԳԴԵԶ (Հ. 85. Ա. եւ 127. Ա.):

Յօրինել յատակս ոչ այլ ինչ է, եթէ ոչ նկարել բազմանկիւնս ի վերայ քարտի, որք նման իցեն այլոց բազմանկեանց կազմելոց ի դաշտի ուրեք ի վայրաց ինչ, որոց գիրք հաստատուն իցեն: Վասն այսորիկ պարտ է ի դաշտի զկողմանսն եւ զանկիւնսն զայնոսիկ ըստ թուոյն եւ ըստ նմանութեանն, ածել բերել ի վերայ քարտի:

129 Շրջանակք երկուց նման բազմանկեանց համեմատականք են ընդ միաբան կողմանս:

Համարեսցուք եթէ նման իցեն բազմանկիւնքն ԱԲԳԴԵԶ եւ աբգդեզ (Ձեւ 77.), ասատին ծագեն կշռութիւնքն ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ = ԳԴ : գդ = ԴԵ : դե = ԵԶ : եզ = ԶԱ : զա: Արդ բովանդակութիւն առաջնորդացն այնպէս իմն կշռի առ բովանդակութիւն

յաջորդայն, որպէս մի մի առաջնորդ առ իւր յաջորդն, այս ինքն (ԱԲ + ԲԳ + ԳԴ + ԴԵ + ԵԶ + ԶԱ) : (աբ + բգ + գդ + դե + եզ + զա) = ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ . . . այլովքն հանդերձ ։ Արդ եթէ զբովանդակութիւնս ամենայն կողմանցն այս է զշրջանակ առաջին բազմանկեան նշանակիցեմք Շ եւ զերկրորդին շ նշանագրով, ելանիցէ Շ : շ = ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ = ... ։

Որովհետեւ ի նման բազմանկիւնս, միաբան անկիւնագիծքն համեմատականք են միաբան կողմանց, ուրեմն եւ շրջանակք երկուց բազմանկեանց նմանեաց այնպէս իմն կշռին ընդ միմեանս, որպէս միաբան անկիւնագիծքն ընդ միմեանս համեմատիցին ։

ԳԼՈՒԽ Ե

ՑԱՂԱԳՍ ՀԱՆԳԱՄԱՆԱՑ ԲՈԼՈՐԱԿԱՑ

130. ԲԱՑԱՐՁԱԿՈՒԹԻՒՆ *որ զինչ եւ իցէ կիտի՝ որ չկայցէ ի շրջապատին, ի կենդրոնէ անտի մեծագոյն կամ փոքրագոյն է քան զճառագայթն, ըստ լինելոյ այնր կիտի արտաքոյ կամ ներքոյ բոլորակին:*

Եթէ կայցէ Ա *կէտն* (*Ձեւ* 78.) *արտաքոյ բոլորակի, որոյ կենդրոն իցէ* Կ, *յայտ է եթէ ուղիղ գիծն որ զ*Ա *եւ զ*Կ *ընդ միմեանս յօդիցէ, զշրջապատն ի* Բ *հատանէ, ուստի եւ* ԿԱ = ԿԲ + ԲԱ, *յորմէ* ԿԱ > ԿԲ: *Ապա եթէ կէտ մի* Գ *կայցէ ներքոյ բոլորակին, յայտ է եթէ իբրեւ երկայնիցի* ԿԳ *զշրջապատն ի* Դ *հատանիցէ, յորմէ* ԿԳ = ԿԴ — ԳԴ, *եւ* ԿԳ < ԿԴ:

Յասացելոցս զհետ գայ, եթէ մարթի ի հակառակէն ի վերայ հասանել, թէ կէտ մի ի շրջապատի բոլորակին արդեւք, թէ արտաքոյ եւ կամ ներքոյ նորա գտանիցի, յորժամ բացարձակութիւն նորին ի միջոցէն ի կշիռ համեմատութեան բերցի ընդ ճառագայթին: Այս ինքն եթէ բացարձակութիւնն ի կենդրոնէ իցէ հաւասար կէս երկակտրոյն, կէտն այն կայ ի շրջապատի բոլորակին. ապեթէ հեռաւորութիւնն մեծագոյն կամ փոքրագոյն քան զճառագայթն դիպիցի, յայնժամ յառաջին դէպսն արտաքոյ եւ յերկրորդումն ներքոյ բոլորակին գտանի:

131. *Երկակտուրն զբոլորակն եւ զշրջապատն հասարակէ:*

Համարեսցուք եթէ ԱԲ (*Ձեւ* 79.) *երկակտուր իցէ: Արդ ածցուք զմտաւ, եթէ վերին մասն* ԱՄԲ *այնպէս իմն զետեղեալ կայցէ ի վերայ* ԱՆԲ *մասին, որպէս զի* Ա *եւ* Բ *կէտք* ԱԲ *գծին, որ լար համարի առաջին* ԱՄԲ *աղեղան՝ անկանիցին ի վերայ* Ա

եւ Բ կիտից ԱԲ գծին, եդեալ զայն իբրեւ լար ԱՆԲ աղեղան։ Ասաստին յայտ է, եթէ եւ այլ եւս կէտքն առաջին աղեղան ի վերայ ամենայն կիտից երկրորդին անկանիցին, ապա թէ ոչ հաւասար հեռաւորութիւն ի Կ միջոցէն չլինէր նոցա։ Եւ արդ որովհետեւ եզերք երկոցունց մասանցն ի միմեանց վերայ՝ անկանին, ապա հարկ է նոցա ի գլխովին միմեանց պատշաճականս լինել, որով եւ բոլորակն եւ շրջապատն հասարակեալ են։

Զսորին զհետ գայ, եթէ

Ա. Այլ ինչ լար ԱԴ ի չհաւասար մասունս եւ զբոլորակն եւ զշրջապատն հատանէ. ԱՆԴ մասն յորում Կ կենդրոնն գտանի, կոչի Մեծագոյն հատած, եւ միւսն ԱՄԴ փոքրագոյն։

Ամենայն լար ԱԴ՝ երկուց աղեղանց պատշաճի, յորոց մին ԱՄԴ փոքր եւ միւսն ԱՆԴ մեծ է քան զկէս բոլորակ։ Եթէ յայս մեր գործս բանք լինիցին զաղեղանէ, որ ի ծանուցեալ ինչ ԱԴ լար պատշաճիցի, պարտ է զփոքր ԱՄԴ աղեղն ի վերայ եդեալ համարել, եթէ միւսն արդեամբք չիցէ դրոշմեալ։

Բ. Երկու բոլորակք ձգեալք նովին կէս երկակտրով, միմեանց պատշաճականք են. քանզի եթէ զմիջոց միոյն ի վերայ միջոցի միւսոյն դնիցեմք, յայտ է եթէ եւ շրջապատք երկոցունցն ի միմեանց վերայ անկանիցին. ուստի եւ իցեն հաւասարք միմեանց։

132. Ուղիղ գիծն ԾԳ (Ձեւ 79.) յերկուս կէտս եւեթ յԱ եւ յԵ զշրջապատն հատանել կարէ։

Առցուք եւ մեւս եւս կէտ հատանելոյ զԳ. արդ իբրեւ զճառագայթսն ԱԿ, ԿԵ, ԿԳ ձգիցեմք, հարկ ի վերայ կայ նոցա միմեանց հաւասարս լինել. որ անհնարին է (Հ. 130.)։

133. Ամենայն լար՝ որ ոչ ընդ միջոց բոլորակին անցանիցէ, փոքրագոյն է քան զերկակտուրն, այս ինքն ԱԴ < ԱԲ (Ձեւ 79.)։

Ձգեա զԿԴ կէս երկակտուրն, եւ ծագիցէ ΔԱԿԴ, յորում ԱԴ < ԱԿ + ԿԴ. եւ քանզի ԿԴ = ԿԲ, ուրեմն եւ ԱԴ < ԱԿ + ԿԲ, այս ինքն է ԱԴ < ԱԲ:

Արդ եթէ ընդ մի եւ նոյն կէտ շրջապատին, զոր օրինակ ընդ Ա ձգիցեմք երկուս լարս ԱԴ եւ ԱԶ, փոքրագոյն այն է որ յերկակտորոյն առաւել հեռի կայցէ կամ որ ընդ նմա մեծագոյն անկիւն յօրինեալ կազմիցէ: Այս ինքն է ԱԶ < ԱԴ (Հ. 69.): Իսկ ի միւս կողմն երկակտորոյն մարթ է եւ առ մի մի ի լարից, զոր օրինակ առ ԱԴ, ձգել միւս եւս հաւասար լար ԱԵ:

134. Եթէ զաղեղն ինչ բոլորակի բգ (Ձեւ 80.) դիցես ի վերայ ԲԳ աղեղան նոյն բոլորակի կամ այլոյ հաւասար բոլորակի, որպէս զի երկու կէտքն բգ աղեղան ի վերայ երկուց կիտից ԲԳ աղեղանն անկանիցին եւ ուռուցեալ կողմանքն երկոցունց աղեղանց ի նոյն կողմն շրջեալ իցեն, յայնժամ բովանդակ բգ աղեղն ըստ ամենայն տարածութեան ի վերայ ԲԳ աղեղան անկանի:

Զաղեղն բգ, որ ագ = ԱԳ կէս երկակտորով ձգեալ իցէ, դիցէր ի վերայ ԲԳ աղեղան, որպէս զի բ ի Բ, եւ գ ի Գ անկանիցին. յայտ է եթէ բգ լարն ծածկէ զԲԳ: Եւ քանզի ըստ մերոյ համարելոյ եւ աբ = ԱԲ, եւ ագ = ԱԳ, ուրեմն Δաբգ $\cong$ ΔԱԲԳ. ուստի եւ ա անկանիցի յԱ: Եւ զի ամենայն կէտքն բգ եւ ԲԳ աղեղանցն հաւասար հեռի են յԱ կիտէ, ապա հարկ է զի եւ ամենայն կէտքն բգ աղեղան ի վերայ կիտից ԲԳ աղեղան անկանիցին:

Այս յառաջադրութիւնս առանձինն սեպհական է ե՛ւ բոլորակաց ե՛ւ ուղիղ գծից:

Ա. Ապա ուրեմն ի նոյն կամ ի հաւասար բոլորակս կորութիւնն յամենայն կողմանս հաւասար է:

Բ. Հաւասար լարից են եւ հաւասար աղեղունք, նոյնպէս եւ խոտորնակս. համարելով թէ

երկուքին աղեղունքն համագգի իցեն այսինքն երկուքեանն եւս փոքրագոյն կամ մեծագոյն իցեն քան զկէս բոլորակ: Վասնզի եթէ լարքն ծածկիցեն զմիմեանս, յայտ է եթէ եւ աղեղունքն իբրեւ ի միմեանց վերայ դիցին, ծածկեն զմիմեանս (Ա.), եւ եթէ աղեղունքն զմիմեանս ծածկիցեն, ի հարկէ իսկ եւ լարքն ի միմեանց վերայ անկանիցին, քանզի ծայրք նոցա ի միմեանց վերայ կան:

Գ. Եթէ ի նոյն կամ ի հաւասար բոլորակս երկու աղեղունք ԱՄԴ եւ ԱՆԵ (Ձեւ 79.) միմեանց հաւասար իցեն, յայնժամ եւ ԱԿԴ եւ ԱԿԵ կենդրոնական անկիւնքն՝ որ նոցա կշռիցին, եւ բաժանածքն ԱՄԴԿ եւ ԱԿԵՆ, որպէս եւ հատածքն ԱԴՄ եւ ԱԵՆ հաւասարք են. եւ եթէ զմին ի հաւասարութեանցս դնիցեմք, եւ այլ եւս երեքինն զնորին զհետ գան:

135. Յամենայն բոլորակս մեծագոյն լարն է եւ մեծագոյն աղեղն, նոյնպէս եւ սորին խոտորնակն:

Դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ լարն ԱԴ > լա. ԱԶ (Ձեւ 79.), որովհետեւ եւ ԱԿ=ԱԿ, եւ ԿԴ = ԿԶ, նմին իրի անկ. ԱԿԴ > ԱԿԶ (Հ. 69.), ուստի եւ աղ. ԱԴ > աղ. ԱԶ (Հ. 134. Բ.):

Սոյնգունակ եւ երկրորդ մասն: Իցէ աղ. ԱԴ > աղ. ԱԶ. յայտ է, եթէ իցէ եւ անկ. ԱԿԴ > ԱԿԶ, եւ զի ԱԿ=ԱԿ, եւ ԿԴ=ԿԶ, ուրեմն եւ լարն ԱԴ > լա. ԱԶ (Հ. 69.):

136. Խնդիր: Տանուցեալ զերկուս աղեղունս ԲԴ եւ ԲԳ (Ձեւ 80.), որք նովին կէս երկակորով ձգեալ իցեն, առաջի կայ մեզ զկշռութիւնն՝ որովք ընդ միմեանս համեմատիցին գտանել:

Լուծումն: Եթէ մարթ ինչ էր արդեամբք զաղեղն միոյ բոլորակի ածել բերել ի վերայ միւսոյն, որպէս յաջողեցաւն յուղիղ գիծս, յայտ է եթէ կարէաք ըստ 84 համարոյ զմեր խնդիրս լուծանել: Այլ սակայն որովհետեւ հաւասար լարից եւ հաւասար են աղեղունքն, վասն այսորիկ գոյ հնար ըստ այնմ օրինակի

որ յ84, զերան վճարել։ Արդ կամ մի անգամ եւեթ գտանի լարն ԵԷ աղեղան ի ԲԴ, այս ինքն յանջրպետութեան Բ եւ Գ կիտից եւ կամ է աղ. ԲԴ = աղ. ԲԳ + աղ. ԳԴ = աղ. ԵԷ + աղ. ԳԴ։ Արդ չափեալ զլարն ԳԴ մնացորդին բերջիր զայն ի վերայ ԵԷ աղեղան, եւ գտանիցի ի նմա մի անգամ ի Ե կիտէ մինչեւ ցԸ, եւ մնայցէ մնացորդ ԷԸ կամ թէ աղ. ԵԷ = աղ. ԵԸ + աղ. ԷԸ = աղ. ԳԴ + աղ. ԷԸ։ Լարն ԷԸ մնացորդին կարէ երկիցս ի ԳԴ աղեղան գտանել ի Գ կիտէ մինչեւ ցԶ, կամ թէ է աղ. ԳԴ = 2 աղ. ԷԸ + աղ. ԴԶ։ Նոյն ի կատարած, ԷԸ աղեղն երիցս բովանդակէ զԴԶ աղեղն, կամ աղ. ԷԸ = 3աղ. ԴԶ։ Արդ փոխանակելով գտանի

աղ. ԳԴ = 2.3 աղ. ԴԶ + աղ. ԴԶ = 7 աղ. ԴԶ,
աղ. ԵԷ = 7 աղ. ԴԶ + 3 աղ. ԴԶ = 10 աղ. ԴԶ,
աղ. ԲԴ = 10 աղ. ԴԶ + 7 աղ. ԴԶ = 17 աղ. ԴԶ,
ուրեմն

աղ. ԲԴ : աղ. ԵԷ = 17 աղ. ԴԶ : 10 աղ. ԴԶ, կամ
աղ. ԲԴ : աղ. ԵԷ = 17 : 10։

Օ՛այս գործ պարտ եւ պատշաճ է այնչափ ինչ յառաջ խաղացուցանել, մինչեւ հասանիցես ի մնացորդ ինչ, որ ճշդիւ գտանիցի յառաջին բաժանարարն, եւ կամ այնչափ ինչ փոքր իցէ, որպէս զի զայն առ ոչինչ դրել մարթայցես։

Դժուարձեալ մարթ է եւ զայն՝ զոր միանգամ ի (Հ. 84.) ի յաւելուածն ասացաք, եւ զամենէ եւս զմտաւ ածել։

137. Ուղիղ գիծն ՆԶ (Ձեւ 79.) որ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԵ լարին ի Թ միջավայրի, անցանէ ընդ կենդրոն բոլորակին։

Արդ եթէ ոք ընդդէմ դառնայցէ եւ ասիցէ, եթէ կենդրոնն չկայ ի վերայ ՆԶ ուղիղ գծի. առ զանպատեհութիւնն ցուցանելոյ առցուք զկէտ ինչ,

որ արտաքոյ կայցէ յայնմ ուղղութենէ, զոր օրինակ զԷ եւ կայցէ անդ կենդրոնն. իբրեւ ձգիցին ուղիղ գիծքն ԱԷ, ԵԷ, եւ ԵԸ. լինիցի ΔԱԹԸ ≅ ΔԹԵԸ, քանզի ԱԹ = ԵԹ, ԸԹ = ԸԹ, եւ ԸԹ ⊥ ԱԵ (Հ. 52.). ուստի եւ ԱԸ = ԵԸ, յորմէ եւ ԱԸ + ԸԷ = ԵԸ + ԸԷ, այս ինքն ԱԷ = ԵԸ + ԸԷ: Բայց քանզի ԵԸ + ԸԷ > ԵԷ (Հ. 65.), ուրեմն ԱԷ > ԵԷ, յորմէ յայտ է եթէ Է չկարէ կենդրոն լինել բոլորակին: Եւ քանզի Է կարէ ցուցանել զամենայն հնաւոր կէտ, որ կայցէ արտաքոյ ՆԶ ուղղութեան եթէ ի մի կողմն եւ եթէ ի միւսն, ապա հարկ է Կ կենդրոնի բոլորակին ի վերայ ՆԶ ուղիղ գծի անկանել:

Ա. Ուրեմն ՆԶ երկակտուր է բոլորակին: Արդ եթէ երկակտուրս ի Կ հատարակիցի, լինիցի Կ կենդրոն բոլորակի. զորոյ զհետ գայ, թէ իւրաքանչիւր բոլորակ մի եւեթ կենդրոն ունել կարէ:

Բ. Եթէ զկենդրոն բոլորակին խնդրել առաջի կայցէ, զառաջինն ձգեա երկուս լարս ԱԵ եւ ԱԶ, որք չիցեն հաւասար հեռաւորք ի միմեանց. յետ այնորիկ ի միջոցն նոցա կանգնեա զուղղորդ գիծսն ԹԶ եւ ԺԵ, Կ կէտն հատանելոյ ուղղորդ գծիցն զմիմեանս իցէ կենդրոնն, քանզի երկոցունց ուղղորդ գծիցն չիք այլ կէտ հասարակաց, ուրեմն հարկ է կենդրոնին ի նմին կալ:

138. Ի ձեռն երից Ա, Բ, Դ կիտից, որ չկայցեն ի միում ուղիղ գծի սահմանի մեծութիւն եւ դիրք բոլորակին, որ եւ է մի միայն (Ձեւ 81.):

Եթէ ընդ Բ յօդիցեմք զկէտն Ա եւ Դ, եւ հատարակիցեմք զերկոսին գիծս ի կէտսն Ե եւ Է, եւ ի վերայ նոցա կանգնիցեմք ԵԶ եւ ԷԸ գիծս ուղղորդս, յայտ է եթէ ուղղորդ գիծքն ի Կ զմիմեանս հատանիցեն (Հ. 80. Զ.): Արդ ձգեա զուղիղ գիծսն ԱԿ, ԲԿ եւ ԿԴ, որք եւ հաւասարք են միմեանց (Հ. 64. Գ.), ուստի եւ բոլորակն՝ որ ԿԱ կէս եր-

կակորով ձգիցի, անցանիցէ եւ ընդ երիս կէտսն Ա, Բ, Դ։

Ըստ սմին օրինակի եւ երկրորդ մասն։ Վասնզի եթէ մարթ ինչ էր ընդ երիս կէտսն ընդ այնոսիկ մեւս եւս բոլորակ ձգել, յայնժամ հարկ է զի միջոցն կայցէ յԵԶ, եւ յԷԸ ուղղորդ գիծան, այս ինքն է ի կէտ հատանելոյ նոցա զմիմեանս, քանզի երկու ուղիղ գիծքն ի մի կէտ եւեթ միմեանց կարեն հանդիպել. ապա ուրեմն մի եւեթ բոլորակ հնար է ընդ երիս կէտսն ձգել։

Ա. Ապա ուրեմն շրջապատք երկուց բոլորակաց յերկուս եւեթ կէտս կարեն զմիմեանս հատանել. քանզի եթէ երեք կէտք էին նոցա հասարակաց, յայնժամ լինէր նոցա եւ կենդրոն նոյն, նոյն եւ ճառագայթք, որով եւ յօրինեալ կազմէին զմի եւ զնոյն բոլորակ։ Բայց քանզի երկու կենդրոնակից բոլորակք չկարեն զմիմեանս հատանել (Հ. 80. Բ.). ապա ուրեմն բոլորակք՝ որ զմիմեանս հատանիցեն, են արտաքոյ կենդրոնի։

Բ. Ապա ուրեմն մարթ է շուրջ զերեքանկեամբք ձգել բոլորակս։

Գ. Կենդրոնական գիծն ԿՄ (Ձեւ 82.) երկուց բոլորակաց, որք հատանեն զմիմեանս, կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ հասարակաց լարին, եւ հասարակէ զայն։ Ցուցումն յայտ է ի 57 համարոյ, եթէ զկէս երկակտուրսն ԱԿ, ԲԿ, ԲՄ, եւ ԱՄ ձգիցեմք։

Դ. Եթէ կամք իցեն յԱ կիտէ ի վերայ ՆՊ ուղիղ գծի ձգել գիծ ուղղորդ, պարտ է ընտրել առնուլ զերկուս որ զինչ եւ իցէ կէտս ուղիղ գծին զՄ եւ զԿ, եւ ապա ձգել ՄԱ եւ ԱԿ կէս երկակորովք զաղեղունսն ԱԵԲ եւ ԱԶԲ, երկոքին աղեղունքս զմիմեանս հատանեն յԱ եւ ի Բ. եւ լարն ԱԲ կայ ուղղորդ ի վերայ ՆՊ ուղիղ գծի։

139. Կէս երկակտուրն ԿԴ (Ձեւ 83.), եթէ զԱԲ լարն յԵ եւ կամ զկենդրոնական անկիւնն ԱԿԲ,

եւ կամ զԱԲ աղեղն ի Դ հատարակիցէ, կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ լարին, եւ խոտորնակի եւս, եթէ ԿԴ ճառագայթն կայցէ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ լարին, հատարակէ եւ զլարն եւ զԱԲ աղեղն, եւ զկենդրոնական անկիւնն ԱԿԲ, որ կշռի այնմ աղեղան։

Իցէ ԱԵ = ԵԲ. լինիցի ⊿ԱԿԵ ≅ ⊿ԲԿԵ (Հ. 54.), ուստի եւ անկիւնն ԱԵԿ = ԲԵԿ։ Երկրորդ անգամ՝ եթէ իցէ անկ. ԱԿԵ = անկ. ԲԿԵ, յայտ է եթէ դարձեալ երեքանկիւնքն միմեանց պատշաճականք լինիցին (Հ. 52.), ուստի եւ կից անկիւնքն ԼԵ հաւասարք են. եւ երրորդ անգամ եթէ աղ. ԲԴ = ԱԴ, լինիցի եւ անկ. ԱԿԵ = անկ. ԲԿԵ. եւ ի նոյին սկզբանց, որպէս յառաջագոյն, յայտ լինի եթէ կից անկիւնքն ԼԵ հաւասարք իցեն. ապա ուրեմն եւ յերբիս դէպսն եւս ԿԴ ⊥ ԱԲ։

Այնպէս եւ սորին խոտորնակն։ Եթէ ԿԴ ⊥ ԱԲ, լինիցի եւ ⊿ԱԿԵ ≅ ⊿ԲԿԵ (Հ. 68.), ուստի եւ ԱԵ = ԲԵ, անկ. ԱԿԵ = ԲԿԵ, որով եւ աղ. ԱԴ = աղ. ԲԴ (Հ. 134. Գ.)։

Ա. Երկու լարք ԱԲ եւ ԳԹ, որոց կէտն զմիմեանս հատանելոյ Ե, արտաքոյ Կ միջոցին կայցէ, զմիմեանս հատարակել չկարեն։ Քանզի եթէ ԱԵ = ԲԵ, հարկ է ԿԵ ⊥ ԱԲ լինել։ Արդ եթէ լինէր եւ ԳԵ = ԵԹ, յայնժամ լինէր ԿԵ ուղղորդ եւ ի ԹԳ, ուստի եւ անկ. ԿԵԱ = ԿԵԳ = Ո, որ անպատեհ իմն է։

Բ. Ապա ուրեմն ուղիղ գիծն ԴԵ՝ որ զմիջոց ԱԴԲ աղեղան ընդ միջոցի ԱԲ լարին կապիցէ, կայ ուղղորդ ի վերայ լարին, զոր իբրեւ երկայնիցեմք՝ ընդ կենդրոն բոլորակին անցանէ։

140. Առաջին. Հաւասար լարք ի նմին բոլորակի՝ հաւասար հեռի կան ի կենդրոնէ. եւ խոտորնակի՝ լարքն՝ որ հաւասար հեռի կայցեն ի կենդրոնէ, միմեանց հաւասարք են։

Երկրորդ. Փոքրագոյն լարն առաւել հեռի է ի միջոցէ բոլորակին քան զմեծագոյնն. եւ խոտորնակի՝ լարն որ առաւել հեռի կայցէ ի կենդրոնէ փոքրագոյն է:

Դիցուք գրեսցուք եթէ (Ձեւ 81.) լարն ԱԲ = ԴԲ: Արդ եթէ ի Կ կենդրոնէ ձգիցեմք գիծս ուղղորդս զԿԵ եւ զԿԷ ի վերայ լարիցն այնոցիկ, եւ դրոշմիցեմք զԿԱ եւ զԿԴ կէս երկակտուրսն, յայնժամ քանզի ԱԿ = ԿԴ, եւ ԱԵ = ԴԷ. լինիցի ΔԿԱԵ ≅ ԿԴԷ (Հ. 68.), ապա ուրեմն եւ ԿԵ = ԿԷ: Նոյն ձեւ օրինակի մարթ է ցուցանել, (եթէ ԿԵ = ԿԷ,) թէ ԱԵ = ԴԷ, այս ինքն է $\frac{1}{2}$ ԴԲ = $\frac{1}{2}$ ԱԲ, ուստի ԱԲ = ԲԴ իցէ:

Ցուցումն երկրորդ մասին: Իցէ ԱԲ < ԱԺ եւ ԿԹ կայցէ ուղղորդ ի վերայ ԱԺ ուղիղ գծի: Որովհետեւ ԿԵ > ԿԻ, եւ ԿԻ > ԿԹ (Հ. 64. Ա.), ուրեմն որչափ եւս առաւել ԿԵ > ԿԹ:

Ապա եթէ իցէ ուղղորդ գիծն ԿԵ > ԿԹ՛, յայնժամ եւ լարն ԱԲ է < ԱԺ՛: Քանզի եթէ երկայնիցեմք զուղղորդ գիծն ԿԹ՛, եւ ԿԵ՛ = ԿԵ գործիցեմք, եւ ձգիցեմք զլարն Ա՛Բ՛ ∥ ԱԺ՛ ⊥ ԿԵ՛, լինիցի եւ լարն Ա՛Բ՛ = ԱԲ (ըստ Ա.), եւ քանզի աղ. Ա՛ԳԲ՛ < ԱԳԺ՛, ուրեմն հարկ ի վերայ կայ եւ Ա՛Բ՛ լարին < ԱԺ՛ լինել (Հ. 135.), ուստի եւ ԱԲ < ԱԺ՛:

141. Ուղղորդ գիծն ՇՂ (Ձեւ 82.) կանգնեալ ի Ն ծայրն ԿՆ կէս երկակտրոյն, է շօշափող Ն կէտի բոլորակին. եւ խոտորնակի, կէս երկակտուրն որ ձգիցի ի վերայ Ն կիտի շօշափելոյ, է ուղղորդ ի վերայ ՇՂ շօշափողին:

Եթէ ՇՂ ⊥ ԿՆ, յայտ է եթէ այլ ինչ գիծ ԿՌ > ԿՆ իցէ (Հ. 64. Ա.): Եւ արդ որովհետեւ ամենայն կէտքն ՇՂ ուղիղ գծին բաց ի Ն կիտէ անտի, արտաքոյ կան բոլորակին, ուրեմն ՇՂ է շօշափող բոլորակին ի կէտն Ն:

Ըստ նմին նմանութեան եւ երկրորդ մասն։ Եթէ ՇՀ ուղիղ գիծն զշրջապատն ի Ն շօշափիցէ, յայտ է եթէ բաց ի Ն կիտէն ամենայն կէտք ՇՀ գծին արտաքոյ կան բոլորակին, ուստի եւ առաւել քան զԿՆ հեռի են ի Կ կենդրոնէ, կամ ԿՆ կարճագոյն քան զայլ ուղիղ գիծսն է, զորս առ ՇՀ ձգել հնար իցէ. ապա ուրեմն է ԿՆ ⊥ ՇՀ։

Ա. Ապա ուրեմն ուղղորդ գիծն՝ զոր ի վերայ շօշափողին կանգնիցէ ոք ի Ն կէտն շօշափելոյ, անցանէ ընդ միջոց բոլորակին։

Բ. Ընդ Ն կէտն հնար է միոյ եւեթ շօշափողի ձգել։ Վասնզի եթէ մարթ ինչ էր միւս եւս շօշափող ՆԹ ձգել, յայնժամ ՆԹ կազմէր ընդ ԿՆ կէս երկակտրոյն անկիւն ծուռ, եւ ուղղորդ գիծն ԿԷ, որ ի ՆԹ ուղղութեան վերայ անկանիցի՝ կայր ի կողմն ԿՆԹ սուր անկեան, ուստի եւ ԿԷ < ԿՆ, որով եւ Է կէտն գտանէր ի ներքին կողմն բոլորակին. ուրեմն ՆԹ չէ շօշափող այլ հատանող։

Գ. Եթէ կամք իցեն ի վերայ Ն կիտի բոլորակին ձգել շօշափող, պարտ եւ պատշաճ է զկէտն զայն Ն յօդել ընդ միջոցին, եւ ի Ն ծայրն ի վերայ ճառագայթին կանգնել գիծ ուղղորդ, եւ այն իսկ իցէ խնդրեալ շօշափողն։

142. Խնդիր։ Ի միոջէ Ա կիտէ (Ձեւ 84.) ծանուցելոյ, որ արտաքոյ Շ բոլորակին կայցէ, ձգել շօշափող առ բոլորակն։

Լուծումն։ Ձգեա զուղիղ գիծն ԱԿ, որ ի Բ հատանէ զՇ բոլորակն։ Ի Բ կանգնեա զԴԵ ուղղորդ ի վերայ ԱԿ ուղիղ գծի եւ ի Կ կենդրոնէ ԱԿ կէս երկակտրով ձգեա զաղեղն մի, որ զուղղորդ գիծսն ի Զ եւ ի Դ հատանիցէ։ Ապա յետ այնորիկ ձգեա զուղիղ գիծսն զԿԶ եւ զԿԴ, որ զՇ բոլորակն յԷ եւ յԸ կէտսն հատանիցեն. արդ ուղիղ գիծքն ԱԷ եւ ԱԸ որ յԱ կիտէ առ Է եւ Ը կէտսն հատանելոյ ձգիցին, են շօշափողք Է եւ Ը կիտից Շ բոլորակին։

Որովհետեւ ԿԱ=ԿԶ, ԿԲ=ԿԷ, եւ անկ. ԶԿԲ=ԷԿԱ, յայտ է եթէ ΔԲԿԶ≅ΔԿԱԷ (Հ. 52.), ուստի եւ անկ. ԿԲԶ=անկ. ԱԷԿ. այլ որովհետեւ անկ. ԿԲԶ=Ո, ուրեմն եւ անկ. ԱԷԿ=Ո, ուստի եւ ԱԷ շօշափող յԷ: Սոյնգունակ մարթի ցուցանել եթէ ԱԸ իցէ շօշափող յԸ:

143. Խնդիր: Գտանել գիծ մի, որ շօշափիցէ զերկուս բոլորակս, ի միոյ կողմանէ գծին, որ զկենդրոնս երկոցունց բոլորակացն յօդիցէ ընդ միմեանս:

Լուծումն: Զգիծն ԱԲ (Ձեւ 85.), որ զկենդրոնս երկոցունց բոլորակացն յօդիցէ ընդ միմեանս, հաւասարակեա ի Գ, եւ ի Գ կիտէ անտի իբրեւ ի կենդրոնէ ԳԱ կամ ԳԲ կէս երկակտրով գրեա բոլորակ մի: Յետ այնորիկ ի ԴԱ կէս երկակտրոյ մեծագոյն բոլորակին առջիր մասն մի ԴԵ, որ հաւասար իցէ փոքրագոյն կէս երկակտրոյն. եւ յԱ կենդրոնէ ԱԵ կէս երկակտրով ձգեա բոլորակ մի, որ զառաջին բոլորակն, զոր գրեցեր, հատանիցէ ի Զ եւ յԷ: Ապա երկայնեա զԱԶ եւ ԱԷ, մինչեւ պատահել նոցա մեծագոյն շրջապատի յԸ եւ Թ. ապա ձգեա ընդ Բ զկէս երկակտուրն ԲԺ || ԱԸ ի նոյն կողմն ԱԲ գծի, յորում կայ ԱԸ. իսկ ի միւս կողմն ԲԻ || ԱԹ: Գիծքն որ ընդ Ը եւ Ժ, եւ ընդ Թ եւ Ի անցանիցեն, են խնդրեալ ուղիղ գիծքն:

Ցուցումն: Որովհետեւ ԱԸ=ԱԴ, եւ ԱԶ=ԱԵ, վասն այսորիկ ԱԸ−ԱԶ=ԱԴ−ԱԵ կամ ԶԸ=ԴԵ=ԲԺ. դարձեալ է եւ ԶԸ || ԲԺ, նմին իրի չորեքանկիւնին ԶԸԺԲ է հաւասար հեռաւոր ձեւ: Անկիւնն ԱԶԲ որպէս շօշափող է ուղիղ, ուստի եւ ԲԶԸ եւս = Ո = 90°: Աստուստի յայտ իմն է, թէ հաւասար հեռաւոր ձեւն ԶԸԺԲ է ուղղանկիւն, վասն որոյ ԶԸԺ=ԲԺԸ=Ո: Ապա ուրեմն ուղիղ գիծն ԸԺ ուղղորդ է ի վերայ ԱԸ եւ ԲԺ կէս երկակտրոց ի ծայրս նոցին. վասն այսորիկ ուղիղ

գիծն ԸԺ շօշափէ զշրջապատս բոլորակացն ի միոյ կողմանէ ԱԲ գծին։ Այս ցուցումն զօրէ եւ վասն Թի ուղիղ գծի, որ ի միւս կողմն ԱԲ գծին շօշափէ։

Ա. Իբրեւ երկայնիցի ԸԺ գիծն շօշափելոյ մինչեւ հատանել ի Մ զերկայնեալ գիծն ԱԲ, ծագէ $\triangle$ԱՄԸ, յորում ԲԺ ‖ ԱԸ։ Նմին իրի ԲԺ : ԱԸ = ԲՄ : ԱՄ, յորմէ ԲԺ : ԱԸ − ԲԺ = ԲՄ : ԱՄ − ԲՄ, կամ, եթէ ԱԲ = ա, ԱԸ = ձ, ԲԺ = ճ, եւ ԲՄ = x դնիցեմք, լինիցի ճ : ձ − ճ = x : ա։ Ապա ուրեմն $x = \frac{աճ}{ձ - ճ}$, զորոյ զհետ գայ ԱՄ = ա + x = $\frac{աձ}{ձ - ճ}$։ Զայս նշանակութիւն գտանիցեմք եւ վասն Թի գծի շօշափելոյ, յորմէ յայտ իսկ լինի թէ երկոքին գիծքն ի հարկէ իսկ հատանեն զմիմեանս ի Մ։

Բ. Տեսանի յայտնապէս, թէ չէ մարթ կազմածիւ 143 համարոյն, հատանել ի կէտ անդր որ առաջի կայ, յորժամ միմեանց հաւասար իցեն երկոքին բոլորակքն։ Բայց սակայն յայս դէպս հնար է, աւելի եւս պարզագոյն օրինակաւ գտանել զգիծս շօշափողս։ Քանզի յորժամ միայն յԱ եւ Բ միջոցն (Ձեւ 86.) կանգնիցեմք զգիծս ԳԴ եւ ԵԶ ուղղորդս յԱԲ, յայնժամ ուղիղ գիծքն ԳԵ եւ ԴԶ իցեն երկոքին գիծքն շօշափողք։ Քանզի ի չորեքանկիւնին ԳԱԲԵ է ԱԳ # ԲԵ, որով եւ ԳԱԲԵ է հաւասար հեռաւոր ձեւ, ուստի եւ ուղղանկիւն, քանզի Ա եւ Բ են ուղիղ անկիւնք։ Ապա ուրեմն ԱԳԵ = ԲԵԳ = Ո, վասն այսորիկ եւ ուղիղ գիծն ԳԵ շօշափէ զերկոսին բոլորակսն։ Նոյն զօրէ եւ վասն ԴԶ գծի։

144. Խնդիր։ Գտանել զգիծ մի, որ զերկուս բոլորակս շօշափիցէ յայլեւայլ կողմանց ուղիղ գծին, որ զկենդրոնսն նոցա յօդիցէ ընդ միմեանս։

Լուծումն։ Զգիծն ԱԲ (Ձեւ 87.) հատարակեա ի Գ, եւ ի Գ միջոցէ անտի ԳԱ կամ ԳԲ կէս

երկակորով ձգեա բոլորակ ինչ: Դարձեալ յԱԴ յերկայնեալ կէս երկակորդ միոյ բոլորակին առջիր մասն ինչ ԴԵ հաւասար միւսոյ կէս երկակորդ, եւ յԱ կենդրոնէ ԱԵ կէս երկակորով ձգեա բոլորակ մի եւս, որ զպատաջագոյն ձգեալ բոլորակն հատանիցէ ի Զ եւ յԷ: Կէս երկակորուցքն ԱԶ եւ ԱԷ ի հարկէ իսկ հատանեն զշրջապատն մեծ յԸ եւ ի Թ: Արդ իբրեւ ձգիցի ընդ Բ՝ ԲԺ || ԱԸ, նոյնպէս եւ ԲԻ || ԱԹ, այլ ընդ հակառակ կողմանն ԱԲ գծին, յայնժամ ԸԺ եւ ԹԻ իցեն խնդրեալ գիծքն շօշափելոյ:

Ցուցումն: Քանզի ԱԶ = ԱԷ, եւ ԱԸ = ԱԴ, վասն այնորիկ ԸԶ = ԴԵ եւ ԸԶ = ԲԺ. դարձեալ է ԸԶ || ԲԺ, վասն որոյ չորեքանկիւնին ԸԺԲԶ է հաւասար հեռաւոր ձեւ: Այս հաւասար հեռաւոր ձեւս անկ. ԸԶԲ որպէս եւ անկիւն ԱԶԲ է ուղիղ, ուստի եւ ԶԸԺ = ԲԺԸ = Ո: Ապա ուրեմն ուղիղ գիծն ԸԺ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԸ եւ ԲԺ կէս երկակորոց ի ծայրսն, ուստի եւ ի կէտսն Ը եւ Ժ շօշափէ զերկոսին շրջապատսն: Նոյն զօրէ եւ վասն ԹԻ գծի:

Ա. Եթէ ուղիղ գիծքն ԱԲ եւ ԸԺ հատանիցեն զմիմեանս ի Մ, հարկ է զի $\Delta ԱՄԸ \backsim \Delta ԲՄԺ$: Յորմէ ծագէ համեմատութիւնս $ԱՄ : ԱԸ = ԲՄ : ԲԺ$. զորոյ զհետ գայ $ԱՄ + ԲՄ : ԱԸ + ԲԺ = ԱՄ : ԱԸ = ԲՄ : ԲԺ$, ուստի $ԱՄ = \frac{ԱԲ \cdot ԱԸ}{ԱԸ + ԲԺ}$, եւ $ԲՄ = \frac{ԱԲ \cdot ԲԺ}{ԱԸ + ԲԺ}$ կամ եթէ պահիցեմք զօրինակն նշանակելոյ որ ի Հ. 143. Ա, լինիցի $ԱՄ = \frac{աճ}{ճ + ծ}$ եւ $ԲՄ = \frac{ածծ}{ճ + ծ}$: Նոյն նշանակութիւն գտանի եւ վասն ԹԻ գծի շօշափելոյ. զորոյ զհետ գայ, թէ ԸԺ եւ

Թ· երկոքին գիծք շօշափողք ի հարկէ իսկ ի Մ վայրի հատանեն զմիմեանս:

Բ. Արդ է դիւրաւ յայտ արարեալ ցուցանել, թէ յայնժամ եւեթ ի կիր արկանի կազմածն 143 համարոյ, յորժամ փոքրագոյն բոլորակն չիցէ ամենեւին ի ներքին կողմն մեծագունին. սոյնպէս եւ եւ կազմածն 144 համարոյ, յորժամ երկոքին բոլորակքն արտաքոյ միմեանց գտանիցին: Նաստին կարես առնուլ ի միտ, թէ հնարաւոր գիծքն շօշափելոյ ցուցանեն եւս, թէ յորպիսի ինչ դիրս առ միմեանց համեմատութեամբ կայցեն երկոքին բոլորակքն: Քանզի եթէ մին ի բոլորակաց անտի կայցէ բովանդակ ի ներքս ի միւս բոլորակն, յայնժամ չունին գիծ շօշափելոյ հասարակաց. իսկ եթէ մին ի ներքուստ շօշափիցէ զմիւսն, յայնժամ մի եւեթ կէտ շօշափելոյ է նոցա հասարակաց. ապա եթէ հատանիցեն զմիմեանս բոլորակքն, յայնժամ ունին երկուս գիծս շօշափողս հասարակաց, յորոց մի մի իւրաքանչիւր կայ՝ յայլեւայլ կողմն ուղիղ գծի որ յօդիցէ ընդ միմեանս զմիջոցս նոցա. եթէ արտաքուստ շօշափիցեն բոլորակքն զմիմեանս, յայնժամ բաց յերկուց, ունին երրորդ եւս՝ ի կէտն յայն շօշափելոյ. իսկ յորժամ երկոքին բոլորակքն ամենեւին արտաքոյ միմեանց գտանիցին ունին չորս գիծս շօշափելոյ, յորոց երկուքն ի նմին կողման, իսկ միւս երկուքն յայլեւայլ կողմանս ուղիղ գծին որ զմիջոցսն յօդիցէ՝ շօշափեն զբոլորակսն:

145. Եթէ կենդրոնական գիծն երկուց բոլորակաց հաւասար իցէ բովանդակութեան երկոցունց կէս երկակտրոց, յայնժամ երկու բոլորակքն շօշափեն արտաքոյ զմիմեանս. ապա եթէ կենդրոնական գիծն հաւասար իցէ այլակերպութեան երկոցունց կէս երկակտրոցն, յայնժամ երկու բոլորակքն շօշափեն ի ներքոյ զմիմեանս:

Ձգեա ի Կ կէտէ ԿԷ (Ձեւ 88.) ուղիղ գծի ԿԱ կէս երկակորով զՈ բոլորակն, եւ ի Է կէտէ ԷԱ կէս երկակորով զՌ բոլորակն, յայտ է եթէ կենդրոնական գիծն իցէ ԿԷ = ԱԿ + ԱԷ, այս ինքն բովանդակութեան երկուց կէս երկակորոց, եւ կէտն Ա հասարակ է երկոցունց բոլորակաց: Արդ եթէ Ո եւ Ռ չշօշափէին զմիմեանս յԱ, յայտ է եթէ հարկ էր նոցա ունել այլ եւս կէտ, զոր օրինակ զԲ հասարակաց: Արդ ձգեա զգիծսն ԲԿ եւ ԲԷ. լինիցի յ△ԲԿԷ (Հ. 65.) ԲԿ + ԲԷ > ԿԷ: Նա եթէ Բ հասարակաց կէտ լինիցի Ո եւս Ռ բոլորակացն, յայնժամ հարկ էր ԲԿ = ԱԿ, եւ ԲԷ = ԱԷ լինել, ուստի եւ ԱԿ + ԱԷ > ԿԷ, որ անպատեհ իմն է: Ապա ուրեմն Ո եւ Ռ բաց յԱ կէտէ չկարեն այլ կէտ ունել հասարակաց ուստի եւ շօշափեն զմիմեանս:

Ցուցանի եւ երկրորդ մասն: Ի Կ եւ Է՛ կէտիցն ԿԱ ուղիղ գծին, ԿԱ եւ Է՛Ա ճառագայթիւք ձգեա զՈ եւ զՌ՛ բոլորակսն, կենդրոնական գիծն ԿԷ՛ = ԿԱ — Է՛Ա լինիցի, այս ինքն այլակերպութեան երկուց ճառագայթիցն, եւ Ա կէտն կայ յերկոսին շրջապատսն: Արդ եթէ Ո եւ Ռ՛ բոլորակքն չշօշափիցեն զմիմեանս յԱ, հարկ է նոցա զայլ իմն կէտ Բ ունել հասարակաց: Եթէ այդպէս իցէ, ձգեա զուղիղ գիծս ԲԿ եւ ԲԷ՛, յայտ է եթէ յ△ԲԿԷ՛ լինիցի ԲԿ — ԲԷ՛ < ԿԷ՛: Արդ եթէ Բ կայցէ յերկոսին եւս բոլորակսն, հարկ է զի իցէ ԲԿ = ԿԱ, եւ ԲԷ՛ = Է՛Ա, ուստի եւ ԿԱ — Է՛Ա < ԿԷ՛ լինել, որ է անպատեհ: Ուրեմն Ո եւ Ռ՛ բոլորակքն ունին զԱ կէտ հասարակաց, ուստի եւ շօշափեն զմիմեանս:

Ա. Արդ եթէ երկու բոլորակք ներքոյ եւ կամ արտաքոյ զմիմեանս շօշափիցեն, կենդրոնք նոցա եւ կէտք շօշափման ի մի եւ ի նոյն ուղղութեան վերայ կան, կամ լաւ եւս ասել կենդրոնական գիծն անցանէ ընդ կէտն շօշափելոյ:

Բ. Եթէ ի վերայ ՄՆ ուղիղ գծին, կէտս Մ, Գ, Կ, Հ,.... որչափ եւ կամք իցեն առնուցումք, եւ ձգիցեմք ի նոցանէ ՄԱ, ԳԱ, ԿԱ, ՀԱ,... կէս երկակտորովք բոլորակս, ամենայն շրջապատքն շօշափեն զմիմեանս ի կէտն Ա, եւ ի նմին կիտի է նոցա եւ շօշափօղ հասարակաց, այս ինքն է ուղղորդ գիծն ՇՂ կանգնեալ յԱ կէտն ի վերայ ՄՆ ուղիղ գծի:

Գ. Աստուստին յայտնապէս տեսանի եթէ որչափ ինչ միանգամ փոքր իցէ կէս երկակտուրն, այնչափ առաւել կորացեալ է բոլորակն, եւ որչափ մեծագոյն ճառագայթն իցէ, այնչափ սակաւ կորանայ եւ բոլորակն:

146. Եթէ ի միջէ Ա կիտէ (Ձեւ 89.), որ կայցէ արտաքոյ բոլորակին ձգիցես բազում գիծս ուղիղս ի բարձրացեալ կողմն շրջապատին, ԱԲ ուղիղ գիծն՝ որոյ երկայնութիւն անցանիցէ ընդ կենդրոն բոլորակին, քան զայլ ուղիղ գիծսն կարճագոյն է. իսկ այլքն այնչափ երկայնագոյն են, որչափ ինչ միանգամ հեռանայցեն յԱԲ ուղիղ գծէ անտի: Իսկ ի մէջ ամենայն հատանողաց, որք յԱ կիտէ անտի առ գոգաւոր կողմն բոլորակին ձգիցին, ԱԴ որ ընդ միջոցն անցանէ մեծագոյն է. իսկ այլքն՝ որչափ ինչ յԱԴ գծէ հեռանայցեն, այնչափ փոքրագոյն են:

Եթէ յԱ կիտէ անտի առ բոլորակն ձգիցեմք զԱՇ եւ զԱՂ շօշափողս, աղեղն ՇԲՂ յԱ կողմն բարձրացեալ է, եւ աղեղն ՂԴՇ գոգաւոր:

Զկէտն Ն եւ Ն՛ յօդեա ընդ Կ միջոց բոլորակին, յայտ է եթէ ԱՆ > ԱԿ — ԿՆ (Հ. 65.) կամ ԱՆ > ԱԿ — ԿԲ, քանզի ԿՆ = ԿԲ, ուրեմն եւ ԱՆ > ԱԲ: Դարձեալ է ԱՆ՛ + ԿՆ՛ > ԱՆ + ԿՆ (Հ. 66.), եւ քանզի ԿՆ = ԿՆ՛, ուրեմն ԱՆ՛ > ԱՆ:

Սոյնգունակ եւ երկրորդ մասն: Չգեա զկէս երկակտուրսն ԿՄ եւ ԿՄ՛, յայտ է եթէ եւ ԱԿ +

ԿՄ > ԱՄ, այս ինքն ԱԿ + ԿԴ > ԱՄ կամ ԱԴ > ԱՄ: Արդ եթէ ընդ միմեանս հարկանիցեմք զերեքանկիւնսն ԱԿՄ, եւ ԱԿՄ′, տեսանիցեմք եթէ ԱԿ = ԱԿ, ԿՄ′ = ԿՄ, եւ անկ. ԱԿՄ′ < անկ. ԱԿՄ իցեն, ուստի եւ ԱՄ′ < ԱՄ (Հ. 69.):

Ա. Զսոյն ձեւ օրինակի կարեմք ցուցանել, զի եթէ Ա′ կէտն ի բոլորակին կայցէ, Ա′Բ հատածն ԲԴ երկակողմոյն իցէ կարճագոյն, եւ Ա′Դ միւս հատածն մեծագոյն քան զամենայն գիծս՝ զոր հնար իցէ յԱ′ կիտէ առ շրջապատն ձգել:

Բ. Ապա ուրեմն ԱՇ շօշափօղն մեծագոյն է ի գծիցն՝ զորս մարթ իցէ յԱ կիտէ յայս նիշ կամ յայն նիշ կէտ ՇԲՇ բարձրացեալ աղեղանն ձգել, եւ փոքրագոյն ի գծից, որք յԱ կիտէ առ գոգաւոր ՇԴՇ աղեղն ձգիցին:

147. Ի հաւասար բոլորակս կենդրոնական անկիւնքն կշռին ընդ միմեանս, որպէս կշռիցեն ընդ միմեանս աղեղունքն սրունից. եւ սորին խոտորնակն:

Իցէ ԱԿ = ԴՄ (Ձեւ 90.), եւ երկոքին անկիւնքն կենդրոնականք ԱԿԲ եւ ԴՄԵ չափելի ինչ կշռութիւն ընդ միմեանս ունիցին, այս ինքն է ընդ անկիւնն ԱԿա, որ իբրեւ մի ութիւն համարեալ իցէ, բաժանիցին հաւասարեաւ: Զոր օրինակ իցէ անկ. ԱԿԲ = 4 անկ. ԱԿա. եւ անկ, ԴՄԵ = 5. անկ. ԱԿա. ինքնին իսկ յայտ է եթէ Աա աղեղնն չորիցս յԱԲ աղեղան, եւ հնգիցս ի ԴԵ աղեղան գտանիցի. կամ թէ աղ. ԱԲ = 4 աղ. Աա, եւ աղ. ԴԵ = 5 աղ. Աա: Արդ որովհետեւ ԱԿԲ : ԴՄԵ = 4 : 5, աղ. ԱԲ : աղ. ԴԵ = 4 : 5, ուրեմն

ԱԿԲ : ԴՄԵ = աղ. ԱԲ : աղ. ԴԵ:

Նոյն սմին հակառակ. եթէ ԱԲ եւ ԴԵ աղեղանց մի հասարակաց կշիռ Աա իցէ, զոր օրինակ եթէ աղ. ԱԲ = 4 աղ. Աա, եւ աղ. ԴԵ = 5 աղ.

Ա˜, եւ կէտքն հատանելոյն ուղիղ գծիւք ընդ Կ եւ Մ ծագացն յօդիցին. յայնժամ եւ անկիւնն ԱԿԲ ի չորս մասունս, եւ անկիւնն ԴՄԵ ի հինգ մասունս հատանիցին, յորոց իւրաքանչիւրն ԱԿ˜ անկեան, որով եւ միմեանց հաւասարք են: Այս ինքն անկ. ԱԿԲ = 4 ԱԿ˜, եւ անկ. ԴՄԵ = 5 ԱԿ˜, ուստի եւ աղ. ԱԲ : աղ. ԴԵ = ԱԿԲ : ԴՄԵ:

Այս մեր կանոնս պատշաճի եւ դիպաց դիպաց, յորս ԱԿԲ եւ ԴՄԵ անկիւնքն անչափական իցեն: Վասնզի եթէ ոք զուղղութիւն ԱԿԲ : ԴՄԵ = ԱԲ : ԴԵ համեմատութեանս ուրանայցէ, յայնժամ հարկ ի վերայ կայ ԱԲ : ԴԵ $\gtrless$ ԱԿԲ : ԴՄԵ լինել: Արդ դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ ԱԿԲ : ԴՄԵ = աղ. ԱԲ : աղ. ԴԶ. աստատին յայտ է եթէ մարթ է զԱԲ աղեղն յայնպիսի փոքր հաւասար մասունս կտորել, որպէս զի եթէ այն ի վերայ ԴԵ աղեղան տարցի ի Դ կիտէ սկիզբն արարեալ, կէտ մի Է՝ ի կիտիցն հատանելոյ ի միջին վայրի Ե եւ Զ վայրաց անկանիցի, որով եւ ԱԲ եւ ԴԷ աղեղունքն չափելի ինչ կշռութիւն ունիցին: Ապա ուրեմն եւ ըստ առաջին դիպացն լինէր ԱԿԲ : ԴՄԷ = աղ. ԱԲ : աղ. ԴԷ. եւ քանզի ըստ մերոյ համարելոյ եւս է ԱԿԲ : ԴՄԵ = աղ. ԱԲ : աղ. ԴԶ, ուրեմն լինէր եւ ԴՄԵ : ԴՄԷ = աղ. աղ. ԴԶ : ԴԷ. եւ որովհետեւ ԴՄԷ > ԴՄԷ է, հարկ էր եւ աղ. ԴԷ > աղ. ԴԶ լինել, որ է անպատեհ: Ապա չէ հնար զի իցէ $\frac{\text{ԱԿԲ}}{\text{ԴՄԵ}} < \frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԴԵ}}$: Ապեթէ ոք հակառակին պաշտպան կալ կամիցի. դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ ԱԿԲ : ԴՄԵ = աղ. ԱԲ : աղ. ԴԶ՛, յայնժամ, եթէ ԱԲ եւ ԴԸ աղեղունքն չափելի իցեն, լինիցի ԱԿԲ : ԴՄԸ = աղ. ԱԲ : աղ. ԴԸ. ուստի եւ ԴՄԵ : ԴՄԸ = աղ. ԴԶ՛ : աղ ԴԸ: Եւ քանզի ԴՄԸ < ԴՄԵ ուրեմն հարկ է եւ ԴԸ < ԴԶ՛ լինել, որ անպատեհն է. զորոյ զհետ գայ, եթէ

չէ հնար $\frac{\text{ԱԿԲ}}{\text{ԴՄԵ}} > \frac{\text{ԱԲ}}{\text{ԴԵ}}$ լինել։ Եւ այդ որովհետեւ չէ մարթ ԱԿԲ : ԴՄԵ կշռութեանս ոչ փոքր եւ ոչ մեծ քան զԱԲ : ԴԵ կշռութիւնս լինել, ուրեմն հարկ է երկոցունց կշռութեանցն միմեանց հաւասարս լինել։ Այսու խորհրդով մարթեմք եւ զճշմարտութիւն սմին խոտորնակ օրինացն ցուցանել։

Ա· Եթէ ԴՄԵ $=$ Ո, ուստի եւ ԴԵ $= 90^{\circ}$ լինիցի, յայնժամ եւ ԱԿԲ : Ո $=$ ԱԲ : 90°, որով եւ $\text{ԱԿԲ} = \frac{\text{Ո}\cdot\text{ԱԲ}}{90^{\circ}}$։ Յորժամ զուղիղ անկիւնն դնիցեմք $= 1^{'''}$, այս ինքն իբրեւ զուղիղ անկիւնն փոխանակ միութեան դնիցեմք ի համեմատել զանկիւնս, եւ զաղեղն 90° կամ զչորրորդն բոլորակի $= 1^{\llcorner}$, այս ինքն յորժամ զչորրորդ մասն բոլորակին միութիւն համարիցիմք ի գտանել զմեծութիւն աղեղանցն, յայնժամ լինիցի $\text{ԱԿԲ} = \frac{1^{'''}\cdot\text{ԱԲ}}{1^{\llcorner}}$, զոր համառօտիւք դրոշմեալ ԱԿԲ $=$ ադ· ԱԲ (Համեմատեա ընդ 46 համարոյ.)։

Արդ աստատին յայտնապէս տեսանեմք եթէ մարթ է զաղեղն ինչ, որ որ զինչ եւ իցէ ճառագայթիւ ի գագաթանէ իրիք անկեան ձգիցի, իբրեւ միութիւն ինչ համարել անկեանց։ Այլ սակայն որովհետեւ զքանիօնութիւն ինչ հնար է համազգի քանիօնութեամբ եւեթ չափել, աստատին անպատեհութիւն իմն թուի մեզ ընդ առաջ ելանել, յորժամ զանկիւն ինչ, ուստի եւ զերեսս աղեղամբ, այսինքն է գծիւ ասիցեմք չափել։ Բայց սակայն բովանդակ իսկ անպատեհութիւնն ի միջոյ ի բաց ջնջիցի, յորժամ զայն ձեւ խորհիցիմք։ „Ամենայն անկիւն այնպէս իմն կշռի առ այլ որ զինչ եւ իցէ անկիւն, որ իբրեւ միութիւն համարեալ իցէ, որպէս կշռի ի մէջ երկուց սրունից անկեանն այնորիկ որ զինչ եւ իցէ կէս երկակարով ձգեալ աղեղն առ այլ աղեղն, որ ձգիցի ի մէջ սրունից անկեանն միութիւն համարելոյ ի գագաթանէ անկեանն"։

148. Եթէ հաւասար հեռաւոր իցեն ի միմեանց երկու լարք, կամ մի լար եւ մի շօշափող, եւ

կամ երկու շօշափողք, յայնժամ աղեղունքն՝ որ կան ի մէջ նոցա հաւասարք են. նոյնպէս եւ խոտորնակի (Ձեւ 91.):

Ա. մասն: Իցէ երկակտուրն ԱԲ || ԴԵ: Չգեալ ԿԳ կէս երկակտուրն ուղղորդ ի վերայ ԴԵ ուղիղ գծի ի կէտն Է, հատանակէ զաղեղն ԴԳԵ: Եւ քանզի ԿԳ եւս ուղղորդ կայ ի վերայ ԱԲ երկակտրոյն, քանզի է ԱԲ || ԴԵ, ուրեմն եւ աղ. ԱԳ = աղ. ԲԳ: Եթէ հանիցեմք աստի զհաւասարութիւնս աղ. ԴԳ = աղ. ԵԳ, լինիցի աղ. ԱԳ — աղ. ԴԳ = աղ. ԲԳ — աղ. ԵԳ, այս ինքն աղ. ԱԴ = աղ. ԲԵ:

Բ. մասն: Սոյնպէս եթէ լարն ԸԺ || ԴԵ եւ ԼԽ || ԴԵ, յայնժամ եւ աղ. ԱԸ = աղ. ԲԺ, եւ աղ. ԱԼ = աղ. ԲԽ, ուստի եւ աղ. ԱԴ — աղ. ԱԸ = աղ. ԲԵ — աղ. ԲԺ, այս ինքն աղ. ԴԸ = աղ. ԺԵ, եւ աղ. ԱԴ + աղ. ԱԼ = աղ ԲԵ + աղ. ԲԽ, այս ինքն աղ. ԴԱԼ = ԵԲԽ: Ապա ուրեմն վերագոյն եդեալ օրէնք պատշաճական են, թէպէտեւ երկոքին լարքն ի մի կողմն, կամ յայլեւայլ կողմանս միջոցին գտանիցին:

Գ. մասն: Համարեսցուք եթէ իցէ ԻԹ շօշափօղ կէտն Գ, եւ ԴԵ || ԻԹ, յայտ է եթէ ԿԳ կէս երկակտուրն որ ձգիցի առ Գ կէտն շօշափման է ուղղորդ ի վերայ շօշափողին եւ ի վերայ ԴԵ գծին, որ հաւասար հեռաւորն է ի նմանէ, եւ աստի իսկ աղ. ԴԳ = աղ. ԵԳ:

Դ. մասն: Համարեսցուք եթէ իցէ ՇՈ շօշափօղ ի Հ, եւ || ԻԹ: Իբրեւ ձգիցի ԼԽ || ՇՈ, լինիցի աղ. ԼՀ = աղ. ԽՀ: Արդ որովհետեւ ԻԹ եւ ԼԽ են հաւասար հեռաւոր ի ՇՈ երրորդ գծէ, ուրեմն եւ ԼԽ || ԻԹ, ուստի եւ աղ. ԼԳ = աղ. ԽԳ, յորմէ աղ. ԼՀ + աղ. ԼԳ = աղ. ԽՀ + աղ. ԽԳ, այսինքն է աղ. ՀԼԳ = աղ. ՀԽԳ: Օսորին զհետ գայ, եթէ ՀԳ երկակտուր իցէ բոլորակին:

Օ խոտորնական կարեն ուսանելիքն յանձնէ իսկ ցուցանել:

149. Ամենայն անկիւն շրջապատի հաւասար է կիսոյ աղեղանն, որ կայ ի միջին վայրի սրունից այնր անկեան:

Ցուցումն: Միջոց բոլորակին կայ կամ ի վերայ միոյ ի սրունից անկեանն, կամ ի միջին վայրի սրունիցն, եւ կամ արտաքոյ քան զսրունս անկեան շրջապատին (Ձեւ 92.):

Ա դէպք: Իբրեւ դէտ ակն կալեալ նայիցիմք ի ԲԱԵ = դ անկիւնն, եւ ձգիցեմք զԲԿ կէս երկակտուրն, տեսանեմք եթէ է անկ. $ճ = դ + տ = 2դ$ (Հ. 75 եւ 53.), ուստի եւ $դ = \frac{ճ}{2}$: Եւ քանզի

$ճ$ = աղ. ԲԵ, ուրեմն $դ = \frac{\text{աղ. ԲԵ}}{2}$:

Բ դէպք: Իսկ եթէ ի քնին առնուցումք զԲԱԴ անկիւնն եւ ձգիցեմք զԱԵ երկակտուրն, եւ զճառագայթսն ԲԿ եւ ԿԴ, լինիցի $դ = \frac{ճ}{2} = \frac{\text{աղ. ԲԵ}}{2}$

եւ $ր = \frac{ն}{2} = \frac{\text{աղ. ԴԵ}}{2}$, ուստի եւ $դ + ր = \frac{ճ}{2} + \frac{ն}{2} = \frac{ճ + ն}{2} = \frac{\text{աղ. ԲԵ} + \text{աղ. ԴԵ}}{2} = \frac{\text{աղ. ԲԴ}}{2}$:

Գ դէպք: Եւ ի կատարած. իբրեւ ընդ ԴԱԳ = ց անկիւնն նայիցիմք եւ ձգիցեմք զԿԳ, եւ զԿԴ կէս երկակտուրսն, տեսանիցեմք եթէ անկ. $ԵԱԳ = ր + ց = \frac{\text{աղ. ԵԳ}}{2}$. եւ քանզի $ր = \frac{\text{աղ. ԵԴ}}{2}$, ուրեմն

$$ԵԱԳ - ր = ց = \frac{\text{աղ. ԵԳ}}{2} - \frac{\text{աղ. ԵԴ}}{2} = \frac{\text{աղ. ԵԳ} - \text{աղ. ԵԴ}}{2} = \frac{\text{աղ. ԴԳ}}{2}:$$

Ուրեմն ամենայն դիպաց պատշաճի օրէնքս:

Յասացելոյս զհետ գայ, եթէ

Ա. Ամենայն անկիւն շրջապատի է կէս այնր կեդրոնական անկեան, որ ընդ նմա ի վերայ նոյն աղեղան գտանիցի, եւ ամենայն անկիւնք շրջապատի, որ ի վերայ նոյն կամ հաւասար աղեղանց գտանիցին միմեանց հաւասարք են:

Բ. Համարեսցուք եթէ ԱԲ երկակտուր իցէ (Ձեւ 93.), յայտ է եթէ անկ. $\text{ԱԴԲ} = \frac{\text{աղ. ԱՄԲ}}{2} = \frac{2\text{Ո}}{2} = \text{Ո}$, այսինքն Անկիւն շրջապատի, որոյ սրունքն ի վերայ կէս բոլորակին կամ ի վերայ ծագաց երկակտրոյն գտանիցին, է մի ուղիղ անկիւն: Ապա ուրեմն եւ ամենայն անկիւնք ի կէս բոլորակի միմեանց հաւասարք են:

Գ. Եթէ աղեղն $\text{ԵԶԳ} > \text{շ}$, այսինքն $> 180^0$ իցէ, յայտ է եթէ անկիւնն $\text{ԵՄԳ} > \frac{\text{շ}}{2}$, այսինքն $> 90^0$, որ է բութ: Իսկ քանզի եւ աղեղնն $\text{ԵՄԳ} < \text{շ}$, ուրեմն եւ անկիւնն $\text{ԵԶԳ} < \frac{\text{շ}}{2}$, որ է սուր: Յորոյ զհետ գայ, եթէ անկիւնն ի փոքրագոյն հատածին բութ է, եւ ի մեծագոյն հատածին՝ սուր:

Դ. Որովհետեւ անկիւնն $\text{Զ} = \frac{\text{աղ. ԵՄԳ}}{2}$, եւ անկ. $\text{Մ} = \frac{\text{աղ. ԵԶԳ}}{2}$, աստուստին ծագէ $\text{Զ} + \text{Մ} = \frac{\text{աղ. ԵՄԳ} + \text{աղ. ԵԶԳ}}{2} = \frac{\text{ԵԳԴԶԱԵ}}{2} = \frac{2\text{շ}}{2} = \text{շ}$. այսինքն Յամենայն չորեքանկեան, որ ի ներքս բոլորակին ձգիցի, յանդիմանակաց անկիւնքն միահամուռ են $= 2\text{Ո} = 180^0$:

Ե. Եթէ ի չորեքկողմեան ձեւ ինչ, երկու յանդիմանակաց անկիւնքն հաւասար իցեն երկուց ուղիղ անկեանց, յայնժամ հարկ է զի շրջապատ բոլորակի իւրք, որ ընդ երիս գագաթունս անկեանցն անցանիցէ, գնասցէ եւ ընդ չորրորդն եւս: Համարեսցուք եթէ (Ձեւ 93.) ժԵԶՄԳ յանդիմանակաց անկիւնքն հաւասար իցեն երկուց ուղիղ անկեանց, եւ շրջապատ բոլորակին անցանիցէ ընդ կէտսն Ե, Զ եւ Մ: Արդ եթէ կէտն Գ չկայցէ ի շրջապատի այսր բոլորակի. դիցուք թէ կայցէ ի Գ″ ի մէջ բոլորակին: Արդ երկայնեա զԶԳ″ մինչեւ ի Գ հատանել զբոլորակն, յայնժամ (ըստ Դ.) ԶԵՄ + ԶԳՄ = 2Ո: Ըստ մերոյ համարելոյ եւս է ԶԵՄ + ԶԳ″Մ = 2Ո, ուրեմն եւ ԶԵՄ + ԶԳՄ = ԶԵՄ + ԶԳ″Մ, յորմէ ԶԳՄ = ԶԳ″Մ կամ Գ″ԳՄ = ԶԳ″Մ որ անհնարին է, քանզի ԶԳ″Մ է արտաքին անկիւն Գ″ՄԳ երեքանկեան, ուստի եւ ԶԳ″Մ > ՄԳԳ″: Դարձեալ դիցուք դրեսցուք, թէ հնար ինչ իցէ, կայցէ կէտն Գ′ արտաքոյ բոլորակին: Արդ առցուք կէտ մի Գ յաղեղանն որ կայ ի մէջ ՄԳ եւ ԶԳ գծից. յայտ է թէ ԶԵՄ + ԶԳՄ = 2Ո. եւ ըստ մերոյ համարելոյ եւս է ԶԵՄ + ԶԳ′Մ = 2Ո, ուրեմն ԶԵՄ + ԶԳՄ = ԶԵՄ + ԶԳ′Մ, կամ ԶԳՄ = ԶԳ′Մ, որ է անհնարին (Հ. 65. Դ.): Ապա ուրեմն Գ չկարէ կալ ոչ ներքոյ եւ ոչ արտաքոյ շրջապատի բոլորակին, այլ կայ ի վերայ նորա:

Ծանուցելոցս զհետ գայ՝ Զամենայն չորեքանկեամբ, յորում երկու յանդիմանակաց անկիւնքն = 2Ո իցեն, մարթ է բոլորակ ինչ ձգել. իսկ զծռանկիւն չորեքանկեամբք չէ հնար բոլորակ ձգել:

Զ. Որովհետեւ անկիւնն ԵԶԻ = ս + ն (Հ. 75.), եւ զի ս = ½ աղ. ԶԴԳ, եւ ն = ½ աղ. ԵԱԶ, ուրեմն անկիւնն ԵԶԻ = ½ (աղ. ԶԴԳ = աղ. ԵԱԶ) = ½ աղ. ԵԱԶԴԳ:

150. Առաջին: Եթէ երկու լարք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 94.) արտաքոյ միջոցի բոլորակին զմիմեանս

հատանիցեն, յայնժամ ի հատանելոյ նոցա կազմեալ անկիւնքն ֆ = ն ունին իւրեանց հաւասար զկէս բովանդակութեան աղեղանց, որ ի մէջ երկուց լարից գտանիցին, այս ինքն է ֆ = ն = ½ (աղ. ԲԴ + աղ. ԱԳ)։ Երկրորդ։ Եթէ ձգիցեմք ի միոջէ Ա կիտէ (Ձեւ 95.), որ կայ արտաքոյ բոլորակին երկուս հատանողս ԱԲ եւ ԱԴ եւ կամ Երրորդ. զմի հատանող ԱԴ եւ զմի շօշափող ԱՃ, յայնժամ անկիւնն՝ որ յԱ կէտն կազմիցի ունի իւր հաւասար զկէս այլակերպութեան աղեղանցն, որ ի միջի երկուց ուղիղ գծիցն այնոցիկ գտանիցին, այս ինքն է ֆ = ½ (աղ. ԲԳԴ — աղ. ԵԶ), եւ դ = ½ (աղ. ԴԻՃ — աղ. ԶՃ)։ Չորրորդ։ Եւ անկիւնն փ՝ որ ի կէտն շօշափման կազմիցի ի ԶՃ լարէ եւ յԱՃ շօշափողէ, ունի իւր հաւասար զկէս ՃԶ հատեալ աղեղան։

Ցուցումն Ա մասին։ Ձգեա զԱԵ || ԳԴ, յայտ է եթէ (Հ. 80.) ն = դ, եւ քանզի դ = ½ աղ. ԲԴԵ (Հ. 149.) = ½ (աղ. ԲԴ + աղ. ԴԵ) = ½ (աղ. ԲԴ + աղ. ԱԳ) (Հ. 149.), ուրեմն եւ ֆ = ն = ½ (աղ. ԲԴ + աղ. ԱԳ)։

Ցուց. Բ մասին։ Իբրեւ ձգիցի ԵԳ || ԱԴ, լինիցի ֆ = ն, եւ քանզի որպէս ի վերոյ ն = ½ աղ. ԲԳ = ½ աղ. (ԲԴ — ԴԳ) = ½ աղ. (ԲԴ — ԵԶ) ուրեմն եւ ֆ = ½ աղ. (ԲԴ — ԵԶ)։

Ցուց. Գ մասին։ Ձգեալ ԶԻ || ԱՃ, լինիցի դ = ց = ½ աղ. ԴԻ = ½ աղ. (ԴՃ — ԻՃ) = ½ աղ. (ԴՃ — ՃԶ)։

Ցուց. Դ մասին։ Իբրեւ ձգիցի ԶԻ || ԱՃ, լինիցի բ = փ = ½ աղ. ԻՃ = ½ աղ. ՃԶ։

Ծանուցելոյս զհետ գայ, եթէ Անկիւնն՝ որ ի միոջէ լարէ, եւ ի միոջէ շօշափողէ կազմիցի, հաւասար է անկեան շրջապատի, որոյ սրունքն անցանիցեն ընդ ծայր աղեղանն, որ ի միջին վայրի լարին եւ շօշափողին կայ. այս ինքն է ի լարէ եւ ի շօշա-

փողէ կազմեալ անկիւնն հաւասար է անկեան ի հակառակ հատածի բոլորակին: Նա եւ դարձեալ սմին հակառակ. Եթէ ի միջէ ԸԶ լարէ եւ ի միջէ ընդ Ը կէտն ձգեալ ԸԱ ուղիղ գծէ յօրինեալ ԱԸԶ անկիւնն հաւասար իցէ անկեան ի հակառակ հատածի բոլորակին, յայնժամ սրունքն ԱԸ շօշափէ զբոլորակն ի Ը: Քանզի եթէ ձգիցեմք ընդ Ը զերկակտուրն ԲԸ, եւ յօդիցեմք զԲ ծայրն ընդ Զ ծայրի ԸԶ լարին, յայնժամ ըստ մերոյ համարելոյ է փ = ԶԲԸ, եւ քանզի եւս յուղղանկիւն ԶԲԸ եռեքանկեանս է անկ. ԲԶԸ + ԲԸԶ = Ո, յորմէ եւ փ + ԲԸԶ = Ո այս ինքն ԱԸԲ = Ո, ուրեմն է ԱԸ ⊥ ՄԸ, այս է ուղղորդ ի վերայ Ը ծայրին, եւ ըստ այսմ ԱԸ շօշափող իցէ ի Ը կէտն եդեալ բոլորակին:

151. Եթէ յուղղանկիւն ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 96.) հասարակիցի ԱԲ ներքնաձիգն ի կէտն Մ, եւ ձգիցի ի Մ կիտէ անտի ՄԱ կէս երկակորով աղեղն, հարկ է աղեղանն ընդ Գ գագաթն ուղիղ անկեան անցանել:

Քանզի եթէ չանցանիցէ շրջապատն ընդ Գ գագաթն, յայտ է, եթէ հարկ է նմա կամ զԲԳ էջն ի Դ կիտի, կամ զերկայնութիւն նորա յԵ հատանել: Արդ եթէ յառաջին դէպս ձգիցեմք զուղիղ գիծն ԱԴ յայնժամ լինէր անկիւնն ԱԴԲ, որպէս ի կէս բոլորակի = Ո, ուստի եւ ԱԴԲ = ԱԳԲ, որ անհնարին է, քանզի ԱԴԲ > ԱԳԲ (Հ. 61.): Իսկ ի միւս դէպս իբրեւ ձգիցի ԱԵ, լինիցի ԱԵԲ = Ո, որպէս անկիւն մի ի կէս բոլորակի, ուստի եւ անկիւնն ԱԵԲ = անկ. ԱԳԲ, որ եւ չկարէ լինել, քանզի անկիւնն ԱԳԲ > ԱԵԳ (Հ. 61.): Արդ որովհետեւ շրջապատն ոչ զէջն եւ ոչ զնորին երկայնութիւն ուրեք հատանել կարէ, ապա ուրեմն հարկ է ընդ Գ հատանել անցանել:

Ա. Սուրեմն եթէ կամք իցեն մեզ ի Գ կէտն ի վերայ ԲԵ ուղղութեան ձգել գիծ ուղղորդ, պարտ եւ պատշաճ է արտաքոյ քան զԲԵ ուղիղ գիծն առնուլ զկէտ ինչ Մ, եւ անտի որպէս ի կենդրոնէ ձգել ԳՄ կէս երկակտրով աղեղն, որ զԲԵ ուղիղ գիծ ի Բ եւ ի Գ կէտսն հատանիցէ. ապա յետ այնորիկ ձգել զԱԲ երկակտուրն եւ յօդել ընդ միմեանս զԱ եւ զԳ, եւ լինիցի ԱԳ ուղղորդ ի վերայ ԲԵ ուղիղ գծին ի կէտն Գ, քանզի ԱԳԲ է անկիւն ի կէս բոլորակի:

Բ. Եթէ կամք իցեն յԱ՛ կիտէ ձգել շօշափօղ առ ԲՋԱ շրջապատն, պարտ եւ պատշաճ է զկէտն Ա՛ ընդ Մ միջոյին կապել, յետ այնորիկ ի վերայ Ա՛Մ երկակտրոյն ձգել բոլորակ ինչ ՄԲԱ՛Ջ, որ զառաջին բոլորակն ի Բ եւ ի Ջ կէտս հատանիցէ: Յետոյ ձգեա զԱ՛Բ, եւ այն իսկ է շօշափօղն ի Բ կէտն բոլորակին. քանզի անկ. ՄԲԱ = Ո է, որպէս անկիւն ի կէս բոլորակի, եւ ՄԲ երկակտուր է ԲԳՋ բոլորակին: Նոյնգունակ եւ ուղիղ գիծն Ա՛Ջ որ յԱ՛ ի Ջ կոյս ձգիցի, շօշափէ զԲՋԱ բոլորակն ի Ջ:

152. Եթէ ի գագաթանց երից անկեանց ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 97.) առ յանդիմանակաց կողմանս ձգիցեմք գիծս ուղղորդս ԱԴ, ԲԵ, ԳՋ, երեք ուղղորդ գիծքն եւս ի մի եւ ի նոյն Մ կէտի զմիմեանս հատանեն:

Ի Բ եւ ի Գ կիտից առ յանդիմանակաց կողմանս ԱԳ եւ ԱԲ ձգեա զԲԵ, եւ զԳՋ ուղղորդ գիծս, սոքա հատանեն զմիմեանս ի մին ի կիտից, զոր օրինակ ի Մ: Յետ այնորիկ ձգեա զԱՄ, զոր իբրեւ երկայնիցեմք, հատանիցէ զԲԳ կողմն ի Դ: Արդ հասարակեա զԲԳ ի Հ, եւ ի Հ կիտէ անտի ձգեա ԲՀ կէս երկակտրով զկէս բոլորակ ինչ, որ անցանիցէ ընդ Ջ եւ Ե կէտսն (Հ. 151.): Դարձեալ հասարակեա եւ զԱՄ ուղիղ գիծն ի Կ, եւ ի Կ կիտէ

առնի ԱԿ կէս երկակտրով ձգեա զբոլորակ ինչ, ան-ցանիցէ շրջապատ բոլորակին (Հ. 151.) ընդ կէտսն Ջ եւ Ն: Նու ի կատարած. ձգեա զլարս ՋՆ, եւ լինիցի

$$\text{ֆ} = \frac{\text{աղ}\cdot\text{ԳՆ}}{2} = \text{ն} = \frac{\text{աղ}\cdot\text{ՄՆ}}{2} = \text{պ} \text{ (Հ. 149.):}$$

Նու արդ որովհետեւ ֆ = պ, եւ անկ. ԲԳՆ = անկ. ԱԳԴ ուրեմն անկ. ԲՆԳ = ԱԴԳ = Ո, ուստի եւ ԱԴ կայ ուղղորդ ի վերայ ԲԳ գծի. ուրեմն հատա-նեն զմիմեանս երեք ուղղորդ գիծքն ԱԴ, ԲՆ եւ ԳՋ ի միում Մ կիտի:

Օսորին պհեա զայ, եթէ Յոր զինչ եւ իցէ Ա կիտէ մարթ է ի վերայ ԲԳ ուղիղ գծի ձգել գիծ ուղղորդ զայս ձեւ օրինակի: Ձգեա երկուս գիծս ուղիղս ԱԲ եւ ԱԳ, ըստ որ զինչ եւ իցէ ուղ-ղութիւն. յետ այնորիկ ի վերայ ԲԳ գծի ձգեա կէս բոլորակ ինչ, որ զուղիղ գիծսն զայնոսիկ ի Ջ եւ յՆ հատանիցէ. ապա դրոշմեա զլարսն ԲՆ եւ ԳՋ որ զմիմեանս ի Մ հատանիցեն. ուղիղ գիծն ԱԴ որ յԱ կիտէ ընդ Մ կէտն հատանելոյ անցանիցէ, է ուղղորդ ի վերայ ԲԳ ուղիղ գծի:

153. Խնդիր: Ի վերայ ԲԳ ուղիղ գծի ծա-նուցելոյ ձգել հատած ինչ բոլորակի, որպէս զի ան-կիւնն շրջապատի, որոյ սրունքն գտանիցին ի կէտն կատարածի ԲԳ գծին, հաւասար իցէ այս նիշ ֆ անկեան (Ձեւ 98.):

Լուծումն: Ի վերայ ԲԳ ուղիղ գծի ի Գ ծայրն յօրինեա անկիւն ինչ ՇԳԲ = ֆ, եւ ի վերայ ՇԳ գծին ի Գ կանգնեա զուղղորդ գիծն ԳՋ, որ զուղ-ղորդ գիծն կանգնեալ ի Դ միջոց ԲԳ լարին հա-տանիցէ ի Մ: Ի Մ կիտէ ՄԲ կէս երկակտրով ձգեա բոլորակ ինչ. յայտ է եթէ անցանիցէ այն ընդ կէտսն Բ եւ Գ. եւ որովհետեւ ՄԳ կայ ուղղորդ ի վերայ ՇԳ ուղղութեան, ուրեմն ԳՇ իցէ շօշափօղ ի կէտն

Գ, ուստի եւ անկիւնն ԲԳՃ = ½ աղ. ԲԳ = ԳԷԲ (Հ. 150.)։ Եւ քանզի ԲԳՃ = մ ըստ կողմանցն, ապա ուրեմն ԲԷԳ = մ։

Յառաջելոցս կարիցես ի միտ առնուլ ճանաչել, զի Եթէ երից Ա, Բ եւ Գ կիտից դիրքն ծանուցեալ իցեն, եւ կամք իցեն այնպիսի ինչ Է կէտ գտանել, որպէս զի ուղիղ գիծքն որ յԷ կիտէ անտի յեդեալ կէտսն ձգիցին յօրինեալ կազմիցեն յԷ՝ անկիւնս մ եւ ն, պարտ է զայս ձեւ օրինակի զիրսն կատարել։ Ձգեա զուղիղ գիծսն ԱԲ եւ ԲԳ, յետ այնորիկ ի վերայ ԱԲ գծի գրեա շուրջանակի հատած ինչ բոլորակի, որ զն ծանուցեալ անկիւնն, եւ ի վերայ ԲԳ ուղղութեան մեւս եւս հատած բոլորակի որ զմեւս մ անկիւնն բովանդակիցէ յինքեան. կէտն հատանելոյ երկոցունց հատածիցն բոլորակին է խնդրեալ կէտն. քանզի է անկ. ԱԷԲ = ն, եւ անկ. ԲԷԳ = մ։

154. Եթէ երկու լարք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 94.) ի բոլորակի զմիմեանս հատանիցեն, հատածք լարիցն խոտորնակս ընդ միմեանս համեմատին։

Ձգեա զլարսն ԳԱ եւ ԲԴ. որովհետեւ մ = ն, եւ Գ = Բ (Հ. 149.), ուրեմն ΔԱԳԶ ∾ ΔԲԶԴ. ուստի եւ ԱԶ : ԳԶ = ԴԶ : ԲԶ։

Զսորին զհետ գայ, զի եթէ ԹԷ երկակտուրն կայցէ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ լարին, հատանիցէ զայն ի Պ, եւ քանզի ԹՊ : ԱՊ = ԲՊ : ՊԷ, ուրեմն փոխանակելով ԹԷ : ԱՊ = ԱՊ : ՊԷ. այսինքն կարգածն ԱՊ միջին երկրաչափական համեմատական է հատածոցն երկակտրոյ. զոր եւ վերագոյն ասացեալ է մեր։

155. Եթէ ոք յԱ կիտէ (Ձեւ 95.), որ արտաքոյ կայցէ բոլորակի, ձգիցէ երկուս ԱԲ եւ ԱԴ հատանօղս, հատածքն ԱԵ եւ ԱԶ, որ արտաքոյ են բոլորակին, խոտորնակս իմն համեմատին ընդ հատանօղսն ընդ այնոսիկ, եւ ամին հակառակ. Եթէ յԱ կիտէ ձգիցեմք երկուս գիծս ԱԲ եւ ԱԴ, եւ բա-

ժանիցեմք զայնոսիկ յԵ եւ ի Զ կէտս, որպէս զի գտանել տեղի համեմատութեանս ԱԲ : ԱԴ = ԱԶ : ԱԵ, յայնժամ չորք կէտքն Բ, Դ, Ե եւ Զ կան ի շրջապատի մի եւ նոյն բոլորակին ։

Ձգեա զԲԶ եւ զԴԵ լարն, որով իցէ անկ․ ԱԲԶ = ԱԴԵ․ եւ զի եւս անկ․ ԲԱԶ = ԴԱԵ, ուրեմն ΔԱԲԶ ∾ ΔԱԴԵ, ուստի ԱԲ : ԱԴ = ԱԶ : ԱԵ ։

Նոյնպէս եթէ ընդ հակառակն ԱԲ : ԱԴ = ԱԶ : ԱԵ, յայնժամ չորք կէտքն Բ, Դ, Ե եւ Զ կան ի շրջապատին ։ Վասնզի զմտաւ ած, եթէ ընդ երիս Բ, Դ եւ Զ կէտսն ձգեալ իցէ բոլորակ ինչ (Հ. 138.)․ արդ եթէ շրջապատ նորին չանցանիցէ ընդ Ե չորրորդ կէտն, հարկ է նմա զԱԲ գիծն ի վերայ այլոյ իրիք Է կիտի հատանել, ուստի եւ լինէր ըստ առաջնոյ մասին ԱԲ : ԱԴ = ԱԶ : ԱԷ, եւ քանզի եւս ըստ մերոյ համարելոյ ԱԲ : ԱԴ = ԱԶ : ԱԵ, ուրեմն հարկ է ԱԷ = ԱԵ, որ է անպատեհ ։ Ապա չէ հնար շրջապատին որ ընդ Բ, Դ եւ Զ կէտսն անցանիցէ, յայլ ինչ կէտ բաց յԵ կիտէ զԱԲ գիծն հատանել, ուրեմն չորք կէտքն այնուքիկ կան ի շրջապատի ։

Ա․ Համարեա եթէ ԱԴ հատանօղն շուրջ զԱ կիտիւ ի Ր կոյս շարժիցի, ինքնին իսկ յայտ է եթէ Դ եւ Ր ցանդ մերձ առ միմեանս ժողովլին, եւ ի կատարած՝ ի Ր ի միմեանց վերայ անկանին․ այս ինքն եթէ ԴԶ մասն ԱԴ հատանողին ի շարժելն փոքրկանայցէ, եւ ի Ր լինիցի = 0 ։ Իսկ որովհետեւ այսու իսկ լինիցի ԱՐ = ԱԴ = ԱԶ, ուստի եւ ԱԲ : ԱՐ = ԱՐ : ԱԵ․ նոյնպէս եթէ ԱԷ շօշափօղ ինչ իցէ, լինիցի ԱԲ : ԷԱ = ԷԱ : ԱԵ․ այս ինքն ԷԱ շօշափօղն միջին երկրաչափական համեմատական է ի մէջ ԱԲ հատանողին, եւ ԱԵ հատածոյն, որ արտաքոյ բոլորակին ։

Օր տասցաքս կարեմք եւ զայս օրինակ ցուցանել ։ Ձգեալ զլարն ԲԷ եւ ԵԷ, լինի անկ․

ԱԷԵ = ԷԲԱ (Հ. 150.), եւ անկ. ԷԱԵ = ԷԱԲ, ուստի եւ ΔԱԷԵ $\backsim$ ΔԱԷԲ. յորմէ ԱԲ : ԱԷ = ԱԷ : ԱԵ:

Բ. Ապա ԱԲ·ԱԵ = ԱԴ·ԱԶ, եւ $\overline{ԷԱ}^2$ = $\overline{ԱՀ}^2$ = ԱԲ·ԱԵ = ԱԴ·ԱԶ. ուրեմն եւ ԷԱ = ԱՀ:

Գ. Եւ սմին հակառակ. Եթէ ոք ի միոջէ Ա կիտէ ձգիցէ երկուս ուղիղ գիծս ԱԲ եւ ԱԷ, եւ զԱԲ այնպէս իմն հատանիցէ յԵ, որպէս զի միւս ԱԷ գիծն միջին երկրաչափական համեմատական լինիցի ողջոյն ԱԲ գծին, եւ ԱԵ հատածի նորին, յայնժամ ԱԷ ուղիղ գիծն շօշափէ զբոլորակն ձգեալ ընդ երիս Բ, Ե եւ Է կէտս: Քանզի եթէ ձգիցեմք զԲԷ եւ զԵԷ ուղիղ գիծս. որովհետեւ ըստ մերոյ համարելոյ է ԱԲ : ԱԷ = ԱԷ : ԱԵ, եւ անկ. ԲԱԷ = ԵԱԷ, լինիցի ΔԱԲԷ = ΔԱԵԷ, ուստի եւ անկ. ԷԲԱ = ԱԷԵ. ապա ուրեմն ԱԷ ուղիղ գիծն շօշափէ զԲԷԶ բոլորակն (Հ. 150.):

Դ. Որովհետեւ (ըստ Բ.) երկոքին շօշափողքն ԱՀ եւ Աշ (Զեւ 89.), որք ի միոջէ Ա կիտէ առնուն բոլորակ ԲշԴ ձգիցին միմեանց հաւասարք են. աստուստին յայտ է, եթէ ԱԴ հատանողն որ յԱ կիտէ անտի ընդ Կ կենդրոնն ձգիցի, ոչ միայն զանկիւնն շԱՀ, որ ի շօշափողաց անտի կազմեալ է՝ յերկուս հաւասար մասունս բաժանիցէ, այլ եւ զաղեղնն շԲՀ, որ կայ ի մէջ երկուց կիտից շօշափման, եւ զնմին կշռեալ շԿՀ անկիւնն. դարձեալ հասարակէ զշՀ լարն, որով երկոքին կէտքն շօշափման ընդ միմեանս կապիցին, եւ կայ ուղղորդ ի վերայ այնր լարի:

Ե. Եւ սմին խոտորնակ եւ մօտաւոր կանոնքս եւս:

ա). Ուղիղ գիծն ԱԴ, որ զանկիւնն շԱՀ կազմեալ յերկուց շօշափողաց հասարակիցէ, իբրեւ երկայնիցի, անցանէ ընդ կենդրոն բոլորակին:

բ)․ Եթէ ընդ միմեանս յօդիցեմք զկէտն շօշափման երկուց շօշափողաց, որ ընդ մի եւ նոյն Ա կէտ անցանիցեն ուղիղ ինչ գծիւ, եւ ի միջոցէ անտի բոլորակին կանգնիցեմք գիծ ուղղորդ ի վերայ այնր շԴ լարին․ եթէ երկայնիցի ուղղորդ գիծն անցանէ ընդ կէտն հատանելոյ երկոցունց շօշափողացն զմիմեանս, եւ հատարակէ զանկիւնն ի նոյանէ յօրինեալ:

Զ․ Միջին երկրաչափական համեմատականն ա եւ բ գծից գտանի եւ մօտաւոր օրինակաւ (Ձեւ 99․)։ Զգեա գիծ ինչ ԱԴ = բ, եւ հատանիջիր ի նմանէ մասն մի ԲԴ = ա, եւ արա բոլորակ ինչ ի վերայ ԱԲ գծի, իբրեւ ի վերայ երկակտրոյ բոլորակի, եւ ի կատարած՝ ձգեա առ բոլորակն ի Դ կիտէ զՄԴ շօշափող (Հ․ 142․), այն է միջին համեմատականն՝ զոր խնդրես, քանզի է $\overline{\text{ՄԴ}}^2 = \text{ԱԴ} \cdot \text{ԲԴ}$:

156․ Եթէ ի միջէ Դ կիտէ (Ձեւ 99․) ձգիցես առ ԱՆԲ բոլորակն զշօշափողն ՄԴ, եւ զուղիղ գիծն ԿԴ, եւ ի Մ կիտէ շօշափման զգիծն ՄՊ ուղղորդ ի վերայ ԿԴ գծին, յայնժամ առաջին՝ կէս երկակտուրն ԲԿ իցէ միջին համեմատական ԿԴ ուղիղ գծին, եւ ԿՊ հատածին․ երկրորդ անգամ ԴՆ եւ ՊՆ բացարձակութիւնքն որ զինչ եւ իցէ Ն կիտի շրջապատին ընդ միմեանս համեմատին որպէս ԲԴ : ԲՊ:

Զգեա զԿՄ կէս երկակտուրն, յայտ է եթէ ΔԿԴՄ ուղղանկիւն է ի Մ (Հ․ 141․), ուստի եւ ԿՊ : ԿՄ = ԿՄ : ԿԴ (Հ․ 103․) եւ որովհետեւ ԿՄ = ԿԲ, ուրեմն ԿՊ : ԿԲ = ԿԲ : ԿԴ:

Սոյնգունակ եւ երկրորդ մասն: Որովհետեւ ԿՆ = ԿԲ, ուրեմն ԿՊ : ԿՆ = ԿՆ : ԿԴ․ եւ քանզի անկ․ ՊԿՆ = ԴԿՆ, ապա ΔԿՊՆ ∾ ΔԿԴՆ, եւ աստի իսկ ՆԴ : ԿՆ = ՊՆ : ԿՊ, կամ ՆԴ : ԲԿ = ՊՆ : ԿՊ․ եւ քանզի ըստ առաջնոյ մասին է ԿԴ : ԲԿ =

ԲԿ : ԿԳ. յորմէ եւ ԿՀ — ԲԿ : ԲԿ = ԲԿ — ԿԳ : ԿԳ, կամ ԲՀ : ԲԿ = ԲԳ : ԿԳ։ Իբրեւ համեմատիցեմք զայս ընդ ՆՀ : ԲԿ = ԳՆ : ԿԳ համեմատութեան, գտանեմք եթէ ՆՀ : ԲՀ = ԳՆ : ԲԳ, եւ փոփոխելով ՆՀ : ԳՆ = ԲՀ : ԲԳ։

Ըստ ասացելոյս զհետ գայ, եթէ անկիւնն ԳՆՀ հաւասարակի ԲՆ ուղիղ գծիւ (Հ. 87.)։

157. Եթէ ի կէս բոլորակի (Զեւ 100.) յԱ կիտի կատարածի ԱԲ երկակորդն ձգիցես լարս բազումս ԱՄ, ԱՆ, ԱԳ, . . ., երկրորդ կարողութիւնք նոցա ընդ միմեանս համեմատին, որպէս կշռիցին ընդ միմեանս հատածք երկակորդն Ամ, Ան, Ագ, . . ., որ կան ի միջին վայրի Ա կիտի սկզբան, եւ ի Մ, Ն, Գ, . . ., կիտից կատարածի ի վերայ երկակորդոյ ձգեալ ուղղորդ գծիցն։

Քանզի (Հ. 108. խնդ. Բ.), է $\overline{\text{ԱՄ}}^2 = \text{ԱԲ} \cdot \text{Ամ}$, $\overline{\text{ԱՆ}}^2 = \text{ԱԲ} \cdot \text{Ան}$, $\overline{\text{ԱԳ}}^2 = \text{ԱԲ} \cdot \text{Ագ}$. եւ այլքն եւս ըստ նմին օրինակի. ուրեմն $\overline{\text{ԱՄ}}^2 : \overline{\text{ԱՆ}}^2 : \overline{\text{ԱԳ}}^2 : \ldots = \text{ԱԲ} \cdot \text{Ամ} : \text{ԱԲ} \cdot \text{Ան} : \text{ԱԲ} \cdot \text{Ագ} : \ldots$ կամ $\overline{\text{ԱՄ}}^2 : \overline{\text{ԱՆ}}^2 : \overline{\text{ԱԳ}}^2 : \ldots = \text{Ամ} : \text{Ան} : \text{Ագ} : \ldots$։

Ըստ սորին զհետ գայ, զի եթէ $\text{Ամ} = \text{մն} = \text{նգ} = \ldots$ առնիցեմք, յայնժամ $\text{Ամ} : \text{Ան} : \text{Ագ} : \ldots = 1\text{Ամ} : 2\text{Ամ} : 3\text{Ամ} : \ldots$ կամ $\text{Ամ} : \text{Ան} : \text{Ագ} : \ldots = 1 : 2 : 3 : \ldots$, ուստի եւ $\overline{\text{ԱՄ}}^2 : \overline{\text{ԱՆ}}^2 : \overline{\text{ԱԳ}}^2 : \ldots = 1 : 2 : 3 : \ldots$։ Յորմէ յայտ է, եթէ

$$\overline{\text{ԱՆ}}^2 = 2 \cdot \overline{\text{ԱՄ}}^2, \text{ ուստի } \text{ԱՆ} = \text{ԱՄ}\sqrt{2}$$
$$\overline{\text{ԱԳ}}^2 = 3 \cdot \overline{\text{ԱՄ}}^2 \quad „ \quad \text{ԱԳ} = \text{ԱՄ}\sqrt{3}$$
$$\overline{\text{ԱՌ}}^2 = 4 \cdot \overline{\text{ԱՄ}}^2 \quad „ \quad \text{ԱՌ} = \text{ԱՄ}\sqrt{4}$$
$$\overline{\text{ԱՍ}}^2 = 5 \cdot \overline{\text{ԱՄ}}^2 \quad „ \quad \text{ԱՍ} = \text{ԱՄ}\sqrt{5}$$

այլովքն հանդ. այլովքն հանդ.

Եւ ի կատարած՝ եթէ զԱՄ իբրեւ միութիւն գծի համարիցիմք, կամ ԱՄ = 1 դնիցեմք, յայնժամ

ԱՆ = √2, ԱՊ = √3, ԱՌ = √4, ԱՍ = √5, եւ այլքն եւս։ Արդ եթէ զերկակուրն ԱԲ ի 1000 մասունս հաւասարս կտորիցեմք, եւ ձգիցեմք զլարսն ԱՄ, ԱՆ, ԱՊ, . . . սովին օրինակաւ երկրորդ արմատքն սովորական թուոց ի 1ոյ մինչեւ ց1000 գծիւք յանդիման կացուցանին։

158. Եթէ աղեղնն ԲԴ = ԴԶ իցէ (Ձեւ 101.), եւ յԱ կիտէ կատարածի ԱԶ երկակորոյն, որ անցանէ ընդ Զ կէտ կատարածի ԴԶ աղեղան, ձգիցին լարքն ԱԴ եւ ԱԲ, լարն ԱԴ է միջին երկրաչափական համեմատական ԱԿ կէս երկակորոյն եւ բովանդակութեան ԱԶ երկակորոյն եւ միւս ԱԲ լարին. կամ $\overline{\text{ԱԴ}}^2$ = ԱԿ (ԱԶ + ԱԲ)։

Ձգեա զլարն ԲԶ եւ զկէս երկակուրն ԿԴ, եւ ԴԷ ∥ ԲԶ, մինչեւ հատանել նմա ի կէտն Է զերկայնութիւն ԱԲ լարին. աստանօր յայտ է եթէ ԿԴ իցէ ուղղորդ ի վերայ ԵԶ եւ ԴԷ գծից (Հ. 141 եւ 80. Ա.) եւ ԲԵ = ԵԶ, եւ լարն ԲԴ = ԴԶ (Հ. 134. Բ.)։ Դարձեալ որովհետեւ անկ. ԱԲԶ = Ո (Հ. 149. Բ.) = ԿԵԶ, ուրեմն ԱԲ ∥ ԿԴ, ուստի եւ ԲԷ = ԴԵ, եւ ԴԷ = ԲԵ (Հ. 82.)։ Արդ իբրեւ ձգիցեմք ԴԻ ⊥ ԱԶ, եւ համեմատիցեմք ընդ միմեանս զերկոսին երեքանկիւնսն ԲԴԷ եւ ԴԻԶ, գտանիցեմք եթէ անկ. Ի = Է = Ո, եւ անկ ԻԶԴ = ԱԶԴ = ½ աղ. ԱԲԴ, եւ անկ. ԷԲԴ = ½ աղ. ԱԲԴ (Հ. 149. Ե.), ուստի եւ անկ. ԻԶԴ = ԷԲԴ, եւ կողմն ԴԶ = ԲԴ, ուրեմն երկոքին երեքանկիւնքն միմեանց պատշաճականք են։ Զսորին զհետ գայ եթէ ԴԻ = ԴԷ, եւ ԲԷ = ԻԶ։ Նաեւ ի կատարած. որովհետեւ ԴԻ = ԴԷ, եւ ԱԴ = ԱԴ, ուրեմն ուղղանկիւն ΔԱԻԴ ≅ ΔԱԴԷ, ուստի ԱԻ = ԱԷ = ԱԲ + ԲԷ = ԱԲ + ԻԶ։ Նաեւ քանզի յուղղանկիւն երեքանկեանս ԱԴԶ է $\overline{\text{ԱԴ}}^2$ = ԱԶ · ԱԻ (Հ. 102. Բ.) = 2ԱԿ · ԱԷ = ԱԿ · 2ԱԷ = ԱԿ (ԱԷ + ԱԷ) = ԱԿ (ԱԲ + ԻԶ + ԱԻ) = ԱԿ (ԱԲ + ԱԶ) կամ

ԱԿ : ԱԴ = ԱԴ : ԱԲ + ԱԶ։

159. Խնդիր: Տուեալ լարս երկուց աղեղանց նոյն բոլորակի, եւ զկէս երկակտուրն, զլար բովանդակութեան երկոցունց աղեղանցն գտանել:

Լուծումն: Դիցուք գրեցուք, եթէ իցէ (Ձեւ 102.) կէս երկակտուրն ԳՄ $= ճ$, եւ լարն ԲԳ $= ա$, ԱԳ $= ե$, եւ լարն բովանդակութեան ԲԳ եւ ԳԱ աղեղանց ԱԲ $= բ$: Ձգեա զԳԹ երկակտուրն եւ զլարն ԱԹ, եւ զԳՊ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ գծին, որով եւ իցէ անկ. ԱԹԳ $=$ ԱԲԳ (Հ. 149. Ա.), եւ անկիւնն ԳԱԹ $=$ ԳՊԲ $=$ Ո. ուրեմն ΔԱԳԹ $\backsim$ ΔԲԳՊ, եւ վասն այսորիկ եւս ԱԳ : ԳԹ $=$ ԳՊ : ԲԳ, այսինքն $ե : 2ճ =$ ԳՊ $: ա$, յորմէ ԳՊ $= \frac{ա \cdot ե}{2ճ}$: Նաւ արդ քանզի յΔԱԳՊ հատածն ԱՊ $= \sqrt{(\overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԳՊ}^2)} = \sqrt{\left(ե^2 - \frac{ա^2ե^2}{4ճ^2}\right)} = \frac{ե}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)}$ եւ յΔԲԳՊ է ԲՊ $= \sqrt{(\overline{ԲԳ}^2 - \overline{ԳՊ}^2)} = \sqrt{\left(ա^2 - \frac{ա^2ե^2}{4ճ^2}\right)} = \frac{ա}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ե^2)}$ ուրեմն ԱՊ $+$ ԲՊ $=$ ԱԲ $=$ $բ = \frac{ե}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + \frac{ա}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ե^2)}$:

Ա. Եթէ իցէ լարն ԲԳ $=$ ԱԳ, կամ $ա = ե$ յայնժամ ԱԲ $= բ = \frac{ա}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + \frac{ա}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} = \frac{ա}{ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)}$, եւ $ա = \sqrt{[2ճ^2 - ճ\sqrt{(4ճ^2 - բ^2)}]} = ճ\sqrt{\left[2 - \sqrt{\left(4 - \frac{բ^2}{ճ^2}\right)}\right]}$: Քանզի զ$բ = \frac{ա}{ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)}$ հաւասարութեան զհետ գայ $բճ = ա\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)}$, յորմէ $բ^2ճ^2 = ա^2(4ճ^2 - ա^2) = -4ա^2ճ^2 + ա^4$, ուստի եւ $ա^2 = 2ճ^2 \pm \sqrt{(4ճ^4 - ճ^2բ^2)}$ (Նշ. համ. Հ. 384.) $= 2ճ^2 \pm ճ\sqrt{(2ճ^2 - բ^2)}$, եւ $ա = \sqrt{[2ճ^2 \pm}$

$ճ\sqrt{(4ճ^2-բ^2)}] = \sqrt{\left(2ճ^2 \pm ճ\sqrt{(4ճ^2 - \frac{ճ^2բ^2}{ճ^2})}\right)} = \sqrt{\left(2ճ^2 - ճ^2\sqrt{(4 - \frac{բ^2}{ճ^2})}\right)} = ճ\sqrt{\left(2 - \sqrt{(4 - \frac{բ^2}{ճ^2})}\right)}$։

Յայս դէպս լինիցի եւ ԱՊ = ԲՊ, ԱԲ ուղղորդ ի ԳԹ, եւ ԳՊ $= \frac{ա^2}{2ճ}$։

Բ. Եթէ ԱԲ անցանիցէ ընդ կենդրոնն կամ լինիցի երկակտուր, յայնժամ ելանէ $բ = 2ճ = \frac{ե}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + \frac{ա}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ե^2)}$, կամ $4ճ^2 = ե\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + ա\sqrt{(4ճ^2 - ե^2)}$. եւ եթէ $ե = ա$ դնիցեմք, ելանէ $4ճ^2 = 2ա\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)}$ կամ $2ճ^2 = ա\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)}$։

Գ. Ապա եթէ կամք իցեն գտանել զԱԳ այլակերպութիւն երկուց ԱԳԲ եւ ԲԳ աղեղանց, որոց լարքն ԱԲ $= բ$, եւ ԲԳ $= ա$ ծանուցեալ իցեն, ելանէ այս ի հաւասարութենէս $բ = \frac{ե}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + \frac{ա}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ե^2)}$, յորժամ խնդրիցեմք ի նմանէ զե։ Քանզի զայնր հաւասարութեան զհետ գայ

$2ճբ = ե\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + ա\sqrt{(4ճ^2 - ե^2)}$, յորմէ

$2ճբ - ե\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} = ա\sqrt{(4ճ^2 - ե^2)}$, եւ

$4ճ^2բ^2 - 4ճբե\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + ե^2(4ճ^2 - ա^2) = ա^2(4ճ^2 - բ^2)$, եւ արդեամբք բազմացուցեալ

$4ճ^2բ^2 - 4ճբե\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + 4ե^2ճ^2 - ա^2ե^2 = 4ա^2ճ^2 - ա^2բ^2$, յորմէ

$4ե^2ճ^2 - 4բեճ\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} = 4ա^2ճ^2 - 4բ^2ճ^2$, ուստի

$ե^2 - \frac{4բեճ\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)}}{4ճ^2} = \frac{4ա^2ճ^2 - 4բ^2ճ^2}{4ճ^2}$, եւ (Նշ. համ. Հ. 384.)

$$\text{դ} = \frac{2\text{բճ}\sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)}}{4\text{ճ}^2} \pm \sqrt{\left[\frac{4\text{բ}^2\text{ճ}^2(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)}{16\text{ճ}^4} + \frac{4\text{ա}^2\text{ճ}^2 - 4\text{բ}^2\text{ճ}^2}{4\text{ճ}^2}\right]}$$

$$= \frac{\text{բ}\sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)}}{2\text{ճ}} \pm \frac{\sqrt{(4\text{բ}^2\text{ճ}^2 - \text{բ}^2\text{ա}^2 + 4\text{ա}^2\text{ճ}^2 - 4\text{ճ}^2\text{բ}^2)}}{2\text{ճ}}$$

$$= \frac{1}{2\text{ճ}}[\text{բ}\sqrt{(2\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)} - \text{ա}\sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{բ}^2}]\text{։}$$

Եթէ և ի սմին այնպէս իմն դնիցեմք թէ ԱԲ լարն ընդ կենդրոնն գնայցէ կամ $\text{բ} = 2\text{ճ}$, յայնժամ

$$\text{դ} = \frac{1}{2\text{ճ}}[2\text{ճ}\sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)} - \text{ա}\sqrt{(4\text{ճ}^2 - 4\text{ճ}^2)}] =$$

$$\frac{1}{2\text{ճ}} \cdot 2\text{ճ}\sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)} = \sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)}$$ որպէս և է իսկ արդեամբք։

160. Խնդիր։ Տուանուցեալ (Ձև 102.) զԱԲ և զԲԹ լարս երկուց աղեղանց, և զՄԴ և զՄԵ բացարձակութիւն նոցին ի Մ միջոցէն, հաշուել զԱԹ լարն այլակերպութեան երկուց աղեղանց, և զնորին բացարձակութիւն ՄՋ ի կենդրոնէ։

Լուծումն։ Գրեսջիր եթէ լարն $\text{ԱԲ} = 2\text{մ}$ իցէ, ուստի և $\text{ԱԴ} = \text{ԲԴ} = \text{մ}$ (Հ. 141.). և լարն $\text{ԲԹ} = 2\text{ն}$, ուստի և $\text{ԲԵ} = \text{ԵԹ} = \text{ն}$, ուղղորդ գիծն $\text{ՄԴ} = \text{պ}$, $\text{ՄԵ} = \text{պ}'$։ Իբրև ձգիցեմք զկէս երկակտուրն $\text{ԹՄ} = \text{ճ}$, յայտ է եթէ յուղղանկիւն $\Delta\text{ՄԹԵ}$ է $\text{ԹՄ} = \sqrt{(\overline{\text{ԹԵ}}^2 + \overline{\text{ՄԵ}}^2)}$ կամ $\text{ճ} = \sqrt{(\text{ն}^2 + \text{պ}'^2)}$, որով ծանուցաւ ճառագայթն։ Յետ այսորիկ ձգեա զՄՋ ուղղորդ ի վերայ ԱԹ գծի, յորմէ լինիցի $\text{ԱՋ} = \text{ԹՋ}$, և երկայնեա զուղղորդ գիծն ՄԵ, որ և զԲԸԹ աղեղն յԸ հատանիցէ։ Արդ որովհետև $\Delta\text{ԱՋԷ} \backsim \Delta\text{ԴՄԷ}$ (Հ. 97.) և $\Delta\text{ԱՋԷ} \backsim \Delta\text{ԹՄԵ}$, քանզի է $\text{Ե} = \text{Ջ} = \text{Ո}$ և $\text{ԲԱԹ} = \frac{1}{2}$ աղ. $\text{ԲԸԹ} =$ աղ. $\text{ԹԸ} =$ անկ. ԹՄԸ. ուրեմն և $\Delta\text{ԱԷՋ} \backsim \Delta\text{ԹՄԵ}$. ուստի

ΔԴՄԷ $\backsim$ ΔԹՄԵ *յորոց ծագեն մնտաւոր համեմատութիւնքս*

1) $\text{ԴԷ} : \text{ԴՄ} = \text{ԹԵ} : \text{ՄԵ}$, *կամ*

$\text{ԴԷ} : \text{պ} = \text{ն} : \text{պ}'$ *ուստի* $\text{ԴԷ} = \frac{\text{պն}}{\text{պ}'}$:

2) $\text{ԴՄ} : \text{ՄԷ} = \text{ՄԵ} : \text{ԹՄ}$, *կամ*

$\text{պ} : \text{ՄԷ} = \text{պ}' : \text{ճ}$, *ուստի* $\text{ՄԷ} = \frac{\text{պճ}}{\text{պ}'}$:

3) $\text{ԱԶ} : \text{ԶԷ} = \text{ՄԵ} : \text{ԹԵ}$, *կամ*

$\frac{1}{2}\text{ԱԹ} : \text{ԶԷ} = \text{պ}' : \text{ն}$, *եւ*

4) $\text{ԱԷ} : \text{ԶԷ} = \text{ԹՄ} : \text{ԹԵ}$, *կամ*

$\text{ԱԷ} : \text{ԶԷ} = \text{ճ} : \text{ն}$:

Արդ *քանզի* $\text{ԴԷ} = \frac{\text{պն}}{\text{պ}'}$ (*ըստ* 1.) *ուրեմն* $\text{ԱԷ} = \text{ԱԴ} - \text{ԴԷ} = \text{մ} - \frac{\text{պն}}{\text{պ}'} = \frac{\text{մպ}' - \text{պն}}{\text{պ}'}$ *զոր իբրեւ հաս-տատիցեմք ի* 4, *ելանէ*

$$\frac{\text{մպ}' - \text{պն}}{\text{պ}'} : \text{ԶԷ} = \text{ճ} : \text{ն}, \text{ կամ } \text{ԶԷ} = \frac{\text{ն}(\text{մպ}' - \text{պն})}{\text{պ}'\text{ճ}}.$$

Որ *եղեալ փոխանակ* ԶԷ *քանիօնութեան յ*3, *գտանիցի* $\frac{1}{2}\text{ԱԹ} : \frac{\text{ն}(\text{մպ}' - \text{պն})}{\text{պ}'\text{ճ}} = \text{պ}' : \text{ն}$, *յորմէ ելանէ*

$$\text{ԱԹ} = \frac{2(\text{մպ}' - \text{պն})}{\text{ճ}} = \frac{2(\text{մպ}' - \text{պն})}{\sqrt{(\text{ն}^2 + \text{պ}'^2)}}:$$

Դարձեալ *է* $\text{ՄԶ} = \text{ՄԷ} + \text{ԷԶ} = \frac{\text{պճ}}{\text{պ}'} + \frac{\text{ն}(\text{մպ}' - \text{պն})}{\text{պ}'\text{ճ}} = \frac{\text{պճ}^2 + \text{մնպ}' - \text{պն}^2}{\text{պ}'\text{ճ}} = \frac{\text{պ}(\text{ճ}^2 - \text{ն}^2) + \text{մնպ}'}{\text{պ}'\text{ճ}} = \frac{\text{պպ}' + \text{մն}}{\sqrt{(\text{ն}^2 + \text{պ}'^2)}}$:

Եթէ ճ = 1 դնիցեմք, լինի ԱԹ = 2 (մպ′ − պն), եւ ՄՁ = պպ′ + ք։

Զատացելոյս պէտ գայ. զի Եթէ Մ կենդրոնն ի ներքոյ ԱԲԹ երեքանկեանն կայցէ, ուստի եւ աղ. ԲԹ + աղ. ԹԱ > շ իցէ, յայնժամ ՄԴ ուրացական եւեթ լինիցի, այսինքն ՄԴ = − պ, որով եւ գտանիցի

$$\text{ԱԹ} = \frac{2\,(\text{մպ}' + \text{պն})}{\sqrt{(\text{ն}^2 + \text{պ}^2)}}, \quad \text{եւ ՄՁ} = \frac{\text{ք} - \text{պպ}'}{\sqrt{(\text{ն}^2 + \text{պ}'^2)}}$$

Իսկ եթէ կենդրոնն ի վերայ ԱԲ լարին անկանիցի, ուստի եւ լինիցի աղ. ԱԹ + աղ. ԲԹ = շ, յայնժամ եւ ՄԴ = 0, ուստի եւ ԲԴ = մ = ճ, եւ

$$\text{ԱԹ} = \frac{2\,\text{ճպ}'}{\text{ճ}} = 2\text{պ}', \quad \text{եւ ՄՁ} = \frac{\text{նճ}}{\text{ճ}} = \text{ն} = \tfrac{1}{2}\,\text{ԲԹ}\,։$$

ԳԼՈՒԽ Ը.

ՑԱՂԱԳՍ ՁԳԵԼՈՑ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆ ՇՈՒՐՋ ԶԲՈԼՈՐԱԿԱՒ ՆԵՐՔՈՑ ԿԱՄ ԱՐՏԱՔՈՑ։

161. Խնդիր։ Ի Մ բոլորակի ի մէջ (Ձեւ 103.) ձգել ներքոյ Δաբգ, որ այլում ԱԲԳ երեքանկեան ծանուցելոյ նման իցէ։

Լուծումն։ Յոր զինչ եւ իցէ ա կէտէ շրջագծին ձգեա շօշափօղ աղ, յետ այնորիկ յա կէտն շօշափելոյ ի վերայ աղ գծին յօրինեսջիր անկիւն մի ժ = Գ, եւ ի վերայ աղ գծին միւս եւս անկիւն ն = Բ. եւ ի կատարած. յօդեա ընդ միմեանս բգ ուղիղ գծիւս զկէտսն բ եւ գ, յորս սրունք անկեանցն զբոլորակն զայն հատանիցեն. աստուստին ելանէ Δաբգ ∾ ԱԲԳ. քանզի անկիւնն գ = ժ (Հ. 150.) = Գ ըստ կազմածոյն, նոյնպէս եւ անկիւնն բ = ն = Բ։

162. Արտաքոյ շուրջ զՇ բոլորակաւ ծանուցելով ձգել Δաբգ, որ նման իցէ ԱԲԳ երեքանկեան (Ձեւ 104.)։

Լուծումն։ Ձգեա որ զինչ եւ իցէ Մդ կէս երկակտուր. ի կէտն Մ ի վերայ Մդ ուղղութեան յօրինեսջիր անկիւն ա = ժ, ր = ն, որք (այսինքն անկիւնքն ժ եւ ն) անդստին յերկայնելոյ ԱԲ գծին ծագեն. յետ այսորիկ ի դ, ե եւ ղ կէտիցն ձգեա շօշափողս, որ հատանիցեն զմիմեանս ի կէտսն ա, բ եւ գ, յորմէ ծագիցէ խնդրեալ Δաբգ։ Քանզի ի չորեքկուսի ձեւս բդՄե անկիւնքն դ եւ ե ուղիղք են, ուստի եւ ր + բ = 2Ո (Հ. 122. Բ.) = ն + Բ, եւ որովհետեւ ր = ն, ուրեմն բ = Բ։ Աստ նմին օրինակի ցուցանի եթէ ա = Ա, յորմէ եւ ինքնին հաստատիցի նմանութիւն երկոցունց երեքանկեանց։

163. Խնդիր։ Ներքոյ զԱԲԳ երեքանկեամբ ծանուցելով, ձգել բոլորակ ինչ (Ձեւ 105.)։

Լուծումն։ Հասարակեա զերկուս յանկեանցն երեքանկեան, զոր օրինակ զԱ եւ զԳ, ԱՄ եւ ԳՄ ուղիղ գծիւք, եւ ի Մ կիտէ հատանելոյ զմիմեանս գծիցն այնուցիկ ձգեա զուղիղ գիծն ՄԴ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ գծին, ուղղորդ գիծն ՄԴ է կէս երկակտրոյն խնդրեալ բոլորակին, եւ Մ կէտն հատանելոյ՝ միջոց բոլորակին։ Քանզի եթէ ձգիցեմք զուղղորդ գիծսն ՄԵ եւ ՄԶ ի վերայ ԱԳ եւ ԲԳ ուղիղ գծից, յայտ է եթէ ΔԱՄԴ ≅ ԱՄԵ, որովհետեւ Դ = Ե = Ո, եւ բ = ա. եւ դարձեալ ΔԳՄԵ ≅ ԳՄԶ, քանզի Ե = Զ = Ո, եւ ա = բ. ուրեմն է ՄԴ = ՄԵ = ՄԶ, այս ինքն Դ, Ե եւ Զ կէտքն հաւասար հեռի են ի Մ կիտէ. զորոյ զհետ գայ, եթէ բոլորակն, որ ՄԴ կէս երկակտրով ձգիցի, ի կէտսն Դ, Ե եւ Զ շօշափէ զկողմանս երեքանկեանն. ապա ձգեալ է ներքոյ շուրջ զերեքանկեամբ։

Ա. Իբրեւ յօդիցեմք զԲ գագաթն ընդ Մ միջոց բոլորակին՝ ԲՄ ուղիղ գծիւ, լինիցի ΔԲԴՄ ≅ ΔԲԶՄ, քանզի շօշափօղն ԲԴ = ԲԶ, ուրեմն երրորդ անկիւնն եւս հասարակիցի ԲՄ գծիւ։

Բ. Ուրեմն եթէ հասարակիցեմք ուղիղ գծիւք զերիս անկիւնս երեքանկեան, ուղիղ գիծքն ի միում կիտի զմիմեանս հատանիցեն։

164. Մարթ է ձգել բոլորակ շուրջ զԱԲԳԴԵԶ կարգաւոր բազմանկեամբ արտաքոյ կամ ներքոյ (Զեւ 106.)։

Որովհետեւ կարգաւոր է բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵԶ, յայտ է եթէ անկիւնն Ա = Բ = Գ = ... է, եւ կողմն ԱԲ = ԲԳ = ԳԴ = ...։ Արդ գրեսջիր եթէ կէտն Մ իցէ միջոց բոլորակին, որ ընդ կէտս Ա, Բ, Գ, ձգիցի (Հ. 138.), եւ ձգեա զկէս երկակտուրսն ԱՄ, ԲՄ։ Ըստ 54 համարոյ է ΔԱՄԲ ≅ ΔԲՄԳ, ուստի եւ անկ. ԱԲՄ = ՄԲԳ = ½ Բ. եւ քանզի ԲՄ = ՄԳ, ուրեմն եւ անկ. ԲԳՄ = անկ. ԳԲՄ = ½ Բ, եւ զի Բ = Գ է որպէս անկիւն բազմ-

անկեան, ուրեմն եւ $\frac{1}{2}$Բ = $\frac{1}{2}$Գ, ուստի անկիւնն ՄԳԲ = $\frac{1}{2}$Գ, կամ թէ կէս երկակտուրն ՄԳ հաւասարակէ զԳ անկիւնն։ Արդ եթէ ձգիցեմք զուղիղ գիծն ՄԴ, յայնժամ վասն ՄԳ = ՄԳ, ԳԲ = ԳԴ, եւ անկ. ՄԳԲ = անկ. ՄԳԴ լինելոյ, եւ ΔԲՄԳ $\cong$ ΔԳՄԴ, ուստի եւ ՄԴ = ՄԲ = ՄԳ. զորս զհետ գայ, եթէ կէտն Դ գտանիցի ի շրջապատի բոլորակին որ ընդ Ա, Բ, Գ կէտս ձգեալ է։ Այնգունակ ցուցանի եթէ եւ գագաթունք այլոց անկեանց բազմանկեան ի շրջապատի բոլորակին կայցեն։ Արդ ուրեմն գոյ հնար շուրջ զբազմանկեամբ բոլորակ ինչ ձգել արտաքոյ։

Այնպէս եւ երկրորդ մասն։ Ի Մ միջոցէ անտի բոլորակին որ շուրջ զբազմանկեամբ, ձգեա առ կողմանս բազմանկեանն գիծս ուղղորդս ՄԷ, ՄԸ, ..., յայտ է եթէ ամենայն ուղղորդ գիծքս միմեանց հաւասարք են, քանզի են բացարձակութիւնք հաւասար ԱԲ, ԱԳ, ԳԴ, ... լարից ի Մ կենդրոնէ անտի բոլորակին շուրջանակի ձգելոյ։ Արդ յորժամ ի Մ կենդրոնէ անտի ՄԷ կէս երկակտորով ձգիցեմք բոլորակ ինչ, անցանիցէ շրջապատն բոլորակին ընդ կէտսն Է, Ը, Թ, ..., եւ քանզի ի կէտս յայսոսիկ ՄԷ, ՄԸ, ՄԹ, ... կէս երկակտուրքն կան ուղղորդ ի վերայ ԱԲ, ԲԳ, ԳԴ, ... կողմանց բազմանկեանն, ուրեմն են նոքա շօշափօղք ԷԸԹԺ բոլորակին, ուստի եւ բոլորակն ձգեալ է ներքոյ շուրջ զբազմանկեամբ։

Ա. Զհաւասարութեան ԱԲ, ԱԳ, ԳԴ, լարիցն զհետ գայ, եթէ անկիւնքն որ ի Մ միջոցին յԱՄ, ԲՄ, ԳՄ, ... ճառագայթիցն կազմիցին, միմեանց հաւասարք են, եւ քանզի թիւ համարոյ նոցա հաւասար է թուոյ կողմանց բազմանկեանն, եւ դարձեալ որովհետեւ բովանդակութիւն կենդրոնական անկեանցն = 4Ո է ուրեմն ի կարգաւոր բազմանկեան մի մի կենդրոնական անկիւն ԱՄԲ = $\frac{4Ո}{ն}$։

Բ. Եթէ Ա, Բ, Գ անկիւնք բազմանկեանն հասարակիցին ԱՄ, ԲՄ, ԳՄ, ... ուղիղ գծիւք, որովհետեւ մի մի անկիւն է $= \frac{2\text{Ն}\cdot\text{Ո} - 4\text{Ո}}{\text{Ն}} = 2\text{Ո} - \frac{4\text{Ո}}{\text{Ն}}$ (Հ. 122. Գ.), յայտ է եթէ ի հաւասա-րասրուն երեքանկիւնսն ԱՄԲ, ԲՄԳ, ... իւրաքան-չիւր անկիւն ի խարիսխն է $= \frac{1}{2}\left(2\text{Ո} - \frac{4\text{Ո}}{\text{Ն}}\right) = \text{Ո} - \frac{2\text{Ո}}{\text{Ն}}$:

Գ. Ապա ուրեմն բոլորակքն որ շուրջ զբազմ-անկեամբ ներքոյ կամ արտաքոյ ձգիցին, կենդրո-նակիցք են:

Որովհետեւ մարթի զբոլորակ ինչ բաժանել ի մա-սունս հաւասարս, որչափ եւ կամք իցեն, ապա հնար է եւ շուրջ զբոլորակաւ բազմանկիւն ինչ կարգաւոր ձգել ներքոյ կամ արտաքոյ: Եթէ յոր չափ կարիցէ հատանել թիւ համարոյ կողմանցն ասասցուք ի մօ-տաւոր համարն:

165. Եթէ զԱ, Բ, Գ, ... անկիւնսն ԱԲԳԴ կարգաւոր ինչ բազմանկեան (Ձեւ 106.) յօդիցեմք ընդ Մ միջոցի ԼԻԸ բոլորակին, որ զնովաւ ներքոյ ձգիցի, ԱՄ, ԲՄ, ԳՄ, . . . ուղիղ գծիւքս, որք զԼԻԸ բոլորակն յա, բ, գ, ... կէտսն հատանեն, եւ ընդ միմեանս յօդիցեմք զմի ըստ միոջէ կարգեալ կէտսն հատանելոյ, աբ, բգ, գդ, ... լարիւք, ծա-գէ մեւս եւս նոր բազմանկիւնն աբգդեզ, որ նման է բազմանկեանն արտաքոյ շուրջանակի ձգելոյ: Այն-գունակ եթէ ուղիղ գծիւքն ընդ միմեանս յօդիցին Ի, Ը, Թ կէտքն շօշափման բազմանկեանն արտա-քոյ շուրջանակի ձգելոյ, ելանէ մեւս եւս նման բազման-կիւն, այս ինքն է աբգդեզ ∼ ԱԲԳԴԵԶ ∼ ԻԸԹԺԻԼ:

Որովհետեւ առ Ի կէտ շօշափման ձգեալ եր-կակտուրն ԻՄ ⊥ ԱԲ է, եւ աղեղն աԻ = Իբ, քանզի

անկ. ԱՄԷ = ԷՄԲ. ասատստին յայտ է եթէ եւ ԷՄ ⊥ աբ, ուստի եւ աբ ∥ ԱԲ, յորմէ Δ աբՄ ∾ Δ ԱԲՄ։ Սոյնպէս օրինակաւ մարթ է հաստատել, եթէ Δ բգՄ ∾ ԲԳՄ, Δ գդՄ ∾ Δ ԳԴՄ, նոյնպէս եւ այլքն իցեն. ուրեմն եւ բազմանկիւնն աբգդեզ ∾ ԱԲԳԴԵԶ (Հ. 127.)։

Դարձեալ որովհետեւ անկիւնն ԼՄԱ = ԱՄԷ = ԷՄԲ = ... ուստի եւ 2ԼՄԱ = 2ԱՄԷ, կամ թէ անկիւնն ԼՄԷ = աՄԲ, եւ ԼՄ = աՄ = ԷՄ = բՄ, ա-տըստին յայտ է եթէ Δ ԼԷՄ ≅ Δ աբՄ. եւ սոյն օրինակաւ Δ ԷՄԸ ≅ Δ բգՄ, Δ ԸՄԹ ≅ գդՄ, այլովքն համդերձ, իցեն. ուստի եւ (Հ. 126.) բազմանկիւնն ԷԸԹԺԻԼ ≅ աբգդեզ. եւ քանզի աբգդեզ ∾ ԱԲԳԴԵԶ, ուրեմն եւ ԷԸԹԺԻԼ ∾ ԱԲԳԴԵԶ։

Նատստին մարթես յանձնէ իսկ իմանալ, եթէ խոտորնակի յաբգդեզ կամ յԷԸԹԺԻԼ բազմանկեանէն որ շուրջանակի ներքոյ ձգեալ իցէ, կարէ ոք զնմին նման արտաքոյ շուրջանակի ձգեալ բազմանկիւնն ԱԲԳԴԵԶ գտանել։

166. Ի կարգաւոր բազմանկիւնս, որոց նոյն թիւ համարոյ իցէ կողմանցն, շրջանակքն համեմատականք են կէս երկակորոց կամ երկակորոց բոլորակաց, որ զնոքօք արտաքոյ կամ ներքոյ ձգիցին։

Զշրջանակն ԱԲԳԴ... բազմանկեանն (Ձեւ. 106.) նշանակեսցուք Ղ նշանագրաւ, եւ զշրջանակն աբգդե... բազմանկեան որ ընդ առաջնոյն հաւասար թուով կողմանս ունիցի, ղ նշանագրաւ. (Հ. 127. Բ եւ Հ. 129.) է Ղ : ղ = ԱԲ : աբ։ Նաւ քանզի անկ. Ա = ա, ուստի եւ ½Ա = ½ա, այս ինքն անկ. ԲԱՄ = բաՄ (Հ. 164. Բ.). եւ վասն այսորիկ եւս անկ. ԱԲՄ = աբՄ. զորին զհետ գայ, եթէ Δ ԱԲՄ ∾ Δ աբՄ, յորմէ ԱԲ : աբ = ԱՄ : աՄ = 2. ԱՄ : 2. աՄ = ՄԷ : Մէ (Հ. 97. Բ.), ուստի եւ փոխանակելով Ղ : ղ = ԱՄ : աՄ = ՄԷ : Մէ, կամ թէ Ղ : ղ = 2ԱՄ : 2աՄ = 2ՄԷ : 2Մէ։

167. Խնդիր։ Ցուցանել զԱԲ կողմն կարգաւոր Նկողմեան բազմանկեան զըոլորակաւ ներքոյ ձգելոյ, կամք են շուրջ զայնու բոլորակաւ ներքոյ ձգել մեւս եւս բազմանկիւն, որ նոյնչափ աւելի եւս կողմանս ունիցի, եւ զկողմն նորին ի ծանուցեալ կողմանէն հաշուել (Տես 107.)։

Լուծումն Ա։ Ձգեա զԳԴ երկատուրն ուղղորդ ի վերայ ԱԲ կողման, եւ լինիցի (Հ. 139.) աղ. ԱԳ = աղ. ԲԳ, ուստի եւ լարն ԱԳ = ԲԳ (Հ. 134. Բ.), որով եւ ԱԳ մի կողմն իցէ 2Նանկեան, եթէ իցէ ԱԲ կողմն կարգաւոր Նանկեան։

Բ. Դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ ԱԲ = $\mathbf{ա}$, կէս երկատուրն ԱՄ = $ճ$, եւ ԱԳ = $ա$։ Յ ԱԳԵ ուղղանկիւն երեքանկեանս է $\overline{ԱԳ}^2 = \overline{ԱԵ}^2 + \overline{ԳԵ}^2$, կամ $ա^2 =$

$\frac{1}{4}\overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԳԵ}^2 = \frac{\mathbf{ա}^2}{4} + \overline{ԳԵ}^2$. եւ դարձեալ որովհետեւ է եւս $\overline{ԱԳ}^2 = ԳԴ \cdot ԳԵ$ (Հ. 108.) կամ

$ա^2 = 2ճ \cdot ԳԵ$. ուրեմն $ԳԵ = \frac{ա^2}{2ճ}$, եւ $\overline{ԳԵ}^2 = \frac{ա^4}{4ճ^2}$,

յորմէ եւ փոխանակելով

$$ա^2 = \frac{\mathbf{ա}^2}{4} + \frac{ա^4}{4ճ^2}, \text{ կամ } ա^4 - 4ճ^2 ա^2 = -\mathbf{ա}^2 ճ^2,$$

յորմէ $ա^2 - 2ճ^2 = \pm\sqrt{(4ճ^4 - \mathbf{ա}^2 ճ^2)} = \pm ճ\sqrt{(4ճ^2 - \mathbf{ա}^2)}$ գտանիցի։ Արդ (որպէս ի հանդերձեալ ճառիցն ուսանիցիմք) քանզի եթէ Ն > 4, յայնժամ լինիցի $ա^2 < 2ճ^2$, ուրեմն $ա^2 - 2ճ^2 = -ճ\sqrt{[4ճ^2 - \mathbf{ա}^2]}$, յորմէ եւ $ա = \sqrt{(2ճ^2 - ճ\sqrt{(4ճ^2 - \mathbf{ա}^2)})}$, կամ

$$ԱԳ = \sqrt{[2ճ^2 - ճ\sqrt{(4ճ^2 - ԱԲ^2)}]} = \sqrt{[2ճ(ճ - \sqrt{(ճ^2 - (\tfrac{1}{2}ԱԲ)^2)})]}\text{։}$$

Ըստ նմին օրինակի, եթէ ՄԶ $\perp$ ԲԳ իցէ, եւ

$$ԳԶ = \sqrt{2ճ[ճ - \sqrt{[ճ^2 - (\tfrac{1}{2}ԲԳ)^2]}]}\text{։}$$

եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ։

Զօրին զհետ գալ, եթէ ծանուցեալ զկողմն կարգաւոր երեքանկեան ներքոյ ձգելոյ ի բոլորակի, մարթ է օգնականութեամբ հաստատակաց օրինակիս գտանել կարգ ըստ կարգէ զկողմն կարգաւոր բազմանկեան (որ շուրջ զբոլորակաւ ներքոյ ձգիցի), որոյ 6, 12, 24, 48, . . . $3 \cdot 2^n$ կողմանք իցեն։ Դարձեալ կարիցեմք ի չորեքկուսւոյ ներքոյ ձգելոյ զկողմն ներքոյ ձգեալ կարգաւոր բազմանկեան, որոյ 8, 16, 32, 64, . . . 2^n կողմանք իցեն՝ գտանել. եւ ի կողմանէ հնգանկեան զկողմն կարգաւոր 10, 20, 40, 80, . . . $5 \cdot 2^n$ անկեան. եւ զայլսն եւս մի ըստ միոջէ սովին օրինակաւ։

168. Կողմն կարգաւոր վեցանկեան, որ զբոլորակաւ ներքոյ ձգիցի, հաւասար է կես երկակորոյ այնր բոլորակի։

Իցէ ԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 108.) կարգաւոր ինչ բազմանկիւն. արդ որովհետեւ լարն ԱԲ = ԲԳ = ԳԴ = . . ., ուրեմն եւ աղ. ԱԲ = աղ. ԲԳ = աղ. ԳԴ = ··· = $\frac{360^0}{6}$ = 60^0։ Իբրեւ ձգիցեմք զճառագայթսն ԱՄ եւ ԲՄ, յայտ է եթէ ԱՄԲ հաւասարասրուն երեքանկեանս անկ. ՄԱԲ = ՄԲԱ. եւ քանզի ՄԲԱ + ՄԱԲ = $180^0 - 60^0 = 120^0$, ուրեմն ՄԱԲ = ՄԲԱ = $\frac{120}{2}$ = 60^0։ Իսկ քանզի ΔԱԲՄ հաւասարանկիւն է, ապա ուրեմն եւ հաւասարակող, ուստի ԱԲ = ԱՄ։

Ա. Մարթի կես երկակորով զբոլորակն ի վեց հաւասար մասունս բաժանել, որով եւ զնովաւ ներքոյ ձգել կարգաւոր ինչ վեցանկիւն։ Ուրեմն շրջանակ վեցանկեան հաւասար է վեցպատիկ կես երկակորոյ, եւ կամ երեքպատիկ երկակորոյ։

Բ. Աղեղն ԱԲԳ = աղ. ԱԲ + աղ. ԲԳ = 2աղ. ԱԲ = $\frac{2}{6}$ մասին = $\frac{1}{3}$ մասին բովանդակ շրջապատին. ուրեմն լարն ԱԳ է կողմն կարգաւոր ԱԳԵ երեքանկեան։

Որովհետեւ ԲՄ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԳ լարին, աստանին յայտ է, եթէ ԱԷ $=$ ԳԷ $= \frac{1}{2}$ ԱԳ, եւ ԲԷ $=$ ԷՄ $= \frac{1}{2}$ ԲՄ (Հ. 57.) յորմէ եւ ԱԷ $= \sqrt{(\overline{\text{ԱԲ}}^2 - \overline{\text{ԲԷ}}^2)}$ իցէ. եւ եթէ զճառագայթն ԱՄ $=$ ԱԲ $=$ ճ դնիցեմք, յայնժամ

$$\text{ԱԷ} = \sqrt{\left[\text{ճ}^2 - \left(\frac{\text{ճ}}{2}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{3\text{ճ}^2}{4}} = \frac{\text{ճ}}{2}\sqrt{3},$$

ուստի եւ կողմն երեքանկեան ԱԳ $= 2$ԱԷ $=$ ճ$\sqrt{3}$։

Իբրեւ ձգիցեմք զՄԹ ուղղորդ ի վերայ ԳԴ գծին, լինիցի լարն ԳԹ կողմն կարգաւոր երկոտասանանկեան (Հ. 167.)։ Նաեւ քանզի $\overline{\text{ԱԹ}}^2 = \text{ԱՄ}\,(\text{ԱԴ} + \text{ԱԳ})$ (Հ. 158.) $= \text{ճ}\,(2\text{ճ} + \text{ճ}\sqrt{3}) = \text{ճ}^2\,(2 + \sqrt{3},)$ որովհետեւ ԱԳ է կողմն կարգաւոր երեքանկեան. եւ յուղղանկիւն ԱԴԹ երեքանկեան՝ է $\overline{\text{ԴԹ}}^2 = \overline{\text{ԳԹ}}^2 = \overline{\text{ԱԴ}}^2 - \overline{\text{ԱԹ}}^2 = 4\text{ճ}^2 - \text{ճ}^2\,(2 + \sqrt{3}) = \text{ճ}^2\,(2 - \sqrt{3})$, ուրեմն

$$\text{ԴԹ} = \text{ԳԹ} = \text{ճ}\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \frac{\text{ճ}\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)\text{։}$$

Վասնզի ի քանիօնութեանս ճ$\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$, ըստ 391 համարոյ Նշան. համարողութեան Ա $= 2$, $\sqrt{\text{Բ}} = \sqrt{3}$, եւ Բ $= 3$, ուրեմն $\text{Ա}^2 - \text{Բ} = \text{Գ}^2 = 4 - 3 = 1$. ուստի ըստ ձեւոյն $\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} -$

$$\sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} - \sqrt{\frac{2}{4}} =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{6} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1),$$

ուստի եւ $\text{ճ}\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \frac{\text{ճ}\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$։

Սովին օրինակաւ համարելով գտանի եւ կողմն կարգաւոր 24անկեան, յորմէ եւ կողմն կարգաւոր 48անկեան, նոյնպէս եւ այլքն մի ըստ միոջէ։ Արդ գտանեմք եթէ է, եղեալ ճ $= 1$,

կողմն	կարգաւոր	24	անկեան	= 0,261052384440
„	„	48	„	= 0,130806258460
„	„	96	„	= 0,065438165643
„	„	192	„	= 0,032723463253
„	„	384	„	= 0,016362279208
„	„	768	„	= 0,008181208052
„	„	1536	„	= 0,004090612582
„	„	3072	„	= 0,002045307361
„	„	6144	„	= 0,001022653814
„	„	12288	„	= 0,000511326941

169. Խնդիր: Ներքոյ շուրջ զբոլորակաւ ձգել կարգաւոր չորեքանկիւն կամ չորեքկուսի (Ձեւ 109.):

Լուծումն: Ձգեա զերկակտուրն ԲԴ ուղղորդ ի վերայ ԱԳ երկակտրոյն, եւ յօդեա ընդ միմեանս ուղիղ գծիւք զկէտս կատարածի երկոցունց երկակտրոյն. ԱԲԳԴ չորեքանկիւնն է չորեքկուսին զոր խնդրես. քանզի չորք կենդրոնական անկիւնքն միմեանց հաւասարք են, իբրեւ ուղիղ անկիւն. ուստի եւ բովանդակ շրջապատն ի չորս հաւասար մասունս բաժանեալ է, որոց եւ լարքն են ԱԲ = ԲԳ = ԳԴ = ԴԱ, եւ անկիւնքն բազմանկեան Ա, Բ, Գ, Դ են անկիւնք ի կէս բոլորակի, ուստի եւ ուղիղք:

Ըստ սորին զհետ գայ, եթէ մի ըստ միոջէ հասարակելով բաժանիցի շրջապատն յ8, 16, 32, 64,... $4 \cdot 2^{ն}$ հաւասար մասունս:

Յուղղանկիւն երեքանկեանս ԱԲՄ է կողմն չորեքանկեան

$$ԱԲ = \sqrt{(\overline{ԱՄ}^2 + \overline{ԲՄ}^2)} = \sqrt{2ճ^2} = ճ\sqrt{2}:$$

Դարձեալ, որովհետեւ է $\overline{ԳԵ}^2 = ԱՄ\,(ԱԳ + ԲԳ) = ճ\,(2ճ + ճ\sqrt{2}) = ճ^2\,(2 + \sqrt{2})$ ըստ 158 համարոյ, եւ յΔԱԳԵ, է $\overline{ԱԵ}^2 = \overline{ԱԳ}^2 - \overline{ԳԵ}^2 = 4ճ^2 - ճ^2\,(2 + \sqrt{2}) = ճ^2\,(2 - \sqrt{2})$. ուրեմն կողմն կարգաւոր ութանկեան է $= ճ\sqrt{[2 - \sqrt{2}]}$:

Զայս զօրութիւն մարթ էր մեզ գտանել, եթէ ի հասարակաց օրինակին $ա = \sqrt{[2ճ^2 - ճ\sqrt{(4ճ^2 - բ^2)}]}$ (Հ. 159. Ա.) եդեալ էաք $բ^2 = \overline{ԱԲ}^2 = 2ճ^2$, եւ $ա = ԱԵ$:

170. Խնդիր: Ներքոյ շուրջ զբոլորակաւ ծանուցելով ձգել կարգաւոր տասնանկիւն:

Լուծումն: Զկէս երկակտուրն ԲՄ (Ձեւ 110.) հատ ի կէտն Ն ըստ արտաքին եւ միջին կշռութեան, եւ զլարն ԱԲ առնիջիր հաւասար ՆՄ մեծի հատուածոյն. անկիւնն $ԱՄԲ = 36^0 = \frac{360^0}{10}$ (Հ. 108. Բ.) ուստի եւ ԱԲ աղեղն է տասներորդ մասն ողջոյն շրջապատին, եւ աստի եւս ԱԲ լարն է կողմն տասնանկեան ներքոյ ձգելոյ:

Ա. Եթէ զԱԲ կողմն տասնանկեան $ԱԲ = ա$ դնիցեմք, եւ զկէս երկակտուրն $ԲՄ = ճ$, յայնժամ, որովհետեւ $ԲՆ : ՆՄ = ՆՄ : ԲՄ$, կամ $ԲՄ - ՆՄ : ՆՄ = ՆՄ : ԲՄ$, եւ փոխանակելով $ԲՄ - ԱԲ : ԱԲ = ԱԲ : ԲՄ$, կամ $ճ - ա : ա = ա : ճ$, ուստի եւ $ա^2 = ճ^2 - աճ$, կամ $ա^2 + աճ = ճ^2$, յորմէ $ա = \frac{1}{2} ճ (-1 + \sqrt{5})$ լինիցի:

Բ. Եթէ զաղեղն $ԱԺ = աղ. ԱԲ$ գործիցեմք, եւ ձգիցեմք զլարն ԲԺ, յայտ է եթէ լինիցի լարն այն կողմն կարգաւոր հնգանկեան ձգելոյ ի բոլորակին: Եթէ դիցի ի հասարակաց օրինակիս $բ = \frac{ա}{ճ} \sqrt{[4ճ^2 - ա^2]}$ (Հ. 159. Ա.), $ա = ԱԲ = \frac{ճ}{2} \surd (-1 + \sqrt{5})$, գտանիցի $ԲԺ = \frac{ԱԲ}{ճ} \sqrt{(4ճ^2 - \overline{ԱԲ}^2)} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{5}) \sqrt{4ճ^2 - \left[\frac{ճ}{2} (-1 + \sqrt{5})\right]^2} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{5}) \sqrt{\left[4ճ^2 - \frac{ճ^2}{4} (6 - 2\sqrt{5})\right]} = \frac{ճ}{4} (-1$

$+\sqrt{5})\sqrt{(10+2\sqrt{5})} = \frac{\text{ճ}}{4}\sqrt{[4(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})]}$
$= \frac{\text{ճ}}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$ ։

Գ. Զսորին զհետ գայ եթէ $\overline{\text{ԲԺ}}^2 = \frac{\text{ճ}^2}{4}(10-2\sqrt{5}) = \frac{\text{ճ}^2}{2}(5-\sqrt{5}) = \text{ճ}^2 + \frac{\text{ճ}^2}{2}(3-\sqrt{5}) = \text{ճ}^2 + \left[\frac{\text{ճ}}{2}(-1+\sqrt{5})\right]^2 = \overline{\text{ԱՄ}}^2 + \overline{\text{ԱԲ}}^2$, այս ինքն է. Երկրորդ կարողութիւն կողման հնգանկեան հաւասար է երկրորդ կարողութեանց կողման տասնանկեան եւ կէս երկակտրոյն միանգամայն։

Զայս ճշմարտութիւն կարեմք եւ մօտաւոր օրինակաւս յայտ յանդիման կացուցանել։ Դիցուք գրեսցուք եթէ ԲԺ իցէ կողմն հնգանկեան, ԱԲ = ԱԺ կողմն տասնանկեան, եւ կէս երկակտուրն ՄԳ կայցէ ուղղորդ ի վերայ ԱԺ ուղղութեան, յորմէ եւ ԱԺ հատարակիցի։ Արդ իբրեւ ձգիցի ԱԽ, լինիցի ԱԽ = ԺԽ (Հ. 64. Գ.), ուստի եւ ի հաւասարասրուն ԱԽԺ երեքանկեան անկիւնն տ = խ. եւ քանզի ΔԲԺԱ հաւասարասրուն եւս է, ուրեմն տ = ն, ուստի եւ խ = ն. ապա ΔԱԽԺ ∾ ΔԱԲԺ (Հ. 96. Ա.)։ Զորոյ զհետ գայ համեմատութիւնս ԺԽ : ԱԺ = ԱԺ : ԲԺ, յորմէ ԲԺ · ԺԽ = $\overline{\text{ԱԺ}}^2$։ Դարձեալ որովհետեւ անկիւնն ԲՄԺ = $\frac{1}{5}\cdot 360^0 = \frac{4}{5}$ Ո, ուրեմն ա = բ = $\frac{3}{5}$ Ո (Հ. 76.), եւ անկ. ԱՄԲ = ԱՄԺ = $\frac{2}{5}$ Ո, եւ անկիւնն ԱՄԲ + ԱՄԳ = ԲՄԽ = $\frac{2}{5}$ Ո + $\frac{1}{5}$ Ո, յորմէ եւ ԲՄԽ = բ = ա, եւ գ = $\frac{4}{5}$ Ո = ԲՄԺ։ Արդ որովհետեւ ԲՄԽ եւ ԲՄԺ երեքանկեանցն ամենայն անկիւնքն հաւասարք են, ապա միմեանց նմանք են, յորմէ ծագէ համեմատութիւնս ԲԽ : ԲՄ = ԲՄ : ԲԺ, կամ ԲԽ · ԲԺ = $\overline{\text{ԲՄ}}^2$։ Իբրեւ յաւելուցումք ի հաւասարութիւնս զվերինն ԲԺ · ԺԽ =

$\overline{\text{ԱԺ}}^2$ ելանիցէ ԲԺ (ԲԽ + ԺԽ) = $\overline{\text{ԲԺ}}^2 = \overline{\text{ԲՄ}}^2 + \overline{\text{ԱԺ}}^2 = \overline{\text{ԲՄ}}^2 + \overline{\text{ԱԲ}}^2$:

Դ. Իբրեւ ձգիցի կէս երկակտուրն ԱԿ (Ձեւ 111.) ուղղորդ ի վերայ ՀՆ երկակտորոյն, եւ ձգիցի ի Մ կիտէ, յորում հատանիցի ԿՆ ճառագայթն, ՄԱ կէս երկակտորով աղեղն ԱԲ, յայնժամ կէս երկակտուրն ԿՀ հատանիցի ի Բ ըստ արտաքին եւ միջին կշռութեան: Վասնզի իբրեւ ի վերայ ԿՆ ուղղութեան իբրեւ ի վերայ երկակտորոյ ձգիցեմք բոլորակ ինչ, յայտ է եթէ (որովհետեւ ԱԿ է շօշափող) $\overline{\text{ԱԿ}}^2$ = ԱԴ · ԱԵ (Հ. 155. Ա.) = (ԱԵ + ԵԴ) ԱԵ = (ԲԿ + ԿՆ) ԲԿ, կամ $\overline{\text{ԿՀ}}^2$ = (ԲԿ + ԿՀ) ԲԿ = $\overline{\text{ԲԿ}}^2$ + ԲԿ · ԿՀ, ուստի եւ ԲԿ կողմն տասնանկեան՝ որ ներքոյ զբոլորակաւ ձգիցի: Իսկ քանզի յուղղանկիւն երեքանկեանս ԱԲԿ է $\overline{\text{ԱԲ}}^2 = \overline{\text{ԱԿ}}^2 + \overline{\text{ԲԿ}}^2$.) զարին զհետ գայ, եթէ ԱԲ իցէ կողմն հնգանկեան այնր բոլորակի (ըստ Գ.):

Ե. Ներքոյ շուրջ զբոլորակաւ մարթի ձգել հնգանկիւն զայս օրինակ: Զառաջինն յօրինեա երեքանկիւն մի հաւասարասրուն աբգ (Ձեւ 112.), յորում իցէ ա = բ = 2գ (Հ. 108. Ա.), եւ յետ այնորիկ ներքոյ շուրջ զայնու բոլորակաւ դրոշմեա ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ (Հ. 161.): Հատանեա զանկիւնսն՝ որ ի խարսխին, որով լինիցի ղ = ճ = ն = ր = փ, ուստի եւ աղ. ԱԲ = աղ. ԲԴ = աղ. ԴԳ = աղ. ԳԵ = աղ. ԵԱ. զորոյ զհետ գայ եթէ լարքն որ աղեղանցս պատշաճիցեն յօրինեալ կազմեն զհընգանկիւնն:

Զ. Եթէ ԱԲ (Ձեւ 108.) իցէ կողմն կարգաւոր վեցանկեան եւ ԲԺ կողմն կարգաւոր տասնանկեան, յայտ է եթէ աղ. ԱԺ = աղ. ԱԺԲ — աղ. ԲԺ = $(\frac{1}{6} - \frac{1}{10})$ 2շ = $\frac{1}{15}$ · 2շ, այս ինքն է ԱԺ աղեղն է հնգետասաներորդ մասն շրջապատին, ուստի եւ ԱԺ լարն է կողմն կարգաւոր հնգետասանանկեան:

171. Խնդիր: Ծանուցեալ են $\text{աՄ} = \text{ճ}$ կէս երկակուրն բոլորակի, եւ $\text{աԷ} = \text{ա}$ կողմն կարգաւոր բազմանկեան ներքոյ ձգելոյ. արդ կամք են զկողմն նման բազմանկեանն հաշուել, որ շուրջ զայնու բոլորակաւ արտաքոյ ձգիցի (Ձեւ 113.):

Լուծումն: Ձգեա զԱՄ կէս երկակուրն, եւ զՄԳ ուղղորդ ի վերայ աԷ լարին եւ զԱԲ ուղղորդ ի վերայ ԳՄ կէս երկակուրոյն, արդ ԱԲ շօշափողն է կողմն խնդրեալ բազմանկեան (Հ. 165.): Որովհետեւ $\Delta\text{աՄԷ} \backsim \Delta\text{ԱՄԲ}$. զորոյն զհետ գայ եթէ $\text{աԷ} : \text{ԱԲ} = \text{ԷՄ} : \text{ԳՄ}$, կամ որովհետեւ $\text{աԷ} = \text{ա}$, եւ $\text{ԷՄ} = \sqrt{(\overline{\text{աՄ}}^2 - \overline{\text{աէ}}^2)} = \sqrt{(\text{ճ}^2 - \frac{1}{4}\text{ա}^2)}$ է, ուրեմն

$$\text{ա} : \sqrt{\left(\text{ճ}^2 - \frac{\text{ա}^2}{4}\right)} = \text{ԱԲ} : \text{ճ},$$ յորմէ

$$\text{ԱԲ} = \frac{\text{աճ}}{\sqrt{\left(\text{ճ}^2 - \frac{\text{ա}^2}{4}\right)}} = \frac{2\text{ճ}\,.\,\text{ա}}{\sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)}}$$ գտանիցի:

Օրինակք:

Ա. Քանզի կողմն երեքանկեան ներքոյ ձգելոյ է $\text{ճ}\sqrt{3} = \text{ա}$ (Հ. 168. Բ.), լինիցի կողմն երեքանկեան շուրջ զբոլորակաւ արտաքոյ ձգելոյ,

$$\text{ք} = \frac{2\,.\,\text{ճ}\sqrt{3}\,.\,\text{ճ}}{\sqrt{(4\text{ճ}^2 - 3\text{ճ}^2)}} = 2\text{ճ}\sqrt{3}:$$

Բ. Կողմն չորեքանկեան ներքոյ ձգելոյ է $= \text{ճ}\sqrt{2}$ (Հ. 169.), ուրեմն կողմն չորեքկուսւոյն որ արտաքոյ զբոլորակաւ ձգիցի, իցէ

$$\text{ք} = \frac{2\,.\,\text{ճ}\sqrt{2}\,.\,\text{ճ}}{\sqrt{(4\text{ճ}^2 - 2\text{ճ}^2)}} = 2\text{ճ} = \text{երկակուրոյն}:$$

Գ. Որովհետեւ կողմն վեցանկեան ներքոյ ձգելոյ $\text{ա} = \text{ճ}$, կողմն վեցանկեան շուրջ զբոլորակաւ արտաքոյ ձգելոյ, լինիցի

$$+ = \frac{2ճ^2}{\sqrt{(4ճ^2 - ճ^2)}} = \frac{2ճ}{\sqrt{3}} = \frac{2ճ\sqrt{3}}{3}:$$

Զօրութիւնս, զոր վերագոյն (Հ. 168. Բ.) գտաք, հաստատեալ ի համարակաց օրինակին, գտանի, համարեալ $ճ = 1$,

կողմն	12	անկ.	զբոլորակաւ	արտաքոյ	= 0,5358984
"	24	"	"	"	= 0,2633099
"	48	"	"	"	= 0,13108692
"	96	"	"	"	= 0,0654732
"	192	"	"	"	= 0,0327278
"	384	"	"	"	= 0,0163628
"	768	"	"	"	= 0.0081813
"	1536	"	"	"	= 0,0040906
"	3072	"	"	"	= 0,0020453
"	6144	"	"	"	= 0,0010227
"	12288	"	"	"	= 0,0005113

Ա. Եթէ զշրջանակ նանկեան զբոլորակաւ արտաքոյ ձգելոյ որոյ կէս կողմն է ԱԳ, նշանակիցեմք $Ծ_ն$ չափով, եւ զնմին նման նանկեան որ կայ ներքոյ ի բոլորակին, որոյ կէս կողմն է աֆ, $ծ_ն$ քանիօնութեամբ, յայտ է եթէ $Ծ_ն : ծ_ն = ԳՄ : ֆՄ$ (Հ. 166.). ուստի եւ $Ծ_ն - ծ_ն : ծ_ն = ԳՄ - ֆՄ : ֆՄ = ճ - + : +$, եթէ $ֆՄ = \sqrt{\left(ճ^2 - \frac{ա^2}{4}\right)} = +$ դնիցեմք. յորմէ եւ

$$Ծ_ն - ծ_ն = \frac{ծ_ն(ճ - +)}{+} = \left(\frac{ճ}{+} - 1\right) \cdot ծ_ն \cdot$$

Արդ որչափ ինչ մեծագոյն իցէ ն թիւ համարոյ կողմանցն, այնչափ եւ մեծագոյն լինիցի +, քանզի աֆ կողմն առաւել փոքր լինիցի. կամ լաւագոյն եւս ասել, որչափ առաւել մերձենայցէ +՝ ճ

զօրութեան, այնչափ առաւել մերձ լիցի միութեան կոտորս $\frac{ծ}{+}$, ուստի եւ ըստ անհնարին աճելոյ ն թուոյ համարոց կողմանցն, լինիցի $\left(\frac{ծ}{+} - 1\right)$ կարի իմն մերձաւոր դատարկի, որով եւ զ$Ծ_{ն} - ծ_{ն}$ այլակերպութիւնն, այս ինքն եթէ ն անհնարին մեծ դիցի, մարթ իցէ առանց ինչ մեծամեծս սխալելոյ $Ծ_{ն} - ծ_{ն} = 0$, ուստի եւ $Ծ_{ն} = ծ_{ն}$ համարել: Զայս ճշմարտութիւն մարթեմք եւ զայս օրինակ ցուցանել:

Եթէ զԳա, եւ Գբ լարն ձգիցեմք, լինիցի Գա կողմն 2ն անկեան ի բոլորակին շուրջանակի ձգելոյ, զորոյ զշրջանակն դիցուք $= ծ_{2ն}$, եւ իբրեւ ձգիցեմք զուղիղ գիծն ԳՄ ⊥ Գա, եւ ԳՄ ⊥ Գբ, լինիցի (Հ. 165.) ԿՀ կողմն 2ն անկեան շուրջ զբոլորակաւ արտաքոյ ձգելոյ զորոյ զշրջանակն դիցուք $= Ծ_{2ն}$: Արդ որովհետեւ Գա > ադ, ուրեմն եւ 2ն . Գա > 2ն . ադ = ն . 2ադ, կամ 2ն . Գա > ն . աբ, այս ինքն $ծ_{2ն} > ծ_{ն}$, յորմէ տեսանիցես, եթէ շրջանակն կարգաւոր բազմանկեան այնչափ առաւել մեծ իցէ, որչափ ն մեծագոյն լինիցի: Նաեւ դարձեալ որովհետեւ ԿՄ ուղղորդ գիծն, զանկիւնն աՄդ հատանէ, եւ կամ քանզի ա = բ, վասն այսորիկ յԱԳՄ երեքանկենէ ծագէ (Հ. 87.) համեմատութիւնս ԱՄ : ԳՄ = ԱԿ : ԿԳ. իսկ արդ յԱԳՄ ուղղանկիւն երեքանկեան է ԱՄ > ԳՄ, ապա եւս ծագէ ԱԿ > ԿԳ. եւ քանզի ԿԳ = ԳՀ. ուրեմն

ԱԿ + ԿԳ > ԿԳ + ԳՀ

ԱԳ > ԿՀ

2ն . ԱԳ > 2ն . ԿՀ

ն . ԱԲ > 2ն . ԿՀ, այս ինքն

$Ծ_{ն} > Ծ_{2ն}$ կամ $Ծ_{2ն} < Ծ_{ն}$

Որչափ ինչ մեծագոյն առնուցու ն, այնչափ փոքրագոյն լինիցի շրջանակն բազմանկեան որ զբո-

լորակաւ ձգիցի արտաքոյ։ Արդ որովհետեւ ըստ անհնարին աճել ն թուոյ անկեանցն անհնարինս նուազէ $Ծ_ն$, յորում ժամանակի եւ անհնարինս աճէ $Ճ_ն$, աստատին յայտ է եթէ հարկ ի վերայ կայ եւ $Ծ_ն$ — $Ճ_ն$ այլակերպութեանն կարի իմն նուազել, կամ թէ ի սաստիկ եւ անհնարին աճել ն քանիօնութեանն մարթ է զայլակերպութիւնն $Ծ_ն$ — $Ճ_ն$ = 0 համարել առանց ինչ մեծամեծս սխալելոյ։

Բ. Ապաքէն տեսանես, եթէ (Հ. 65. Դ.) է ԱԲ + ԲԳ + ԳԴ > ԷՔԸՔԹԴ (Ձեւ 106.) եւ դարձեալ ԴԵ + ԵԶ + ԶԱ > ԴԺԷԻՂԼ, ուստի եւ յաւելով ԱԲ + ԲԳ + ԳԴ + ԴԵ + ԵԶ + ԶԱ > քան զբոլորակն ԷՔՔ. եւ քանզի սմին հակառակ լարն Ք < աղ. Ք, ուստի եւ ն. լարն Ք < ն. աղ. Ք, այս ինքն է $Ճ_ն$ < քան զշրջապատն ՔՔ, զորոյ զհետ գայ, եթէ շրջանակ բազմանկեան որ զբոլորակաւ արտաքոյ ձգեալ իցէ, ցանգ մեծագոյն է քան զշրջապատ բոլորակին ներքոյ ձգելոյ. իսկ շրջանակ բազմանկեան, որ ներքոյ ձգիցի զբոլորակաւ փոքրագոյն է քան զշրջապատ նորին բոլորակի։ Արդ որովհետեւ $Ծ_ն$ — $Ճ_ն$ այնչափ ինչ փոքր իցէ, որչափ մեծագոյն լինիցի ն թիւ համարոյ կողմանց բազմանկեանն, եւ շրջապատ բոլորակին, զոր Շ քանիօնութեամբ նշանակեսցուք, կայ ի միջին վայրի $Ծ_ն$ եւ $Ճ_ն$ շրջանակացն. աստատին յայտ է եթէ եւ $Ծ_ն$ — Շ եւ Շ — $Ճ_ն$ < $Ծ_ն$ — $Ճ_ն$ իցեն, եւ թէ կարեն $Ծ_ն$ — Շ եւ Շ — $Ճ_ն$ այլակերպութիւնքն առաւել փոքրագոյն լինել քան զամենայն քանիօնութիւնս, զոր հնար իցէ մարդոյ ածել զմտաւ, եթէ զթիւ համարոյ կողմանցն անհնարին մեծ դնիցեմք։

Ցայսր հիման վերայ հիմնեալ է եւ օրինակ հաշուելոյ՝ որով հինքն յերկրաչափից մերձաւորութեան օրինակաւ գտին զկշռութիւն շրջապատի բոլորակին առ իւր երկակտուրն։ Այս ինքն եթէ ըստ կարգին զոր վերագոյն յիշատակեցաք հաշուիցեմք զշրջանակս երկուց նման եւ կարգաւոր բազմանկեանց, յորոց մին

շուրջ զբոլորակաւ արտաքոյ, եւ միւսն ներքոյ ձգիցի, գտանիցեմք եթէ շրջանակքն այնոքիկ մինչեւ ցվեց առաջին տասներորդականս միմեանց հաւասարք են, եդեալ զթիւ համարոյ կողմանցն ն = 12288: Արդ որովհետեւ շրջապատ բոլորակին ի միջին վայրի շրջանակացն այնոցիկ կայ, ուրեմն մարթ է առանց ինչ մեծամեծս սխալելոյ զշրջապատ բոլորակին հաւասար միոյ կամ միւսոյ ի շրջանակացն դնել: Որոշելն զերկայնութիւն շրջապատի բոլորակին մասամբ իւրոյ կէս երկակտրոյն անուանեալ կոչի Ուղիղ առնել զշրջապատն:

171. Շրջապատք երկուց բոլորակաց կշռին ընդ միմեանս, որպէս ճառագայթք նոցա կամ երկակտուրք ընդ միմեանս համեմատիցին:

Արդ ածցուք զմտաւ, եթէ երկու շրջապատք իցեն Շ եւ շ, որ ձգեալ իցեն Ճ եւ ճ ճառագայթիւք, եւ համարեսցուք եթէ շուրջ զառաջին բոլորակաւ արտաքոյ կամ ներքոյ ձգիցի կարգաւոր ինչ ն-անկիւն, որոյ շրջանակն իցէ $Ծ_{ն}$, եւ զերկրորդին կամ ներքոյ եւ կամ արտաքոյ մեւս եւս բազմանկիւն, որոյ իցէ շրջանակ $ծ_{ն}$. յայտ է եթէ (Հ. 166.) $Ծ_{ն} : ծ_{ն} = Ճ : ճ$, որչափ եւ մեծ իցէ ն: Արդ քանզի ըստ անհնարին աճել ն թուոյ համարոյ կողմանցն, կարի իմն նուազիցի այլակերպութիւնն $Շ — Ծ_{ն}$ եւ $շ — ծ_{ն}$ (Հ. 170. Բ.), ուրեմն մարթ իցէ դնել զկշռութիւնն Շ : շ = Ճ : ճ = 2Ճ : 2ճ = Ե : ե, եթէ զերկակտուրս երկոցունց բոլորակաց Ե եւ ե նշանագրովք ցուցանել կամիցիմք:

Ա. Արդ տեսանես, եթէ յամենայն բոլորակս կշռութիւն երկակտրոյն առ շրջապատն նոյն է. եւ թէ զերկայնութիւն միոյ շրջապատի մարթ է անդրատին յերկակտրոյն հաշուել, յորժամ երկայնութիւն շրջապատի որ հաստատուն ինչ երկակտրով ձգեալ իցէ, ծանուցեալ իցէ: Զոր օրինակ եթէ զշրջապատ բոլորակի, որոյ երկակտուրն իցէ մի միութիւն գծի, դնիցեմք = շ, յայտ է եթէ 1 : շ = 2Ճ : Շ, յորմէ Շ = 2Ճշ = Եշ: Յառաջագոյն ա-

սացելոցս յանձնէ կարիցես ի վերայ հասանել, եթէ զզօրութիւն շ քանիօնութեան, ոչ ճշգիւ, այլ օրինակաւ մերձաւորութեան գոյ հնար գտանել, քանզի Հ — Ծ. գրեթէ մերձ է հաւասար լինել դատարկի այս ինքն է անհնարին փոքր, եւ ոչ եթէ ամենեւին հաւասար դատարկի. վասն այսորիկ եւս պարտ է զ՞ թիւ համարոյ կողմանցն վասն Հ շրջապատին մեծ առնուլ:

Բ. Համարեսցուք եթէ Ա եւ ա նշանագիրքս ցուցանիցեն երկուս նման աղեղունս, ուստի եւ զերկուս մասնաւոր մասունս Հ եւ հ շրջապատայ, որք Ճ եւ ճ ճառագայթից կշռիցին. արդ որովհետեւ

$$\text{Հ} : \text{հ} = \text{Ճ} : \text{ճ},\ \text{եւ}\ \frac{\text{Հ}}{\text{ն}} : \frac{\text{հ}}{\text{ն}} = \text{Ճ} : \text{ճ},\ \text{եւ քանզի}\ \frac{\text{Հ}}{\text{ն}}$$

$$= \text{Ա}\ \text{եւ}\ \frac{\text{հ}}{\text{ն}} = \text{ա},\ \text{ուրեմն}\ \text{Ա} : \text{ա} = \text{Ճ} : \text{ճ} = \text{Հ} : \text{հ}$$

այս ինքն է Երկու նման աղեղունք կշռին ընդ միմեանս, որպէս կէս երկակատուրքն նոցա, ուստի եւ որպէս ողջոյն շրջապատքն որ նոցա կշռիցին: Արդ եթէ այլեւայլ աղեղունք հաշուեալ իցեն ըստ $\text{ճ} = 1$ ճառագայթի, այնուիկ մարթ է զայլ աղեղունս աստիճանօք, վայրկենիւք եւ երկրորդօք նշանակեալս հաշուել ըստ այլոյ Ճ կէս երկակարոյ. քանզի է

$$\text{Ա} = \frac{\text{ա} \cdot \text{Ճ}}{1} = \text{ա}\text{Ճ}:$$

173. Խնդիր: Օրինակաւ մերձաւորութեան զկշռութիւն շրջապատին առ իւր երկակատուրն գտանել:

Լուծումն: Եթէ բազմացուցանիցեմք զկողմն կարգաւոր 12288 անկեան, զբոլորակաւ ներքոյ ձգելոյ որ $\text{է} = 0{,}0005113269\ldots$ (եդեալ $\text{ճ} = 1$) 12288 թուով, գտանի շրջանակն Ծ՝ նոյն բազմանկեան $=$ $12288 \times 0{,}00051132694\ldots = 6{,}28318524$. իսկ շրջանակ նման Ծ. բազմանկեան, որ զբոլորակաւ արտա-

․քոյ ձգիցի = 12288 × 0,00051132694 = 6,28318544։ Արդ որովհետեւ շրջապատն Շ > Ճ., եւ < Ծ., եւ նշանակութիւնք երկուց շրջանակացն յառաջին վեց տասներորդականս միմեանց հաւասարք են, ուրեմն եւթն առաջին նշանակք թուոցն պատշաճին շրջապատին, որոյ երկայնութիւն = Շ = 2շ = 6,283185, օրինակաւ մերձաւորութեան է։ Իսկ եթէ գտանիցեմք զմիջնորդն համարողութեան Ծ. եւ Ճ. շրջանակացն, ելանիցէ Շ = 2շ = 6,28318534, ուստի եւ Շ/2 = շ = 3,14159267, որ մինչեւ յեւթներորդ տասներորդականս ուղիղ է։ Ապա ուրեմն համեմատի Շ : 2ճ = շ : 1 = 3,1415926 : 1 կարի իմն ճշդիւ։

Ա. Իսկ եթէ զթիւն շ = 3,1415926 դարձուցանիցեմք ի յեռեալ կոտոր, եւ գտանիցեմք զմանաւոր կոտորսն (Նշ. համար. Հ. 206, 207.) ելանիցեն մերձաւորութեան նշանակութիւնք

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \ldots$$ (Նշ. համ. Հ. 212.)

այս ինքն թէ օրինակաւ մերձենալոյ

1 : շ = 1 : 3, կամ
1 : շ = 7 : 22, կամ
1 : շ = 106 : 333, կամ
1 : շ = 113 : 355, այլովքն հանդերձ

Արքիմիդէս եկաց մնաց ի բազմանկեան ներքոյ կամ արտաքոյ շուրջ զբոլորակաւ ձգելոյ, որոյ 96 կողմանք իցեն, եւ եգիտ եթէ շ > $3\,{}^{10}/_{71}$, եւ < $3\,{}^{1}/_{7}$, որ զկշռութիւնս 7 : 22 տայ։ Ադրիանոս Մետիոս ուսող հոլլանդացի յիւր գիրսն, Համարող. Գիրք Բ եւ Երկրաչափութիւն Գիրք Դ, Ղուկտ. 1646, զկշռութիւն երկակորոյն առ իւր շրջապատն դնէ = 113 : 355 = 1 : 3,1415929 որ մինչեւ ի վեցերորդ տասներորդականս ուղիղ է, եւ վասն պարզութեան եւ ճշդութեան պարտ է զայն ի կիր արկանել, քանզի եւ դիւրին իսկ է զայն ունել ի մտի վասն յերից առաջին ան-

զայդ թուոց (113, 355) կազմելոյ։ Մետիոս ինքնին իսկ ասէ, (Երկրա. Մասն Բ. ԳԼ. Դ. Երես 179.) եթէ հայր իւր անդատին ի ցուցմանցն Արքիմիդեայ եգիտ զնշանաւոր երկրաչափական համեմատութիւն շրջապատի որ զինչ եւ իցէ բոլորակի առ իւր երկակատուրն լինել $3\,{}^{16}/_{113}$, այս ինքն է $^{355}/_{113}$, որ ի սակաւուց նշանակաց կազմեալ է, քան եթէ զոր միանգամ եդ Մր. Լուտոլփոս յորմէ եւ այլակերպութիւնն է փոքր քան զ$^{1}/_{3000000}$։

Լուդոլփոս Կողոնիացի ուսուցիչ Ճարտարապետութեան պատերազմի ի Լայդէն, յիւր գիրսն որ կոչի Վասն բոլորակի..., եդ զթիւն շ 20 տասներորդական տեղեօք, եւ ի գիրսն՝ որ ասի Յաղագս համարողական եւ երկրաչափական սկզբանց ի Մ. Լուդոլփեայ. Լայդէն. 1616, եդ 35 տասներորդական տեղեօք։ Ըստ տեղեկութեանն՝ որ գտանի ի սկիզբն մաթեմատիկեան տախտակացն Սերւինի. Լոնդինոն. 1771. Երես 100, եւ ըստ Մոնտուկլայ ի Պատմութեան ուսողութեան Եր. 159, ասի թէ Սքարպոս երկրաչափ անգղիացի զշրջապատն 74 տասներորդականօք համարեալ իցէ, զորս եւ զօրինակ հաշուելոյն եդին յիւրեանց մաթեմատիկեան պատկերս։ Ի տեղեկութեանն, զորմէ ի վեր անդր ասացաք Եր. 111. ասի դարձեալ, եթէ Մաքին զթիւն շ մինչեւ ի 100 տասներորդականս հաշուեալ իցէ։ Լագնի ուսող գաղղիացի ծնեալ ի Լիոն յամին 1660, եւ մեռեալ յամին 1734 յիւր Յիշատակին վասն չորեքկուսի լինելոյ բոլորակին եւ այլն. եդ զթիւն զայն 127 տասներորդականօք։ Ի պատկերսն Վեգայ առն նշանաւորի աւստրիացւոյ գտանի շ թիւն 140 տասներորդականօք։ Եւ զայս եւս չէ պարտ մոռանալ, եթէ անգղիացի ուսողք ի ճանապարհորդել իւրեանց ի Հնդիկս ի միում ի մատենիցն բրամինաց գտին զթիւն շ = $\frac{3927}{1250}$ = 3,1416 եդեալ։ Այս թիւ համեմատութեան ճշդագոյն եւս է քան զԱրքիմիդեայն, զի վրիպումն է $< \frac{1}{10^4}$, եւ թուի եթէ քան զայն հնագոյն եւս իցէ։

Արդ է թիւս զորմէ բազում անգամ յիշատակեցաք

շ = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288
41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164
06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148
08651 32823 06647 09384 46095 50582 26136

Ի մանաւոր դէպս պարտ է ի թուոյ աստ յայսմանէ այնչափ ինչ տասներորդականս առնուլ, որչափ ինչ միանգամ ճշդութիւն եւ պատշաճութիւն ի հաշիւն պահանջիցի։ Ի բազում դէպս շատ են առաջին

երեք կամ հինգ տասներորդականքն, ուստի եւ մարթ է դնել $Ղ = 3,14159$ կամ $Ղ = \frac{355}{113}$ ։

174. Խնդիր. Ա ։ Ծանուցեալ զԵ երկակտուրն կամ զՃ ճառագայթն իրիք բոլորակի, թուովք գտանել զերկայնութիւն Շ շրջապատին ։

Լուծումն ։ Որովհետեւ թիւն $Ղ = 3,14159...$ (Հ. 173. Ա.) ցուցանէ զցուցիչ հաստատուն յինչ կշռութեան առ երկակտուրն, ուստի եւ $\frac{Շ}{Ե} = Ղ$, ուրեմն $Շ = ԵՂ = 2ՃՂ$, այս ինքն է Երկայնութիւն շրջապատի բոլորակի իրիք գտանի, եթէ ոք զթիւն Ղ (որ ղուդողփեան թիւ անուանել սովոր է) երկակտրովն բազմացուցանիցէ ։

Ա. Ծ. $Շ = ԵՂ = 2ՃՂ$ հաւասարութեանս զհետ գայ, եթէ $Ե = \frac{Շ}{Ղ}$, եւ $Ճ = \frac{Շ}{2Ղ}$ ։ Իսկ որովհետեւ $\frac{1}{Ղ} = 0,31830989...$, եւ $\frac{1}{2Ղ} = 0,15915494...$ ուրեմն ցանկ $Ե = Շ \cdot \frac{1}{Ղ} = Շ \times 0,31830989...$ եւ $Ճ = Շ \cdot \frac{1}{2Ղ} = Շ \times 0,15915494...$, իցեն ։

Խնդիր. Բ ։ Ծանուցեալ զՃ կէս երկակտուրն կամ զԵ երկակտուրն իրիք բոլորակի, գտանել, զԱ երկայնութիւն իրիք աղեղան նոյն բոլորակի, որ աստիճանօք, վայրկենիւք եւ երկրորդօք դրոշմեալ իցէ, եւ ոմն հակառակ. Ի ծանուցեալ երկայնութենէ իրիք աղեղան, զթիւ համարոյ աստիճանաց, վայրկենից, ... աղեղանն այնորիկ գտանել ։

Լուծումն ։ Համարեսցուք եթէ թիւ համարոյ աստիճանացն իցէ = Ր, եւ Ա երկայնութիւնն՝ Ճ կէս երկակտրով ածեալ իցէ ի նոյն միութիւն չափոյ, յայտ է եթէ (Հ. 147.) $360^0 : Ր = Շ : Ա$, այլ

քանզի Շ = 2ծշ, ուրեմն 360° : Ի = 2ծշ : Ա, կամ 180° : Ի = ծշ : Ա, ուստի եւ

$$\text{Ա} = \frac{\text{Շ}\cdot\text{Ի}}{360} = \frac{\text{ծշ}\cdot\text{Ի}}{180} = \frac{\text{Ի}}{180}\cdot\text{ծշ}, \text{ եւ}$$

$$\text{Ի} = \frac{360\cdot\text{Ա}}{\text{Շ}} = \frac{180\cdot\text{Ա}}{\text{ծշ}} = \frac{\text{Ա}}{\text{ծշ}}\cdot 180 :$$

Ա. Եթէ զմասունս շրջապատին որպէս բովանդակութիւն աստիճանաց, վայրկենից, երկրորդաց, եւ այլոց նմանեացն չափովք երկայնութեան յանդիման կացուցանիցեմք, ցանդ զկէս երկակտուրն որպէս միութիւն համարիմք, եւ առեմք եթէ 180° են 3,1415926... կէս երկակտրոց չափ երկայն կամ որովհետեւ յորժամ զճառագայթն = 1 դնիցեմք, կէս բոլորակն շ = 180° լինիցի, յայնժամ եւ շ = 3,14159... եւ 2շ = 360° = 6,283..., ½շ = 90° = 1,570796, ¼շ = 45° = 0,785398..., այլովքն համդերձ:

Ի լոգարիթմական տախտակին գտանիցեն եւ աղեղունք բոլորակի վասն ամենայն աստիճանաց, որ ի 1ը մինչեւ ց360, վասն ամենայն վայրկենից, եւ երկրորդաց, դրոշմեալք չափով երկայնութեան կէս երկակտրոյ, որ = 1 դնի: Զոր օրինակ յանուանեալ պատկերին տեսանի

$$\begin{aligned} \text{աղ.}\ 37^{\circ} &= 0{,}64577182 \\ \text{աղ.}\ 43^{\text{Ա}} &= 0{,}01250819 \\ \text{աղ.}\ 25^{\text{Բ}} &= 0{,}00012120 \\ \hline \text{աղ.}\ 37^{\circ}\,43^{\text{Ա}}\,25^{\text{Բ}} &= 0{,}65840121 : \end{aligned}$$

Սովին օրինակաւ մարթ է եւ ամին հակառակ ըստ $\text{Ի} = \frac{180\cdot\text{Ա}}{\text{ծշ}} = \frac{180\cdot\text{Ա}}{\text{շ}}$ (եղեալ ծ = 1), զամենայն աղեղն Ա, որ մասամբք կէս երկակտրոյն իցէ յայտ արարեալ, երկրորդօք յանդիման կացուցանել. եթէ զայն 206264,8 թուով բազմացուցանիցեմք: Քանզի եղեալ ծ = 1, ի ձեւին ունիմք

զհամեմատութիւնս $\text{շ} : \text{Ա} = 180^0 : \text{Ի}$, կամ թէ $3{,}1415926 : \text{Ա} = 180 \cdot 60^2 : \text{Ի}''$, յորմէ

$$\text{Ի} = \left(\frac{180 \cdot 60^2}{3{,}1415926\ldots}\right)'' \cdot \text{Ա} = 206264'' \cdot 8 \times \text{Ա} ։$$

Բ. Եթէ ի $\text{Ի} = \dfrac{180 \cdot \text{Ա}}{\text{ճ} \cdot \text{շ}}$ համարակաց օրինակին զերկայնութիւն աղեղանն $\text{Ա} = \text{ճ}$ դնիցեմք · յայնժամ լինիցի $\text{Ի} = \dfrac{180}{\text{շ}} = \dfrac{1}{\text{շ}} \times 180^0 = 0{,}31830989\cdots \times 180^0 = 57^0{,}29578 = 57^0 17' 44'' 8$ կարի իմն մերձաւորութեամբ ։ Աստի եւ աղեղն, որոյ երկայնութիւն հաւասար իցէ երկայնութեան իւրոյ երկակորոյն գրեթէ է $= 114^0 35' 29'' 6$ ։

ԳԼՈՒԽ Է

ՑԱՂԱԳՍ ԳՏԱՆԵԼՈՑ ԶՏԱՐԱԾՈՒԹԻՒՆ ԵՐԵՍԱՑ ՀԱՐԹ ՁԵՒՈՑ ԵՒ ՎԱՍՆ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹԵԱՆՑ ԵՒ ՓՈՓՈԽՄԱՆՑ ՆՈՑԱ

175. Չափել զերեսս ասի, որոնել, եթէ քանիցս անգամ այս կամ այն ինչ երեսք, որ իբրեւ միութիւն համարեալ իցէ, յայլում գտանիցի։ Իսկ միութիւն երեսաց համարի չորեքկուսին ձգեալ ի վերայ միութեան գծի։ Այս ինքն՝ եթէ (Տես 114.) ոտք միութիւն իցէ ի գտանել զմեծութիւն գծից, չորեքկուսին 2 որ ի վերայ ոտք երկայնութեան կանգնեալ է, է չափ միութեան զերեսս չափելոյ։

176. Խնդիր։ Զտարածութիւն երեսաց ԱԲԳԴ ուղղանկեան հաշուել, եթէ 2 չորեքկուսին իբրեւ միութիւն երեսաց առնուցու (Տես 114.)։

Լուծումն։ Համարեսցուք եթէ ԱԲ = 5. ոտք, եւ հասարակաց իմն օրինակաւ = Տ. ոտք իցէ, իսկ ԱԴ = 4. ոտք եւ հասարակաց օրինակաւ = Ն. ոտք. եւ եթէ յամենայն կիտից բաժանման հաւասար հեռաւոր գիծք առ յանդիմանակաց կողմանս ուղղանկեանն ձգիցին, բաժանիցի ուղղանկիւնն ԱԲԳԴ ի չորեքկուսիս, որք ամենեքին նման եւ հաւասար են 2 չորեքկուսւոյն։ Քանզի, որովհետեւ ԻԿ || ԱԴ, եւ ԵԺ || ԱԲ, յայտ է եթէ ձեւն ԱԿՄԵ իցէ հաւասար հեռաւոր ձեւ. եւ զի ըստ կազմածոյն ԱԿ = ԱԵ = ոտք, ուրեմն եւ հաւասարակող իցէ հաւասար հեռաւոր ձեւն ԱՄ։ Եւ ի կատարած որովհետեւ անկիւնն Ա = Ո, ուրեմն չորեքկուսի եւս իցէ ԱԵ, եւ = 2 (Հ. 124.)։ Նոյն մարթ է ցուցանել նովին օրինակաւ եւ վասն այլոց փոքր չորեքկուսի ձեւոցն, յորս ԱԲԳԴ ուղղանկիւնն բաժանեալ է։ Արդ որովհետեւ 2 չորեքկուսին այնչափ ինչ անգամ յուղղանկիւնն ԱԲԺԵ գտանի, որ-

չափ ինչ աբ յԱԲ գտանիցի, այս ինքն ի մեր դէպս հնգիցս կամ ԱԲԺԵ = 5·2, եւ դարձեալ ծանուցեալ ուղղանկիւնն ԱԲԳԴ այնչափ ինչ բովանդակէ զուղղանկիւնն ԱԲԺԵ, որչափ ինչ աբ յԱԴ գտանիցի, ըստ մերոյ ձեւոյս չորիցս. ուստի եւ չորեքանկիւնն ԱԲԳԴ = 4·ԱԲԺԵ = 4·5·2 = 202 : Եւ հասարակաց օրինակաւ եթէ ԱԲ = մ·աբ, եւ ԱԴ = ն·աբ իցէ, լինիցի չորեքանկիւնն ԱԲԳԴ = մ·ն·2, եւ եդեալ 2 = 1, է ԱԲԳԴ = մ·ն, այս ինքն է Տարածութիւն երեսաց ուղղանկեան գտանիցի, եթէ ոք զխարիսխն բարձրութեամբ նորին (այս ինքն՝ եթէ երկոքեանն եւս նովին միութեամբ գծի ուստի եւ թուովք դրոշմեալ իցեն) բազմացուցանիցէ:

Ա· Եթէ ԱԲԳԴ (Ձեւ 115·) իցէ չորեքկուսի, ուստի եւ ԱԲ = ԱԴ, անջրպետութիւն երեսաց նորա է = ԱԲ·ԱԴ = ԱԲ·ԱԲ = $\overline{ԱԲ}^2$, այս ինքն է Տարածութիւն երեսաց չորեքկուսւոյ յայտ առնի երկրորդ կարողութեամբ միոյ կողման: Եւ ամէն հակառակ. մարթ է ասել, թէ ամենայն երկրորդ կարողութիւնք թուոց ցուցանեն զչորեքկուսի ինչ, որոյ կողմն նշանակի նովին թուով. վասն այսորիկ եւս եղեւ ոմանց յուսողաց զերկրորդ կարողութիւն կոչել չորեքկուսի (Նշան. համար. Հ· 244 · Տեղեկ:) :

Բ· Ուղղանկիւնքն, որոց հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն իցէ, միմեանց հաւասարք են:

177· Երկու ուղղանկիւնք, որոց հաւասար խարիսխ իցէ, ընդ իւրեանց բարձրութիւնսն ուղիղ համեմատականք են:

Բարձրութիւնք ԱԲԳԴ եւ աբգդ ուղղանկեանցն (Ձեւ 116·) իցեն ԱԴ, եւ ադ, որք կամ չափելի են եւ կամ անչափական: Յառաջին դէպսն համօրէն հասարակաց կշիռ նոցա իցէ այ, որ յԱԴ գտանիցի միցս, եւ յադ նիցս, որպէս զի լինել ԱԴ : ադ =

մ : ն։ Եթէ ընդ ջ, ջ', է, է'... կէտսն բաժանման ձգիցեմք գիծս հաւասար հեռաւորս ի խարսխաց անտի, յայնժամ բովանդակ ուղղանկիւնն ԱԲԳԴ բաժանիցի ի մ, եւ աբէդ ի ն հաւասար ուղղանկիւնս։ Արդ լինիցի ԱԲԳԴ : աբէդ = մ : ն. ուրեմն ԱԲԳԴ : աբէդ = ԱԴ : ադ։

Ապա եթէ անչափական իցեն բարձրութիւնքն, յայնժամ բաժանեսցուք դարձեալ զԱԴ ի հաւասար մասունս Աջ', ջ'է'..., յորոց մասանց զմին ածցուք յադ ի ջա, ջէ,... կոյս. յետին կէտն հատանելոյ որ մերձաւորագոյնն է ի դ, իցէ ը։ Արդ ձգեսցուք ընդ այս կէտ եւս ըժ || դէ. որով ուղղանկիւնն աըժբ, յորում՝ քանզի բարձրութիւնքն աը, եւ ԱԴ չափելիք են ըստ կազմածոյն, նմին իրի ԱԲԳԴ : աբըժ = ԱԴ : աը. կամ $\frac{\text{աբըժ}}{\text{ԱԲԳԴ}} = \frac{\text{աը}}{\text{ԱԴ}}$, կամ $\frac{\text{աբէդ}}{\text{ԱԲԳԴ}} + \frac{\text{դէըժ}}{\text{ԱԲԳԴ}} = \frac{\text{ադ}}{\text{ԱԴ}} + \frac{\text{ըդ}}{\text{ԱԴ}}$. եւ քանզի մարթ է դժ ուղղանկեանն եւ ըդ գծին փոքրկանալ ըստ հաճոյից (Հ. 84.), ապա ուրեմն $\frac{\text{աբէդ}}{\text{ԱԲԳԴ}} = \frac{\text{ադ}}{\text{ԱԴ}}$, կամ ԱԲԳԴ : աբէդ = ԱԴ : ադ։

Սորին զհետ գայ, եթէ զաբ եւ զԱԲ իբրեւ բարձրութիւն երկոցունց ուղղանկեանցն համարիցեմք, եւ զԲԴ եւ զբդ խարիսխս նոցին, յայնժամ երկոքին ուղղանկիւնքն, որոց հաւասար իցեն բարձրութիւնքն, ընդ խարիսխսն ուղիղ համեմատականք են։

178. Տարածութիւնք երեսաց երկուց ուղղանկեանց համեմատին ընդ միմեանս ըստ յօդուածոյ համեմատութեան բարձրութեանց իւրեանց եւ խարսխաց։

Իցեն երկու ուղղանկիւնք Ո եւ ո, եւ նոցին խարիսխքն իցեն Խ եւ խ, բարձրութիւնքն Բ եւ բ։ Արդ զմտաւ ած մեւս եւս ուղղանկիւն Տ, որոյ

խարիսխ. իցէ Խ եւ բարձրութիւն ք: Արդ (ըստ Հ. 177.) Ո:Տ=Բ:ք եւ Տ:օ=Խ:խ, զորոյ զհետ գայ Ո:օ=ԲԽ:քխ:

Ա. Եթէ երկոքին ուղղանկիւնքն Ո եւ օ հաւասար իցեն, յայնժամ հարկ է եւ ԲԽ=քխ, ուստի եւ Խ:խ=ք:Բ. այս ինքն ի հաւասար ուղղանկիւնս բարձրութիւնքն խոտորնակս իմն ընդ խարսխացն համեմատին: Ստատին ցուցանի եւ խոտորնակն, զի ի Խ:խ=ք:Բ համեմատութենէս ծագէ ԲԽ=քխ, յորմէ եւ Ո=օ:

Բ. Եթէ ք իցէ մի միութիւն գծի, ուստի եւ =1†, եւ հաւասար հեռաւոր ձեւն օ չորեքկուսի, որով եւ տարածութիւն երեսացն =1‡, յայտ է եթէ Ո:1‡=ԲԽ:$(1†)^2$, այս ինքն Ո:1=ԲԽ:1, յորմէ Ո=ԲԽ: Ապա ուրեմն զկանոնն զոր ի Հ. 176 եդաք, մարթ է ի կիր արկանել, թէպէտեւ երկոքին կողմանքն կամ մին ի նոցանէ համեմատութեամբ միութեան գծի, անչափականք իցեն:

179. Հաւասար հեռաւոր ձեւք, որոց նոյն իցէ խարիսխն, եւ ի մէջ նոյն հաւասար հեռաւոր գծից ձգեալ իցեն, միմեանց հաւասարք են:

Երից դիպաց մարթ է դիպել, քանզի կամ ԱԳ կողմն միոյ ի հաւասար հեռաւոր ձեւոցն՝ է եւ անկիւնագիծ միւսոյն (Ձեւ 117.) կամ ԱԶ կողմն միոյն հատանէ զայն կողմն միւսոյն որ է յանդիմանակաց ԱԲ հասարակաց խարսխին, այս ինքն զԳԴ ի միջին վայրի Գ եւ Դ կիտից (Ձեւ 118.) եւ կամ ի կատարած զերկայնութիւն նորին ԳԴ կողմանն (Ձեւ 119.): Յառաջին դէպմն է ΔԱԳԴ ≅ ΔԱԲԳ ≅ ΔԲԳԵ (Հ. 54.), ուստի եւ ΔԱԳԴ + ΔԱԲԳ = ΔԱԲԳ + ΔԲԳԵ, այս ինքն է հաւասար հեռաւոր ձեւն ԲԴ=ԱԵ:

Իսկ ի միւս դէպմն ΔԱԳԶ ≅ ΔԲԴԵ, քանզի ԱԳ=ԲԴ, ԱԶ=ԲԵ (Հ. 115.) եւ անկիւնն է=ն (Հ. 80. Ե.): Իբրեւ յաւելուցումք յերկոսին ե-

ըմքանկիւնան զուգեղանն ԱԳ, ելանիցէ ΔԱԴԶ + ԱԳ = ԱԳ + ΔԲԳԵ, այս ինքն է հաւասար հեռաւոր ձեւն ԲԴ = ԱԵ:

Նաւ յերրորդ դէպսն վասն նոյին պատճառաց, որ ի վերոյ, ΔԱԴԶ ≅ ΔԲԳԵ, ուստի եւ ΔԱԴԶ — ΔԳԷԶ = ΔԲԳԵ — ΔԳԷԶ, այս ինքն է սեղանն ԱԴԳԷ = ԲԶԵԷ, կամ ԴԷ = ԷԵ, ուստի եւ ԴԷ + ΔԱԲԷ = ԷԵ + ΔԱԲԷ, այս ինքն հաւասար հեռաւոր ձեւն ԲԴ = ԱԵ:

Ա. Ապա ուրեմն երկու հաւասար հեռաւոր ձեւք, որոց հաւասար բարձրութիւնք եւ հաւասար խարիսխք իցեն, միմեանց հաւասարք են: Քանզի եթէ ի վերայ հաւասար խարսխաց ի միմեանց վերայ դիցին, վասն հաւասար բարձրութեանցն, զոր համարեցաք, անկանին ներքոյ նոյին հաւասար հեռաւոր գծից:

Բ. Բազում հաւասար ձեւք, որոց նոյն բարձրութիւն իցէ, հաւասար են այլում միոյ միայնոյ հաւասար հեռաւոր ձեւոյ, եթէ խարիսխ նորա իցէ բովանդակութիւն խարսխաց ամենայն հաւասար հեռաւոր ձեւոցն տանուցելոց, եւ որոյ բարձրութիւն նոյն իցէ ընդ բարձրութեան միոյ միոյ ի հաւասար հեռաւոր ձեւոցն:

Գ. Որովհետեւ ծռանկիւն հաւասար հեռաւոր ձեւն ԱԲԳԴ = ԵԶԳԴ (Ձեւ 120.) եւ ուղղանկիւնն ԵԶԳԴ = ԳԴ · ԴԵ (Հ. 176.), ուրեմն նոյնպէս եւ ԱԲԳԴ = ԳԴ · ԴԵ, այս ինքն է Տարածութիւն երեւաց հաւասար հեռաւոր ձեւոյ գտանիցի, եթէ զխարիսխ նորին բարձրութեամբն բազմացուցանիցես:

Դ. Ուրեմն երկու հաւասար հեռաւոր ձեւք կշռին ընդ միմեանս յօդուածոյ համեմատութեամբ բարձրութեանցն եւ խարսխաց: Քանզի որովհետեւ ԱԲԳԴ = ԱԲ · ԳԶ, եւ աբգդ = աբ · գզ, ուրեմն ԱԲԳԴ : աբգդ = ԱԲ · ԳԶ : աբ · գզ:

Ե. Արդ եթէ զտարածութիւն երեսաց իւիք հաւասար հեռաւոր ձեւոյ Հ քանիօնութեամբ, եւ զբարձրութիւնն Բ, եւ զխարիսխն Խ նշանագրովք նշանակիցեմք, նոյնպէս զայսուիկ մասունս այլոյ հաւասար հեռաւոր ձեւոյ հ, բ եւ խ նշանագրովք, լինիցի համեմատութիւնս

$$\text{Հ} : \text{հ} = \text{ԲԽ} : \text{բխ}.$$

Արդ եթէ 1) $\text{Խ} = \text{խ}$, եւ $\text{Բ} = \text{բ}$ գտնիցեմք, յայտ է եթէ $\text{ԽԲ} = \text{խբ}$, ուստի եւ $\text{Հ} = \text{հ}$, այս ինքն Հաւասար հեռաւոր ձեւք, որոց հաւասար իցէ բարձրութիւն եւ խարիսխն, միմեանց հաւասարք են:

2) Իսկ եթէ է $\text{Հ} = \text{հ}$, յայնժամ $\text{ԽԲ} = \text{խբ}$, յորմէ եւ $\text{Բ} : \text{բ} = \text{խ} : \text{Խ}$, այս ինքն. ի հաւասար հեռաւոր ձեւս բարձրութիւնքն խոտորնակս իմն ընդ խարսխացն համեմատին:

3) Ապա եթէ $\text{Բ} = \text{բ}$, յայնժամ $\text{Հ} : \text{հ} = \text{Խ} : \text{խ}$, եւ եթէ $\text{Խ} = \text{խ}$ յայնժամ $\text{Հ} : \text{հ} = \text{Բ} : \text{բ}$, այս ինքն Հաւասար հեռաւոր ձեւք որոց հաւասար բարձրութիւնք իցեն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս կշռիցին խարիսխքն իւրեանց, իսկ որոց միանգամ հաւասար խարիսխք իցեն կշռին ընդ միմեանս, որպէս բարձրութիւնք նոցա ընդ միմեանս համեմատիցին:

180. Տարածութիւն երեսաց երեքանկեան հաւասար է կիսոյ արդեանց խարսխին եւ բարձրութեանն, այս է $\Delta\text{ԱԲԳ} = \frac{\text{ԱԲ} \cdot \text{ԳԴ}}{2}$ (Ձեւ 121.):

Ձգեա զԳԵ $\parallel$ ԱԲ, եւ զԲԵ $\parallel$ ԱԳ, մինչեւ ԳԵ եւ ԲԵ գծիցն զմիմեանս հատանել յԵ. հաւասար հեռաւոր ձեւն $\text{ԱԲԵԳ} = \text{ԱԲ} \cdot \text{ԳԴ}$, իսկ արդ անկիւնագիծն ԲԳ հատարակէ զհաւասար հեռաւոր ձեւն ԱԵ (Հ. 116.), ապա ուրեմն

$$\Delta\text{ԱԲԳ} = \tfrac{1}{2}\,\text{ԱԵ} = \tfrac{1}{2} \cdot \text{ԱԲ} \cdot \text{ԳԴ} = \frac{\text{ԱԲ}}{2} \cdot \text{ԳԴ} = \text{ԱԲ} \cdot \frac{\text{ԳԴ}}{2},$$

Ա. Հաստատելոյս պէտ գայ, եթէ ամենայն երեքանկիւն է կէս հաւասար հեռաւոր ձեւոյ, որ ընդ նմա զնոյն հաւասար խարիսխ ունիցի եւ զհաւասար բարձրութիւն, եւ ի մէջ նոյին հաւասար հեռաւոր գծից գտանիցի։

Բ. 1) Եթէ յերկուս երեքանկիւնս զտարածութիւնս երեւաց, զխարիսխս, եւ զբարձրութիւնս նշանակիցեմք Տ, Խ, Բ, եւ տ, խ, բ քանիօնութեամբք, յայտ է եթէ $Տ = \frac{Խ \cdot Բ}{2}$, եւ $տ = \frac{խ \cdot բ}{2}$, ուստի եւ $Տ : տ = \frac{Խ \cdot Բ}{2} : \frac{խ \cdot բ}{2} = ԽԲ : խբ$, այս ինքն Երեքանկիւնքն կշռեն ընդ միմեանս յօդուածոյ կշռութեամբ բարձրութեանցն եւ խարսխաց։

2) Եթէ իցէ $Խ : խ = բ : Բ$ ճշմարիտ համեմատութիւն, յայնժամ իցէ $ԽԲ = խբ$, ուստի եւ $Տ = տ$, այս ինքն Երկու երեքանկիւնք հաւասարք են, եթէ բարձրութիւնք նոցա ընդ խարսխացն, խոտորնակս համեմատիցին։

3) Եթէ իցէ $Բ = բ$, եւ $Խ = խ$, ուստի եւ $ԽԲ = խբ$, յայնժամ եւ $Տ = տ$. այս ինքն Երեքանկիւնք, որոց հաւասար իցէ բարձրութիւն եւ հաւասար խարիսխն, միմեանց հաւասարք են։

4) Եթէ երկու երեքանկիւնքն Տ եւ տ հաւասարք իցեն, յայնժամ եւ $ԽԲ = խբ$, ուստի եւ $Խ : խ = բ : Բ$։ Ի հաւասար երեքանկիւնս խարիսխքն ընդ բարձրութեանցն խոտորնակս իմն համեմատին։

5) Ի $Տ : տ = ԽԲ : խբ$ համեմատութենէս ծագէ $Տ : տ = Բ : բ$, եթէ իցէ $Խ = խ$, եւ $Տ : տ = Խ : խ$, եթէ իցէ $Բ = բ$. այս ինքն Երեքանկիւնք որոց հաւասար խարիսխ իցէ, ընդ բարձրութիւնսն, իսկ որոց հաւասար բարձրութիւնք՝ ընդ խարիսխսն ուղիղ համեմատականք են։

Գ. Եթէ երկուց ԱԲԳ եւ ԱԲԴ երեքանկեանց նոյն ԱԲ խարիսխ կամ հաւասար խարիսխ

իցէ, եւ երկոքեանն եւս ի մէջ նոյն ԳԴ եւ ԱԶ հաւասար հեռաւոր գծից գտանիցին, երեքանկիւնքն այնոքիկ միմեանց հաւասարք են (Ձեւ 122.), քանզի բարձրութիւնք նոցա ԳԵ եւ ԴԶ միմեանց հաւասարք են (Հ. 80. Բ.): Նոյն խոտորնակս. Երկու հաւասար երեքանկիւնք, որոց նոյն իցէ խարիսխն կան ի մէջ նոյն հաւասար հեռաւոր գծից: Քանզի եթէ ΔԱԲԳ = ΔԱԲԴ, ապա եւ ԱԲ · ԳԵ = ԱԲ · ԴԶ, յորմէ եւ ԳԵ = ԴԶ: Իսկ արդ ԳԵ եւ ԴԶ ուղղորդ կան ի վերայ ԱԲ ուղիղ գծի, ապա են հաւասար հեռաւոր, ուրեմն ԳԴ ∥ ԱԲ (Հ. 82. Հետեւ.):

181. Խնդիր: Հաշուել զտարածութիւն երեսաց 1) սեղանի եւ 2) սեղանակերպի:

Լուծումն Ա: Դիցուք գրեսցուք եթէ աբգդ (Ձեւ 123.) իցէ սեղան, ուստի եւ գդ ∥ աբ: Չգեալ զագ անկիւնագիծն, եւ զգե ուղղորդ ի վերայ աբ գծի, լինիցի գե հասարակաց բարձրութիւն աբգ եւ ագդ երեքանկեանցն: Եւ արդ որովհետեւ սեղանն բդ = Δաբգ + Δագդ, եւ Δաբգ = $\frac{1}{2}$ աբ · գե, եւ Δագդ = $\frac{1}{2}$ գդ · գե, ուրեմն բդ = $\frac{1}{2}$ աբ · գե + $\frac{1}{2}$ գդ · գե = $\frac{\text{գե (աբ + գդ)}}{2}$. այս ինքն Տարածութիւն երեսաց սեղանի հաւասար է կիսոյ ուղղանկեան, որ կազմի յարդեանց բովանդակութեան իւրոց հաւասար հեռաւոր կողմանցն, եւ բարձրութեան, կամ ի համարողական միջնորդէ հաւասար հեռաւոր կողմանցն, ընդ բարձրութեանն բազմացուցելոյ:

Բ. Եթէ ագ անկիւնագիծն (Ձեւ 124.) կայցէ ի սեղանակերպին, յայտ է եթէ բաժանի սեղանակերպն աբգդ յերկուս երեքանկիւնս այս ինքն աբգդ = Δաբգ + Δադգ: Իսկ արդ է Δաբգ = $\frac{1}{2}$ ագ · բե, եւ Δադգ = $\frac{1}{2}$ ագ · դզ, ուրեմն եւ աբգդ = $\frac{1}{2}$ ագ · բե + $\frac{1}{2}$ ագ · դզ = $\frac{\text{ագ (բե + դզ)}}{2}$: Եւ եթէ բդ անկիւ-

նագիծն (Ձեւ 125.) կայցէ արտաքոյ սեղանակերպին, յայտ է եթէ մասն ինչ է սեղանակերպն աբգ երեքանկեան, ուստի եւ աբդգ = Δաբգ — Δդբգ. իսկ արդ Δաբգ = ½ բգ · աե, եւ Δդբգ = ½ բգ · դզ, ուրեմն աբդգ = ½ բգ · աե — ½ բգ · դզ = $\frac{\text{բգ (աե — դզ)}}{2}$: Ապա ուրեմն Տարածութիւն երեսաց չորեքանկիւնի ձեւոյ կամ սեղանակերպի հաւասար է կիսոյ արդեանց միոյ յանկիւնագծիցն եւ բովանդակութեան կամ այլակերպութեան ուղղորդ գծից ձգելոց ի գագաթանց անկեանց որ կայցեն դէմ յանդիման անկիւնագծին, ըստ անկանելոյ անկիւնագծին ներքոյ կամ արտաքոյ սեղանակերպի:

Գ. Տարածութիւն սեղանին գտանի եւ այլով իմն օրինակաւ: Դնիցուք գրեսցուք եթէ յաբդգ սեղանի (Ձեւ 123.), որոյ բարձրութիւն է գժ, երկքին չհաւասար հեռաւոր կողմանքն ագ եւ դբ հատարակիցին զէ գծիւ, եւ համարեսցուք եթէ ընդ է կէտ ձգիցի ըթ || ագ: Որովհետեւ անկ. բէը = թէդ, եւ անկ. էըբ = էթդ, եւ դէ = էբ, ուրեմն Δբըէ ≅ Δթէդ, եւ եթէ յերկոսին կողմանսն յաւելուցու հնդանկիւնն աըէդգ, լինիցի աբդգ = աըթգ: Դարձեալ որովհետեւ է էը = էթ = ½ ըթ, վասն ըթ = ագ լինելոյ, եւս էը = ½ ագ =ազ, ուստի եւ աըէզ է հաւասար հեռաւոր ձեւ, որով եւ զէ = աը: Իսկ արդ աըթգ = աը · գժ, որով եւ աբդգ = աը · գժ, կամ աբդգ = զէ · գժ. այս ինքն Տարածութիւն երեսաց սեղանի հաւասար է արդեանց բարձրութեան նորին, եւ ուղիղ գծին, որ զերկուս չհաւասար հեռաւոր կողմանս նորին հատարակիցէ:

182. Խնդիր: Զտարածութիւն երեսաց որ զինչ եւ իցէ բազմանկեան հաշուել:

Լուծումն Ա: Բաժանեա զբազմանկիւնն ԱԲԳԴԵ (Ձեւ 126.) ի բովանդակ երեքանկիւնս, եւ յետ այնորիկ հաշուեաջիր զիւրաքանչիւր երեք-

անկիւն առանձինն (Հ. 180.)․ բովանդակութիւն ամենայն եռանկեանց հաւասար է տարածութեան երեսաց այնր բազմանկեան։ Վասն զաշխատութիւնն նուազեցուցանելոյ, պարտ եւ պատշաճ է, որչափ հնար իցէ, երկուց եռանկեանց մի խարիսխ հասարակաց հաստատել։ Արդ եթէ ձգիցեմք զուղղորդ գիծսն Աա, Բբ, եւ Դդ, լինիցի ΔԱԲԵ = ½ ԲԵ·Աա, ΔԲԳԵ = ½ ԳԵ· Բբ, եւ ΔԳԴԵ = ½ ԳԵ· Դդ, ուստի եւ ԱԲԳԴԵ = ΔԱԲԵ + ԲԳԵ + ΔԳԴԵ = ½·ԲԵ·Աա + ½ ԳԵ·Բբ + ½ ԳԵ·Դդ = ½ ԲԵ·Աա + ½ ԳԵ (Բբ + Դդ)։

Բ. Դարձեալ մարթ է յերեսս բազմանկեանն ներքոյ կամ արտաքոյ նորին, ուղիղ ինչ գիծ ըստ հաճոյից ձգել, եւ ի վերայ նորին ի գագաթանց ամենայն անկեանցն ուղղել գիծս ուղղորդս։ Յորմէ ծագիցեն ուղղանկիւն եռանկիւնք եւ սեղանք, զորս կարիցես դիւրաւ ըստ 180 եւ 181 համարոցն հաշուել, եւ զնոսին յաւելլով եւ հանելով, զբազմանկիւնն ինքնին գլխովին գտանել։ Զոր օրինակ վասն զբազմանկիւնն ԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 127.) այսու օրինակաւ համարելոյ, ձգեա զուղիղ գիծն ԷԸ, եւ ուղղեա ի վերայ նորա գիծս ուղղորդս Աա, Բբ, Գգ, Դդ, Եե, եւ Զզ։ Լինիցի ԱԲԳԴԵԶ = ԱաբԲ — ΔԱաէ + ԲբգԳ — ΔԳգԸ + ԵեզԶ — ԴդեԵ + ΔԴդԸ + ΔԶզԷ։

183. Տարածութիւնք երեսաց երկուց ԱԲԳ եւ աբգ (Ձեւ 65.) նման եռանկեանց ընդ երկրորդ կարողութիւնս միաբան կողմանց ուղիղ համեմատին։

ՅԱ եւ ա գագաթանցն ձգեա զուղղորդ գիծս ԱՊ եւ ապ։ Որովհետեւ Պ = պ = Ո, Բ = բ, ուրեմն ΔԱԲՊ ∾ Δաբպ, յորմէ ԱԲ : աբ = ԱՊ : ապ․ եւ քանզի եւս ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ, ուրեմն ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ ։ Յորոց $\overline{ԱԲ}^2 : \overline{աբ}^2$ = ԲԳ · ԱՊ : բգ · ապ։ Իսկ արդ ΔԱԲԳ : Δաբգ = ԲԳ·ԱՊ : բգ·ապ (Հ. 180. Բ.),

ուրեմն է $\Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{աբգ} = \overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{աբ}}^2 = \overline{\text{ԲԳ}}^2 : \overline{\text{բգ}}^2 = \overline{\text{ԱԳ}}^2 : \overline{\text{ագ}}^2$, քանզի $\text{ԱԲ} : \text{աբ} = \text{ԲԳ} : \text{բգ} = \text{ԱԳ} : \text{ագ}$:

Որովհետեւ (Հ. 96. Բ.) $\text{ԱԲ} : \text{աբ} = \text{ԱՊ} : \text{ապ}$, ուստի եւ $\overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{աբ}}^2 := \overline{\text{ԱՊ}}^2 : \overline{\text{ապ}}^2$, ուրեմն $\Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{աբգ} = \overline{\text{ԱՊ}}^2 : \overline{\text{ապ}}^2$, այս ինքն է Տարածութիւնք երեսաց նման երեքանկեանց ընդ երկրորդ կարողութիւնս բարձրութեանցն ուղիղ համեմատին:

184. Տարածութիւնք երեսաց երկուց նման բազմանկեանց ուղիղ համեմատին ընդ երկրորդ կարողութիւնս միաբան կողմանց կամ անկիւնագծից:

Միաբան անկիւնագծիւք երկու նման բազմանկիւնքն բաժանին ի բովանդակ երեքանկիւնս, որք ընդ միմեանս կշռին որպէս միանգամ երկրորդ կարողութիւնք միաբան կողմանցն իւրեանց, այսինքն միաբան կողմանց եւ անկիւնագծից բազմանկեանն համեմատիցին: Իսկ արդ կշռութիւնք ամենայն միաբան կողմանց եւ անկիւնագծից, ուստի եւ նոցին երկրորդ կարողութիւնքն միմեանց հաւասարք են, զորին զհետ գայ, եթէ հարկ է զի եւ կշռութիւնքն երեքանկեանց, որ ի մէջ միաբան կողմանց եւ անկիւնագծից գտանիցին, միմեանց հաւասարք իցեն: Ապա ուրեմն եթէ Ա, Բ, Գ, . . . նշանագրովք նշանակիցեմք զերեքանկիւնս միոյ ի բազմանկեանցն, եւ ա, բ, գ, . . . նշանագիրքս ցուցանիցեն զերեքանկիւնս, որ գտանիցին ի մէջ միաբան կողմանց եւ անկիւնագծից մեւս բազմանկեան. դարձեալ կ եւ լ ցուցանիցեն զերկուս որ զինչ եւ իցէ միաբան կողմանս կամ անկիւնագիծս, յայտ է եթէ $\text{Ա} : \text{ա} = \text{Բ} : \text{բ} = \text{Գ} : \text{գ} = \ldots\ldots = \text{կ}^2 : \text{լ}^2$, յորմէ $(\text{Ա} + \text{Բ} + \text{Գ} + \ldots) : (\text{ա} + \text{բ} + \text{գ} + \ldots) = \text{կ}^2 : \text{լ}^2$, յորում $\text{Ա} + \text{Բ} + \text{Գ} + \ldots$ զտարածութիւն երեսաց միոյ եւ $\text{ա} + \text{բ} + \text{գ} + \ldots$ զտարածութիւն երեսաց միւսոյ ի բազմանկեանցն յայտ առնէ:

185. Եթէ երկուց ԱԲԳ եւ ԱԴԵ երեք-անկեանց (Ձեւ 128.) մի անկիւն Ա իցէ հասարակաց, տարածութիւնք երեքանկեանցն ուղիղ համեմատին ընդ ուղղանկիւնս կազմեալս ի կողմանց, որ զնոյն անկիւն ի մէջ փակիցեն. այս ինքն է ΔԱԴԵ : ΔԱԲԳ = ԱԴ . ԱԵ : ԱԲ . ԱԳ:

Զգեալ զԳԴ լինիցի (Հ. 180. Բ.)
ΔԱԴԵ : ΔԱԳԴ = ԱԵ : ԱԳ, եւ ΔԱԳԴ : ΔԱԲԳ = ԱԴ : ԱԲ, յորմէ ΔԱԴԵ : ΔԱԲԳ = ԱԴ . ԱԵ : ԱԲ . ԱԳ:

186. Անջրպետութիւն երեսաց կարգաւոր բազմանկեան գտանի, եթէ զկէս շրջանակ նորին բազմացուցանիցես կէս երկակորով բոլորակին ներքոյ ձգելոյ:

Համարեսցուք եթէ ԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 106.) իցէ որ զինչ եւ իցէ բազմանկիւն Ն կողմամբք: Արդ իբրեւ ձգիցին ուղիղ գիծքս ԱՄ, ԲՄ, ԳՄ ..., բազմանկիւնն ի Ն պատշաճական երեքանկիւնս կտորիցի, յորոց մի է ΔԱԲՄ: Իբրեւ ձգիցին ի կէտսն շօշափման երկակտութքն ՄԷ, ՄԸ, ՄԹ ..., իցեն նոքա ուղղորդ ի վերայ կողմանց բազմանկեանն: Իսկ արդ ΔԱԲՄ = ½ ԱԲ . ԷՄ, ուստի եւ ԱԲԳԴԵԶ = Ն . ½ ԱԲ . ԷՄ. եւ քանզի շրջանակ բազմանկեանն է = Ն . ԱԲ, զոր եթէ = Ծ դնիցեմք, լինիցի ԱԲԳԴԵԶ = ½ Ծ . ԷՄ:

Ա. Եթէ զշրջանակ ԱԲԳԴԵԶ բազմանկեան (Ձեւ 106.) որ շուրջ զ—բէդ բոլորակաւ արտաքոյ գրիցի = Ծ դնիցեմք, եւ զտարածութիւն երեսաց նորա = Տ, եւ զշրջանակն նման —բէդեղ բազմանկեան՝ որ զնովին բոլորակաւ ներքոյ գրիցի, = ձ, եւ զերեսս նորին = փ համարիցիմք, լինիցի Տ : փ = Ծ . ՄԷ : ձ . ՄԵ: Իսկ արդ (Հ. 166.) է Ծ : ձ = ՄԷ : ՄԵ, ուստի եւ

$$Ծ = \frac{ձ \cdot ՄԷ}{ՄԵ},$$

ուրեմն փոխանակելով

$$Տ : փ = \frac{ձ \cdot \overline{ՄԷ}^2}{ՄԵ} : ձ \cdot ՄԵ = \overline{ՄԷ}^2 : \overline{ՄԵ}^2,$$

այս ինքն է Տարածութիւնք երեսաց երկուց նման կարգաւոր բազմանկեանց համեմատին ընդ միմեանս, որպէս երկրորդ կարողութիւնք կէս երկակորոց բոլորակաց ներքոյ ձգելոց:

Բ. Զհամեմատութեանս Տ : փ $=$ $\overline{\text{ՄԷ}}^2 : \overline{\text{ՄԵ}}^2$ զհետ գայ, եթէ Տ : Տ $-$ փ $=$ $\overline{\text{ՄԷ}}^2 : \overline{\text{ՄԷ}}^2 - \overline{\text{ՄԵ}}^2$, յորմէ եւ գտանի Տ $-$ փ $= \frac{\text{Տ}}{\overline{\text{ՄԷ}}^2} (\overline{\text{ՄԷ}}^2 - \overline{\text{ՄԷ}}^2)$:

Եթէ դիցի ՄԷ $=$ ա, եւ ՄԵ $=$ յ, յա՛յտ է եթէ

$$\text{Տ} - \text{փ} = \frac{\text{Տ}}{\text{ա}^2} (\text{ա}^2 - \text{յ}^2):$$

Որչափ մեծագոյն իցէ Ն թիւ համարոյ կողմանցն, այնչափ եւ մեծագոյն լինիցի յ, եթէ առանց փոփոխելոյ մնայցէ ա. եւ այնչափ առաւել նուազիցի առնելին ($\text{ա}^2 - \text{յ}^2$), որով եւ այնչափ եւս փոքր իցէ արդիւնքն $\frac{\text{Տ}}{\text{ա}^2} (\text{ա}^2 - \text{յ}^2)$ կամ թէ այլակերպութիւնն Տ $-$ փ իցէ փոքր քան զամենայն քանիոնութիւն զոր հնար իցէ ածել զմտաւ: Արդ յորժամ դէտակն կալեալ նայիցիմք ընդ ձեւն, վաղվաղակի տեսանիցեմք, եթէ բազմանկիւնն ձգեալ արտաքոյ ցանդ մեծագոյն է, իսկ որ ներքոյ զբոլորակաւ գրիցի փոքրագոյն քան զբոլորակն է, եւ թէ որչափ ինչ միանգամ մեծ իցէ Ն, այնչափ արտաքոյ ձգեալն առաւել փոքր լինիցի, իսկ որ ներքոյ գրեցաւ, երթալով մեծանայցէ, որպէս զի երկոցունց բազմանկեանցն անհնարինս մերձենալ տարածութեան երեսաց բոլորակին: Արդ աստի յայտ է, եթէ մարթ է զկարգաւոր ինչ բազմանկիւն հաշուելով իմն գտանել, որ ի բոլորակէն արտաքոյ կամ ներքոյ ձգելոյ փոքու իւիք, զոր անհնարին իցէ մարդոյ իմանալ, այլակերպ եւ այլազունակ իցէ (Համեմատեա ընդ Հ. 170. Ա եւ Բ.):

187. Տարածութիւն երեսաց բոլորակի հաւասար է կիսոյ արդեանց իւրոյ շրջապատին, եւ կէս երկակորոյն:

Զգեա շուրջ զԲ բոլորակաւ արտաքոյ, որոյ շրջապատն $= Ղ$, եւ կէս երկակտուրն $= ճ$ իցէ, կարգաւոր ինչ բազմանկիւն որոյ տարածութիւն երեսաց $= Տ$, եւ շրջանակն $= Ծ$ լինիցի. արդ է $Տ > Բ$, թէպէտեւ կարի իմն մեծագոյն իցէ, թիւ համարոյ կողմանց բազմանկեանն: Արդ դիցուք եթէ իցէ

$$ա)\ Տ = Բ + ք,$$

յորում Բ է հաստատուն, եւ ք փոփոխելի, քանզի կախեալ կայ զն թուոյ համարոյ կողմանցն: Արդ քանզի (Հ. 186.) $Տ = \frac{1}{2} Ծ \cdot ճ$, եւ զի $Ծ > Ղ$, ուստի եւ համարեսցուք եթէ $Ծ = Ղ + փ$ յորում նոյնպէս Ղ հաստատուն քանիօնութիւն է եւ փ փոփոխելի. յորմէ եւ $Տ = (Ղ + փ)\frac{ճ}{2}$, կամ

$$բ)\ Տ = \tfrac{1}{2} Ղճ + \tfrac{1}{2} փ \cdot ճ:$$

Իբրեւ զերկոսին նշանակութիւնս Տ երեսացն միմեանց հաւասարս դնիցեմք, ելանիցէ $Բ + ք = \frac{1}{2} Ղճ + \frac{1}{2} փ \cdot ճ$, յորմէ

$$գ.)\ ռ = \tfrac{1}{2} Ղճ + (\tfrac{1}{2} փճ - ք):$$

Արդ որովհետեւ $(\frac{1}{2} փճ - ք)$ մասն կախեալ կայ զն քանիօնութենէ, եւ ն չկարէ ազդել ի Բ քանիօնութիւն, զի Բ զճ կէս երկակորոյն եւեթ կախեալ կայ, եւ ճ հաստատուն ճառագայթն չկարէ ազդիազդի զօրութիւնս ունել, այլ զմի եւ զնոյն զօրութիւն, ուրեմն հարկ ի վերայ կայ, զի եթէ Բ հաստատուն իցէ, իցէ $\frac{1}{2} փճ - ք = 0$, որով եւ $Բ = \frac{1}{2} Ղճ$:

Մարթ է զյառաջադրութիւնս եւ զայս օրինակ ցուցանել: Դիցուք եթէ ½ ՂՃ չցուցանիցէ զբոլորակն ձգեալ Ճ երկակտորով, հարկ է նմա կամ փոքր եւ կամ մեծ քան զԲ լինել: Յառաջին դէպն դիցուք գրեսցուք եթէ ½ ՂՃ ցուցանիցէ զբոլորակ ինչ, որոյ ճ ճառագայթն իցէ, եւ ճ < Ճ: Արդ զմտաւ ած, եթէ զփոքու բոլորակաւ ձգեալ իցէ արտաքոյ բազմանկիւն ինչ, որոյ շրջանակն ծ ի ներքոյ մեծի բոլորակին գտանիցի, յորժամ երկոցունց բոլորակացն զնոյն կենդրոն տացես: Որովհետեւ (Հ. 186.) տարածութիւն երեսաց բազմանկեանն է = ½ ծճ. եւ ծ < Ղ եւ ճ < Ճ, ուրեմն եւ ½ ծ · ճ < ½ Ղ · Ճ, այս ինքն թէ բազմանկիւնն իցէ փոքր քան զբոլորակն, որ ներքոյ իւր ձգիցի, որ է անհնարին զի բոլորակն մասն ինչ բազմանկեանն է. ապա ուրեմն եւ այն եւս անհնարին իցէ, թէ ½ Ղ · Ճ փոքր քան զԲ իցէ:

Ապա եթէ ½ Ղ · Ճ մեծագոյն իցէ քան զԲ, յայտ է եթէ այնու մարթ է ցուցանել զտարածութիւն երեսաց այլոյ բոլորակի, որոյ կէս երկակտուրն ճ' > Ճ: Զմտաւ ած եթէ զԲ բոլորակաւ բազմանկիւն ինչ կարգաւոր արտաքոյ ձգեալ իցէ, որոյ շրջանակն Ծ կայցէ ի ներքոյ մեծի բոլորակին, յայտ է եթէ տարածութիւն երեսաց այնր բազմանկեան է = ½ Ծ · Ճ: Իսկ արդ է Ծ > Ղ, ուրեմն ½ Ծ · Ճ > ½ Ղ · Ճ այս ինքն բազմանկիւնն որ զփոքր բոլորակաւ ձգեցաւ արտաքոյ, իցէ մեծագոյն քան զմեծ բոլորակն, որ է անհնարին զի բազմանկիւնն այն կայ ի ներքոյ մեծի բոլորակին, ուստի եւ մասն ինչ է նորա. վասն որոյ եւ ½ Ղ · Ճ չկարէ > Բ լինել: Իսկ արդ որովհետեւ ½ Ղ · Ճ չկարէ ոչ մեծագոյն եւ ոչ փոքրագոյն քան զԲ լինել, ուրեմն Բ = ½ Ղ · Ճ:

Ա. Որովհետեւ Ղ = 2Ճշ (Հ. 173.), ուրեմն Բ = ½ · 2Ճշ · Ճ = $Ճ^2$ · շ, այս ինքն Տարածութիւն երեսաց բոլորակի գտանի, եթէ զերկրորդ

կարողութիւն կէս երկակտրոյն զուգողփեան թուով բազմացուցանիցես:

Ուրեմն $2Ճ = Ե$ (երկակտրոյ), լինիցի $Բ = \frac{1}{4} Ե^2 \cdot շ$:

Բ. Եթէ զտարածութիւն երեւաց երկուց բոլորակաց Բ, բ, եւ զշրջապատսն Հ, հ, զկէս երկակտրսն Ճ, ճ, եւ զերկակտրսն Ե, ե նշանագրովք նշանակիցեմք, լինիցի

$$Բ = \frac{1}{2} ՀՃ = Ճ^2 շ = \frac{1}{4} Ե^2 շ, \text{ եւ } բ = \frac{1}{2} հճ = ճ^2 շ = \frac{1}{4} ե^2 շ, \text{ ուստի } Բ : բ = Ճ^2 : ճ^2 = Ե^2 : ե^2,$$

այս ինքն Տարածութիւնք երեւաց երկուց բոլորակաց ուղիղ համեմատին ընդ երկրորդ կարողութիւնս կէս երկակտրոց կամ երկակտրոց:

Գ. Եթէ ի վերայ երից կողմանց ԱԲԳ ուղղանկիւն երեքանկեան (Ձեւ 129.), կէս բոլորակս ԲԱԳ, ԱԳԲ եւ ԱԵԳ, եւ զտարածութիւնս երեւաց նոցա նշանակիցեմք Տ, տ, տ′ նշանագրովք, յայտ է եթէ $Տ : տ : տ' = \overline{ԲԳ}^2 : \overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԱԳ}^2$, կամ $Տ : \overline{ԲԳ}^2 = տ : \overline{ԱԲ}^2 = տ' : \overline{ԱԳ}^2$, ուստի եւ $Տ : տ + տ' = \overline{ԲԳ} : \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2$, եւ քանզի $\overline{ԲԳ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2$, ուրեմն $Տ = տ + տ'$: Իսկ որովհետեւ $Տ = \Delta ԱԲԳ + մ + ն$, $տ = Մ + մ$, եւ $տ' = Ն + ն$, ուրեմն փոխանակելով $\Delta ԱԲԳ + մ + ն = Մ + մ + Ն + ն$, յորմէ

$$\Delta ԱԲԳ = Մ + Ն$$

Մ եւ Ն լուսնաձեւ տարածութիւնք երեւաց յորջորջին Իպպոկրատեան մահիկեղջիւրք, քանզի զառաջինն Իպպոկրատէս քիացի ի Յունաց աշխարհէն, աշակերտ Պիւթագորայ, զսոյն հանդամանս յայտնեաց:

188. Տարածութիւն երեւաց բաժնից բոլորակին համեմատի ուղիղ ընդ իւրեանց կենդրոնական անկիւնս, եւ ընդ աղեղունս իւրեանց:

Համարեսցուք եթէ ԱԿԲ եւ ԴԿԵ (Ձեւ 130.) իցեն երկու անկիւնք կենդրոնական, որոց կշռիցին ԱԲԿ եւ ԴԵԿ բաժինք բոլորակի։ Արդ ածցուք զմտաւ եթէ ի կէտն Կ եւ ի ԿԲ որունն յօրինիցի անկիւն մի ԲԿԶ = ԴԿԵ, յայտ է եթէ ԱԿԶ = ԱԿԲ + ԲԿԶ = ԱԿԲ + ԴԿԵ, եւ եւս եր. ԱԶԿ = ԱԲԿ + ԲԶԿ, կամ ԱԶԿ = ԱԲԿ + ԴԵԿ, քանզի հարկ է ԲԶԿ = ԴԵԿ։ Առ բովանդակութիւն երկուց կենդրոնական անկեանց կշռի բաժին մի, որ հաւասար է բովանդակութեան բաժնիցն, որ առանձինն անկեանցն կշռիցին. ապա ուրեմն բաժինքն բոլորակի ընդ կենդրոնական անկիւնս ուստի եւ ընդ իւրեանց աղեղունս ուղիղ համեմատին։

189. Տարածութիւն երեսաց բաժնի բոլորակին հաւասար է կիսոյ արդեանց իւրոյ աղեղանն դրելոյ ըստ միութեան չափոյ եւ ճառագայթին։

Ո.188 համարոյ զհետ գայ, եթէ բաժ. ԱԿԲ : բաժ. ԱԿԶ = աղ. ԱԲ . աղ. ԱԲԶ (Ձեւ 130.), ուստի եւ

$$\text{բաժ. ԱԿԲ} = \frac{\text{բաժ. ԱԿԶ} \cdot \text{աղ. ԱԲ}}{\text{աղ. ԱԲԶ}}։$$

Արդ որովհետեւ ԿԶ կայ ուղղորդ յԱԿ, ուրեմն եւ բաժինն ԱԿԶ = $\frac{1}{4}$ բոլորակի = $\frac{1}{4}$ ճ^{2}շ, եդեալ ԱԿ = ճ, եւ աղեղն ԱԲԶ = $\frac{1}{4}$ շրջապատին = $\frac{1}{4} \cdot 2$ճշ = $\frac{1}{2}$ ճշ, յորմէ փոխանակելով

$$\text{բաժ. ԱԿԲ} = \frac{\frac{1}{4}\,\text{ճ}^2\text{շ} \cdot \text{աղ. ԱԲ}}{\frac{1}{2}\,\text{ճշ}} = \frac{1}{2}\,\text{ճ} \cdot \text{աղ. ԱԲ}։$$

Ա. Տարածութիւն երեսաց ԱԵԷԲԱ հատածոյ բոլորակի գտանի, եթէ ոք յԱԲԿԵ բաժնէն, զերեքանկիւնն ԲԿԵ հանիցէ։ Այս ինքն է հատ. ԱԵԷԲԱ = ԱԲԿԵ — ΔԲԿԵ = $\frac{1}{2}$ ճ. աղ. ԲԵ — ԲԵ . ԷԿ, կամ թէ հատ. ԱԵԷԲԱ = $\frac{1}{2}$ ճ. աղ. ԲԵ —

$\frac{1}{2}\,\text{ԵԿ}\cdot\text{ԲՊ} = \frac{1}{2}\,\text{ճ}.\ \text{աղ}.\,\text{ԱԲ} - \frac{1}{2}\,\text{ճ}.\,\text{ԲՊ} = (\text{աղ}.\,\text{ԱԲ} - \text{ԲՊ})\,\frac{\text{ճ}}{2}$:

Բ. Եթէ ընդ Գ միջոց աԳբ աղեղան (Ձեւ 113.) ձգիցեմք զշօշափողն ԱԲ, որ փակիցի ի մէջ երկայնութեանց ԱՄ եւ ԲՄ ճառագայթիցն ձգելոց ընդ ա եւ բ կէտս կատարածի աԳբ աղեղան, լինիցի տարածութիւնն $\Delta\text{ԱԲՄ} = \text{ԱԲ}\cdot\frac{\text{ԳՄ}}{2}$, եւ բաժ. $\text{աԳբՄ} = \text{աղ}.\ \text{աԳբ}\cdot\frac{\text{ԳՄ}}{2}$: Իսկ արդ $\Delta\text{ԱԲՄ} >$ բաժ. աԳբՄ, ուրեմն փոխանակելով $\text{ԱԲ}\cdot\frac{\text{ԳՄ}}{2} > \text{աղ}.\ \text{աԳբ}\cdot\frac{\text{ԳՄ}}{2}$, զորս զհետ գայ, եթէ $\text{ԱԲ} > \text{աղ}.\ \text{աԳբ}$, որով եւ $\frac{\text{ԱԲ}}{2} > \frac{1}{2}\,\text{աղ}.\ \text{աԳբ}$, կամ $\text{ԱԳ} > \text{աղ}.\ \text{աԳ}$. այս ինքն է ԱԳ շօշափողն մեծագոյն է քան զաղեղն, որ կայ ի միջի Գ կիտի շօշափման, եւ ա կիտի հատանելոյ ուղիղ գծին, որով կենդրոն բոլորակին ընդ Ա կիտի կատարածի շօշափողին կապիցի:

Ուրեմն շրջանակ բազմանկեան մեծագոյն է քան զշրջապատ բոլորակին, որ զնովաւ ներքոյ ձգիցի:

190. Եթէ տարածութիւնք երեսաց երից ձեւոց համեմատիցին ընդ միմեանս, որպէս զերկրորդ կարողութիւնս երից գծից, որք ուղղանկիւն երեքանկիւն ինչ յօրինեալ կազմիցեն, ձեւն որ ի վերայ ներքնաձգին հաւասար է բովանդակութեան ձեւոցն՝ որ ի վերայ իջից. եւ խոտորնակս:

Իցեն ձեւքս Տ, Ր, Ց, որ ընդ միմեանս համեմատիցին որպէս զերկրորդ կարողութիւնս ԱԲ, ԱԳ եւ ԲԳ (Ձեւ 70.) գծիցս, եւ իցէ $\underline{\text{ԲԱԳ}} = \text{Ո} = 90^{0}$: Ըստ մերոյ համարելոյ է $\text{Տ} : \text{Ց} = \overline{\text{ԱԲ}}^{2} : \overline{\text{ԲԳ}}^{2}$, եւ $\text{Տ} : \text{Ր} = \overline{\text{ԱԲ}}^{2} : \overline{\text{ԱԳ}}^{2}$: Ի յետին հաւասարութենէ

ծագէ $Տ : Տ + Ր = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2$: Նու քանզի (Հ. 103. Բ.) $\overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2 = \overline{ԲԳ}^2$, ուստի եւ $Տ : Տ + Ր = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԲԳ}^2$· յորմէ $Տ : Ց = Տ : Տ + Ր$· ուրեմն $Ց = Տ + Ր$:

Այնպէս եւ երկրորդ մասնն: Դիցուք գրեցուք եթէ ձեւքս Տ, Ր, եւ Ց համեմատիցին, որպէս զերկրորդ կարողութիւնս ԱԲ, ԱԳ եւ ԲԳ ուղիղ գծից, եւ իցէ $Ց = Տ + Ր$: Ըստ մերոյ համարելոյ $Տ : Ց = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԲԳ}^2$, եւ $Տ : Ր = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԱԳ}^2$: Ի յետին համեմատութենէ գտանի $Տ : Տ + Ր = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2$, կամ $Տ : Ց = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2$, որով եւ $\overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԲԳ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2$, զորոյ զհետ գայ $\overline{ԲԳ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԳ}^2$. ուստի եւ է (Հ. 103. Գ.) ԱԲԳ՝ ուղղանկիւն երեքանկիւն, եւ $Ա = Ո$:

Ա. Ապա ուրեմն եթէ ոք ի վերայ ամենայն կողմանց ուղղանկիւն երեքանկեան ձգիցէ չորեքկուսիս, չորեքկուսին՝ որ ի վերայ ներքնաձգին հաւասար է բովանդակութեան չորեքկուսեաց երկոցունց իջիցն:

Բ. Ամենայն չորեքկուսի ԱԳ (Ձեւ 115.) է կէս ԲԵ չորեքկուսւոյն, որ ձգիցի ի վերայ ԲԴ անկիւնագծի նորին: Քանզի ի ԲԱԴ ուղղանկիւն երեքանկեան է $ԱԲ = ԱԴ$. ուստի եւ $\overline{ԲԴ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 + \overline{ԱԴ}^2 = 2\overline{ԱԲ}^2$, այս ինքն է $ԲԵ = 2 \cdot ԱԳ$:

191. Խնդիր: Գտանել զտարածութիւն երեսաց հարթ ինչ ձեւոյ, որ գտանիցի ի մէջ շրջապատաց երկուց չհաւասար կենդրոնակից բոլորակաց:

Լուծումն: Իցէ (Ձեւ 131.) Կ կենդրոն երկուց Բ եւ Ք բոլորակաց, որոց շրջապատքն իցեն Շ եւ շ, կէս երկակտուրն $ԱԿ = ճ$, իսկ $ԲԿ = ծ$: Արդ (Հ. 187. Ա.) բոլորակն $Բ = ճ^2 շ$, եւ $Ք = ծ^2 շ$, ուստի եւ $Բ - Ք = ճ^2 շ - ծ^2 շ = շ (ճ^2 - ծ^2)$, որ է խնդրեալ երեսքն:

Եթէ ձգիցեմք զլարն ԴԵ որ զՆ ի Բ շօշափիցէ, յայտ է եթէ ԴԵ է ուղղորդ ի վերայ ԲԿ գծի. ուստի եւ (Հ. 149. Բ, եւ 103.) է ԱԲ : ԲԴ = ԲԴ : ԲԳ, եւ $\overline{\text{ԲԴ}}^2 = \text{ԱԲ} \cdot \text{ԲԳ} = (\text{ձ} - \text{ճ})(\text{ձ} + \text{ճ}) = \text{ձ}^2 - \text{ճ}^2$: Իբրեւ զզօրութիւնս զայս հաստատիցեմք ի շ $(\text{ձ}^2 - \text{ճ}^2)$, լինիցի $\text{Բ} - \text{բ} = \text{շ} \cdot \overline{\text{ԲԴ}}^2$, որ ցուցանէ եւս զեռեսս բոլորակի, որ ԲԴ կէս երկակտրով կամ ԴԵ երկակտրով ձգեալ իցէ:

192. Խնդիր: Զգել չորեքկուսի ինչ, որ այլոց բազում չորեքկուսեաց միանգամայն հաւասար իցէ:

Լուծումն: Դիցուք գրեսցուք եթէ ա, բ, գ, կողմանք երից չորեքկուսեաց ծանուցելոց իցեն: Յօրինեսջիր ուղիղ անկիւն մի ԲԱԳ (Ձեւ 132.), զմին ի սրունիցն ԱԳ = ա գործեսջիր, եւ զմեւսն ԱԲ = բ, եւ ձգեա զներքնաձիգն ԲԳ = դ, յորմէ եւ $\text{դ}^2 = \text{ա}^2 + \text{բ}^2$: Եւ ի կատարած ձգեա զԳԴ ուղղորդ ի վերայ ԳԲ ուղղութեան, եւ արա ԳԴ = գ, եւ ձգեա զԲԴ = ե, յորմէ $\text{ե}^2 = \text{դ}^2 + \text{գ}^2 = \text{ա}^2 + \text{բ}^2 + \text{գ}^2$. եւ յայտ իսկ է, թէ ե իցէ կողմն խնդրեալ չորեքկուսւոյն: Ըստ սմին օրինակի պարտ է զիրսն վճարել, եթէ աւելի քան զերիս իցեն չորեքկուսիքն:

Զհասացելոցս զհետ գայ, եթէ մարթ իցէ գտանել զկողմն չորեքկուսւոյն՝ որ երկիցս, երիցս, չորիցս, ... իցս մեծագոյն քան զծանուցեալն իցէ: Զոր օրինակ ԱԲԳԴ (Ձեւ 133.) իցէ ծանուցեալ չորեքկուսին: Երկայնեա զմի կողմն ԱԴ՝ այնր չորեքկուսւոյ, ԴԵ եւս է ուղղորդ ի վերայ ԳԴ գծին: Յետ այսորիկ արա աԴ = ԳԴ = ԱԲ, եւ ձգեա զգիծն ուղիղ աԳ, յայտ է եթէ $\overline{\text{աԳ}}^2 = \overline{\text{աԴ}}^2 + \overline{\text{ԳԴ}}^2 = 2 \cdot \overline{\text{ԱԲ}}^2$: Յետ այնորիկ բեր զաԳ ի ԴԵ ի Դ կիտէ ի բ կոյս, եւ ձգեա զբԳ, որով $\overline{\text{բԳ}}^2 = \overline{\text{բԴ}}^2 + \overline{\text{ԳԴ}}^2 = \overline{\text{աԳ}}^2 + \overline{\text{ԳԴ}}^2 = 2\,\overline{\text{ԱԲ}}^2 + \overline{\text{ԱԲ}}^2 = 3\,\overline{\text{ԱԲ}}^2$: Դարձեալ զբԳ ուղիղ գիծն ած ի ԴԵ ի Դ կիտէ ի գ կոյս, եւ լինիցի $\overline{\text{գԳ}}^2 = 4\,\overline{\text{ԱԲ}}^2$,

նոյնպէս $\overline{\text{ԴԳ}}^2 = 5\overline{\text{ԱԲ}}^2$, $\overline{\text{ԵԳ}}^2 = 6\overline{\text{ԱԲ}}^2$, եւ այլք եւս։

193. Խնդիր։ Նկարել զչորեքկուսի, որ իցէ հաւասար պլակերպութեան երկուց չորեքկուսեաց ծանուցելոց (Ձեւ 134.)։

Լուծումն։ Իցեն ա եւ բ կողմանք երկուց չորեքկուսեաց ծանուցելոց։ Առնիջիր ԱԲ = ա, եւ ի Բ կանգնեսջիր զուղղորդ գիծն ԲԳ, եւ յԱ կիտէ ԱԳ = բ երկակտրով գրեսջիր մի աղեղն ինչ բոլորակի, որ զուղղորդ գիծն կանգնեալ ի Բ, հատանիցէ ի Գ։ ԳԲ է կողմն խնդրեալ չորեքկուսւոյն։

Քանզի իբրեւ ձգիցեմք զԱԳ, լինիցի $\overline{\text{ԲԳ}}^2 = \overline{\text{ԱԳ}}^2 - \overline{\text{ԱԲ}}^2 = \text{բ}^2 - \text{ա}^2$։

194. ՅԱԲԳ եռեքանկեան (Ձեւ 135.) ուղղանկիւնն՝ որ կազմիցի յերկուց ԱԲ եւ ԱԳ կողմանց, հաւասար է չորեքկուսւոյ ԱԴ ուղիղ գծի որ զանկիւնն յօրինեալ յայնց կողմանց հաւասարակէ, յաւելեալ յայն եւ ուղղանկիւնն կազմեալ ի ԲԴ եւ ի ԳԴ հատածոց ԲԳ երրորդ կողման։ Այսինքն է $\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԳ} = \overline{\text{ԱԴ}}^2 + \text{ԲԴ} \cdot \text{ԳԴ}$։

Զգեա բոլորակ ինչ զԱԲԳ եռեքանկեամբ, եւ երկայնեա զԱԴ մինչեւ յԵ, եւ ապա ձգեա զԲԵ գիծն եւս։ Արդ որովհետեւ ժ = ն, եւ անկ. Ե = Գ = $\frac{1}{2}$ աղ. ԱԲ, ուրեմն $\Delta\text{ԱԲԵ} \sim \text{ԱԳԴ}$, յորմէ $\text{ԱԲ} : \text{ԱԵ} = \text{ԱԴ} : \text{ԱԳ}$, ուստի $\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԳ} = \text{ԱԵ} \cdot \text{ԱԴ}$ կամ $\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԳ} = (\text{ԱԴ} + \text{ԴԵ})\,\text{ԱԴ} = \overline{\text{ԱԴ}}^2 + \text{ԴԵ} \cdot \text{ԱԴ}$, եւ քանզի $\text{ԴԵ} \cdot \text{ԱԴ} = \text{ԲԴ} \cdot \text{ԳԴ}$ (Հ. 154.), ուրեմն $\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԳ} = \overline{\text{ԱԴ}}^2 + \text{ԲԴ} \cdot \text{ԳԴ}$։

195. Ուղղանկիւնն կազմեալ յերկուց կողմանց եռեքանկեան հաւասար է ուղղանկեան՝ որ կազմիցի յերկակտրոյ բոլորակին ձգելոյ արտաքոյ շուրջանակի, եւ յուղղորդ գծէն, որ ի գագաթանէ անկեանն յօրինելոյ յերկուց կողմանցն յայնցանէ, ի վերայ երրորդ կողմանն անկանիցի։ Այս ինքն եթէ (Ձեւ

102.) ԳԹ իցէ երկակտուրն ԱԹԲԳ բոլորակին, եւ ԳՊ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ կողման, լինիցի ԱԳ . ԲԳ = ԳԹ . ԳՊ:

Ձգեա զլարն ԱԹ, ելանիցէ ΔԱԳԹ, յորում անկ. ԳԱԹ = ԲՊԳ = 90°, եւ անկ. Թ = Բ = $\frac{1}{2}$ աղ. ԱԳ, ուստի ΔԱԳԹ ∾ ΔԲԳՊ, որով ԱԳ : ԳԹ = ԳՊ : ԲԳ, յորմէ ԱԳ . ԲԳ = ԳԹ . ԳՊ:

Ա. Իբրեւ բազմացուցանիցի հաւասարութիւնս ԱԳ . ԲԳ = ԳԹ . ԳՊ, քանիօնութեամբս ԱԲ, ծագէ ԱԲ . ԱԳ . ԲԳ = ԳԹ . ԳՊ . ԱԲ = 2ԳԹ . $\frac{1}{2}$ ԳՊ . ԱԲ, եւ քանզի $\frac{1}{2}$ ԳՊ . ԱԲ = ΔԱԲԳ, ուրեմն ԱԲ . ԱԳ . ԲԳ = 2ԳԹ . ΔԱԲԳ. զորոյ զհետ գայ

$$\text{ա)}\ \Delta\text{ԱԲԳ} = \frac{\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԳ} \cdot \text{ԲԳ}}{2\text{ԳԹ}},$$

այս ինքն Տարածութիւն երեսաց երեքանկեան գտանի, եթէ ոք զարդիւնս երից կողմանցն բաժանիցէ ընդ երկպատիկն երկակտրոյ բոլորակին արտաքոյ շուրջանակի ձգելոյ. եւ

$$\text{բ)}\ \text{ԳԹ} = \frac{\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱԳ} \cdot \text{ԲԳ}}{2\,\Delta\text{ԱԲԳ}},$$

այս ինքն Երկակտուրն բոլորակին, որ շուրջ զերեքանկեամբ իւիք ձգիցի, գտանի, եթէ ոք զարդիւնս երից կողմանց, ընդ երկպատիկ տարածութիւն երեսաց երեքանկեանն բաժանիցէ:

196. Տարածութիւն երեսաց երեքանկեան հաւասար է իւրոյ շրջանակին՝ որ բազմացուցեալ իցէ կիսով ճառագայթի բոլորակին ներքոյ ձգելոյ:

ՕԱԲԳ երեքանկեամբ ծանուցելով (Ձեւ 105.) ձգեա ներքոյ զբոլորակն ԴԵԶ. յետ այսորիկ զկէտսն Ա, Բ, Գ յօդեա ուղիղ գծիւք ընդ Մ միջոցի բոլորակին, որով ΔԱԲԳ բաժանիցի յերեքանկիւնս ԱԲՄ, ԱԳՄ, եւ ԲՄԳ, որոց բարձրութիւնքն են ճառագայթքն ՄԴ, ՄԵ, ՄԶ ձգեալք առ Դ, Ե, Զ

կէտս շօշափման։ Արդ $\Delta\text{ԱԲՄ} = \text{ԱԲ}\cdot\frac{\text{ՄԴ}}{2} = \text{ԱԲ}\cdot\frac{\text{ծ}}{2}$, եւ $\Delta\text{ԱԳՄ} = \text{ԱԳ}\cdot\frac{\text{ՄԵ}}{2} = \text{ԱԳ}\cdot\frac{\text{ծ}}{2}$, եւ $\Delta\text{ԲՄԳ} = \text{ԲԳ}\cdot\frac{\text{ՄԶ}}{2} = \text{ԲԳ}\cdot\frac{\text{ծ}}{2}$, ուստի եւ $\Delta\text{ԱԲՄ} + \Delta\text{ԱԳՄ} + \Delta\text{ԲՄԳ} = (\text{ԱԲ} + \text{ԱԳ} + \text{ԲԳ})\frac{\text{ծ}}{2}$, այս ինքն $\Delta\text{ԱԲԳ} = (\text{ԱԲ} + \text{ԱԳ} + \text{ԲԳ})\frac{\text{ծ}}{2}$։

Զ $\Delta\text{ԱԲԳ} = (\text{ԱԲ} + \text{ԱԳ} + \text{ԲԳ})\frac{\text{ծ}}{2}$ հաւասարութեանս զհետ գայ, եթէ

$$\text{ծ} = \frac{2\cdot\Delta\text{ԱԲԳ}}{\text{ԱԲ} + \text{ԱԳ} + \text{ԲԳ}},$$

այս ինքն կէս երկակտուրն բոլորակի, որ ձգիցի ներքոյ զերեքանկեամբ, գտանի, եթէ զերկպատիկ անջրպետութիւն երեսաց երեքանկեանն այնորիկ, ընդ շրջանակ նորին բաժանիցես։

197. Ուղղանկիւնն կազմեալ յանկիւնագծից չորեքանկեանն ձգելոյ ներքոյ զբոլորակաւ, հաւասար է բովանդակութեան ուղղանկեանցն յօրինելոց ի յանդիմանակաց կողմանց չորեքանկեանն, այս ինքն է (Ձեւ 136.) $\text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԴ} = \text{ԱԴ}\cdot\text{ԲԳ} + \text{ԱԲ}\cdot\text{ԳԴ}$։

Զաղեղն $\text{ԲԵ} = \text{ԳԴ}$ առնիջիր, եւ ձգեա զԱԵ. լինիցի անկ. $\text{ն} = \text{մ}$, եւ զի եւս $\text{դ} = \text{գ} = \frac{1}{2}$ աղ$\cdot$ԱԴ, ուրեմն $\Delta\text{ԱԲԶ} \sim \Delta\text{ԱԳԴ}$, ուստի եւ $\text{ԲԶ} : \text{ԱԲ} = \text{ԳԴ} : \text{ԱԳ}$, յորմէ

$$1)\quad \text{ԱԳ}\cdot\text{ԲԶ} = \text{ԱԲ}\cdot\text{ԳԴ}\text{։}$$

Դարձեալ որովհետեւ $\text{մ} = \text{ն}$, ուստի եւ $\text{մ} + \text{պ} = \text{ն} + \text{պ}$, այս ինքն անկ. ԴԱԶ = անկ. ԲԱԳ, եւ $\text{ա} = \text{բ} = \frac{1}{2}$ աղ$\cdot$ԱԲ, ուրեմն $\Delta\text{ԱԴԶ} \sim \Delta\text{ԱԲԳ}$, ուստի եւ $\text{ԴԶ} : \text{ԱԴ} = \text{ԲԳ} : \text{ԱԳ}$. յորմէ

2) ԱԳ · ԴԶ = ԲԳ · ԱԴ ։

Արդ յաւելեալ ի միմեանս զհաւասարութիւնս 1, եւ 2, լինիցի ԱԳ · ԴԶ + ԱԳ · ԲԶ = ԱԴ · ԲԳ + ԱԲ · ԳԴ, կամ ԱԳ (ԴԶ + ԲԶ) = ԱԴ · ԲԳ + ԱԲ · ԳԴ, այս է ԱԳ · ԲԴ = ԱԴ · ԲԳ + ԱԲ · ԳԴ ։

Այս կանոն որպէս գործի մի է ի ձեռս մեր, որով զխնդիրն 159 համարոյն կարեմք դիւրագոյնս լուծանել։ Քանզի ձգեալ եւ զԲԹ լարն (Ձեւ 102.), ծագիցէ ԱԳԲԹ չորեքկուսին ձգեալ ի բոլորակի, որոյ մին յանկիւնագծիցն ԳԹ = 2ճ = երկակորոյն։ Արդ ըստ մերոյ կանոնիս է ԳԹ · ԱԲ = ԱԳ · ԲԹ + ԲԳ · ԱԹ, կամ 2ճ · ջ = բ · ԲԹ + ա · ԱԹ. եւ քանզի երեքանկիւնքն ԱԳԹ եւ ԲԳԹ ուղղանկիւնք են, վասն այսորիկ ԲԹ = $\sqrt{(\overline{ԳԹ}^2 - \overline{ԲԳ}^2)} = \sqrt{(4ճ^2 - ա^2)}$, եւ ԱԹ = $\sqrt{(\overline{ԳԹ}^2 - \overline{ԱԳ}^2)} = \sqrt{(4ճ^2 - բ^2)}$, ուստի եւ $2ճ \cdot ջ = բ\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + ա\sqrt{(4ճ^2 - բ^2)}$,

եւ $ջ = \frac{բ}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - ա^2)} + \frac{ա}{2ճ}\sqrt{(4ճ^2 - բ^2)}$ ։

198. Խնդիր։ Զբազմանկիւն ինչ ծանուցեալ ԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 137.) փոփոխել յայլ ինչ ձեւ, որոյ հաւասար անջրպետութիւն իցէ, եւ թիւ համարոյ կողմանցն միով թուով նուազագոյն իցէ։

Լուծումն։ Ձգեա զանկիւնագիծ մի, զոր օրինակ զԳԵ, եւ երկայնեա զԲԳ. յետ այնորիկ ընդ Դ կէտն ձգեա զուղիղ գիծն ԴԸ ∥ ԳԵ, եւ զանկիւնագիծն ԵԸ, որովք լինիցի ΔԳԵԴ = ΔԳԵԸ, ուստի եւ ΔԳԵԴ + ԱԲԳԵԶ = ΔԳԵԸ + ԱԲԳԵԶ, այս ինքն ձեւն ԱԲԳԴԵԶ = ԱԲԸԵԶ ձեւոյն, որ միով կողմամբ նուազ է։

Ա. Որովհետեւ մարթ է զձեւն, զոր գտաք, դարձեալ առանց ինչ զօրութեանն շրջելոյ, փոփոխել յայլ ձեւ՝ որ միով կողմամբ նուազագոյն իցէ, զորին զհետ գայ, եթէ գուցէ հնար զամենայն բազմանկիւն փոփոխել յերեքանկիւն ինչ, որոյ հա-

ւասար իցէ երեսայն տարածութիւն։ Զոր օրինակ եթէ ի նոր ձեւն մեր, ձգիցեմք զանկիւնագիծն ԲԵ, եւ ընդ Ը կէտն զհաւասար հեռաւորն ի նմանէ ԸԹ. մինչեւ զերկայնութիւնն ԱԲ գծին հատանիցէ, եւ զանկիւնագիծն ԵԹ, յայտ է եթէ բազմանկիւնն ԱԲԸԵԶ=ԱԹԵԶ, զի ΔԲԵԸ=ΔԲԵԹ, ուստի եւ ձեւն ԱԲԳԴԵԶ = ԱԹԵԶ։ Եւ ի կատարած. ձգեալ զանկիւնագիծն ԱԵ, եւ զհաւասար հեռաւորն ԶԷ, մինչեւ զերկայնութիւնն ԱԲ գծին յԷ հատանիցէ, եւ զանկիւնագիծն ԷԵ, յայտ է եթէ (որովհետեւ ΔԱԵԶ=ΔԱԵԷ) ΔԱԵԶ+ΔԱԹԵ = ΔԱԵԷ+ΔԱԹԵ, այս ինքն ԱԹԵԶ=ΔԷԹԵ։

Բ. Եթէ բազմանկիւնն կողմանս ի ներքս ամփոփեալս ունիցի, որպէս ԱԲԳԴԵԶԷԸ (Ձեւ 138.), պարտ եւ պատշաճ է զ'ի ներքս ամփոփեալ անկիւնսն յառաջագոյն ի բաց ջնջել։ Ի մեր ձեւս զառաջինն զանկիւնն Գ ի բաց բարձաք, ըստ այնմ օրինակի, որպէս արարաք ի խնդիրն այսր համարոյ, եւ յետ փոփոխելոյ զΔԱԷԸ յիւր հաւասար ΔԱԷԹ, զանկիւնն Զ. եւ ի կատարած, շրջեալ զΔԴԵԻ յիւր հաւասար ΔԴԻԼ, գտաք զչորեքկողմեան ձեւն ԺԹԻԼ, որ է ԱԲԳԴԵԶԷԸ բազմանկեանն հաւասար. եւ զայն եւս կարես յերեքանկիւն ինչ հաւասար տարածութեամբ փոփոխել։

199. Խնդիր։ Ձգել չորեքկուսի մի որ հաւասար իցէ ԱԲԳԴ ուղղանկեան ինչ ծանուցելոյ։

Լուծումն։ Երկայնեա (Ձեւ 139.) զկողմն ԱԴ մինչեւ ցԵ, որպէս զի ԴԵ=ԴԳ, իցէ հասարակեա զուղիղ գիծն ԱԵ ի Զ, յետ այնորիկ ի Զ միջոցէ անտի ԱԶ կէս երկակորով ձգեա զկէս բոլորակն ԱԷԵ, եւ երկայնեա զԴԳ մինչեւ ցշրջապատ բոլորակին։ Արդ է ԱԴ : ԴԷ = ԴԷ : ԴԵ . ուստի $\overline{ԴԷ}^2$ = ԱԴ.ԴԳ, քանզի ԴԵ=ԴԳ։ Ապա ուրեմն չորեքկուսին կանգնեալ ի վերայ ԴԷ կողման, հաւասար է ԱԲԳԴ ուղղանկեան մերոյ։

200. Խնդիր: Հատանել մասն ինչ ի բազմանկեանէ ծանուցելոյ, որ ողջոյն բազմանկեանն նման իցէ, եւ համեմատիցի ընդ նմա հաստատուն ինչ կշռութեամբ:

Լուծումն: Համարեսցուք եթէ կամք իցեն մեզ յԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 140.) բազմանկեանէ անտի մասն ինչ հատանել, որպէս զի երկոքին բազմանկիւնքն համեմատիցին ընդ միմեանս որպէս մ : ն: Արդ զմին ի կողմանց բազմանկեանն զոր օրինակ զԱԲ հատ մ : ն կշռութեամբ, եւ դիցուք եթէ Է իցէ կէտն հատանելոյ, այս ինքն ԱԲ : ԱԷ = մ : ն. յետ այսորիկ ձգեա ի վերայ ԱԲ գծի, որպէս ի վերայ երկակտրոյ կէս բոլորակ ինչ, եւ յԷ կէտն կանգնեա զԷԸ ուղղորդ գիծն, եւ արա Աբ = ԱԸ: Ապա ի վերայ Աբ կողման ձգեա զբազմանկիւնն Աբգդեզ ∾ ԱԲԳԴԵԶ (Հ. 128.), եւ այն իսկ է բազմանկիւնն զոր խնդրես: Քանզի եթէ զծանուցեալ բազմանկիւնն համառօտիւք կարճառօտ նշանակիցեմք Պ չափով, եւ զգտեալն պ, յայնժամ Պ : պ = $\overline{ԱԲ}^2 : \overline{Աբ}^2$, կամ Պ : պ = $\overline{ԱԲ}^2 : \overline{ԱԸ}^2$ կամ Պ : պ = $\overline{ԱԲ}^2$: ԱԲ · ԱԷ, այս է Պ : պ = ԱԲ : ԱԷ = մ : ն:

201. Խնդիր: Զտարածութիւն երեսաց երեքանկեանն յիւրոց երից կողմանցն գտանել:

Լուծումն: Համարեսցուք եթէ իցէ ΔԱԲԳ, (Ձեւ 68.) զոր առաջի կայցէ մեզ հաշուել, որոյ կողմանքն ԲԳ = ա, ԱԳ = բ, ԱԲ = գ ծանուցեալ իցեն: Տարածութիւն երեսաց երեքանկեանն վասն կարճ ի կարճոյ դրոշմելոյ իցէ = Տ. արդ եթէ ԱԴ ⊥ ԲԳ իցէ, եւ Տ = ½ ԲԳ · ԱԴ (Հ. 180.): Արդ որովհետեւ (Հ. 107.)

$$ԱԴ = \frac{1}{2ա}\sqrt{[(ա+բ+գ)(բ+գ-ա)(ա+գ-բ)(ա+բ-գ)}, \text{ կամ}$$

$= \frac{2}{ա}\sqrt{[Բ(Բ-ա)(Բ-բ)(Բ-գ)]}$, յորում $Բ = \frac{ա+բ+գ}{2}$, ուրեմն փոխանակելով

$$S = \frac{ա}{2}\cdot\frac{1}{2ա}\sqrt{[(ա+բ+գ)(բ+գ-ա)(ա+գ-բ)(ա+բ-գ)]}$$ կամ

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(ա+բ+գ)(բ+գ-ա)(ա+գ-բ)(ա+բ-գ)]} = \sqrt{[Բ(Բ-ա)(Բ-բ)(Բ-գ)]}:$$

Ա. Եթէ հաւասարասրուն իցէ երեքանկիւնն, զոր օրինակ $բ = գ$, յայնժամ փոփոխի վերին հաւասարութիւնն ի

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(ա+2բ)(2բ-ա)\times ա^2]} = \frac{ա}{4}\sqrt{[(ա+2բ)(2բ-ա)]} = \frac{ա}{4}\sqrt{(4բ^2-ա^2)}:$$

Ի հաւասարութենէ աստի ծագէ $բ = \frac{\sqrt{(16S^2+ա^4)}}{2ա}$ եւ $ա = \sqrt{[2բ^2 \mp 2\sqrt{(բ^4-4S^2)}]}$, կամ $ա = \sqrt{(բ^2+2S)} \mp \sqrt{(բ^2-2S)}$, (Տես Նշան. համր. Հ. 391.):

Բ. Եթէ հաւասարակող իցէ ծանուցեալ երեքանկիւնն այս ինքն է $ա = բ = գ$, յայնժամ հաւասարակաց օրինակս մեր փոփոխի ի

$$S = \frac{ա^2}{4}\sqrt{3}:$$

Զորոյ զհետ գայ,

$$ա = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3}\sqrt{[3S\cdot\sqrt{3}]}:$$

ԵՐԿՐՈՐԴ ՄԱՍՆ

ՀԱՍՏԱՏԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ՀԱՍՏԱՏԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ԳԼՈՒԽ Ա

ՅԱՂԱԳՍ ԴՐԻՑ ՈՒՂԻՂ ԳԾԻՑ ԱՌ ՀԱՐԹ ԵՐԵՍՍ, ԵՒ ԵՐԵՍԱՑՆ ԱՌ ՄԻՄԵԱՆՍ

202. Հարթ է զամենայն երեսս, որպէս հասարակաց սահման երկուց անջրպետութեանց համարել. ապա ուրեմն երկու կողմանք են երեսաց, յորոց վերայ ազգիազգի երկրաչափական մարմինք կալ կարեն։

Եթէ գիծ ինչ եւ երեսք ի միում միայն կիտի այնպէս իմն միմեանց պատահիցեն, որպէս զի գիծն գոնեա յերկոսին կողմանս այնր կիտի ի վերայ միոյ կողման երեսացն կայցէ, ասի գծին զերեսն շօշափել. իսկ եթէ սմին հակառակ գիծն յերկոսին կողմանս կիտին, այլ յայլեւայլ կողմանս երեսացն գտանիցի, ասի երեսացն ի գծէ անտի հատանել։

Սոյն անուանք ի կիր արկանին, յորժամ երկու երեսք ի միում կիտի կամ ի միում գծի այնպէս իմն միմեանց պատահիցեն, որպէս զի մին ի նոցանէ գոնեա ի միում կիտի կամ ի գծի, ի նմին կամ յայլեւայլ կողմանս միւսոյն գտանիցի։ Դարձեալ հնար է լինել, զի երեսք ինչ ի գծէ իմեքէ կամ յայլ ինչ երեսաց ի բազում կէտս շօշափիցի կամ հատանիցի, եւ կամ յոմանս շօշափիցի, եւ յայլս հատանիցի։

Յասացելոցս մարթի նովին օրինակաւ, որով ի գիծսն վարեցաք դիւրաւ ցուցանել, եթէ գիծն կամ երեսքն, որ զերկուս կէտս, որ յերկոսին կողմանս երեսացն գտանիցեն՝ ընդ միմեանս յօդիցէ,

ի հարկէ իսկ զերեսն հատանէ. դարձեալ գիծն կամ երեսք որ զերկուս կէտս, որ ներքոյ եւ արտաքոյ մարմնոյն գտանիցին, ընդ միմեանս յօդիցէ, զվերին երեսս մարմնոյն հատանէ. եւ ի կատարած՝ ուղիղ գիծն կամ երեսք՝ որ անցանիցէ ընդ կէտ ինչ եղեալ ներքոյ մարմնոյն, զվերին երեսս մարմնոյն հատանէ, ուղիղ գիծն գէթ յերկուս կէտս, իսկ երեսքն յուղիղ գիծս, որով կազմի շրջանակ հարթ ինչ ձեւոյ, որ անուանեալ կոչի Կտրուած մարմնոյ յերեսաց:

203. Ա. Կէտն՝ յորում գիծ ինչ եւ երեսք միմեանց պատահիցեն ասի Ոտն կամ Անցք: Եթէ գիծ ինչ՝ ուղղորդ կայցէ ի վերայ ամենայն գծից, զորս հնար իցէ յերեսս ինչ յանցից անտի ձգել, ասի եթէ գիծն այն Ուղղորդ կայ ի վերայ երեսացն այնոցիկ. ամին նման եւ երեսքն ուղղորդ ի վերայ այնր ուղիղ գծի: Իսկ ի հակառակ դէպսն, գիծն՝ որ ի վերայ կայ, ասի Ծուռ կամ Միտեալ:

Բ. Եթէ ուղիղ գիծ ինչ առանց կատարելոյ յերկոսին կողմանս երկայնեսցի, եւ ընդ երեսսն՝ որ եւ առանց կատարելոյ երկայնեսցի, ընդ հարկանել չկարիցէ, ասի Հաւասար հեռաւոր ի հարթ երեսաց: Այնպէս եւ երկու երեսք ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են, եթէ միմեանց չկարիցեն պատահել, թէպէտեւ առանց կատարելոյ երկայնեսցին:

Գ. Եթէ ուղիղ ինչ գիծ ԱԳ (Ձեւ 141.) որ զինչ եւ իցէ ԱԳԲ անկեամբ կայցէ ի վերայ ՄՆ երեսաց, եւ յԱ կիտէ կատարածի յայնց երեսաց վերայ անկանիցի ուղղորդ գիծն ԱԲ, ուղիղ գիծն ԲԳ, որ ամենեւին ի ՄՆ գտանիցի, անուանեալ կոչի Զգումն ԱԳ գծի, իսկ ուղղորդ գիծն ԱԲ ասի Զգական գիծ, եւ անկիւնն ԱԳԲ, զոր ուղիղ գիծն ԱԳ ընդ իւրումն ԲԳ ձգման յօրինեալ կազմիցէ, ասի Անկիւն միտութեան ԱԳ ուղիղ գծի ի ՄՆ երեսս:

Դ. Զայնց՝ որ վասն ուղիղ գծի եւ հարթ երեսաց ասացեալ են, զհետ գայ, զի եթէ երկու կէտք հարթ ինչ երեսաց միով ուղիղ գծիւ յօդիցին, ամենայն մասունք այնր ուղիղ գծի ի նմին երեսս գտանին, եւ եթէ ուղիղ գիծն երկայնեսցի, երկայնութիւնն եւս ի նոյն երեսս գտանի: Արդ եթէ ուղիղ ինչ գիծ երկուս կէտս ընդ հարթ ինչ երեսաց ունիցի հասարակաց, յայնժամ կայ բովանդակ ի նմին երեսս:

204. Գիծն հատանելոյ զմիմեանս երկուց հարթ երեսաց է մի ուղիղ գիծ:

Վասնզի եթէ զմտաւ ածիցեմք, եթէ ընդ երկուս կէտս այնր կտրուածոյ ուղիղ ինչ գիծ ձգիցի, այն յերկոսին եւս երեսսն կայ, ուստի եւ կտրուածն նոյն եւեթ լինել կարէ: Իսկ արդ բաց յայսմ գծէ չէ հնար երկոցունց երեսաց, այլ եւս կէտ ունել հասարակաց, ապա թէ ոչ անկանէին ի վերայ միմեանց երեսքն (Հ. 25.), եւ զմի եւեթ երեսս յօրինէին:

205. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԴԵ զմիմեանս հատանիցեն (Ձեւ 142.), երկոքեանն եւս ի միոյ երեսաց վերայ կան:

Վասնզի եթէ ի ձեռն ԱԲ ուղիղ գծի եւ որ զինչ եւ իցէ Դ կէտի ԴԵ միւսոյ գծին, հարթ երեսս հաստատիցեմք, ԴԵ գիծն զերկուս կէտս Դ եւ Գ ընդ երեսացն այնոցիկ ունիցի հասարակաց, ուստի եւ կայ ի նմին:

Զաասցելոցս զհետ գայ,

Ա. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԴԵ, որք ի միոյ հարթ երեսաց վերայ գտանիցին, յերրորդ ՁԷ գծէ անտի հատանիցին, ՁԷ գիծն եւս կայ ի նոյն երեսս: Վասնզի ՁԷ հատանօղն ունի ընդ ԲԳԴ երեսաց երկուս կէտս Ը եւ Թ հասարակաց:

Բ. Ուրեմն երեք կողմանքն եւս ուղղագիծ եռեքանկեան ի նմին երեսս գտանին:

Գ. Եւս երկու հաւասար հեռաւոր գիծք ի միոյ երեսաց վերայ գտանին, եւ եթէ յերրորդ ինչ գծէ հատանիցին, հատանողն եւս ի նոյն երեսն կայ:

Եթէ երկու ուղիղ գիծք ի վերայ երրորդ ինչ գծի ուղղորդ կայցեն, զայնր ոչ զհետ գայ, եթէ երկոքին ուղղորդ գիծքն այնոքիկ ի միմեանց հաւասար հեռաւոր իցեն, քանզի այս յայնժամ եւեթ դիպի, յորժամ երկոքին ուղղորդ գիծքն ի միոյ երեսաց վերայ գտանիցին:

206. Իբրեւ նկարիցէ ոք ի միտս իւր եթէ ՇՊ (Ձեւ 143.) ի վերայ ՄՆ երեսաց կայցէ, եւ այն շուրջանակի զՇՆ հասարակաց գծին հատանելոյ շարժիցի, երկոքեան երեսքն որպէս զորունս ինչ, ի վերայ ՇՆ գծի գագաթան յօրինեալ կազմեն անկիւն ինչ, որ անուանեալ կոչի Անկիւն երեսաց: Արդ եթէ ի վերայ ՇՆ գծի գագաթան զԳ կէտ ինչ դնիցեմք, եւ ի ՇՊ եւ ի ՄՆ երեսաց վերայ ձգիցեմք զուղիղ գիծսն ԱԳ եւ ԲԳ ուղղորդս ի ՇՆ. յայտ է եթէ ի ժամանակի, յորժամ ՇՊ զՆՇ գծին շարժիցի շուրջանակի, ԱԳ ուղիղ գիծն այնչափ ինչ հեռանայ ի ԲԳ ուղիղ գծէ անտի, որչափ ինչ միանգամ ՇՊ երեսքն ի ՄՆ երեսաց հեռացեալ մեկուսի գնայցեն, կամ ուղղագիծ անկիւնն ԱԳԲ նոյն է ընդ անկեան երեսաց կամ ընդ միտութեան ՇՊ եւ ՄՆ երեսաց: Եթէ անկիւն միտութեան երկուց երեսաց ուղիղ իցէ, ասի եթէ երկոքին երեսքն ուղղորդ կան ի վերայ միմեանց: Անկիւնն երեսաց չորիւք նշանագրովք նշանակի, որպէս զի երկոքին նշանագիրքն, որովք գիծն գագաթան նշանակիցի, ի միջին վայրի գտանիցին, զոր օրինակ ՏՆՇՐ կամ թէ ՏՆՇՄ, բազում անգամ եւ երիւք նշանագրովք, որպիսի ինչ ՏՆՄ, ՊՇՐ կամ ՄՆՊ:

207. Եթէ ուղիղ գիծն ԱԲ (Ձեւ 144.) իցէ ուղղորդ ի վերայ Բ կէտի հատանելոյ զմիմեանս երկուց ԲԳ եւ ԲԴ ուղիղ գծից, որք ի միոյ ՄՆ երեսաց վերայ գտանիցին, է ուղղորդ եւ ի վերայ այլոյ

ԲԵ որ զինչ եւ իցէ ուղիղ գծի, ի նմին ՄՆ երեսս ընդ Բ կէտն ձգելոյ, այս ինքն է ուղղորդ գլխովին ի վերայ ՄՆ երեսաց։

Ձգեա զուղիղ գիծն ԳԴ. յետ այնորիկ երկայնեա զգիծն ԱԲ մինչեւ ցԶ, որպէս զի ԲԶ=ԱԲ լինիցի, եւ զկէտսն Գ, Ե, Դ յօդեա ընդ Ա եւ Զ. արդ որովհետեւ ԲԴ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԶ ուղիղ գծի, ուրեմն ΔԱԲԴ ≅ ΔԲԴԶ (Հ. 52.), յորմէ ԱԴ=ԴԶ։ Վասն սոցին իսկ պատճառաց է եւ ΔԱԲԳ ≅ ΔԲԳԶ, ուստի եւ ԱԳ = ԳԶ։ Եւ արդ՝ քանզի ԱԳ=ԳԶ, ԱԴ=ԴԶ եւ ԳԴ=ԳԴ, ուրեմն ΔԱԳԴ ≅ ΔԳԴԶ, յորմէ անկ. ԱԳԴ=անկ. ԴԳԶ կամ անկ. ԱԳԵ = անկ. ԵԳԶ. զորս զհետ գայ եթէ ΔԱԳԵ ≅ ΔԳԵԶ, որով ԱԵ=ԵԶ։ Իսկ արդ որովհետեւ ԱԲ=ԲԶ, ԱԵ=ԵԶ, եւ ԲԵ=ԲԵ, ուրեմն ΔԱԲԵ ≅ ΔԲԵԶ, ուստի եւ անկ. ԱԲԵ= անկ. ԵԲԶ. զորս զհետ գայ, եթէ ԱԲ կամ ԱԶ իցէ ուղղորդ ի վերայ ԲԵ գծի, ուրեմն եւ ուղղորդ ի վերայ բովանդակ իսկ ՄՆ երեսաց (Հ. 203. Ա.)։

208. Յասացելոցս զհետ գայ, Եթէ երեսք ԱԲԴ ուղիղ անկեան շուրջ զհաստատուն ԱԲ գծիւ շարժիցի, ի ժամանակի անդ շարժելոյն ԲԴ սրունքն նկարեն զՄՆ երեսս որ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ կամ ԱԶ գծից։ Քանզի իբրեւ ԱԲԴ ի դիրս ինչ զոր օրինակ յԱԲԵ հասանիցէ եւ ԲԴ ի նմին ժամանակի ի ԲԵ ուղիղ գծի չգտանիցի, յայնժամ յԱԲԵ երեսս ի նմին Բ կէտի երկու ուղղորդք ի վերայ ԱԶ գծի ձգիցին. որ անպատեհ իմն է։

209. Եթէ ուղիղ գիծքս ԲԳ, ԲԴ, ԲԵ.... (Ձեւ 145.) ի միում Բ կէտի զմիմեանս հատանիցեն, եւ մեւս եւս գիծ ԱԲ կայցէ ի Բ կէտի ուղղորդ ի վերայ ամենայն գծիցն միանգամայն. գիծքն այնոքիկ ի միոյ ՄՆ երեսաց վերայ գտանին։

Համարեսցուք եթէ ի ձեռն երկուց ԲԳ եւ ԲԵ ուղիղ գծից հաստատիցին հարթ երեսքն ՄՆ։

Արդ եթէ ԲԴ ի ՄՆ երեսաց վերայ չկայցէ, հարկ է նմա կամ ի ներքոյ եւ կամ ի վերոյ քան զերեսն զայնոսիկ անկանել: Արասցուք յանձն, եթէ ԲԴ ի ներքոյ կայցէ: Արդ ի ձեռն ԴԲԱ անկեան հաստատեա զԱԴ երեսս, որ զՄՆ ի ԲՋ որ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ գծի, հատանիցէ: Իսկ արդ ըստ մերոյ համարելոյ եւս է ԲԴ ⊥ ԱԲ, ուրեմն յԱԴ երեսսն ի միում Բ կէտի ի վերայ ԱԲ գծի ուղղորդ կայցեն երկու գիծք, որ է անհնարին: Ապա ԲԴ չկարէ կալ ի ներքոյ ՄՆ երեսաց: Զնոյն ձեւ օրինակի մարթ է ցուցանել, եթէ չէ հնար ԲԴ երեսաց կալ ի վերոյ քան զՄՆ երեսս. զորոց զհետ գայ, եթէ հարկ ի վերայ կայ նմա ի վերայ ՄՆ երեսաց գտանել:

210. Ի վերայ երեսաց ինչ ծանուցելոյ ի միջէ կէտէ որ արտաքոյ նորին գտանիցի, մարթ է մի եւեթ ուղղորդ գիծ ձգել:

Դնիցուք գրեսցուք եթէ (Ձեւ 145.) ԱԲ կայցէ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց: Եթէ մարթ ինչ էր յԱ կէտէ մեւս եւս ուղղորդ գիծ ԱԳ ի վերայ ՄՆ երեսաց ձգել, յայնժամ հարկ ի վերայ կայր անկ. ԱԳԲ = անկ. ԱԲԳ = Ո լինելոյ, որ անպատեհն է (Հ. 76. Բ.):

211. Ի միում կէտի հարթ ինչ երեսաց, մարթ է մի եւեթ ուղղորդ գիծ ի վերայ երեսացն այնոցիկ ձգել:

Եթէ ի Բ կէտի (Ձեւ 145.) բաց յԱԲ ուղղորդ գծէ անտի հնար ինչ իցէ մեւս եւս ԲԷ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսացն ձգել, եւ ի ձեռն ԱԲԷ անկեան հաստատիցին երեսքն ԱԹ, որ զՄՆ ի ԲԹ ուղիղ գծի հատանիցէ, յայտ է եթէ հարկ է անկ. ԷԲԹ = անկ. ԱԲԹ = Ո լինել, որ անպատեհ իմն է, քանզի անկ. ԷԲԹ < անկ. ԱԲԹ:

212. ԱԳԲ անկիւնն միտութեան ԱԳ ուղիղ գծի ի ՄՆ երեսս (Ձեւ 141.) է փոքրագոյնն քան

զամենայն անկիւնս, որ յօրինիցին յԱԳ եւ յայլ ԳԴ ուղիղ ինչ գծէ ձգելոյ ի Գ անցից ի վերայ ՄՆ երեսաց:

Ձգեա զԱԲ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց, եւ ԳԴ = ԳԲ (որ է ձգումն ԱԳ գծին) առնիջիր, եւ յօդեա զԴ ընդ Ա եւ Բ կէտան: Արդ որովհետեւ յԱԲԴ ուղղանկիւն երեքանկեանս էջն ԱԲ < ԱԴ, դարձեալ ԱԳ = ԱԳ եւ ԲԳ = ԳԴ, ուրեմն անկ. ԱԳԲ < անկ. ԱԳԴ (Հ. 69.):

Յասացելոցս զհետ գայ, զի եթէ ԱԳԲ անկիւնն փոքրագոյնն իցէ, յայտ է եթէ իւր իսկ լրումն ԱԳԶ մեծագոյնն լինիցի:

213. Եթէ ԱԲ ուղիղ գիծն (Ձեւ 144.) ի Բ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսացն գտանիցի, եւ ի սմին իսկ երեսս ուղիղ գիծ ինչ ԲԵ կայցէ ուղղորդ ի վերայ այլոյ ԳԴ ուղիղ գծի, եւ ԱԵ ուղիղ գծիւ յօդիցին ընդ միմեանս որ զինչ եւ իցէ Ա կէտ ուղղորդ գծին եւ Ե, այս ուղիղ գիծ եւս ուղղորդ է ի ԳԴ. եւ խոտորնակս:

Արա ԳԵ = ԵԴ, եւ ձգեա զուղիղ գիծսն ԱԳ, ԱԴ, ԲԳ եւ ԲԴ. քանզի ԲԵ կայ ուղղորդ ի վերայ ԳԴ ուղիղ գծին եւ ԳԵ = ԵԴ, յայտ է եթէ ΔԲԵԳ $\cong$ ΔԲԵԴ, ուստի եւ ԲԳ = ԲԴ: Արդ որովհետեւ ԱԲ կայ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց, ուրեմն է ուղղորդ ի վերայ ԲԳ եւ ԲԴ ուղիղ գծից. յորմէ յայտ է եթէ ուղղանկիւն երեքանկիւնքն ԱԲԳ եւ ԱԲԴ միմեանց պատշաճականք իցեն (Հ. 52.), ուստի եւ ԱԳ = ԱԴ: Ապա ուրեմն եւ ԱԳԵ եւ ԱԴԵ երեքանկիւնքն միմեանց պատշաճականք են (Հ. 54.). զորոյ զհետ գայ, եթէ անկ. ԱԵԳ = անկ. ԱԵԴ, յորմէ եւ ԱԵ ուղղորդ ի վերայ ԳԴ ուղիղ գծին:

Սոյնպէս եւ երկրորդ մասն: Եթէ ԱԲ ⊥ եր. ՄՆ (այս ինքն ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց), եւ յոր զինչ եւ իցէ Ա կիտէ այսր ուղղորդ գծի ձգի-

ցեմք զԱԵ ուղիղ գիծ ուղղորդ ի վերայ որ զինչ եւ իցէ ԳԴ ուղիղ գծի ի ՄՆ երեսս ձգելոյ, ուղիղ գիծն ԲԵ որ զերկուսին անցանէ Բ եւ Ե ընդ միմեանս յօդիցէ, իցէ ուղղորդ ի վերայ ԳԴ ուղիղ գծի։ Վասնզի յորժամ ԵԳ = ԵԴ գործիցեմք, եւ զկէտսն Գ եւ Դ ընդ Ա եւ Բ յօդիցեմք, լինիցի, ΔԱԳԵ ≅ ΔԱԴԵ (Հ. 52.), ուստի եւ ԱԳ = ԱԴ, որով է եւս ΔԱԲԳ ≅ ΔԱԲԴ (Հ. 68.), ուստի ԲԳ = ԲԴ, եւ զսորին զհետ գայ դարձեալ եթէ ΔԲԳԵ ≅ ΔԲԴԵ (Հ. 54.)․ ուրեմն անկ. ԲԵԳ = անկ. ԲԵԴ = Ո, յորմէ ԲԵ ⊥ ԳԴ։

Ա. Ապա ուրեմն ուղիղ գիծն ԳԴ ի կէտն Ե կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԵԲ երեսաց (Հ. 207.)։

Բ. Արդ եթէ ոք ընդ Ե անցս ԱԵ ծուռ գծին ի վերայ ԲԵ ձգման նորին ուղղորդ գիծ ինչ ԳԴ ի ՄՆ երեսս ձգիցէ, ԳԴ կայ ուղղորդ եւս ի վերայ ԱԵ ծուռ գծի, եւ խոտորնակի եթէ ուղիղ ինչ գիծ ԳԴ, որ ի վերայ ՄՆ երեսաց գտանիցի, կայցէ ուղղորդ ի վերայ ԱԵ ծուռ գծի յԵ անցս նորին, կայ ուղղորդ եւ ի վերայ ԲԵ ձգման այնր ԱԵ միտեալ գծի։

Գ. Օրէնքս, որպէս գործի մի է ի ձեռս մեր, որով կարիցեմք ի միջէ Ա կիտէ ծանուցելոյ, որ արտաքոյ ՄՆ երեսացն գտանիցի, ձգել գիծ ինչ ուղղորդ ի վերայ երեսացս այսոցիկ։ Այս ինքն է ի վերայ ՄՆ երեսաց ձգեա ուղիղ ինչ գիծ ԳԴ որպէս եւ կամք իցեն, յետ այնորիկ ի ձեռն այնր ուղիղ գծի եւ Ա կիտի հաստատեա հարթ երեսս ԱԳԴ, եւ ի նմին երեսաց վերայ ձգեա ԱԵ ⊥ ԳԴ։ Ապա ի ՄՆ երեսաց վերայ յԵ կիտի անդ ձգեա ի վերայ ԳԴ ուղիղ գծի ուղղորդ ինչ գիծ ԵԲ, եւ ԱԵԲ անկեամբ հաստատեա հարթ երեսս։ որ զՄՆ ի ԲԵ հատանիցէ, եւ ի վերայ ԱԵԲ երեսաց յԱ կիտէ ի վերուստ ձգեա ուղղորդ գիծ ԱԲ ի ԲԵ, ուղիղ գիծն այն է ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց։

214. Եթէ ի միջէ Ա կիտէ (Ձեւ 146.) ԱԲ ուղիղ գծին, որ կայցէ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց, ձգիցես բազում ուղիղ գիծս ԱԳ, ԱԴ, ԱԵ, ԱԶ,... յայնժամ Առաջին՝ ամենայն գիծքն, որ հաւասար հեռի ի Բ ոտից ԱԲ ուղղորդ գծին զՄՆ երեսս հատանիցեն՝ միմեանց հաւասարք են, եւ խոտորնակի Երկրորդ անգամ Գիծն որ առաւել ի Բ անցիցն հեռացեալ իցէ, մեծագոյն է քան զայլ գիծս ուղիղս, որ մերձ ի Բ զՄՆ հատանիցեն, եւ Երրորդ անգամ, Ուղղորդ գիծն ԱԲ կարճագոյն է քան զայլ գիծսն՝ որ յԱ կիտէ առ ՄՆ ձգել կարիցեն:

Ցուցումն. Ա մասին: Դիցուք գրեցուք եթէ ԲԳ = ԲԶ, յայնժամ եւ ΔԱԳԲ ≅ ΔԱԶԲ, որովհետեւ անկ. ԱԲԳ = անկ. ԱԲԶ, եւ ԱԲ = ԱԲ. ուրեմն եւ ԱԳ = ԱԶ: Ըստ նմին օրինակի ցուցանի, եթէ ԲԳ = ԲԶ, յորժամ ԱԳ = ԱԶ գնիցեմք:

Բ մասին: Որովհետեւ անկ. ԱԲԳ = Ո, ուրեմն անկ. ԱԳԲ < Ո, ուստի եւ լրումն անկ. ԱԳԲ > Ո, ուրեմն ԱԴ > ԱԳ (Հ. 64:): Ըստ նմին օրինակի ցուցանի եթէ ԲԴ > ԲԶ, յորժամ ԱԴ > ԱԶ իցէ:

Գ մասին: ՅԱԲԳ ուղղանկիւն երեքանկեան ներքնաձիգն ԱԳ > ԱԲ:

Ա. Ապա ուրեմն ուղղորդ գիծն ԱԲ ցուցանէ զբացարձակութիւն Ա կիտի ի ՄՆ երեսաց:

Բ. Կէտքն Գ, Ե, Զ, որ հաւասար հեռի իցեն յԱ կիտէ ԱԲ ուղղորդ գծին, հաւասար հեռի կան եւ ի Բ ոտից նորին, ուստի եւ կան ի շրջապատի բոլորակի իւիք, որոյ միջոց Բ է, եւ կէս երկակտուր ԲԳ: Քանզի յուղղանկիւն երեքանկիւնսն ԱԲԳ, ԱԲԵ, ԱԲԶ ըստ մերոյ համարելոյ ներքնաձիգքն ԱԳ, ԱԵ, ԱԶ միմեանց հաւասար են, եւ ԱԲ էջն նոյն հասարակաց, ուրեմն երեքանկիւնքն այնոքիկ միմեանց պատշաճականք են, յորմէ եւ ԲԳ = ԲԵ = ԲԶ:

Գ. Ամենայն բազմանկիւն, որոյ իցէ կենդրոն ձեւոյ, այս ինքն է բազմանկիւնն՝ զորով մարթ իցէ բոլորակ ինչ ձգել շուրջանակի, ունի հանգամանս, զի գագաթունքն ամենայն անկեանց ձեւոյն հաւասար հեռի են ի զինչեւիցէ կիտէ ուղղորդ գծին, որ անկանիցի ի վերայ միջոցի ձեւոյն: Դարձեալ եւ այն եւս յայտնի է, զի եթէ անկիւնք բազմանկեանն ի միոջէ կիտէ ուղղորդ գծին, որ ի վերայ երեւաց բազմանկեանն անկանիցի, հաւասար հեռի իցեն, հաւասար հեռի կան եւ յամենայն կիտից այնր ուղղորդ գծի, ուստի եւ յոտից նորա, այս ինքն է, եթէ Ա յոր բազմանկեան է միջոց ինչ ձեւոյ, եւ այն կէտ իցէ միջոցն, յորում ուղղորդ գիծն, զորմէ վերագոյն ասացաւ, զհարթ երեւս բազմանկեանն հատանիցէ:

Դ. Եթէ ուղիղ գիծքն ԱԳ, ԱԵ, ԱԶ, ... որ զկէտն Ա, որ արտաքոյ ՄՆ երեւացն կայ, ընդ Գ, Ե, Զ, ... անկեանց ԳԵԶԷ բազմանկեանն որ ի նոյն երեւս, յօդիցեն, միմեանց հաւասար իցեն, յայնժամ առաջին՝ բազմանկիւնն ԳԵԶԷ ունի միջոց ինչ ձեւոյ, եւ երկրորդ անգամ՝ ԱԲ ուղղորդ գիծն ձգեալ ի վերայ ՄՆ երեւաց ընդ միջոցս ընդ այս հատեալ անցանէ: Որ ասացաւն յանձնէ իսկ յայտ է:

Ե. Որովհետեւ ամենայն կէտք ԱԲ ուղղորդ գծին ի կիտից անտի ԳԵԶ շրջապատին հաւասար հեռի են, վասն այնորիկ մարթ է դիւրագոյն ի միոջէ Ա կիտէ ծանուցելոյ ուղղորդ ինչ գիծ ի ՄՆ երեւաց վերայ ձգել: Քանզի իբրեւ յԱ կիտէ անտի երիս հաւասար գիծս ուղիղս ԱԳ, ԱԵ եւ ԱԶ ձգիցեմք, եւ յետ այնորիկ նոքօք ի ՄՆ հարթ երեւաց վերայ բոլորակ ինչ գրիցեմք, եւ զնորին Բ միջոցն ընդ Ա ծանուցեալ կիտին յօդիցեմք, լինիցի ԱԲ խնդրեալ ուղղորդ գիծն:

215. Խնդիր: Ընդ Բ (Ձեւ **144.**) կէտ մի ի կիտից ԱԶ ուղիղ գծին հաստատել ուղղորդ ինչ երեւս ի վերայ ԱԶ գծին,

Լուծումն։ Ընդ ԱԶ հաստատեա երկուս հարթ երեսս ԱԶԳ եւ ԱԶԴ որպէս քեզ կամք իցեն. յետ այնորիկ ի նոյին երեսացն վերայ ի վերայ ԱԶ ուղիղ գծին զուղղորդ գիծսն ԲԳ եւ ԲԴ. ՄՆ երեսքն որ ընդ ԳԲԴ անկիւնն միտութեանն հաստատիցի, լինիցի ուղղորդ ի վերայ ԱԶ ուղիղ գծին (Հ. 206.)։

216. Խնդիր։ Տուանուցեալ է ուղիղ ինչ գիծ ԱԶ, եւ կէտ մի Դ արտաքոյ նորին. արդ կամք են ընդ Դ կէտն հարթ ինչ երեսս հաստատել, որ ուղղորդ ի վերայ ԱԶ ուղիղ գծին կայցէ (Ձեւ 144.)։

Լուծումն։ Ի հարթ երեսումն ԱԴԶ ձգեա ընդ կէտն Դ զգիծն ԲԴ $\perp$ ԱԶ, եւ յայլում որ զինչ եւ իցէ ԱԶԳ հարթ երեսս, որ ընդ ԱԶ ուղիղ գիծ հաստատեալ իցէ, ձգեա ԳԲ $\perp$ ԱԶ, եւ լինիցի ՄՆ երեսքն, որ հաստատիցի ընդ Բ, Գ եւ Դ կէտս, ուղղորդ ի վերայ ԱԶ ուղիղ գծին։

217. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 147.) ի ՄՆ երեսաց վերայ ուղղորդ կանգնեալ իցեն, երկոքին գիծքն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են. եւ երկու՝ Եթէ յերկուց ԱԲ եւ ԳԴ գծից հաւասար հեռաւորաց մին ԱԲ ուղղորդ ի ՄՆ երեսաց վերայ կայցէ, միւսն եւս ԳԴ ի նորին երեսաց վերայ ուղղորդ իցէ։

Ի ՄՆ երեսս ձգեա զուղիղ գիծն ԲԴ եւ ԵԶ $\perp$ ԲԴ։ Արդ ձգեա զԱԴ, յայտ է եթէ իցէ ԱԴ $\perp$ ԵԶ, կամ թէ ԵԶ ուղղորդ կայ ի վերայ ԲԴԱ հարթ երեսաց (Հ. 213.)։ Իսկ արդ որովհետեւ ԳԴ ուղղորդ է ի վերայ ՄՆ երեսաց, ուրեմն եւ ԳԴ $\perp$ ԴԵ. զորոյ զհետ գայ, եթէ ուղիղ գիծն ԵԴ ուղղորդ իցէ ի վերայ երից ԲԴ, ԱԴ եւ ԳԴ գծից միանգամայն, ուստի եւ երեք գիծքն այնոքիկ ի միոյ երեսաց վերայ գտանին (Հ. 209.)։ Եւ ի կատարած. որովհետեւ ԱԲ եւ ԳԴ ուղիղ գիծքն ի միոյ երեսաց վերայ, ի վերայ ԲԴ նոյն գծի ուղղորդ կան միան-

գամայն, ուրեմն երկոքին գիծքն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են։

Երկրորդ մասնն ցուցանի։ Եթէ ԳԴ ∥ ԱԲ իցէ, երկոքեանն եւս ի միոյ երեսաց վերայ գտանին (Հ. 205. Գ.)։ եւ քանզի ուղիղ գիծն ԵԴ ըստ կազմածոյն, որպէս յառաջնում մասին ասացաւ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԴԲ երեսաց, ուրեմն է եւս ԴԵ ⊥ ԳԴ։ Դարձեալ որովհետեւ ԱԲ ∥ ԳԴ, անկ. ԱԲԴ + ԲԴԳ = 2Ո, եւ զի ԱԲ ⊥ ԲԴ, ուրեմն անկ. ԱԲԴ = Ո է, ուստի եւ անկ. ԲԴԳ = Ո, յորմէ ԳԴ ⊥ ԴԲ։ Արդ քանզի ԳԴ ուղղորդ կայ ի վերայ ԲԴ եւ ԵԴ գծիցն միանգամայն, ուրեմն ԳԴ եւս ուղղորդ է ի վերայ ԲԴԵ կամ ՄՆ երեսաց (Հ. 207.)։

Ա. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԳԴ եւ ԵԶ (Ձեւ 148.) յերրորդ ԱԲ գծէ հաւասար հեռաւորք իցեն, ի միմեանց եւս հաւասար հեռաւորք են, թէպէտեւ յայլեւայլ հարթ երեսս գտանիցին։ Քանզի իբրեւ ընդ որ զինչ եւ իցէ կէտ Է՝ ԱԲ ուղիղ գծին ուղղորդ ինչ երեսս ի վերայ նորին գծի հաստատիցեմք որ զգիծսն ԳԴ եւ ԵԶ ի կէտսն Ը եւ Թ հատանիցէ, յայնժամ, որովհետեւ ԳԴ ∥ ԱԲ, կայցէ ԳԴ ուղղորդ ի վերայ ԷԸԹ երեսաց (ըստ Բ մասին յառաջադր.)։ եւ վասն նոյին իսկ պատճառաց ԵԶ ուղղորդ ի վերայ ԷԸԹ երեսաց։ Արդ ի կատարած քանզի ԳԴ եւ ԵԶ ի նորին ԷԸԹ երեսաց վերայ ուղղորդ կան, ուրեմն ԳԴ ∥ ԵԶ (ըստ Ա մասին)։

Բ. Եթէ երեսք ինչ ԷԸԹ ուղղորդ կայցեն ի վերայ ԱԲ ուղիղ գծի, կան եւս ուղղորդ ի վերայ ԳԴ եւ ԵԶ ուղիղ գծից, որ հաւասար հեռաւոր իցեն յԱԲ գծէ։ Քանզի եթէ ԷԸԹ ուղղորդ իցէ ի վերայ ԱԲ ուղիղ գծի, յայտ է եթէ ԱԲ եւս կայ ուղղորդ ի վերայ ԷԸԹ երեսաց, եւ քանզի ԳԴ եւ ԵԶ հաւասար հեռաւոր են յԱԲ գծէ, ուրեմն եւ ԳԴ եւ ԵԶ եւս ուղղորդ են ի վերայ ԷԸԹ երեսաց,

եւ խոտորնակի ԷԸԹ ուղղորդ ի վերայ ԳԴ եւ ԵԶ գծից։

Գ. Եթէ երեսք ինչ ԷԸԹ ի վերայ բազում ԱԲ, ԳԴ, ԵԶ,... գծից միանգամայն ուղղորդ իցէ, ուղիղ գիծքն այնոքիկ ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են, թէպէտեւ յայլեւայլ երեսաց վերայ գտանիցին։

Դ. Արդ եթէ ի Բ կէտն (Ձեւ 147.) ՄՆ հարթ երեսաց ուղղորդ ինչ գիծ ի վերայ այնց երեսաց ձգել կամք իցեն, պարտ եւ պատշաճ է արտաքոյ ՄՆ երեսաց, որ զինչ եւ իցէ Գ կէտ առնուլ, եւ անտի ի ՄՆ երեսաց վերայ ձգել ԳԴ գիծ ուղղորդ (Հ. 213. Գ.). ապա յետ այնորիկ ընդ ուղղորդ գիծն եւ ընդ Բ կէտ հաստատել զերեսն ԲԴԳ, եւ ի նմին երեսս ձգել զուղիղ գիծն ԲԱ || ԳԴ, եւ լինիցի ԱԲ խնդրեալ ուղղորդ գիծն, որպէս յառաջագոյն ասացելոցս յայտ է։

218. Եթէ ուղիղ ինչ գիծ ԱԲ (Ձեւ 149.), որ արտաքոյ ՄՆ երեսացն գտանիցի, հաւասար հեռաւոր իցէ յուղիղ ինչ ԳԴ գծէ որ ի ՄՆ երեսս գտանիցի, յայնժամ ԱԲ է ի ՄՆ երեսացն ինքնին ի գլխովին հաւասար հեռաւոր, որպէս եւ յամենայն ԵԶ գծից, որ ի ՄՆ երեսս հաւասար հեռաւոր ի ի ԳԴ գծէ ձգիցին։

Քանզի եթէ ԱԲ չլինիցի հաւասար հեռաւոր ի ՄՆ երեսաց, հարկ է, զի յորժամ զայն ըստ բաւականին երկայնիցեմք, զհարթ երեսսն հատանիցէ. եւ քանզի ուղիղ գիծքն ԱԲ եւ ԳԴ ի նմին ԱԴ երեսաց վերայ գտանին (Հ. 205. Գ.), աստստին յայտ է եթէ ԱԲ զՄՆ երեսս միայն ի գիծն հատանելոյ զմիմեանս ՄՆ եւ ԱԴ երեսաց, այս ինքն է յերկայնութեան ԳԴ գծին հատանել կարիցէ, որ անհնարին ինչ է, քանզի ԱԲ || ԳԴ ըստ մերոյ համարելոյ. ապա ուրեմն ԱԲ եւ ՄՆ զմիմեանս հատանել չկարեն յորմէ ԱԲ || եր. ՄՆ։

Երկրորդ մասն։ Եթէ ԵԶ || ԳԴ իցէ. որովհետեւ ըստ մերոյ համարելոյ եւս ԱԲ || ԳԴ, ուրեմն (Հ. 217. Ա.) եւ ԱԲ || ԵԶ։

219. Եթէ երկու հաւասար հեռաւոր երեսք ՄՆ եւ ՊՌ (Ձեւ 150.), յերրորդ ինչ հարթ երեսաց հատանիցին. գիծքն հատանելոյ ԱԲ եւ ԳԴ ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են։

Ուղիղ գիծքն ԱԲ եւ ԳԴ զմիմեանս հատանել չկարեն, ապա թէ ոչ հարկ էր եւ ՄՆ եւ ՊՌ երեսաց զմիմեանս հատանել, որով չլինէին ի միմեանց հաւասար հեռաւորք. ապա ուրեմն ԱԲ || ԳԴ։

Զայն մարթ է սովին օրինակաւ ցուցանել, յորժամ բազում հաւասար հեռաւոր երեսք յայլմէ իմեքէ հատանիցին։

220. Եթէ ԱԲ ուղիղ ինչ գիծ (Ձեւ 149.) հաւասար հեռաւոր կայցէ ի ՄՆ երեսաց, եւ ԱԲ գծիւ երեսք ինչ հատանիցին, որ զՄՆ երեսս ի ԳԴ ուղիղ գծի հատանիցեն, ԳԴ գիծն հատանելոյ է հաւասար հեռաւոր յԱԲ գծէ անտի։

Եթէ ուղիղ գիծքն ԱԲ եւ ԳԴ որք ի միոյ երեսաց վերայ գտանին, չլինէին հաւասար հեռաւոր, հարկ էր ԱԲ գծի հատանել զԳԴ յերկայնութեան, որով եւ ԱԲ հատանէր զՄՆ, ուստի եւ չլինէր ԱԲ || եր. ՄՆ, որ է հակառակ մերոյ համարելոյ։

221. Եթէ ՄՆ եւ ՊՌ երեսք (Ձեւ 151.) ուղղորդ ի վերայ միոյ ԱԲ ուղիղ գծի գտանիցին, երկոքին երեսքն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են, եւ խոտորնակս. Եթէ ուղիղ ինչ գիծ ԱԲ ի վերայ միոյ յերկուց հաւասար հեռաւոր հարթ երեսաց, զոր օրինակ ի վերայ ՄՆ երեսաց ուղղորդ կայցէ, ուղղորդ եւս է ի վերայ մեւս ՊՌ երեսաց։

Քանզի եթէ չիցեն երկոքին երեսքն ի միմեանց հաւասար հեռաւոր, հարկ ի վերայ կայ նոցա ի միմեանց հատանել, յորժամ ըստ բաւականին երկայնեալ իցեն. արդ դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ Գ

կէտ մի հասարակաց գծի հատանելոյ նոցա զմիմեանս։ Իբրեւ յօդիցի Գ ընդ Ա եւ Բ, լինիցի անկ. ԱԲԳ = Ո, քանզի է ԱԲ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց, եւ զի ուղղորդ եւս է ի վերայ ՊՌ երեսաց, ուրեմն անկ. ԲԱԳ = Ո, որով յΔԱԲԳ լինիցին երկու ուղիղ անկիւնք Ա եւ Բ, որ անպատեհ իմն է. ուրեմն ՊՌ || ՄՆ։

Սոյնգունակ եւ երկրորդ մասն։ Ի ՄՆ երեսս ձգեա որ զինչ եւ իցէ գիծ ԲԵ, ի ձեռն ԱԲԵ անկեան հատատեա երեսս, որ զՊՌ յԱԴ ուղիղ գծի հատանիցէ. այսուիկ լինիցի ԱԴ || ԲԵ (Հ. 219.), եւ քանզի ԱԲ ⊥ ԲԵ, լինիցի եւ ԱԲ ⊥ ԱԴ։ Եթէ ԲԷ ուղիղ գծիւ միւս եւս երեսս ԱԲԷ հատատիցես, լինիցին եւ գիծքն հատանելոյ ԲԷ եւ ԱԶ ի միմեանց հաւասար հեռաւոր, եւ որովհետեւ ԱԲ ի վերայ ՄՆ երեսաց, ուստի եւ ի վերայ ԲԷ ուղղութեան ուղղորդ կայ, յայտ է եթէ իցէ ԱԲ ⊥ ԱԶ։ Արդ քանզի ԱԲ ի վերայ երկուց զմիմեանս հատանօղ ԱԴ եւ ԱԶ գծից ՊՌ հարթ երեսաց ուղղորդ կայ, ուրեմն ուղղորդ եւս է ի վերայ ՊՌ երեսաց։

Ա. Ապա ուրեմն մի եւ նոյն ուղիղ գիծն չմարթի ի վերայ երկուց երեսաց զմիմեանս հատանողաց ի միում ժամանակի միանգամայն ուղղորդ անկանել։ Քանզի եթէ այսպիսի ինչ դէպ լինիցի, հարկ է զի երկուքին հարթ երեսքն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք իցեն, որով եւ միմեանց պատահել չկարիցեն։

Բ. Եթէ երկու Մ եւ Ն հարթ երեսք հաւասար հեռաւոր իցեն յերրորդ Ի երեսաց, ի միմեանց եւս հաւասար հեռաւոր են։ Քանզի համարեսցուք եթէ յոր զինչ եւ իցէ կիտի Ի հարթ երեսաց, Պ ուղղորդ գիծն կանգնեալ իցէ (Հ. 217. Դ.). յայտ է, թէ յորժամ երկայնիցի՝ ուղղորդ եւս իցէ ի վերայ Մ եւ Ն երեսաց, որով յայտ է եթէ Մ եւ Ն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են։

222. Խնդիր։ Ընդ ծանուցեալ կէտ ինչ Ա, հաստատել երեսս ինչ հաւասար հեռաւոր ի ՄՆ երեսաց (Ձեւ 151.)։

Լուծումն։ ՅԱ կիտէ անտի ի վերայ ՄՆ հարթ երեսացն ձգեա ուղղորդ ինչ գիծ ԱԲ (Հ. 213. Գ.), եւ յԱ կիտէ հաստատեա երեսս ինչ ՊՌ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ ուղիղ գծի (Հ. 216.) եւ լինիցի ՊՌ || ՄՆ (Հ. 221.)։

Ուրեմն մարթ է ընդ նոյն կէտն Ա մի եւեթ ՊՌ երեսս հաւասար հեռաւոր ի ՄՆ երեսաց ձգել։ Վասնզի առցուք յանձն, եթէ եւ ՏՐ եւս, որ զՊՌ յԸԹ ուղիղ գծի հատանիցէ, հաւասար հեռաւոր իցէ ի ՄՆ երեսաց։ Իբրեւ ձգիցի յԱ կիտէ անտի ԸԹ գծի հատանելոյ զմիմեանս ՊՌ եւ ՏՐ երեսաց ուղղորդ ինչ գիծ ԱԲ ի վերայ ՄՆ հարթ երեսաց, հարկ է զի ԱԲ ուղղորդ եւս իցէ ի վերայ ՊՌ եւ ՏՐ հարթ երեսաց (Հ. 221.), որ է անհնարին (Հ. 221. Ա.)։

223. Հաւասար հեռաւոր ուղիղ գիծք ԱԳ եւ ԲԴ ձգեալք ի միջի հաւասար հեռաւոր ՄՆ եւ ՊՌ երեսաց, միմեանց հաւասարք են (Ձեւ 150.)։

Վասն ԱԳ || ԲԴ լինելոյ, երկոքին ուղիղ գիծքս ի միոյ երեսոց վերայ գտանին, յորում եւ կան ուղիղ գիծքս ԱԲ եւ ԳԴ (Հ. 219.)․ զորոյ զհետ գայ եթէ ԱԳԴԲ իցէ հաւասար հեռաւոր ձեւ, յորմէ ԱԳ = ԲԴ։

224. Եթէ սրունք երկուց ԲԱԳ եւ ԵԴԶ անկեանց (Ձեւ 152.) որք ոչ ի նորին երեսաց վերայ կայցեն, ըստ նոյն կամ ըստ հակառակ ուղղութեան, ի միմեանց հաւասար հեռաւոր ձգեալ իցեն, յայնժամ առաջինն՝ երկոքին անկիւնքն միմեանց հաւասար են, եւ երկրորդ անգամ՝ հարթ երեսք նոցա ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են։

Իցէ ԱԲ || ԴԵ եւ ԱԳ || ԴԶ։ Իբրեւ առնիցի եւ ԱԲ = ԴԵ, ԱԳ = ԴԶ, եւ ձգիցին ուղիղ գիծքն

ԲԳ, ԵԶ, ԱԴ, ԲԵ եւ ԳԶ, յայնժամ ԱԲԵԴ եւ ԱԳԶԴ հաւասար հեռաւոր ձեւք իցեն, յորմէ ԳԶ # ԱԴ, եւ ԲԵ # ԱԴ, ուստի եւ ԳԶ եւս # ԲԵ, ուրեմն եւ ԲԳ # ԵԶ: Արդ որովհետեւ երեքանկիւնքն ԱԲԳ եւ ԴԵԶ փոխանակաւ հաւասարակող են, ուրեմն իցեն եւ միմեանց պատշաճական, որով եւ անկ. ԲԱԳ = անկ. ԵԴԶ = անկ. Զ՛ԴԵ՛:

Սմին նման եւ երկրորդ մասնն: Եթէ ԲԱԳ երեւքն չիցեն հաւասար հեռաւոր ի ԴԵԶ երեւաց, յայտ է եթէ ընդ Ա կէտ հաւասար հեռաւոր երեւս ինչ նկարել կարող եմք. դիցուք գրեցուք, եթէ երեւքս հատանիցեն զԱԲԵԴ երեւս ոչ յԱԲ, այլ յԱԷ ուղիղ գծի անդ, յայնժամ հարկ ի վերայ կայ ԵԷ = ԱԴ լինելոյ (Հ. 223.), եւ քանզի (ըստ առաջնոյ մասին) գիծն ԲԵ = ԱԴ, ուրեմն հարկ է զի ԷԵ = ԲԵ իցէ, որ անպատեհ իմն է: Ուստի եւ ՊՌ երեւք ԲԱԳ անկեան հաւասար հեռաւոր է ի ՄՆ երեւաց ԵԴԶ անկեան:

Ա. Արդ ըստ ասացելոցս, եթէ երկու ՄՆ եւ ՊՌ հաւասար հեռաւոր հարթ երեւք հատանիցին յերքուց այլոց ԱԵ եւ ԱԶ հարթ երեւաց, որք յուղիղ գիծն ԱԴ միմեանց պատահիցեն, յայնժամ անկիւնքն՝ որք ի հաւասար հեռաւոր երեւս յԱԳ, ԱԲ, եւ ԴԵ, ԴԶ գծիցն հատանելոյ կազմիցին, միմեանց հաւասար են, քանզի ԱԲ || ԴԵ է, եւ ԱԳ || ԴԶ:

Բ. Եթէ կէտքն կատարածի երից ԱԴ, ԲԵ, եւ ԳԶ հաւասար գծից ի միմեանց հաւասար հեռաւորաց ուղիղ գծիւ ընդ միմեանս յօդիցին, յայնժամ երեքանկիւնքն ԱԲԳ եւ ԴԵԶ, որք անտի ծագիցեն, միմեանց պատշաճական են. եւ երեւք նոցին ի միմեանց հաւասար հեռաւոր: Քանզի ԱԴ # ԳԶ, յայտ է եթէ եւ ԱԳ # ԴԶ, եւ զի ԱԴ # ԲԵ, ուրեմն եւ ԱԲ # ԴԵ. ուստի եւ ըստ մերոյ կանոնիս անկ. ԲԱԳ = անկ. ԵԴԶ, յորմէ եւ ՄՆ հաւասար

հեռաւոր ի ՊՌ երեսաց (ըստ երկրորդ մասին), եւ ΔԱԲԳ ≂ ΔԴԵԶ (Հ. 52.)։

Որ ասացաւն, պատշաճի եւ բազմանկեանց, որք ծագեն, յորժամ ծայրք բազում հաւասար գծից հաւասար հեռաւորաց ընդ միմեանս ուղիղ գծիւք յօդիցին։

Գ. Եթէ ոք յԱ, Բ, Գ կիտից, որ ի ՊՌ երեսաց վերայ գտանիցին եւ չիցեն ի վերայ միոյ ուղիղ գծի, ձգիցէ ուղղորդ գիծս ԱԴ, ԲԵ, եւ ԳԶ, եւ ուղղորդ գիծքն միմեանց հաւասար իցեն, յայնժամ ՊՌ եւ ՄՆ երեսքն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են։

Դ. Ի մերոց եղեալ օրինացս յանձնէ իսկ մարթ իցէ ուսանել, եթէ յորում եւ իցէ կիտի ՆՀ գծի հատանելոյ զմիմեանս (Ձեւ 143.) ՊՀ եւ ՄՆ երեսաց, մարթ է զուղղորդ գիծն, վասն զանկիւնն միաւորութեան երկուց երեսացն գտանելոյ, կանգնել։ Դարձեալ եւ այն եւս ինքնին յայտ է, եթէ կից անկիւնքն երկուց երեսաց $=$ 2Ո իցեն, եւ թէ երկու անկիւնք երեսաց, որ ի գծի գագաթան հակառակ միմեանց կայցեն, հաւասարք են միմեանց։

Ե. Եթէ երկու հաւասար հեռաւոր երեսք յերրորդ ինչ երեսաց հատանիցին, ութ անկիւնք երեսաց ծնանին, որոց պատշաճին նոյն ճշմարտութիւնքն, որք ի Հ. 39. Երրորդ ասացան, եւ ցուցան։

Զ. Եթէ ԱԳԲ (Ձեւ 143.) անկիւն միաւորութեան իցէ ՄՆ եւ ՆՏ հարթ երեսաց, ուստի եւ ԱԳ $\perp$ ՆՀ, եւ ԲԳ $\perp$ ՆՀ, որով ՆՀ $\perp$ եր. ԱԳԲ. եւ եթէ ձգիցեմք ի վերայ երեսաց անկեան միաւորութեան զուղիղ գիծն ԱԲ $\perp$ ԲԳ, յայտ է եթէ ԲԳ, ձգումն իցէ ԱԳ գծին։ Քանզի եթէ ի ՄՆ երեսս ձգիցեմք զուղիղ գիծն ԲԴ $\parallel$ ՆՀ, յայտ է եթէ, որովհետեւ ՆՀ $\perp$ եր. ԱԲԳ, իցէ ԲԴ $\perp$ եր. ԱԳԲ (Հ. 217. Բ.), ուստի եւ ԲԴ $\perp$ ԱԲ, որով եւ հակառակն ԱԲ $\perp$ ԲԴ, եւ ԱԲ $\perp$ ԲԳ, ուստի եւ ԱԲ $\perp$

եր. ՄՆ, զորոյ զՀետ գայ, եթէ ԲԳ իցէ ձգումն ԱԳ գծի համեմատութեամբ ՄՆ երեսաց եւ ԱԳԲ անկեան միտութեան ԱԳ ուղիղ գծին ի ՄՆ երեսս կոյս:

Է. Արդ եթէ ի ՄՆ երեսս որ զինչ եւ իցէ ուղիղ գիծ ԳԴ ընդ Գ գագաթն անկեան միտութեան ՄՆ եւ ՊՌ երեսաց ձգիցես, յայնժամ է անկ. ԱԳԲ < ԱԳԴ (Հ. 212.), ուստի անկիւնն միտութեան երկուց հարթ երեսաց փոքրագոյն է քան զայլ զինչեւիցէ անկիւն, որոյ գագաթն Գ ի հասարակաց ՆՇ գծին հատանելոյ գտանիցի, եւ մին ի սրունից նորա ԳԴ ի վերայ ՄՆ երեսաց եւ միւսն ի վերայ ՊՌ երեսաց կայցէ:

Ը. Ուրեմն գիծն զմիմեանս հատանելոյ երկուց երեսաց ուղղորդ կայ ի վերայ երեսաց անկեան միտութեան երեսացն այնոցիկ. եւ սմին հակառակ. Երեսք անկեան միտութեան երկուց երեսաց, ցանդ ուղղորդ կայ ի վերայ գծի հատանելոյ զմիմեանս երկոցունց երեսաց:

225. Երկու ուղիղ գիծք ԱԲ եւ ԳԴ (Ձեւ 153.) որք ի մէջ երկուց ՄՆ եւ ՏՐ հաւասար հեռաւոր երեսաց գտանիցին. յերրորդ ՊՌ հաւասա հեռաւոր երեսաց, հատանին միմեանց համեմատական:

Ձգեա զուղիղ գիծն ԱԴ, որ զՊՌ երեսս ի Զ կիտի հատանիցէ, եւ զմտաւ ած եթէ ընդ այս գիծ եւ ընդ կէտսն Բ եւ Գ երեսքն ԱԲԴ եւ ԱԳԴ եղեալ հատատեալ իցեն: Առաջին երեսքն ԱԲԴ հատանէ զՄՆ եւ զՊՌ ի հաւասար հեռաւոր ԲԴ եւ ԵԶ գիծս. իսկ արդ յետինն եւս հատանէ զՏՐ եւ զՊՌ ի հաւասար հեռաւոր գիծս ԱԳ եւ ԶԷ. ապա ուրեմն ΔԱԵԶ ∾ ΔԱԲԴ, եւ ΔԴԶԷ ∾ ΔԱԳԴ: Զորոյ զՀետ գայ եթէ

ԱԵ : ԱԶ = ԱԲ : ԱԴ = ԵԲ : ԶԴ, եւ
ԱԶ : ԳԷ = ԱԴ : ԳԴ = ԶԴ : ԴԷ,

եթէ ընդ միմեանս յօդիցին համեմատութիւնքս, ծագիցէ

ԱԵ : ԳԷ = ԱԲ : ԳԴ = ԵԲ : ԴԷ:

226. Եթէ ի միջէ Ս կիտէ (Ձեւ 154.) առ ՄՆ հարթ երեսս բազում գիծս ուղիղս ՍԱ, ՍԲ, ՍԳ,... ձգիցես եւ եթէ ընդ որ զինչ եւ իցէ կէտ ա ՍԱ գծին դիցես երեսս ինչ ԺԻ, որ հաւասար հեռի իցէ ի ՄՆ երեսաց, որ եւ զգիծսն զայնոսիկ ի կէտսն ա, բ, գ,... հատանիցէ, յայնժամ առաջին՝ ուղիղ գիծքն այնոքիկ հատանիցին համեմատական, եւ երկրորդ անգամ՝ եթէ ոք զկէտն հատանելոյ ուղիղ գծիցն այնոցիկ ի ԺԻ եւ ի ՄՆ երեսաց ուղիղ գծիւք ընդ միմեանս յօդիցէ, ձեւքն որ անտի ծագիցեն, միմեանց նման են, այս ինքն է ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ, եւ ԴԵԶԷ ∾ դեզէ, եւ ի կատարած. Անջրպետութիւնք երեսաց ձեւոցս այսոցիկ ընդ միմեանս կշռին, որպէս համեմատիցին ընդ միմեանս երկրորդ կարողութիւնք բացարձակութեանց նոցա ի Ս կիտէ:

Ուղիղ գիծքն աբ, բգ, ագ, դե, եզ,... որպէս գիծք հատանելոյ զմիմեանս ՍԱԲ, ՍԲԳ, ՍԱԳ,... եւ ԺԻ երեսաց, են հաւասար հեռաւոր յԱԲ, ԲԳ, ԱԳ, ԴԵ,... գծից հատանելոյ նոյն երեսաց ընդ ՄՆ երեսաց. զորին զհետ գայ եթէ՝ ΔՍաբ ∾ ΔՍԱԲ, ΔՍբգ ∾ ΔՍԲԳ, ΔՍգա ∾ ΔՍԳԱ, ΔՍդե ∾ ΔՍԴԵ, այլովքն հանդերձ, ուստի եւ

ՍԱ : Սա = ՍԲ : Սբ = ՍԳ : Սգ = այլովքն հանդերձ, եւ
ՍԱ : ՍԲ = Աա : Բբ = Սա : Սբ = " " եւ
ՍԳ : Սգ = ՍՊ : Սպ = ՍԱ : Սա = " " :

Երկրորդ մասն : Ի նմանութենէ երեքանկեանցն, որ յառաջին մասին ասացան, ցուցանի եթէ ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ = ԳԱ : գա, եւ եւս թէ անկ. ԳԱԲ = անկ.

գաբ, անկ. ԱԲԳ = անկ. աբգ, անկ. ԱԳԲ = անկ. ագբ, քանզի սոսինք նոցա հաւասար հեռաւոր ձգեալ են (Հ. 224.) ուրեմն ձեւքն ԱԲԳ եւ աբգ միմեանց նման են, քանզի ամենայն կողմանք նոցա համեմատական են, եւ ամենայն անկիւնքն հաւասար են փոխանակաւ: Ըստ նմին օրինակի մարթի ցուցանել, եթէ ԴԵԶԸ ∾ դեզը իցէ:

Երրորդ մասն: Եթէ զուղիղ գիծն ՍՊ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսացն, որով եւ ի վերայ ԺԻ երեսացն ի գլխովին ձգիցես, եւ ի նորին երեսաց վերայ զԳՊ եւ զգպ, յայնժամ, քանզի ΔՍԳՊ ∾ ΔՍգպ, իցէ ՍԳ : Սգ = ՍՊ : Սպ, ուստի եւ

ՍՊ : Սպ = ՍԱ : Սա = ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ = ... եւ

$$\overline{ՍՊ}^2 : \overline{Սպ}^2 = \overline{ՍԱ}^2 : \overline{Սա}^2 = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{աբ}^2 = \overline{ԲԳ}^2 : \overline{բգ}^2 = ..$$

Իսկ արդ է ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ (ըստ երկրորդ մասին), ուրեմն

$$ΔԱԲԳ : Δաբգ = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{աբ}^2 = \cdots$$

զորս ցհետ գայ եւս թէ

$$ΔԱԲԳ : Δաբգ = \overline{ՍՊ}^2 : \overline{Սպ}^2$$

Ըստ նմին օրինակի ցուցանի եթէ ԴԵԶԸ : դեզը = $\overline{ՍՊ}^2 : \overline{Սպ}^2$ իցէ:

Ցաստցելոցս զհետ գայ, եթէ իցէ եւ ΔԱԲԳ : Δաբգ = ԴԵԶԸ : դեզը: Արդ եթէ իցէ ΔԱԲԳ = ԴԵԶԸ, հարկ է զի իցէ եւ Δաբգ = դեզը:

227. Ուղիղ ինչ գիծ ԱԲ, որ ընդ երկուս երեսս հաւասար հեռաւորս ընդ ՄՆ եւ ընդ ՊՌ անցանիցէ, հաւասար անկեամբ առ երեսն այնոսիկ միտեալ է (Ձեւ 155.):

Եթէ իցէ Աբգ ուղղորդ ի վերայ ՊՌ երեսաց, ուստի եւ ի վերայ ՄՆ երեսաց ի գլխովին (Հ. 221. Երկ. մասն) յայտ է եթէ Աբգ եւ ԱԲԳ

իցեն անկիւնք միտութեան ԱԲ ուղիղ գծին առ երկոսին երեսս։ Իսկ արդ է գԱբ = ԳԱԲ, եւ Ագբ = ԱԳԲ = Ո. ուստի եւ ΔԱգբ ∾ ԱԳԲ, ուրեմն Աբգ = ԱԲԳ։

Ա. Արդ եթէ երկու գիծք Աբ եւ ԴԵ ի միմեանց հաւասար հեռաւոր իցեն, ի նոյն ՄՆ երեսս նոյն միտութիւն է նոցա։

՝Քանզի իբրեւ ձգիցի ԴԶ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց, յայտ է եթէ ԴԶ ∥ Ագ (Հ. 217.). եւ քանզի ԴԵ եւս ∥ Աբ, ուրեմն անկ. ԶԴԵ = անկ. բԱգ (Հ. 224.), եւ որովհետեւ անկ. ԴԶԵ = անկ. Ագբ = Ո, ուրեմն ի հարկէ իսկ լինիցի անկ. ԴԵԶ = անկ. Աբգ։

Բ. Ապա ուրեմն հաւասար միտութիւն է ԱԲ եւ ԴԵ հաւասար հեռաւոր գծից առ հաւասար հեռաւոր երեսս ՊՌ եւ ՄՆ։

Գ. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԳ եւ ագ (Չեւ 143.) ի միմեանց հաւասար հեռաւոր իցեն, նոյն միտութիւն է նոցա առ ՄՆ երեսս (ըստ Ա.), եւ կան նոքա ի նմին ՆՏ երեսս, որ զՄՆ երեսս յուղիղ գծման Գգ կամ ՆՇ հատանէ. (անկիւնն միտութեան ՄՆ եւ ՆՏ երեսաց է ԱԳԲ = ագբ)։ Իսկ արդ ՆՇ գիծն ուղղորդ է ի վերայ ԱԳԲ երեսաց, եւս եւ ի վերայ ագբ երեսաց (Հ. 224. Ը.), յորմէ եւ երեսքն ԱԳԲ ∥ եր. ագբ (Հ. 221.), ուրեմն եւ ԲԳ ∥ բգ (Հ. 219.)։ Ապա ուրեմն. Եթէ երկու ուղիղ գիծք ԱԳ եւ ագ ի միմեանց հաւասար հեռաւորք իցեն, եւ ձգմունք նոցա ԲԳ եւ բգ ի նոյն ՄՆ երեսաց վերայ ի միմեանց հաւասար հեռաւոր են։

228. Եթէ ՄՆ եւ ՊՌ գիծքն հատանելոյ երկուց ՄՏ եւ ՊՐ երեսաց, յերրորդ ՆԵ երեսաց հաւասար հեռաւոր իցեն, եւ եթէ երկոքին երեսքն ըստ նոյն ուղղութեան հաւասար միտութիւնս առ ՆԵ ունիցին, յայնժամ եւ ՄՏ եւ ՊՐ եւս ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են (Չեւ 156.)։

Յերեսան ՄՏ ձգեա զուղիղ գիծն ԱԲ ⊥ ՄՆ, եւ յերեսան ՆԵ զգիծն ԲԵ ⊥ ՄՆ, եւ ընդ անկիւնն ԱԲԵ հաստատեա երես, որ զՊՐ ի ԳԴ ուղիղ գծի անդ հատանիցէ: Արդ որովհետեւ ՄՆ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԲԵ երեսաց (Հ. 207.), եւ ՊՌ ∥ ՄՆ ըստ մերոյ համարելոյ է, ուրեմն եւ ՊՌ ուղղորդ է ի վերայ ԱԲԵ երեսաց (Հ. 217.), ուստի եւ ուղղորդ ի վերայ ԳԴ եւ ԴԵ ուղիղ գծից. զորոյ զհետ գայ, եթէ անկիւնքն ԱԲԵ եւ ԳԴԵ անկիւնք միտութեան իցեն ՄՏ եւ ՊՐ երեսաց առ ՄՆԵ երեսս. ուստի եւ ըստ մերոյ համարելոյ անկ. ԱԲԵ = անկ. ԳԴԵ: Բայց քանզի ԱԲ եւ ԳԴ ի նմին ԱԲԵ երեսս գտանին, ապաստին յայտ է եթէ ԱԲ ∥ ԳԴ, որով եւ սրունքն ԱԲՆ եւ ԳԴՌ անկեանց ի միմեանց հաւասար հեռաւոր են, ուստի եւ երեսքն ՄՏ եւ ՊՐ հաւասար հեռաւոր (Հ. 224.):

Զաստացելոյս զհետ գայ, զի Եթէ երկու երեսք ուղղորդ կայցեն ի վերայ երրորդ ինչ երեսաց, եւ երկոքին գիծքն հատանելոյ հաւասար հեռաւոր ի միմեանց լինիցին, յայնժամ երկոքին երեսքն ի գլխովին հաւասար հեռաւոր են:

229. Եթէ ուղիղ ինչ գիծ ԱԲ (Ձեւ 157.) կայցէ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց յայնժամ իւրաքանչիւր երեսքն եւս որ ընդ ԱԲ հաստատիցին, ուղղորդ են ի վերայ ՄՆ երեսաց:

Դիցուք գրեսցուք, եթէ ԶԷ իցէ գիծն հատանելոյ ԶԱԷ եւ ՄՆ երեսաց: Արդ իբրեւ ի ՄՆ երեսս ձգիցի ուղիղ գիծն ԳԴ ⊥ ԶԷ, յայտ է եթէ (Հ. 207.) ԱԲ ուղղորդ է ի վերայ ԳԴ եւ ԶԷ գծից. եւ անկ. ԱԲԳ է անկիւն միտութեան ԶԱԷ եւ ՄՆ երեսաց (Հ. 206.): Իսկ արդ անկ. ԱԲԳ = Ո, ուրեմն ԶԱԷ կայ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց:

Ա. Եթէ երեք ուղիղ գիծք ԱԲ, ԳԴ եւ ԶԷ ի միմեանց վերայ ուղղորդ կայցեն, մի մի ի գծիցս ուղղորդ է ի վերայ երեսաց, որ յայլոց երկոցունց

գծից կազմիցի, այս ինքն ԱԲ ⊥ ՄՆ, ԲԳ ⊥ ԶԱԷ, ԶԷ ⊥ ԳԱԴ, եւ երեք երեսքն եւս ուղղորդ կան փոխանակաւ ի վերայ միմեանց։

Բ. Արդ եթէ երեսք ինչ ԳԱԴ ուղղորդ իցէ ի վերայ ԶԷ ուղիղ գծին որ ի ՄՆ երեսս գտանիցի, ուղղորդ եւս է ի վերայ ՄՆ երեսաց։ Քանզի, որովհետեւ ուղիղ գիծն ԶԷ ուղղորդ է ի վերայ ԳԱԴ երեսաց, յայտ է եթէ ըստ մերոց օրինաց եւ երեսքն որ ընդ ԶԷ հաստատիցին ուղղորդ իցեն ի վերայ ԳԱԴ երեսաց, եւ քանզի ՄՆ մի է յայնց երեսաց զորս հնար իցէ ընդ ԶԷ հաստատել, ուրեմն ՄՆ կայ ուղղորդ ի վերայ ԳԱԴ երեսաց, եւ սմին հակառակն եւս ԳԱԴ է ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց։

Գ. Եթէ ԱԲ գիծն հատանելոյ զմիմեանս երկուց ԱԳ եւ ԱԷ երեսաց ուղղորդ ի ՄՆ երեսաց վերայ կայցէ, եւ երեսքն ԱԳ եւ ԱԷ ուղղորդ կան ի վերայ ՄՆ երեսաց։

Դ. Եթէ ԳԱԴ երեսքն ուղղորդ ի ՄՆ կայցէ, եւ յառաջին երեսսն ձգիցի ԱԲ ուղիղ գիծ ուղղորդ ի վերայ ԳԴ գծի հատանելոյ, յայնժամ ԱԲ եւ ի վերայ ՄՆ երեսացն ի գլխովին ուղղորդ իցէ։ Քանզի իբրեւ ձգիցեմք ի ՄՆ երեսս զուղիղ գիծն ԲԶ ⊥ ԳԴ, լինիցի անկ. ԱԲԶ = Ո, քանզի է անկիւն միտութեան ՄՆ եւ ԳԱԴ ուղղորդ երեսաց։ Ուրեմն ԱԲ ուղղորդ է ի վերայ ԲԳ եւ ԲԶ ուղիղ գծից, ուստի եւ ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց։

230. Յորժամ ԳԱԴ երեսքն ուղղորդ ի ՄՆ երեսաց վերայ գտանիցին, եւ եթէ ոք ի միջէ Ա կիտէ առաջնոյն ձգիցէ ուղղորդ ինչ գիծ ի վերայ երկրորդին, ուղղորդ գիծն կայ բովանդակ յերեսսն ԳԱԴ, եւ երկրորդ. Եթէ ոք ի վերայ միոյ կիտի ԳԴ գծի հատանելոյ երկուց ՄՆ եւ ԳԱԴ երեսաց, որք ուղղորդ ի միմեանց վերայ կայցեն, ձգիցէ ուղ-

ղորդ ինչ գիծ ի վերայ առաջնոյն, ուղղորդ գիծն այն կայ ամենեւին յերկրորդ երեսս (Ձեւ 157.)։

Առաջին մասն։ Յերեսան ԳԱԴ ձգեա ի վերայ ԳԴ ի միջէ Ա կիտէ ուղղորդ ինչ գիծ ԱԲ, յայտ է եթէ ԱԲ ուղղորդ եւս է ի վերայ ՄՆ երեսաց (Հ. 229. Դ.), եւ քանզի յԱ կիտէ մի եւեթ ուղղորդ գիծ մարթ է ի ՄՆ երեսաց վերայ ձգել (Հ. 210.) յայտ է եթէ ուղղորդ գիծն ԱԲ ի հարկէ գտանիցի ի ԳԱԴ ուղղորդ երեսս։

Երկրորդ մասն։ Եթէ ուղղորդ գիծն՝ որ ի կէտն Բ ի վերայ ՄՆ երեսաց կանգնիցի, չկայցէ յերեսան ԳԱԴ, յայտ է եթէ մարթ ինչ է յերեսս յայսոսիկ ընդ կէտն Բ ձգել ուղիղ ինչ գիծ ԲԱ ⊥ ԳԴ, որ եւ ի վերայ ՄՆ երեսաց ուղղորդ իցէ (ըստ Ա մասին) որով լինէր ի Բ կէտն ՄՆ երեսաց ի վերայ նորին երկուց ուղղորդ գծից կանգնել, որ անպատեհ իմն է։

Ա. Արդ մարթեմք զխնդիրն „ի միում Բ կիտի ՄՆ երեսաց ձգել ի վերայ նորին երեսաց ուղղորդ ինչ գիծ" եւ մտաւոր օրինակաւս լուծանել։ Ընդ կէտն Բ ի ՄՆ երեսս ձգեա երկուս ԳԴ եւ ԶԷ գիծս ուղիղս ի միմեանց վերայ ուղղորդս, եւ ապա ձգեա որ զինչ եւ իցէ ուղիղ գիծ ԹԲ ⊥ ԳԴ։ Արդ իբրեւ ընդ անկիւնն ԶԲԹ երեսս ինչ հարթս հաստատիցես, յայտ է եթէ (Հ. 229. Բ.) լինիցի ուղղորդ ի վերայ ՄՆ երեսաց, որով ԲԱ ուղղորդ գիծն ի վերայ ԲԶ գծին կանգնեալ ի Բ ի վերայ ԶԲԹ երեսաց, ուղղորդ եւս իցէ ի վերայ ՄՆ երեսաց։

Բ. Արդ եթէ երկու երեսք ԱԳ եւ ԱԷ ի վերայ միոյ երրորդ ՄՆ երեսաց ուղղորդ իցէ, եւ ԱԲ գիծն հատանելոյ նոցին երեսացն ուղղորդ կայ ի ՄՆ։ Քանզի ի հարկէ իսկ ուղղորդ գիծն կանգնեալ ի Բ ի վերայ ՄՆ երեսաց, կայ եւ յԱԳ եւ յԱԷ երեսս, որով հարկ է, զի ընդ ԱԲ գծին հատանելոյ՝ ի նմին վայրի ի միմեանց վերայ անկանիցին։

Գ. Արդ եթէ ՄՆ երեւք ինչ կայցէ ուղղորդ ի վերայ երկուց ԱԳԴ եւ ԱՋԷ երեսաց զմիմեանս հատանողաց, ուղղորդ եւս է ի վերայ ԱԲ գծի հատանելոյ զմիմեանս երկոցունց երեսացն այնոցիկ։

231. Եթէ ի մի ՄՆ երեսաց վերայ երկու ուղիղ գիծք ԲԳ եւ ԴԵ (Ձեւ 158.) զմիմեանս հատանիցեն, եւ ընդ որ զինչ եւ իցէ Ժ եւ Ի կէտս նոցա կանգնիցին ուղղորդ երեւք ՊՏ եւ ՌՐ. առաջին՝ հարկ է զի երեւքս զմիմեանս հատանիցեն, եւ երկրորդ անգամ՝ ԷԹ գիծն հատանելոյ երկուց երեսաց ուղղորդ կայցէ ի վերայ ՄՆ երեսաց ԲԳ եւ ԴԵ ուղիղ գծից։

Քանզի ըստ մերոյ համարելոյ ՊՏ ուղղորդ է յԱԲ, եւ ՌՐ $\perp$ ԱԵ, ուրեմն եւ ՏԺ $\perp$ ԱԲ, եւ ԻՐ $\perp$ ԱԵ։ Արդ քանզի ԺՏ եւ ԻՐ հարկաւ հատանեն զմիմեանս, յորժամ երկայնիցին (Հ. 80. Ջ.), ուրեմն հարկ է, զի եւ երեւքն ՊՏ եւ ՌՐ զմիմեանս բախիցեն, եւ յուղիղ գիծն ԹԷ։

Երկրորդ մասնն։ Որովհետեւ երեւքն ՊՏ եւ ՌՐ ուղղորդ են ի վերայ ԱԲ եւ ԱԵ ուղիղ գծից, յայտ է եթէ ուղղորդ եւս են ի վերայ ՄՆ երեսաց (Հ. 229. Բ.), ուստի եւ գիծն հատանելոյ նոցա զմիմեանս ուղղորդ եւս է ի վերայ ՄՆ երեսաց (Հ. 230. Բ.)։

ԳԼՈՒԽ Բ

ՑԱՂԱԳՍ ԱՆԿԵԱՆՑ ՄԱՐՄՆՈՑ

232. Անջրպետութիւնն՝ որ իցէ ի մէջ բազում երեսաց, որ ի մի եւ ի նոյն կէտ ի զմիմեանս հատանիցեն, անուանեալ կոչի Անկիւն մարմնոյ։ Հարթ երեսքն այն Երեսք կողմանց անկեան մարմնոյն։ Ուղիղ գիծքն յորս երկու երկու երեսք, որք մի ըստ միոջէ կարգեալ են, զմիմեանս հատանիցեն, այն կողք կամ կողմանք, իսկ անկիւնն՝ որ յերկուց կողից զմիմեանց կնի տողելոց յօրինեալ կազմիցի, այն Անկիւն կողից. եւ հասարակաց կէտն ուր ամենայն երեսքն զմիմեանս հատանիցեն, այն Գագաթն անկեան մարմնոյն։

Անկիւնն մարմնոյ նշանակի, յորժամ կամ նշանագիրն գագաթան գրիցի, եւ կամ վասն յայտնագոյն եւս զիրան առնելոյ, ամենայն երեսք կողմանցն գրիցին, այլ այնպէս զի նշանագիրն գագաթան յառաջնում տեղւոջ գտանիցի։ Զոր օրինակ (Ձեւ 159.), անկիւնն մարմնոյ, որոյ երեք կողք են, այն Ս անկիւն մարմնոյ, կամ ՍԱԲԳ։

Անկիւնն մարմնոյ անուանեալ կոչի Երեքկողմեան, Չորեքկողմեան, . . . Բազմակողմեան, կամ Երեքանիստ, Չորեքանիստ, . . . Բազմանիստ, յորժամ երեք կամ չորք, կամ բազում կողք, կամ անկիւնք կողից կամ երեսք կողմանց յանկեանն երեւիցին։

Ի Ձեւ 160 առաջի դնի հնգանիստ անկիւն մարմնոյ, որոյ գագաթն է Ս, եւ կողք ՍԱ, ՍԲ, ՍԳ, ՍԴ, ՍԵ, եւ անկիւնքն կողից ԱՍԲ, ԲՍԳ, ԳՍԴ, ԴՍԵ, ԵՍԱ, եւ երեսք կողմանց երեսքն ԱՍԲ, ԲՍԳ, ԳՍԴ, ԴՍԵ, ԵՍԱ։

233. Եթէ անկիւն ինչ մարմնոյ Ս յերից ԱՍԲ, ԲՍԳ եւ ԱՍԳ հարթ անկեանց կազմիցի, մի

մի յանկեանց աստի յայոցանէ փոքրագոյն է քան զբովանդակութիւն այլոց երկոցունցն (Ձեւ 159.)։

Համարեսցուք եթէ անկ. ԱՍԳ մեծագոյնն իցէ յառաջեալ երից անկեանց երեսաց։ Քանզի անկ. ԱՍԳ > անկ. ԱՍԲ ըստ մերոյ համարելոյ է, յայտ է եթէ յԱՍԳ անկենէ մարթ ինչ իցէ մասն ինչ ԱՍԴ = ԱՍԲ բաժանել։ Արդ դիջիր գրեաջիր եթէ ի վերայ ՍԲ կողմն իցէ կէտ ինչ բ. արա Սդ = Սբ, եւ զկէտն բ եւ դ յօդեա ընդ որ զինչ եւ իցէ ա կէտի ԱՍ գծին. երեւքն որ ընդ ա, բ եւ դ կէտս հաստատիցի, հատանէ զերեսս կողմանց Ս անկեան մարմնոյ յուղիղ գիծս աբ, բգ եւ ագ։ Արդ է Δ աբՍ ≅ Δ ադՍ (Հ. 52.), ուրեմն աբ = ադ. եւ քանզի յաբգ երեքանկեան կողմն ագ < աբ + բգ (Հ. 65.), այս ինքն ադ + գդ < աբ + բգ, աստստին յայտ է, եթէ դգ < բգ։ Դարձեալ որովհետեւ ի բգՍ եւ գդՍ երեքանկիւնեան կողմն գՍ = գՍ, բՍ = դՍ, այլ սակայն բգ > դգ, ուրեմն անկ. գՍդ < գՍբ (Հ. 69. Բ. մասն) եւ առաւել եւս

անկ. գՍդ + անկ. դՍա < անկ. բՍգ + աՍբ
այս ինքն անկ. աՍգ < անկ. աՍբ + անկ. բՍգ,
կամ ԱՍԳ < անկ. ԱՍԲ + անկ. ԲՍԳ։

234. Բովանդակութիւն անկեանց կողիցն՝ որ զանկիւն ինչ մարմնոյ յօրինեալ կազմիցեն, փոքրագոյն է քան զչորս ուղիղ անկիւնս։

Ուշ եդեալ նայեսցուք ընդ Ս անկիւն մարմնոյ (Ձեւ 160.) որ ի հնգից անկեանց կողից, այս ինքն է ԱՍԲ = ա, ԲՍԳ = բ, ԳՍԴ = գ, ԴՍԵ = դ եւ ԵՍԱ = ե անկեանց կազմեալ է։ Ընդ Ա կէտ մի ՍԱ կողման հաստատեսցուք երեսս ԱԲԴ, որ ընդ ամենայն երեսս կողմանց Ս անկեան հատեալ անցանիցէ, որով ի գծից անտի հատանելոյ յօրինիցի հնգանկիւնն ԱԲԳԴԵ, որոյ ներքին անկիւնքն միահամուռ գումարեալ են = 5·2Ո — 4Ո = 6Ո, եւ զմի մի գա-

գաղթն այսց անկեանց բազմանկեան մարթեմք իբրեւ զգագաթն երեքանիստ անկեան մարմնոյ համարել: Եւ քանզի երկու անկիւնք կողից սոյնպիսի անկեան մարմնոյ միանգամայն, ցանգ մեծագոյն են քան զերրորդ անկիւնն կողից (Հ. 233.), զօրին զհետ գայ, եթէ ԵԱՍ + ՍԱԲ > ԵԱԲ, ԱԲՍ + ՍԲԳ > ԱԲԳ, ԲԳՍ + ՍԳԴ > ԲԳԴ, ԳԴՍ + ՍԴԵ > ԳԴԵ, ԴԵՍ + ՍԵԱ > ԴԵԱ. եւ իբրեւ ի միմեանս յաւելուցումք զչհաւասարութիւնս, լինիցի (ԵԱՍ + ՍԱԲ + ԱԲՍ + ՍԲԳ + ԲԳՍ + ՍԳԴ + ԳԴՍ + ՍԴԵ + ԴԵՍ + ՍԵԱ) > (ԵԱԲ + ԱԲԳ + ԲԳԴ + ԳԴԵ + ԴԵԱ). կամ եթէ զբովանդակութիւնն որ ընդ ահեկէն կայ = բ դնիցեմք, իցէ բ > 6Ո: Իսկ արդ բովանդակութիւնն բ հանդերձ անկեամբք կողիցն՝ որ զՍ անկիւն մարմնոյն ի մէջի փակիցեն, յօրինեալ կազմէ զբովանդակութիւն ամենայն անկեանց հինգ երեքանկեանց, որք բովանդակեն 5 . 2Ո = 10Ո, այս ինքն է

բ + (ա + բ + գ + դ + ե) = 10Ո,

եւ քանզի բ > 6Ո, ուրեմն ա + բ + գ + դ + ե < 4Ո:

235. Եթէ երեք անկիւնք կողից երեքանիստ անկեան մարմնոյ կարգաւ հաւասար իցեն երից անկեանց կողից այլոյ երեքանիստ անկեան մարմնոյ, երկոքին անկիւնքն մարմնոյ միմեանց պատշաճականք են: Այս ինքն եթէ (Ձեւ 161.) անկ. ԱՍԲ = ասբ, ԲՍԳ = բսգ, ԱՍԳ = ասգ, հարկ է զի իցէ եւ անկ. Ս ≅ ս:

Ի գագաթանց անկեանցն ակիզբն արարեալ ի վերայ ամենայն կողից հատանիչիր մասունս հաւասարս, այս ինքն է ՍԱ = ՍԲ = ՍԳ = սա = սբ = սգ. եւ ընդ կէտսն Ա, Բ, Գ եւ ա, բ, գ հաստատեա զհարթ երեսսն ԱԲԳ եւ աբգ. ըստ Հ. 52. ∆ԱՍԲ ≅ ասբ, եւ ∆ՍԲԳ ≅ սբգ, եւ ∆ՍԱԳ ≅ ∆սագ, ուստի եւ ԱԲ = աբ, ԲԳ = բգ, եւ ԱԳ = ագ, զորս զհետ գայ, եթէ ∆ԱԲԳ ≅ ∆աբգ: Զատացելոյս

զհետ գայ (Հ. 214. Բ.), եթէ ուղղորդ գիծքն ՍՄ եւ սմ, որ ի Ս եւ ս գագաթանց ի վերայ ԱԲԳ եւ աբգ երեսաց անկանիցին, հարկ է զի ընդ Մ եւ մ միջոցս բոլորակացն՝ որ զԱԲԳ եւ զաբգ երեքանկեամբք շուրջանակի պատիցին, անցանիցեն. իսկ արդ ΔԱԲԳ ≅ Δաբգ է, ուրեմն ԱՄ = ամ, եւ որովհետեւ ՍԱ = սա, յայտ է եթէ ուղղանկիւն ΔԱՄՍ ≅ ամս, ուստի ՍՄ = սմ:

Արդ իբրեւ զմտաւ ածիցեմք, եթէ մարմինն աբգ ի ՍԱԲԳ այնպէս իմն զետեղիցի, որպէս զի աբգ երեքանկեան ի վերայ ԱԲԳ երեքանկեան անկանել, յայտ է եթէ եւ մ կէտն անկանիցի ի Մ, եւ քանզի ի Մ միոյ եւեթ ուղղորդ գծի հնար է ի վերայ ԱԲԳ հարթ երեսաց անկանել, ուրեմն մս ի ՄՍ ուղղութեան կայ. իսկ արդ մս = ՄՍ է, զորին զհետ գայ եթէ ս կայ ի Ս, յորմէ հարկ է զի երեսք կողմանցն ՍԱԲ եւ սաբ, ՍԲԳ եւ սբգ, ՍԱԳ եւ սագ ի միմեանց վերայ անկանիցին, կամ թէ Ս ≅ ս իցէ:

Զասացելոցս զհետ գայ, զի եթէ երեք անկիւնք կողից Ս երեքանիստ անկեան ինչ մարմնոյ, կարգաւ հաւասար իցեն երից անկեանց կողից այլոյ ս երեքանիստ անկեան մարմնոյ, յայնժամ հարկ է զի եւ երեք անկիւնք երեսաց առաջնոյն մի ըստ միոջէ հաւասար իցեն երից անկեանց երեսաց յետնոյն, կամ թէ եւ անկիւնքն միութեան երեսաց կողմանցն, որ հաւասար հարթ անկիւնս ունիցին, միմեանց հաւասար են փոխանակաւ:

236. 1) Եթէ երեւքն ԲՍԳ (Ձեւ 162.) զմտաւ ածիցի կացեալ ի վերայ երեսաց քարտիսի, եւ ՍԱ կողն ի վերոյ քան զայն, անուանեալ կոչեմք զՍԱ, Կողմն կացեալ ի վերոյ:

2) Համարեսցուք եթէ երեւքն ՍԱԲԳ անկեան մարմնոյ ի վերայ Ս գագաթան արտաքս երկայնեալ իցէ, յայտ է եթէ ՍԱ՛ կողն կայ ի ներքոյ երեսաց քարտիսին, իսկ կողքն ՍԲ՛ եւ ՍԳ՛ կայցեն

միայցեն ի նմին, յորոյ ծագիցի նոր իմն ՍԱ′Բ′Գ′ երեքանկիւն մարմնոյ, որոյ անկիւնքն կողից եւ տարածութիւն երեսաց, առանց յերկուանալոյ, նոյն է ընդ անկեանց կողից, եւ տարածութեան երեսաց ՍԱԲԳ երեքանկեան մարմնոյն, որ ի գագաթան իւրում ի հակառակ ուղղութեան կայ: Եւս յանձնէ իսկ յայտնի եւ երեւելի է, եթէ երկոքին երեքանկիւնքն մարմնոյ հաւասար անջրպետութիւն ի միջի փակեն, այս ինքն է հաւասար այլ առանց կատարածի մասունս բովանդակ անբաւ անջրպետութեան:

3) Արդ նկարեսցուք ի միտս մեր, եթէ անկիւնն մարմնոյ ՍԱ′Բ′Գ′ զՍ կիտիւ այնպէս իմն շրջան առնուցու, որպէս զի ՍԱ′ կողն ի ներքոյ երեսաց քարտիսին յերեսս ԲՍԳ մերձենայցէ, եւ ապա հատեալ զայն անցանիցէ մինչեւ ի վերին կողմն երեսաց քարտիսին եւ այնչափ յառաջ խաղայցէ, զի երեսքն Բ′ՍԳ′ ի միասին ի միում վայրի ընդ ԲՍԳ երեսաց անկանիցին, ուստի եւ ՍԳ′ ի ՍԲ, եւ ՍԲ′ ի ՍԳ գտանիցին յայնժամ եւ կողն ՍԱ′, եթէ անկիւնն ա չիցէ հաւասար բ անկեան չկարէ ի միում վայրի ընդ ՍԱ կողման կալ, այլ, եթէ ա < բ իցէ մօտագոյնս առ ՍԲ կողմն քան զՍԱ: Յորմէ յայտ է, եթէ երկոքին երեքանիստ անկիւնքն մարմնոց ՍԱԲԳ եւ ՍԱ′Բ′Գ′ թէպէտեւ հաւասար իցեն միմեանց, այլ տակայն չեն պատշաճական: Արդ կազմեսցուք երեքկողմեան անկիւն ինչ մարմնոյ աբգ, որ ի հարթ անկեանց անտի ա = ա′ = ա, բ = բ′ = բ, եւ գ = գ′ = գ անկեանց յօրինեալ իցէ, անկիւնն մարմնոյ աբգ ≅ ՍԱ′Բ′Գ′ (Հ. 235.), իսկ արդ անկիւնն մարմնոյ ՍԱ′Բ′Գ′ = ՍԱԲԳ, ուրեմն աբգ = ՍԱԲԳ:

4) Յայս երկու անկիւնս մարմնոյ աբգ եւ ՍԱԲԳ, ամենայն անկիւնք երեսաց եւ ամենայն անկիւնք կողից հակառակ կարգաւ միմեանց հաւասար են: Քանզի ա անկիւնն (համարեալ ի գագաթանէ) յաջմէ կողմանէ աա կողման կայ, իսկ իւր հաւասար անկիւնն ա միւսոյ

անկեան մարմնոյ ընդ ձախմէ ՍԱ կողման . սոյնգունակ եւ հաւասար է եւ բ անկիւնքն ի միմեանց հակառակ դիրս գտանին, հայեցեալ ընդ •• եւ ՍԱ կողմանն: Երկու սմին նման Ս եւ • անկիւնք մարմնոց, որք թէպէտեւ ի հաւասար անկեանց կողից կազմիցին, այլ անկիւնքն միմեանց հակառակ կարգաւ յերկոսին եւս կարգեալ իցեն, ասին Համաչափ:

5) Երկու համաչափ անկիւնք մարմնոյ միմեանց հաւասար են, այլ չեն պատշաճական:

237. Ի ՍԱԲԳ անկեան մարմնոյ (Ձեւ 163.), որոյ երեք կողք են, իցէ ՍԲ կողն կացեալ ի վերոյ: Արդ յոր զինչեւ իցէ Բ կէտէ այսր կողման, որ կացեալ իցէ ի վերոյ, ձգեսցուք զուղղորդ գիծն ԲԴ ի վերայ ԱՍԳ երեսաց, եւ զանցան Դ յօդեսցուք ընդ Ս գագաթան ՍԴ ուղիղ գծիւ, աստստին յայտ է, եթէ անկ. ԲՍԴ է անկիւն միտութեան ՍԲ ի վերոյ կացեալ կողման առ ԱՍԳ երեսս: Դարձեալ ձգեսցուք ԴԱ ⊥ ՍԱ, ԴԳ ⊥ ՍԳ, եւ ընդ անկիւնսն ԲԴԱ եւ ԲԴԳ հաստատեսցուք երեսս, երեսքս այսոքիկ եւս լինիցին ուղղորդ ի վերայ ԱՍԳ երեսաց. իսկ ՍԱ ⊥ եր. ԱԲԴ, եւ ՍԳ ⊥ եր. ԲԳԴ, ուրեմն եւ ՍԱ ⊥ ԱԲ, ՍԳ ⊥ ԲԳ, եւ քանզի ի կատարած՝ ԲԴ ⊥ ԱԴ եւ ԲԴ ⊥ ԳԴ, զսորին զհետ գայ, եթէ անկ. ԱԴԳ իցէ անկիւն միտութեան ԱԲԴ եւ ԲԳԴ երեսաց, որ ուղղորդ ի վերայ ՍԱ եւ ՍԳ կողիցն իցեն: Դարձեալ եւ այն եւս յայտ է, եթէ անկիւնն ԲԱԴ անկիւն միտութեան է ՍԱԲ եւ ԱՍԳ երեսաց կողման, եւ անկ. ԲԳԴ անկիւն միտութեան ԲՍԳ եւ ԱՍԳ երեսաց կողման:

Ա. ՅԱՍԳԴ չորեքանկեան, որ ամենեւին յերեսս ԱՍԳ = ա անկեան կողման գտանի, անկիւնքն՝ որ յԱ եւ ի Գ՝ ուղիղ են, ուստի եւ անկ. ԱՍԳ + ԱԴԳ = 2Ո: Ուրեմն, Յերեքկողմեան անկեան մարմնոյ իւրաքանչիւր անկիւն կողից է լրումն անկեան

միտութեան երկուց երեսաց, որ ուղղորդ ի վերայ սրունից իւրոց կանգնեալ իցեն։

Բ. Եթէ ոք ընդ որ զինչ եւ իցէ Զ կէտ ԲԴ ուղիղ գծի հաստատիցէ երեսս ՁՆԷԸ ⊥ ՍԲ, որով եւ (Հ. 229. Բ.) ՁՆԷԸ ⊥ եր. ԱԲՍ, եւ ՁՆԷԸ ⊥ եր. ԲԳՍ, լինիցի եւ ՍԲ ⊥ ԷՆ, եւ ԲՍ ⊥ ԷԸ, եւ այսուիկ իսկ անկ. ՆԷԸ իցէ անկիւն միտութեան ԱՍԲ եւ ԲՍԳ երեսաց կողման։ Արդ քանզի ՆԶԷԸ եւ ԱԲԴ երեսքն միանգամայն ի վերայ ԱԲՍ երեսաց ուղղորդ կան, սոյին եւ իւրեանց հասարակաց գիծն զմիմեանս հատանելոյ ՆԶ ⊥ եր. ԱԲՍ (Հ. 230. Բ.), ուստի ԶՆ ⊥ ՆԷ եւ ԶՆ ⊥ ԱԲ։ Ըստ նմին օրինակի զհետ գայ, եթէ ԶԸ ⊥ եր. ԲԳՍ, ուստի ԶԸ ⊥ ԸԷ, եւ ԶԸ ⊥ ԲԳ իցէ։ Արդ աս-տըստին տեսանես, եթէ անկ. ԱՆԷ անկիւն միտութեան իցէ ԱԲԴ երեսաց առ ՁՆԷԸ երեսս, եւ անկ. ԳԸԷ անկիւն միտութեան ԲԳԴ երեսաց առ նոյն ՁՆԷԸ երեսս։ Իսկ արդ ի ՍԱՆԷ չորեքանկեան անկ. ՍԱՆ=Ո=ՆԷՍ, ուրեմն անկ. ԱՆԷ+ԱՍԷ=2Ո. եւ ըստ նմին օրինակի ի ՍԳԸԷ չորեքանկեան գտանի անկ. ԳԸԷ+ԳՍԷ=2Ո։ Այնգունակ յԱԴԶՆ չորեքանկեան անկիւնքն որ ի Դ եւ Ն ուղիղք են, եւ ի ԳԴԶԸ չորեքանկեան անկ ԳԴԶ=Ո=ԶԸԳ, ուստի եւ անկ. ԴԶՆ+ԲԱԴ=2Ո, եւ անկ. ԴԶԸ+ԲԳԴ=2Ո։

Արդ ըստ ցարդ ասացելոցս ԶԴՆԸ անկիւն մարմնոյ յօրինեալ կազմեցաւ յերից ԴԶՆ, ԴԶԸ եւ ՆԶԸ հարթ անկեանց, յորում անկ. ԱՆԷ է անկիւն միտութեան ԴԶՆ եւ ՆԶԸ երեսաց, եւ անկ. ԳԸԷ՝ անկիւն միտութեան ԴԶԸ եւ ՆԶԸ երեսաց կողմանց, եւ երեք անկեանցս միտութեան լրմունք են կարգաւ անկիւնքս կողից ԱՍԳ, ԱՍԲ եւ ԲՍԳ։

Ապա ուրեմն. Անկիւնք կողից Ս անկեան ինչ մարմնոյ, որոյ երեք կողք իցեն, են լրմունք անկեանց միտութեան երեսաց կողմանց այլոյ Զ երեքկողմեան

անկեան մարմնոյ. եւ ամէն հակառակ Անկիւնք կողից Զ երեքկողմեան անկեան մարմնոյ զանկիւնս միտութեան երեսաց կողմանց Ս անկեան մարմնոյ կատարեն յերկուս ուղիղ անկիւնս:

Նաեւ արդ որովհետեւ անկիւնք կողից եւ անկիւնք երեսաց Ս եւ Զ անկեանց մարմնոյն փոխանակաւ զմիմեանս կատարեալ լնուն, վասն այնորիկ մի մի իւրաքանչիւր ի նոցանէ անուանեալ կոչի Լրումն միւսոյն:

Գ. Արդ լրումն Ս անկեան ինչ մարմնոյ, որոյ երեք կողք իցեն, կազմեալ յարդարիցի, յորժամ յոր զինչ եւ իցէ Բ կիտէ ՍԲ կողին, որ ի վերոյ կայցէ, ի վերայ երեսաց այլոց երկուց կողիցն ուղղորդ ինչ գիծ ԲԴ ձգիցես, եւ ապա ընդ որ զինչ եւ իցէ Զ կէտ այսր ուղղորդ գծի ի վերայ երից կողիցն զմի ուղղորդ երեսս, այս ինքն եթէ ԶԱԲ ⊥ ՍԱ, ԶԲԳ ⊥ ՍԳ, եւ ԶԵԴ ⊥ ՍԲ ձգիցես, անկիւնն մարմնոյ ԶԴԵԸ, որոյ երեք կողք են, լինիցի լրումն ՍԱԲԳ անկեան մարմնոյ:

Դ. Իցեն Ա, Բ, Գ երեք անկիւնք միտութեան երեսաց կողմանց երեքկողմեան անկեան մարմնոյ, եւ ա, բ, գ անկիւնք կողից լրման այնր անկեան մարմնոյ, ըստ Բ ելանէ

Ա + ա = 2Ո, ուստի եւ Ա < 2Ո
Բ + բ = 2Ո, „ Բ < 2Ո
Գ + գ = 2Ո, „ Գ < 2Ո

արդ իբրեւ զերիս հաւասարութիւնս, եւ զերիս չհաւասարութիւնն ի միմեանս յաւելուցումք, գտանեմք, եթէ

Ա + Բ + Գ + ա + բ + գ = 6Ո

իսկ արդ ա + բ + գ < 4Ո (Հ. 234.) ուրեմն իբրեւ հանիցեմք զայս ի յետին հաւասարութենէ անտի, ելանիցէ

1) Ա + Բ + Գ > 2Ո, եւ
2) Ա + Բ + Գ < 6Ո,

այս ինքն Երեք անկիւնք միտութեան երեսաց կողմանց անկեան մարմնոյ, որոյ երեք կողք իցեն միահամուռ գումարեալ, մեծագոյն են քան զերկուս ուղիղ անկիւնս, եւ փոքրագոյն քան զվեց ուղիղ անկիւնս:

238. Երկու երեքկողմեան անկիւնք մարմնոյ միմեանց պատշաճականք են, եթէ երկու հարթ անկիւնք նոցա, որք յերկոսին եւս անկիւնսն հաւասար առ միմեանս միաեալ իցեն, միմեանց հաւասար իցեն փոխանակաւ:

Դիցուք գրեսցուք եթէ (Ձեւ 161.) իցէ անկ. ԱՍԳ = աօգ, անկ. ԱՍԲ = աօբ, եւ անկիւն միտութեան ԱՍԲ եւ ԱՍԳ երեսաց, իցէ անկիւն միտութեան աօբ եւ աօգ երեսաց: Արդ զմտաւ ած եթէ օ անկիւն մարմնոյ այնպէս իմն ի վերայ Ս անկեան մարմնոյ եդեալ զետեղեալ կայցէ, որպէս զի աօգ անկեան ծածկել զանկիւնն ԱՍԳ, եւ քանզի աօբ երեսաց առ աօգ երեսս նոյն միտութիւն է, որ ինչ ԱՍԲ երեսաց առ ԱՍԳ, ուրեմն հարկ է զի աօբ ի վերայ ԱՍԲ երեսաց անկանիցի. եւ զի անկ. աօբ = անկ. ԱՍԲ համարեցաք, ուրեմն հարկ է զի օբ կողն ի վերայ ՍԲ կողին գտանիցի: Եւ ի կատարած՝ որովհետեւ օբ ի վերայ ՍԲ եւ օգ ի վերայ ՍԳ ուղիղ գծից գտանին, աստստին յայտ է, եթէ անկ. բօգ = անկ. ԲՍԳ, ուրեմն անկիւնքն Ս եւ օ ամենայն եղերօքն հանդերձ ի միմեանց վերայ անկանին, այս ինքն եթէ երկոքին անկիւնքն մարմնոյ միմեանց պատշաճականք են (Հ. 235.):

239. Խնդիր: Յօրինել երեքկողմեան անկիւն ինչ մարմնոյ, որ այլում երեքանկեան մարմնոյ պատշաճական իցէ:

Լուծումն: Յերից կողից ծանուցեալ Ս անկեան մարմնոյ (Ձեւ 161.) հատ մասունս հաւասարս, այս ինքն է ՍԱ = ՍԲ = ՍԳ առնիջիր, եւ յօդեա ընդ միմեանս զկէտս կատարածի նոցա ԱԲ, ԲԳ եւ ԱԳ ուղիղ գծիւք: Յետ այնորիկ կազմեա Δսաբգ ≅ ΔԱԲԳ, եւ ապա ձգեա շուրջանակի զաբգ երեքանկեամբ բոլորակ ինչ, որոյ միջոցն հարկ է զի ի մ գտանիցի: Ի սմին մ կիտի կանգնեա մս ⊥ եր. աբգ, եւ զուգորդ գիծս զայս արա = ՍՄ ուղղորդ գծին, որ ի Ս գագաթանէ անտի ի վերայ ԱԲԳ երեսաց անկանիցի: Յետ այսորիկ ընդ կէտն ս եւ ընդ կողմանս աբգ երեքանկեան հաստատեա զերեսն ասբ, ասգ, եւ բսգ, ապա եղանէ սաբգ անկիւնն մարմնոյ, որ պատշաճական է ծանուցեալ երեքկողմեան ՍԱԲԳ անկեան մարմնոյ, զոր մարթ է ցուցանել օրինակաւս, որ առաջիս կայ:

Զմտաւ ած, եթէ ս անկիւնն մարմնոյ այնպէս իմն եդեալ զետեղեալ կայցէ ի վերայ Ս անկեան, որպէս զի սահմանք պատշաճական աբգ եւ ԱԲԳ երեքանկեանցն ի միմեանց վերայ անկանիցին, սովիմբ հարկ է զի եւ մ ի Մ եւ ուղղորդ գիծն մս ի ՄՍ ուղղութեան կայցեն. քանզի ի մ կիտի՝ միոյ եւեթ ուղղորդ գծի հնար է ի վերայ ԱԲԳ երեսաց անկանել: Իսկ արդ ըստ կազմածոյն է մս = ՄՍ, ուրեմն եւ ս կէտն անկանի ի Ս, յորմէ ի հարկէ իսկ երեսք կողմանցն ասբ եւ ԱՍԲ, ասգ եւ ԱՍԳ, բսգ եւ ԱՍԳ ի միմեանց վերայ անկանին, քանզի ի ձեռն միոյ ուղիղ գծի, եւ միոյ կիտի, որ արտաքոյ նորա կայցէ, մի եւեթ երեսս ձգել հնար է. ուրեմն անկիւնն մարմնոյ ս ≅ Ս,

240. Խնդիր: Ծանուցեալ են երեք հարթ անկիւնք. արդ կամք են յօրինել անկիւն ինչ մարմնոյ, յորում երեք անկիւնքն այնոքիկ գտանիցին:

Լուծումն: Իցեն ԱՍԲ, ԱՍԳ, եւ ԳՍԴ (Ձեւ 164.) երեք ծանուցեալ անկիւնքն յերեսս քարտիսի ԱՍԴ: Արա ՍԱ = ՍԴ, ձգեա ԱԲ ⊥ ՍԲ, եւ

ԴԳ ⊥ ՍԳ, հարկ է զի երկոքին ուղղորդ գիծքն ընդ հատանիցեն զմիմեանս, յորժամ երկայնեսցին (Հ. 80. Զ.):

ՅԵ կիտի անդ կանգնեա ի վերայ ԱՍԴ երեսայ զուղղորդ գիծն ԵԶ, եւ գրեսջիր եթէ ընդ կէտն Ա եւ ընդ ԵԶ երեսք ինչ հաստատեալ իցեն, եւ ի նորին երեսաց վերայ ի Բ կիտէ անտի ԲԱ = ԲԶ կէս երկակորով ձգեա աղեղն բոլորակի, որ զուղղորդ գիծն կանգնեալ ընդ կիտի ի Զ հատանիցէ: Արդ իւրեւ Զ ընդ Ս յօդիցի, անկիւնն մարմնոյ, որ ի ԲՍԶ, ԲՍԴ, եւ ԳՍԶ հարթ անկեանց կազմիցի, իցէ անկիւնն մարմնոյ, զոր խնդրես:

Վասնզի ԱԵԶ երեսքն ուղղորդ կան ի վերայ ԱՍԴ երեսաց (Հ. 229.) եւ ուղիղ գիծն ԲՍ ուղղորդ ի վերայ ԱԵ հասարակաց գծի հատանելոյ զմիմեանս երեսացն այնոցիկ. զորս զհետ գայ, եթէ ՍԲ ի գլխովին ուղղորդ կայցէ ի վերայ ԱԵԶ երեսաց (Հ. 229. Դ.) ուստի եւ անկ. ՍԲԶ = անկ. ՍԲԱ = Ո: Արդ որովհետեւ ՍԲԶ եւ ՍԲԱ ուղղանկիւն երեքանկեանց էջքն ՍԲ = ՍԲ, եւ ԲԶ = ԲԱ են, ուրեմն երկոքին երեքանկիւնքս պատշաճականք են միմեանց, որով անկ. ԲՍԶ = անկ. ԲՍԱ: Ըստ սմին օրինակի ցուցանի եթէ անկ. ԳՍԶ = անկ. ԳՍԴ, յորմէ յայտ է եթէ ի Ս անկիւն մարմնոյ գտանին յառաջագոյն ասացեալ անկիւնքն:

Ա. Յանձնէ իսկ յայտ է, եթէ անկ. ԶԲԵ իցէ անկիւն միութեան ԶՍԲ եւ ԲՍԴ երեսաց, իսկ անկ. ԵԳԶ անկիւն միութեան ԳԶԵ երեսաց առ ԳՍԲ երեսս:

Անկիւնն միութեան ԵԲԶ ձգիցի ի վերայ ԱՍԴ երեսաց մօտաւոր օրինակաւ: Ի Բ կիտէ անտի ԲԱ կէս երկակորով ձգեա աղեղն ինչ բոլորակի ի վերայ ԱՍԴ երեսաց, որ ԵԷ ուղղորդ գծին՝ կանգնելոյ ընդ կիտի ԱԵ ուղիղ գծին՝ ընդ կէտն պատահիցէ: Արդ ձգեա զկէս երկակուրն ԲԷ, եւ լինիցի անկիւնն ԷԲԵ անկիւն միութեան ԲՍԶ եւ ԲՍԴ

երեսաց: Քանզի վասն ԲԻ=ԲԶ=ԲԱ, եւ ԲԵ=ԲԵ լինելոյ, եւ ուղղանկիւն ΔԲԵԻ ≌ ΔԲԵԶ է, ուստի եւ անկ. ԵԲԻ=անկ. ԵԲԶ:

Բ. Եթէ Ա, Բ, Գ անկիւնք միութեան երեսաց կողմանց Ս երեքկողմեան անկեան մարմնոյ ծանուցեալ իցեն, եւ կամք իցեն նոցին օգնականութեամբ զանկիւնն մարմնոյ ի գլխովին յօրինեալ կազմել, պարտ եւ պատշաճ է զայս օրինակ զկրան կատարել:

Խնդրեա զլրմունս Ա, Բ, Գ երից անկեանց միութեան, զորս անուանեսցուք ա, բ, գ: Արդ այսու երիւք ա, բ, գ անկեամբք կազմեա, որպէս վերագոյն, զա անկիւն մարմնոյ, որ լինիցի լրումն խնդրեալ Ս անկեան մարմնոյ, որպէս ի 237. Բ համարոյ յայտ է, եւ յետ այսորիկ գտեալ (ըստ Ա.) զանկիւն միութեան երեսաց կողմանցն այսր ա լրման, որք երեք անկիւնք կողից լինիցին խնդրեալ Ս անկեան մարմնոյ, որովք եւ կարիցես, զկազմածն յօրինել:

241. Խնդիր: Ծանուցեալ են երկու հարթ անկիւնք, եւ անկիւն միութեան երեսաց անկեանցն այնոցիկ. արդ կամք են երեքկողմեան անկիւն ինչ մարմնոյ կազմել, յորում ծանուցեալ մասունքն գտանիցին:

Լուծումն: Իցեն ծանուցեալ անկիւնքն ԱԲՍ եւ ԲՍԳ (Ձեւ 164.): Ընդ զինչեւ իցէ Բ կէտ ԲՍ հասարակաց սրունիցն ձգեա երեսս ինչ ԱԵԶ ուղղորդ ի վերայ ԲՍ ուղիղ գծին, որ զԱՍԳ երեսս յԱԵ ուղիղ գծի անդ հատանիցէ: Ապա յԱԵԶ երեսս յօրինեա անկիւն ինչ ԵԲԶ հաւասար ծանուցեալ անկեան միութեան եւ արա ԲԶ = ԱԲ: Ի կատարած. ձգեա զուղիղ գիծն ՍԶ, եւ ընդ այն եւ ընդ ՍԲ եւ ՍԳ ուղիղ գծիւքն՝ հաստատեա երեսս ԳՍԶ եւ ԲՍԶ. անկիւնն մարմնոյ որ ի ԲՍԶ, ԲՍԳ եւ ԳՍԶ երեսացն փակիցի է անկիւնն, զոր խնդրես: Քանզի որովհետեւ ԲՍ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԵԶ

երեսաց, աստատին յայտ է եթէ անկիւնքն ՍԲՋ եւ ՍԲԱ ուղիղք իցեն, եւ զի ԲՍ=ԲՍ, եւ ԲՋ=ԲԱ, ասլիմք եւ ΔԲՍՋ ≅ ΔԱՍԲ, ուստի անկ. ԲՍՋ= անկ. ԱՍԲ: Արդ որովհետեւ ԲՍ է հասարակաց գիծ հատանելոյ զմիմեանս ԲՍՋ եւ ԲՍԳ երեսաց, եւ ուղիղ գիծքն ԲՋ եւ ԲԵ ի նոյն երեսս ի վերայ նորին ուղիղ գծի ուղղորդ կան, ուրեմն անկ. ՋԲԵ է անկիւն միատութեան երեսացն այնոցիկ, որ ծանուցեալ անկեան միատութեան հաւասար իցէ: Ապա ուրեմն ի Ս յօրինեալ անկեան ծանուցեալ մասունքն գտանին:

ԳԼՈՒԽ Գ.

ՎԱՍՆ ԱՆԿԻՒՆԱՒՈՐ ՄԱՐՄՆՈՑ

242. ԲԱՆԶԻ մարմնոյն անջրպետութիւն կարէ բազում եւ ազգի ազգի կերպարանօք եզերաց սահմանել, վասն այսորիկ այլեւայլ եւ բազմադիմի երկրաչափական մարմնոց հնար է լինել: Իբրեւ ընդ վերին երեսս մարմնոյն միտ եդեալ նայիցիմք, տեսանեմք եթէ կամ Անկիւնաւորք են, յորժամ վերին երեսքն բովանդակ յերեսաց կազմեալ իցէ, եւ կամ Բոլորշի, եթէ ի միոջէ կոր երեսաց յարդարեալ իցէ: Ամենեւին բոլորշի ասի մարմինն, եթէ վերին երեսքն մի եւեթ կոր երեսք իցեն: Բայց սակայն եթէ վերին երեսքն իւիք մասամբ ի հարթ եւ իւիք մասամբ ի կոր երեսաց կազմեալ յօրինեալ կայցէ, յորջորջի Մասամբ իւիք բոլորշի:

Մարմինքն՝ որ ամենեւին անկիւնաւորք իցեն, հայեցեալ ընդ երեսսն՝ յորոց փակիցին, կամ Կարգաւորք են եւ կամ Անկարգ: Երեք երեսք զանջրպետութիւնն մարմնոյ ի միջի փակել չկարեն, քանզի մարթ է նոցա զերեքանկիւն ինչ մարմնոյ յօրինեալ կազմել, եւ վասն զանջրպետութիւնն՝ որ ի միջի կայցէ, փակելոյ, մեւս եւս չորրորդ երեսաց պէտք են: Ապա ուրեմն վասն զանկիւնաւոր մարմին ինչ յօրինեալ յարդարելոյ, գոնեա չորից երեսաց պէտք են: Ըստ բազմութեան թուոյ համարոյ երեսացն, յորոց մարմինն եզերօք փակիցի, անուանեալ կոչի մարմինն չորեքանիստ, հնգանիստ, վեցանիստ այլովքն հանդերձ, եւ բազմանիստ:

243. Երեսքն՝ յորոց շուրջանակի փակեալ իցէ մարմինն, յորջորջին Երեսք կողմանց կամ Երեսք եզերաց. եւ գիծն հատանելոյ զմիմեանս երկուց երեսաց կողմանց ասի Կողմն կամ Կող մարմնոյն: Ուղիղ գիծն՝ որ զգագաթունս երկուց անկեանց (որ ի վերայ միոյ կողման չկայցեն) բազմանիստ մարմնոյ,

ընդ միմեանս յօդիցէ, ասի Անկիւնագիծ: Երեսքն կողման, յորոց վերայ կանգնեալ հաստատեալ զմտաւ ածիցի մարմինն, ասի Խարիսխ: Եթէ միւս եւս երկրորդ երեսք մարմնոյ ի խարիսխ համարեալ երեսաց հաւասար հեռաւոր գտանիցի, ասի, եթէ Մարմնոյն երկու երեսքն ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են: Բացարձակութիւն երկոցունց հաւասար հեռաւոր խարսխացս, յորջորջի Բարձրութիւն մարմնոյ: Բովանդակութիւն ամենայն երեսաց, ասի Արտաքին կամ Վերին երեսք մարմնոյն (Հ. 4.)

244. Մարմինն՝ որ յերկուց հաւասար հեռաւոր եւ պատշաճական խարսխաց, եւ ի հարթ երեսաց, որ ընդ երկու երկու հաւասար հեռաւոր կողմանս երկոցունց խարսխացն անցանիցեն, կազմեալ իցէ, ասի Սղոցած: Ըստ բազմութեան թուոյ կողմանցն անուանեալ կոչի եւ սղոցածն երեքանկիւն, չորեքանկիւն, հնգանկիւն, ... բազմանկիւն, կամ երեքկողմեան, չորեքկողմեան, ... բազմակողմեան: Եթէ կողմունք սղոցածի, որով եւ երեսք կողմանց նորա ի գլխովին ուղղորդ ի վերայ խարսխին կայցեն, ասի սղոցածն Ուղղորդ կամ Ուղիղ, ապա թէ ոչ Ծուռ: Եթէ խարիսխ սղոցածի հաւասար հեռաւոր ձեւ իցէ, յայնժամ չորեքկողմեան սղոցածն առանձինն ասի Երկայնաձեւ խորանարդ:

Յորժամ խարիսխքն ուղղորդ երկայնաձեւ խորանարդի ուղղանկիւնք իցեն, անուանի Ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդ, յայնժամ եւ ամենայն երեսք կողմանց նորին ուղղանկիւնք են: Եթէ միմեանց հաւասարք իցեն ամենայն կողք երկայնաձեւ խորանարդի ասի Խորանարդ:

Ա. Բարձրութիւն սղոցածի մնայ առանց փոփոխելոյ, յորժամ յոր զինչ եւ իցէ միոյ կիտէ խարսխին ուղղորդ գիծ ի միւս խարիսխն ձգիցի (Հ. 223.):

Բ. Մարթեմք զողոցածն ԱԲԳԴԷԺ (Չեւ 165.) անտի իսկ ծագեալ համարել, որպէս թէ ձեւն ԱԲԳԴԵ ընդ երկայնութիւն ԱԶ կողման ցանդ ի հաւասար հեռաւոր ուղղութիւնս յառաջ խաղացցէ:

Յայսմանէ ինքնին յառաջ գայ, զի եթէ ողոցած մի յերեսաց ինչ հաւասար հեռաւոր ընդ խարսխին հատանիցի, գիծքն հատանելոյ այնց երեսաց եւ կողմանցն այնր ողոցածի ձեւ ինչ յօրինեալ կազմեն, որ պատշաճականն է խարսխին:

Գ. Ըստ մեկնութեան զոր վասն ողոցածի ընծայեցուցաք, է, ԱԲ # ԶԷ, ԲԳ # ԷԸ, ԳԴ # ԸԹ, այլովքն հանդերձ, աստի եւս է ԱԶ # ԲԷ, ԲԷ # ԳԸ, ԳԸ # ԴԹ, այլովքն հանդերձ. ուրեմն Ամենայն կողմանք ողոցածի ի միմեանց հաւասար հեռաւորք են, եւ զի ի մէջ հաւասար հեռաւոր երեսաց կան, ուրեմն եւ միմեանց եւս հաւասարք են: Ապա երեսք կողմանց ողոցածի հաւասար հեռաւոր ձեւք են:

Ապա յուղղորդ ողոցածի բարձրութիւնն հաւասար է կողմանցն:

Դ. Եթէ ընդ երկուս երկուս ԲԷ եւ ԵԺ կողմանս ողոցածի որ չիցեն ի վերայ միոյ յերեսաց կողմանց, երեսս ինչ ԲԺ հատանիցես, կտրուածն ԲԷԺԵ որ անտի ծագիցի, ասի կտրուած անկիւնագծի, իսկ անկիւնագիծն այնպիսի կտրուածոյ, ասի Անկիւնագիծ ողոցածի:

Ե. Որովհետեւ ԲԷ || ԵԺ (ըստ Գ.) եւ ԲԵ || ԷԺ (Հ. 219.), աստի յայտ է եթէ ԲԺ կտրուած անկիւնագծի յամենայն ողոցածս է հաւասար հեռաւոր ձեւ:

245. Մարմինն՝ որոյ մին յերեսաց կողմանցն բազմանկիւն ինչ իցէ, եւ այլ երեսք կողմանցն ընդ կողմն բազմանկեան եւ ընդ այլ մի եւ նոյն կէտ հատեալ անցանիցեն, անուանեալ կոչի Բուրգն, բազմանկիւնն՝ զորմէ ասացաք կոչի Խարիսխ, կէտն միաւորելոյ ընդ միմեանս գագաթանց երեսաց կողմանցն Գագաթն կամ Ծագ բրգան. եւ ուղղորդ

գիծն, որ անտուստ ի վերուստ ի գագաթանէ անտի բրգանն ի վերայ խարսխին անկանիցի, Բարձրութիւն բրգան:

Եթէ բուրգնն հաւասար հեռաւոր ի խարըսխէն հատանիցի, մասն՝ որ ի մէջ երկուց հաւասար հեռաւոր երեսացն կայցէ, ասի Գլխատեալ կամ Կրճատեալ բուրգն: Իբրեւ յերեսս ինչ կողման ի գագաթանէ անտի ձգիցես ուղղորդ գիծ ի վերայ կողման խարսխին, ասի Հեռագիր: Գիծն հատանելոյ զմիմեանս երկուց երեսաց կողմանցն (զերեսս խարսխին ոչ ի համար արկեալ) ասի Գիծ կողման, կամ Համառօտիւք Կողմն բրգան: Ապա ամենայն բրգանց այնչափ ինչ կողմանք եւ երեսք կողմանց են, որչափ ինչ միանգամ խարիսխն կողմանս կամ անկիւնս ունիցի, Աստի իսկ եւ բուրգն անուանեալ կոչի երեքկողմեան, չորեքկողմեան, կամ երեքանիստ, չորեքանիստ,... ըստ երեսաց խարսխին երից, չորս, հինգ,... կողմանս կամ անկիւնս ունելոյ:

Եթէ ի բրգան գիծք կողմանցն միմեանց հաւասարք իցեն, ասի բուրգն Ուղղորդ կամ Ուղիղ. իսկ եթէ ոչին հակառակն դիպիցի Ծուռ: Ապա ուրեմն է միջոց ինչ ձեւոյ խարսխի ուղղորդ բրգան, կամ որ նոյն ինչ իրք են, մարթի զխարսխաւ ուղղորդ բրգան բոլորակ ինչ ձգել արտաքոյ, եւ ուղղորդ գիծն, որ ի գագաթանէ բրգանն ի վերայ խարսխին անկանիցի, ընդ այս միջոցս անցանէ (Հ. 214. Դ.):

Յորժամ խարիսխն ուղղորդ բրգան կարգաւոր ինչ բազմանկիւն իցէ, յօրջօրջի բուրգնն Հաւասարակող: Ապա հաւասարակող բուրգնն փակեալ է շուրջանակի ի միոյ կարգաւոր բազմանկեանէ, եւ յայնչափ ինչ հաւասարասրուն երեքանկեանց, որչափ ինչ կողմանս խարիսխն ունիցի: Ապ'եթէ կողմանք հաւասարակող բրգան հաւասար եւս իցեն կողմանց խարսխին, հաւասարակող բուրգնն ասի Կարգաւոր: Ապա ուրեմն կարգաւոր բուրգնն ի միոյ կարգա-

ւոր բազմանկեանէ, եւ յայնչափ ինչ պատշաճական հաւասարակող երեքանկեանց, որչափ կողմանս խարիսխն ունիցի, կազմեալ եւ կայ։

ՀԱՏԱԾ Ա

ՀԱՍԱՐԱԿԱՑ ՀԱՆԴԱՄԱՆՔ ԱՆԿԻՒՆԱՒՈՐ ՄԱՐՄՆՈՑ

246. ՅԱՄԵՆԱՅՆ *մարմինս թիւ համարոյ կողից հաւասար է կիսոյ բովանդակութեան թուոյ համարոյ կողմանցն կամ հարթ անկեանց, զորս երեւք կողմանցն առանձինն ունիցին։*

Վասնզի վերին երեւք անկիւնաւոր մարմնոյն կարեն ի հարթ ձեւոց, որչափ եւ բազում իցեն թուով, կազմել, եւ ամենայն ձեւքս կարեն միօրինակ կամ բազմադիմի եւս լինել, նմին իրի ցանդ երկուց երկուց հարթ երեսաց մի կողմն հասարակաց է, ուրեմն ամենայն անկիւնաւոր մարմինք կիսով չափ նուազագոյն կողս ունիցին քան զկողմանս, որ իցեն երեսա̀ց կողմանցն առանձինն. եւ քանզի ամենայն Նկողմեան բազմանկեան եւ Ն անկիւնք են, ուրեմն ամենայն անկիւնաւոր մարմին կիսով չափ նուազագոյն ունիցի կողս, քան զթիւ համարոյ անկեանց երեսաց։

Արդ յորժամ զթիւ համարոյ երեսաց կողմանցն Ն, եւ զբովանդակութիւն թուոյ կողմանցն, զորս հարթ երեւքս առանձինն ունիցին՝ կ, զթիւ համարոյ ամենայն հարթ անկեանց Ա, եւ զթիւ համարոյ կողիցն Կ դնիցեմք, հասարակաց օրինակաւ լինիցի $կ = Ա = 2Կ$, *կամ* $Կ = \frac{1}{2} կ = \frac{1}{2} Ա$։

Ա. *Վասնզի Կ ցանդ ողջոյն ինչ թիւ է, ուստի եւ 2Կ զոյգ ինչ թիւ, վասն որոյ հարկ է զի անկիւնք երեսացն՝ որ ի վերին երեսս անկիւնաւոր մարմնոյ գտանիցին, զոյգ իցեն թուով, որպէս զի* $\frac{Ա}{2} = Կ$ *ողջոյն թիւ կարիցէ լինել։*

Բ. Արդ եթէ իւրաքանչիւր երեսք կողմանցն առանձինն զմտաւ ածեալ, անզոյգ ինչ թիւ համարոյ կողմանցն ունիցի, յայնժամ հարկ է զի Ե զոյգ իցէ։ Վասնզի եթէ Ե անզոյգ ինչ թիւ լինիցի, յայնժամ հարկ է զի ըստ մերոյ համարելոյ կ (Նշան. համ. Հ. 110.), ուստի եւ Ա անզոյգ իցէ, որ անպատեհ իմն է (Ա.)։

Գ. Եթէ երեսացն՝ որ զմարմինն եզերօք փակիցեն, իւիք մասամբ զոյգ, եւ իւիք մասամբ անզոյգ թիւ համարոյ կողմանց իցէ, յայնժամ հարկ է զի երեսքն որոց անզոյգ թիւ համարոյ կողմանց իցէ, զոյգ իցեն թուով։ Վասնզի երեսք կողմանցն որոց զոյգ իցէ թիւ համարոյ կողմանց, եթէ զոյգ իցեն, եւ եթէ անզոյգ թուով՝ բովանդակութիւն թուոյ համարոյ կողմանց նոցա ցանգ զոյգ է (Նշ. համ. Հ. 110.), զոր դիցուք հաւասար 2Ն։ Արդ եթէ երեսք կողմանցն, որոց անզոյգ իցեն կողմանքն, անզոյգ իցեն թուով, յայնժամ եւ բովանդակութիւն ամենայն կողմանցն իցէ անզոյգ, զոր օրինակ $= 2\text{Մ} + 1$, ուստի եւ լինիցի $\text{կ} = 2\text{Ն} + 2\text{Մ} + 1 = 2\text{Կ}$; յորմէ $\text{Կ} = \text{Ն} + \text{Մ} + \frac{1}{2}$, որ անպատեհ իմն է, (ըստ Ա.)։

247. Վասնզի երեսքն՝ որ զմարմինն եզերօք փակիցեն՝ կամ երեքանկիւնք են եւ կամ բազմակողմեան ձեւք, նմին իրի (եթէ պահիցեմք զնշանագիրսն, զոր յառաջին համարն եդաք), եւ $\text{Ա} = 3\text{Ե}$, եւ կամ $\text{Ա} > 3\text{Ե}$, յորմէ եւ կամ $\text{Ե} = \frac{1}{3}\text{Ա}$, եւ կամ $\text{Ե} < \frac{1}{3}\text{Ա}$։ Որեմն. Թիւ համարոյ ամենայն հարթ անկեանց, որ ի վերայ վերին երեսաց անկիւնաւոր մարմնոյ գտանիցին, դէթ երեքպատիկ մեծ է քան զթիւ երեսաց կողմանցն։

Որովհետեւ $\text{Ա} = 2\text{Կ} = \text{կ}$ (Հ. 246.), ուրեմն

$2\text{Կ} = 3\text{Ե}$, եւ կամ $2\text{Կ} > 3\text{Ե}$, ուստի
$\text{Կ} = \frac{3}{2}\text{Ե}$, „ „ $\text{Կ} > \frac{3}{2}\text{Ե}$, աստի եւս
$\text{Ե} = \frac{2}{3}\text{Կ}$, „ „ $\text{Ե} < \frac{2}{3}\text{Կ}$, եւ
$\text{կ} = 3\text{Ե}$, „ „ $\text{կ} > 3\text{Ե}$, ուստի եւ
$\text{Ե} = \frac{1}{3}\text{կ}$, „ „ $\text{Ե} < \frac{1}{3}\text{կ}$։

248. Որովհետեւ վասն զանկիւն ինչ մարմնոյ կազմելոյ, գոնեայ երից հարթ անկեանց պէտք են, սաստին մարթես ի վերայ հասանել զի, եթէ զթիւ համարոյ ամենայն անկեանց մարմնոյ ա նշանագրով նշանակիցեմք, եւ զառաջին ասացեալ նշանագիրսն չփոփոխիցեմք, լինիցի $Ա = 3ա$, կամ $Ա > 3ա$։ Ուրեմն ամենայն անկիւնաւոր մարմին ունի գոնեա հարթ անկիւնս երեքպատիկ աւելի քան զանկիւնս մարմնոյ։ Ուստի եւ է

$$Ա = 3ա, \text{ կամ } Ա > 3ա, \text{ յորմէ}$$
$$ա = \tfrac{1}{3}Ա, \text{ „ } ա < \tfrac{1}{3}Ա։$$

Եւ արդ որովհետեւ $Ա = կ = 2Կ$, ուրեմն

ա) $$կ = 3ա, \text{ կամ } կ > 3ա, \text{ եւ}$$
$$ա = \tfrac{1}{3}կ, \text{ „ } ա < \tfrac{1}{3}կ.$$

բ) $$2Կ = 3ա, \text{ „ } 2Կ > 3ա$$
$$Կ = \tfrac{3}{2}ա, \text{ „ } Կ > \tfrac{3}{2}ա, \text{ եւ}$$
$$ա = \tfrac{2}{3}Կ, \text{ „ } ա < \tfrac{2}{3}Կ։$$

249. Յամենայն անկիւնաւոր մարմինս թիւ համարոյ կողիցն՝ երկու միութեամբք չափ փոքրագոյն է քան զբովանդակութիւն թուոյ համարոյ երեսաց կողմանցն, եւ անկեանց մարմնոյն միանգամայն։

Ցուցումն։ Ա. Եթէ երեսքն, որ զանկիւն ինչ մարմնոյ յօրինեալ կազմիցեն, ի նոր ինչ հարթ երեսաց հատանիցին, յամենայն կողմանց սահմանիցի եւ փակիցի եղերօք անջրպետութիւն ինչ. ուստի եւ ծագիցէ մարմինն զոր մեք վերագոյն Հ. 245. բուրգն կոչեցաք։ Ապա ուրեմն գէթ չորից հարթ երեսաց պէտք են, վասն զանջրպետութիւն ինչ եղերօք փակելոյ, կամ վասն զերկրաչափական մարմին ինչ յօրինելոյ։

Բ. Արդ որովհետեւ ամենայն բուրգն յայնչափ ինչ երեսաց կողմանց եւ յայնչափ ինչ կողից կազմի, որչափ միանգամ կողմանս խարիսխն ունիցի (Հ. 245.), վասն այսորիկ ըստ օրինակին որով վերագոյն վարե-

ցայք, եթէ զխարիսխ բրգանն Նկողմեան դնիցեմք, լինիցի

1) Ե=Ն+1, 2) կ=4Ն, 3) Կ=2Ն, 4) Ա= 4Ն, եւ 5) ա=Ն+1։

Արդ զորցին զհետ դայ, եթէ

Ե=ա= Ն+1, ուրեմն եւ
Ե+ա=2Ն+2, եւ քանզի Կ = 2Ն,
Ե+ա= Կ+2, ուստի
Կ=Ե+ ա−2,

այս ինքն է, Յամենայն բրգունս թիւ համարոյ երեսաց կողմանցն եւ թիւ համարոյ անկեանց մարմնոյ միանգամայն երկու միութեամբք մեծագոյն է քան զթիւ համարոյ կողիցն։

Գ. Արդ զմտաւ ած երկուս բրգունս, որոց իցեն մի երեքկողմեան երեսք կողմանցն հաւասարք եւ նմանք միմեանց։ Արդ զբրգունս զայնոսիկ հաստատեա ի միմեանց վերայ ի կողմանց անտի պատշաճական երեսացս. սովիմբ երկու երեսք կողմանց, երեք անկիւնք մարմնոյ, երեք կողք կորնչէին ջնջին ի բաց։ Յետ ընդ միմեանս յօդելոյ երկուց բրգանցս, եւ զայն եւս յառաջագոյն դնեմք, եթէ խարիսխք երկուց բրգանցս չկայցեն ի վերայ մի եւ նոյն երեսաց, քանզի յայս դէպս չորք կողք կորնչիցին։ Արդ եթէ զթիւ համարոյ երեսաց կողմանցն ե, զանկեանց մարմնոյ ա, եւ զկողիցն է յառաջին բրգան, եւ յերկրորդն նոյնպէս ե′, ա′, է′ դնիցեմք, եւ ի նորոգ կազմեալ մարմնին Ե, ա եւ կ, գտանիցեմք ըստ ասացելոցս զմտաւոր հաւասարութիւնս

1) Ե = ե + ե′ − 2, 2) ա = ա + ա′ − 3, եւ 3) կ = է + է′ − 3. Իսկ արդ (ըստ Բ.)
է = ե + ա − 2, եւ է′ = ե′ + ա′ − 2, ուրեմն
է + է′ = ե + ա − 2 + ե′ + ա′ − 2 = (ե + ե′ − 2) + ա + ա′ − 2։

Իբրեւ զզօրութիւնս զայս հաստատիցեմք յ3 հաւասարութեան, եղանիցէ

կ = (ե + ե′ − 2) + ա + ա′ − 2 − 3, կամ
կ = (ե + ե′ − 2) + (ա + ա′ − 3) − 2, եւ քանզի
(ըստ 1) ե + ե′ − 2 = Ե, եւ (ըստ 2) ա + ա′ − 3 = ա,
ուրեմն փոխանակելով

կ = Ե + ա − 2.

Ապա ուրեմն յայս յօդեալ Մ մարմինն թիւ համարոյ երեսաց կողմանցն, եւ թիւ համարոյ անկեանց մարմնոյն միահամուռ գումարեալ, երկուք միութեամբք առաւելու քան զթիւ համարոյ կողիցն։

Դ. Արդ դարձեալ ածցուք զմտաւ, եթէ ի Մ մարմինն դարձեալ յաւելցի միւս եւս բուրգն այսպիսի ինչ հանգամանօք, եթէ երկու երեքկողմեան երեսք կողմանց նորին եւ երկու երեսք կողմանց Մ մարմնոյն ճշդիւ ի միմեանց վերայ անկանիցին. յայնմ նորոգ կազմածի անդ կորնչին ջնջին ի բաց չորք երեսք կողմանց, չորք անկիւնք մարմնոյ, եւ վեց կողք, յորմէ եւ, եթէ զվերագոյն յիշատակեալ նշանակն պահիցեմք, ի նոր Մ′ մարմնի անդ է

1) Ե = ե + ե′ − 4, 2) ա = ա + ա′ − 4, եւ
3) կ = է + է′ − 6։

Իսկ արդ է

է = ե + ա − 2, եւ է′ = ե′ + ա′ − 2, ուրեմն
է + է′ = ե + ե′ + ա + ա′ − 4, կամ
է + է′ = ե + ե′ − 4 + ա + ա′, յորմէ եւ
է + է′ − 6 = ե + ե′ − 4 + ա + ա′ − 6, կամ
է + է′ − 6 = (ե + ե′ − 4) + (ա + ա′ − 4) − 2,

այս ինքն է

կ = Ե + ա − 2

Ապա ուրեմն եւ ամին իսկ պատշաճին օրէնքն, որ ի Բ եւ ի Գ ցուցան։

Ե. Արդ այսու օրինակաւ յառաջ խաղալով ցուցանի, եթէ հաստատակաց օրինակս $կ = Ե + ա - 2$ պատշաճիցի եւ կազմածոյն՝ որ զնի դայցեն, ուստի եւ առ հասարակ ընդունելի իցէ, Եթէ յամենայն մարմինս, որ ի բրդանց որչափ եւ բազում իցեն թուով, կազմեալ իցեն, թիւ համարոյ երեսաց կողմանցն եւ անկեանց մարմնոյն միանգամայն քան զթիւ կողիցն երկոքումբք չափ մեծագոյն է. Իսկ արդ զամենայն անկիւնաւոր մարմին, մարթեմք բովանդակ ի բրդանց կազմեալ յօրինեալ համարել, յորժամ զկէտ մի՝ որ ի ներքս փակեալ անջրպետութեանն կայցէ, ընդ ամենայն անկիւնս մարմնոյն ուղիղ գծիւք յօդիցեմք, եւ ընդ անկիւնն՝ որ անտի յօրինիցին, հարթ երեսս հաստատիցեմք. ապա ուրեմն հաստատակաց օրինակս $կ = Ե + ա - 2$ պատշաճի ամենայն անկիւնաւոր մարմնոց:

250. Յամենայն անկիւնաւոր մարմինս վեցիւք չափ առաւելեալ թիւ համարոյ կողիցն՝ ցանդ փոքրագոյն է քան զերեքպատիկ թիւ համարոյ անկեանց մարմնոյն կամ երեսաց կողմանցն. եւ թէ առաւել՝ հաւասար:

Քանզի (Հ. 247.) հաստատակաց իմն օրինակաւ է կամ

$$կ = \tfrac{3}{2}Ե, \text{ եւ կամ } կ > \tfrac{3}{2}Ե.$$

Իսկ արդ (Հ. 249.) հաստատակաց օրինակաւ է եւս

$$կ = Ե + ա - 2, \text{ ուստի } Ե = կ - ա + 2,$$

յորմէ եւ փոխանակելով զզօրութիւնս յառաջինն

$$կ = \tfrac{3}{2}(կ - ա + 2) \text{ կամ } կ > \tfrac{3}{2}(կ - ա + 2)$$

այս ինքն

$$կ = \tfrac{3}{2}կ - \tfrac{3}{2}ա + 3, \text{ կամ } կ > \tfrac{3}{2}կ - \tfrac{3}{2}ա + 3,$$

յորմէ կամ

$$կ + 6 = 3ա, \text{ կամ } կ + 6 < 3ա \text{ գտանիցի:}$$

Իսկ արդ (Հ. 248.) հաստատակաց օրինակաւ եւս է

$$2\text{կ}=3\text{ա},\ \text{կամ}\ 2\text{կ}>3\text{ա}:$$

եւ եթէ յայսմ $\text{ա}=\text{կ}-\text{ե}+2$ (Հ. 249.) դնիցեմք, գտանի

$$2\text{կ}=3\text{կ}-3\text{ե}+6,\ \text{կամ}\ 2\text{կ}>3\text{կ}-3\text{ե}+6$$

այս ինքն

$$\text{կ}+6=3\text{ե},\ \text{կամ}\ \text{կ}+6<3\text{ե}:$$

Ա. Արդ որովհետեւ $\text{կ}+6\overset{=}{<}3\text{ե}$, եւ

$$\text{կ}+6\overset{=}{<}3\text{ա},\ \text{ուրեմն}$$

$$2(\text{կ}+6)\overset{=}{<}3(\text{ե}+\text{ա})$$

ուստի եւ միշտ

$$\text{կ}+6<3(\text{ե}+\text{ա}),$$

այս ինքն, Վեցիւք չափ առաւելեալ թիւ համարոյ կողիցն ցանդ փոքր է քան զերեքպատիկ թիւ համարոյ երեսաց կողմանցն եւ անկեանց մարմնոյ միանգամայն:

Բ. Ի գրուածոյս

$$\text{կ}+6\overset{=}{<}3\text{ե},\ \text{եւ}\ \text{կ}+6\overset{=}{<}3\text{ա}$$

յառաջ գայ

$$\text{ե}\overset{=}{>}\tfrac{1}{3}\text{կ}+2,\ \text{եւ}\ \text{ա}\overset{=}{>}\tfrac{1}{3}\text{կ}+2$$

Գ. Որովհետեւ

$$\text{կ}+6\overset{=}{<}3\text{ե},\ \text{եւ}\ \text{կ}=\text{ե}+\text{ա}-2\ (\text{Հ. 249.})$$

ուրեմն փոխանակելով

$$ե + ա - 2 + 6 \leqq 3ե \text{, ուստի}$$

$$ա + 4 \leqq 2ե \text{, կամ } ա \leqq 2ե - 4 \text{, եւ}$$

$$ե \geqq \tfrac{1}{2}ա + 2 \text{, կամ } ե - 2 \leqq \tfrac{1}{2}ա$$

Դ. Դարձեալ որովհետեւ $2կ \geqq 3ե$ (Հ. 247.), եւ

$$կ = ե + ա - 2 \text{, ուստի } 2կ = 2ե + 2ա - 4,$$

ուրեմն փոխանակելով $2ե + 2ա - 4 \geqq 3ե$. զորոյ զհետ գայ

$$ե \leqq 2ա - 4 \text{, եւ } ա \geqq \tfrac{1}{2}ե + 2$$

Ե. Յաստացելոցս ի Գ եւ ի Դ զհետ գայ, եթէ նշանակութիւն ե քանիօնութեան ցանգ ի միջին վայրի $\frac{1}{2}ա + 2$ եւ $2ա - 4$ քանիօնութեանց, իսկ նշանակութիւն ա քանիօնութեան ի մէջ $\frac{1}{2}ե + 2$ եւ $2ե - 4$ քանիօնութեանց կայ։

251. Եթէ յերկուց ե, կ $(= \frac{1}{2}Ա = \frac{1}{2}Կ)$ եւ ա քանիօնութեանց երկուքն ծանուցեալ իցեն, մարթեմք զերրորդն ի ձեռն

$$կ = ե + ա - 2 = \tfrac{1}{2}Ա = \tfrac{1}{2}Կ$$

հաւասարութեանս գտանել, եւ յօրինացն զորոյ ցայս վայր ճառ արկեալ խօսեցաք յօրինի մօտաւոր պատկերս,

ԾԱՆՈՒՑԵԱԼ ՔԱՆ·	ԽՆԴՐԵԱԼ ՔԱՆԻՕՆՈՒԹԻՒՆ	ՍԱՀՄԱՆՔ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹԵԱՆ ներքագոյն	ՍԱՀՄԱՆՔ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹԵԱՆ վերագոյն	ԸՍՏ ՀԱՄԱՐՈՑ
1) ե	կ	$\frac{3}{2}$ե	3ե — 6	247 · 250
	ա	$\frac{1}{2}$ե + 2	2ե — 4	250 · Դ 250 · Գ
2) կ	ե	$\frac{1}{3}$կ + 2	$\frac{2}{3}$կ	250 · Բ 247
	ա	$\frac{1}{3}$կ + 2	$\frac{2}{3}$կ	250 · Բ 248
3) ա	ե	$\frac{1}{2}$ա + 2	2ա — 4	250 · Ե
	կ	$\frac{3}{2}$ա	3ա — 6	248 250

Եթէ մին յեղեալ քանիօնութեանց անտի ծանուցեալ իցէ, պատկերս, որ առաջիս կայ ցուցանէ զսահմանս կամ զեզերս նշանակութեանց այլոց երկոցունցն, վասն որոյ եւ զայն եւս պարտ է ի միտ առնուլ, զի, եթէ սահմանքս այսոքիկ կոտորք իցեն, մարթիմք զողջոյն թիւսն որ ի միջին վայրի նոցին գտանիցին առնուլ, քանզի հարկ է ե, կ, *եւ* ա *քանիօնութեանց ողջոյն թիւ լինել:*

Ա· *Ապա ուրեմն չիք անկիւնաւոր մարմին եւթն կողիւք: Քանզի եթէ* կ = 7, *յայնժամ ըստ պատկերիս՝ նշանակութիւն* ե *քանիօնութեան անկանիցի ի միջին վայրի* $\frac{7}{3} + 2 = \frac{13}{3}$, *եւ* $\frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3}$ *կոտորոց: Իսկ արդ ի մէջ* $\frac{13}{3}$ *եւ* $\frac{14}{3}$ *կոտորոցս չգտանի ողջոյն ինչ թիւ. ապա ուրեմն չիք մարմին, որոյ եւթն կողք իցեն:*

Բ· *Եւ ոչ մի մարմին կարէ բովանդակ յայնպիսի ձեւոց փակել, որոց վեց կամ աւելի եւս կողմանք իցեն: Քանզի եթէ ամենայն երեսաց կողմանցն մարմնոյն վեց կամ թէ աւելի եւս կողմանք իցեն, յայնժամ թիւ համարոյ հարթ անկեանցն որ ի վերին երեսս մարմնոյն գտանիցին, այս ինքն է* Ա = 6ե, *կամ* Ա > 6ե *լինիցի, եւ քանզի* Ա = 2կ (Հ·

246.), յայտ է եթէ $2\text{կ} \geqq 6\text{Ե}$, կամ $\text{կ} \geqq 3\text{Ե}$. որ անհնարին ինչ է, քանզի ըստ 1 մասին պատկերիս կ միշտ ի միջին վայրի $\frac{3}{2}\text{Ե}$ եւ $3\text{Ե} - 6$ թուոց կայ:

Գ. Դարձեալ չէք մարմին ինչ, որոյ ամենայն անկիւնքն մարմնոյ ի վեց կամ յաւելի եւս հարթ անկեանց յօրինեալ իցեն: Քանզի եթէ այսպիսի ինչ դիպիցի, յայնժամ հարկ է զի իցէ $\text{Ա} = 6\text{ա}$, կամ $\text{Ա} > 6\text{ա}$, ուստի եւ $\text{կ} \geqq 3\text{ա}$, որ անպատեհ իմն է, քանզի ըստ մերոյ պատկերիս $3\text{ա} - 6$ մեծագոյն սահման է նշանակութեան կ քանիօնութեան:

252. Յամենայն անկիւնաւոր մարմնոյ բովանդակութիւն ամենայն հարթ անկեանց, որ ի վերին երեսս մարմնոյն գտանիցին, հաւասար է չորից ուղիղ անկեանց բազմացուցեալ այլակերպութեամբ թուոյ կողից եւ երեսաց կողմանցն:

Դնիցուք գրեսցուք, եթէ վերին երեսք մարմնոյն յա երեքանկեանց, ի բ չորեքանկեանց, ի գ հնգանկեանց, ի դ վեցանկեանց, եւ յե եւթնանկեանց, եւ յայլոցն եւս կազմեալ իցէ. լինիցի

$$\text{Ա} = 2\text{կ} = 3\text{ա} + 4\text{բ} + 5\text{գ} + 6\text{դ} + 7\text{ե} + \dots, \text{ ուստի եւ}$$

$$1)\ 4\text{կ} = 6\text{ա} + 8\text{բ} + 10\text{գ} + 12\text{դ} + 14\text{ե} + \dots, \text{ եւ}$$

$$\text{Ե} = \text{ա} + \text{բ} + \text{գ} + \text{դ} + \text{ե} + \dots, \text{ ուստի}$$

$$2)\ 4\text{Ե} = 4\text{ա} + 4\text{բ} + 4\text{գ} + 4\text{դ} + 4\text{ե} + \dots :$$

Իբրեւ հանիցեմք զ2 յ1 հաւասարութենէ, ելանիցէ

$$3)\ 4\text{կ} - 4\text{Ե} = 4(\text{կ} - \text{Ե}) = 2\text{ա} + 4\text{բ} + 6\text{գ} + 8\text{դ} + 10\text{ե} + \dots :$$

Դարձեալ որովհետեւ բովանդակութիւն անկեանց

յամենայն երեքանկիւնս է $= 2\text{Ո}$,
„ չորեքանկիւնս $= 4\text{Ո}$,
„ հնգանկիւնս $= 6\text{Ո}$,
„ վեցանկիւնս $= 8\text{Ո}$,
„ եւթնանկիւնս $= 10\text{Ո}$,
. . . .

զորին զհետ գայ, զի եթէ զբովանդակութիւն ամենայն անկեանց, որ ի վերին երեսս մարմնոյն գտանիցին Ա^0 նշանագրով նշանակիցեմք, լինիցի

$$\text{Ա}^0 = \text{ա}\cdot 2\text{Ո} + \text{բ}\cdot 4\text{Ո} + \text{գ}\cdot 6\text{Ո} + \text{դ}\cdot 8\text{Ո} + \text{ե}\cdot 10\text{Ո} \quad \cdots$$

կամ

$$\text{Ա}^0 = (2\text{ա} + 4\text{բ} + 6\text{գ} + 8\text{դ} + 10\text{ե} + \cdots)\ \text{Ո},$$

եւ եթէ փոխանակ առաջին անդելոյն զնշանակութիւն յ3 հաւասարութենէ անտի դնիցեմք, ծագէ

$$\text{Ա}^0 = 4(\text{կ} - \text{ե})\cdot\ \text{Ո} = (\text{կ} - \text{ե})\cdot 360^0 :$$

Ա. Իբրեւ յայսմ հաւասարութեան զնշանակութիւնն $(\text{կ} - \text{ե})$ քանիօնութեան ի $\text{կ} = \text{ե} + \text{ա} - 2$ հաւասարութենէ անտի փոխանակիցեմք (Հ. 249. ե), գտանի

$$\text{Ա}^0 = 4(\text{ա} - 2)\ \text{Ո} = (\text{ա} - 2)\cdot 360^0 .$$

այս ինքն. բովանդակութիւն ամենայն հարթ անկեանց, որ ի վերին երեսս անկիւնաւոր մարմնոյ գտանիցին, է $= 360^0 = 4\text{Ո}$, բազմացուցեալ թուով անկեանց մարմնոյն՝ որ երկուք միութեամբք նուազեցուցեալ իցէ:

Բ. Քանզի (ըստ 250 համարոյ.) $\text{կ} = \frac{3}{2}\text{ե}$, ուստի եւ չկարէ կ — լինել, յորմէ եւ ոչ

$$\text{կ} - \text{ե} < \tfrac{3}{2}\text{ե} - \text{ե} \text{ կամ } \text{կ} - \text{ե} < \tfrac{1}{2}\text{ե},$$

եւ ըստ այսոցիկ եւ ոչ իսկ $(\text{կ} - \text{ե})\cdot 4\text{Ո} < \text{ե}\cdot 2\text{Ո}$, զորին զհետ գայ եթէ եւ երբեք $\text{Ա}^0 < 2\text{Ո}\cdot\text{ե}$ լինել չկարիցէ, քանզի $\text{Ա}^0 = (\text{կ} - \text{ե})\cdot 4\text{Ո}$:

Դարձեալ որովհետեւ 3Ե — 6 մեծագոյն սահմանք են Կ քանիօնութեան (Հ. 251. 1.), ուրեմն չկարէ Կ > 3Ե — 6 լինել, ուստի եւ ոչ Կ — Ե > 2Ե — 6, եւ ոչ (Կ — Ե) · 4Ո > (2Ե — 6) · 4Ո, այս ինքն չկարէ Ա° > (2Ե — 6) 4Ո լինել, կամ թէ Ա° > (Ե — 3) · 8Ո։

Ուրեմն նշանակութիւն Ա° քանիօնութեան կայ ի միջին վայրի 2Ո · Ե եւ 8Ո · (Ե — 3) եզերաց։

Հ Ա Տ Ա Ծ Բ

ԱՌԱՆՁԻՆՆ ՀԱՆԳԱՄԱՆՔ ԱՆԿԻՒՆԱՒՈՐ ՄԱՐՄՆՈՑ, ԵՒ ՆՇԱՆԱԿՔ ՎԱՍՆ ՆՈՑԻՆ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԵԱՆՑ

253. ՅԱՄԵՆԱՅՆ սղոցածս գիծն հատանելոյ զմիմեանս երկուց կտրուածոց անկիւնագծի, հաւասար է կողմանց սղոցածին եւ հաւասար հեռաւոր ի նոցանէ։

Կտրուածքն անկիւնագծի ԱԹ եւ ԲԺ (Ձեւ 165.) հատանեն զմիմեանս յԻԼ ուղիղ գծի։ Արդ որովհետեւ ԲԷ || ԱԶ (Հ. 244. Գ.), իսկ ԱԶ կայ յԱԹ երեսս, ուրեմն եւ ԲԷ || եր. ԱԹ (Հ. 218.), յորմէ եւ է եւս ԻԼ գիծն հատանելոյ ԲԺ երեսաց զԱԹ երեսս հաւասար հեռաւոր ի ԲԷ գծէ, այս ինքն ԻԼ || ԲԷ || ԱԶ, եւ քանզի այս հաւասար հեռաւոր գիծք ի մէջ ԱԲԴ եւ ԶԷԹ հաւասար հեռաւոր երեսաց կան, ուրեմն եւ միմեանց հաւասարք են։ Ապա ուրեմն ԻԼ ⋕ ԱԶ։

254. Եթէ սղոցած մի հատանիցի յերեսաց հաւասար հեռաւորաց, ձեւքն որ անտի ծագիցին, միմեանց պատշաճականք են։

Համարեսցուք եթէ ԱԴԳԷ սղոցածն յաֆ եւ էէ երեսաց հաւասար հեռաւորաց (Ձեւ 166.) հատանիցի։ Արդ որովհետեւ եր. աֆ || եր. էէ, նմին իրի եւ էբ || աբ, բէ || բֆ, էղ || ֆֆ || … (Հ. 219.), ուստի եւ անկ. էբէ = անկ. աբֆ, անկ. բէղ = անկ. բֆֆ. եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ։ Դարձեալ ո-

ըովհետեւ աէ || դը || գէ, եւ այլքն եւս, ուրեմն եւ աղ = էը, դէ = ըէ, գէ = էղ, եւ այլքն եւս. ապա ձեւքն հաւասարանկիւն եւ հաւասարակողմ են փոխանակաւ, ուստի եւ պատշաճական։

Եթէ հատանօղ երեսքն հաւասար հեռաւոր իցեն ի խարսխէ անտի, յայնժամ աղ եւ էէ ձեւքն պատշաճական եւս են ընդ խարսխին։

255. Երկու սղոցաձեւք ԱԷ եւ Ա՛Է՛ (Ձեւ 167.) միմեանց պատշաճականք են, եթէ անկիւնքն մարմնոյ Ժ եւ Ժ՛ յերից երեսաց, որ կարգաւ միմեանց պատշաճական իցեն, կազմեալ իցէ։

Համարեսցուք եթէ իցէ ԶԷԸԹ խարիսխն պատշաճական ընդ Զ՛Է՛Ը՛Թ՛, եւ հաւասար հեռաւոր ձեւն ԺԴ ≅ Ժ՛Դ՛, եւ ԺԲ ≅ Ժ՛Բ՛։ Արդ զմտաւ ած, եթէ Ա՛Է՛ սղոցաձեն այնպէս իմն եդեալ զետեղիցի ի սղոցաձն ԶԷԸԱ, որպէս զի խարիսխքն ԺԷ եւ Ժ՛Է՛ ամենեւին ի միմեանց վերայ անկանիցին, յայնժամ, որովհետեւ հարթ անկիւնքն յորոց Ժ կազմիցի, կարգաւ միմեանց հաւասար են, լինիցի Ժ՛ անկիւնն մարմնոյ պատշաճական Ժ անկեան մարմնոյ (Հ. 235.) այս ինքն է Ժ՛Դ՛ երեսքն ի վերայ ԺԴ երեսաց, եւ Ժ՛Բ՛ ի վերայ ԺԲ երեսաց անկանին, ուստի եւ Ժ՛Ա՛ կողն ի վերայ ԺԱ կողին, որով եւ Ա՛Դ՛ ի վերայ ԱԴ, եւ Ա՛Բ՛ ի վերայ ԱԲ կողիցն, այս է հարթ խարիսխն Ա՛Գ՛ յԱԲԳ երեսս անկանի, եւ քանզի Ա՛Գ՛ ≅ Ժ՛Է՛, եւ ԱԳ ≅ ԺԷ, ուրեմն եւ Ա՛Գ՛ ≅ ԱԳ, ուստի եւ Բ՛Գ՛ ի ԲԳ, եւ Գ՛Ե՛ ի ԳԵ անկանի, այս ինքն է եզերք ԱԸ եւ Ա՛Ը՛ սղոցաձիցն անկանին ի վերայ միմեանց, ապա ուրեմն երկոքին սղոցաձքն միմեանց պատշաճականք են։

Ա. Ուրեմն եւ երկու սղոցաձք միմեանց պատշաճական են, եթէ խարիսխք նոցա միմեանց պատշաճական իցեն, եւ երեք կողքն, որ յանկեան մարմնոյ միմեանց պատահեն, հաւասար իցեն միմեանց

փոխանակաւ, եւ կարգաւ հաւասար անկիւնս միտութեան առ միմեանս ունիցին ։

Բ. Ըստ նմին օրինակի երկու սղոցաձք եւս պատշաճական են, եթէ պատշաճական խարիսխ ունիցին, եւ մի մի պատշաճական երեսս կողմանց, որ ի խարիսխն կայս ըստ նոյն ուղղութեան հաւասար միտեալ իցեն։

Ցուցումն յանձնէ իսկ յայտ է։

Գ. Ապա ուրեմն երկու ուղղորդ սղոցաձք, պատշաճական են, եթէ պատշաճական խարիսխք եւ հաւասար բարձրութիւն իցէ նոցա։

256. Յամենայն երկայնաձեւ խորանարդս, յանդիմանակաց երեսք կողմանց են հաւասար հեռաւոր եւ պատշաճական հաւասար հեռաւոր ձեւք։

Ըստ սահմանին որ ի Հ. 244. յերկայնաձեւ խորանարդն ԱԷ (Ձեւ 166.) խարիսխն ԱԳ ≅ ԵԷ է։ Արդ որովհետեւ կողմն ԱԵ # ԴԸ եւ ԱԲ # ԴԳ, հեաստատին յայտ է, եթէ ԱԶ երեսքն հաւասար հեռաւոր ի ԴԷ երեսաց իցէ (Հ. 224.), եւ քանզի ԱԶ եւ ԴԷ հաւասար հեռաւոր ձեւոց երկու կողմանքն, եւ ի նոցունց փակեալ անկիւնքն հաւասարք են, ուրեմն եւ նոքին եւս պատշաճական իցեն։ Սոյնգունակ ցուցանի, եթէ եւ ԱԸ եւ ԲԷ հաւասար հեռաւոր եւ պատշաճական իցեն։

Ա. Արդ որովհետեւ երկայնաձեւ խորանարդն ի վեց հաւասար հեռաւոր ձեւոց անտի շուրջանակի փակեալ է, յորոց երկու երկու յանդիմանակացքն հաւասար հեռաւոր եւ պատշաճական են, աստի յայտ եւս է, եթէ մարթ է զմի մի զոյգ ի հակառակ երեսաց կողմանցն երկայնաձեւ խորանարդին որպէս խարիսխ համարել։

257. Յամենայն երկայնաձեւ խորանարդս անկիւնագիծքն հատարակեն զմիմեանս փոխանակաւ (Ձեւ 168.)։

Դիցուք դրեսցուք, եթէ ԱԷ եւ ԳԵ անկիւնագիծքն ձգեալք իցեն: Որովհետեւ ԱԵ ⋕ ԳԷ, աստուստին յայտ է, եթէ ԱԳԷԵ ձեւն հաւասար հեռաւոր ձեւ իցէ, ուստի եւ անկիւնագիծքն ԱԷ եւ ԳԵ հատանեն զմիմեանս փոխանակաւ ի կէտն Մ (Հ. 117.): Իսկ արդ ԱԴԷԶ ձեւս եւս է հաւասար հեռաւոր ձեւ, յորում անկիւնագիծքն ԱԷ եւ ԴԶ ի նմին Մ կիտի զմիմեանս հասարակեն, ապա ուրեմն ԴԶ անկիւնագիծն եւս անցանէ ընդ Մ, այնպէս ցուցանի եթէ եւ ԲԸ ընդ Մ գնայցէ: Ուրեմն չորք անկիւնագիծքն ԱԷ, ԲԸ, ԳԵ, եւ ԴԶ ի նմին Մ կիտի զմիմեանս հասարակեն:

Եթէ ուղղանկիւն իցէ երկայնաձեւ խորանարդն, յայնժամ կտրուածքն անկիւնագծի են ուղղանկիւնք, եւ անկիւնագիծքն ԱԷ, ԲԸ, ԳԵ եւ ԴԶ միմեանց հաւասարք են: Ապա ուրեմն յուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդի անդ ամենայն անկիւնքն մարմնոյ հաւասար հեռի են ի Մ կիտէ անտի հասարակելոյ անկիւնագծիցն: Արդ եթէ ածիցեմք զմտաւ եթէ ի Մ կիտէ անտի իբրեւ ի կենդրոնէ գունդ մի ձգեալ իցէ, որոյ կէս երկակտուրն ԱՄ = ½ ԱԷ իցէ, յայնժամ գագաթունքն ամենայն անկեանց մարմնոյն ի վերին երեսս այնր գնդոյ գտանին: Զորոյ զհետ գայ, եթէ շուրջանակի զամենայն ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդաւ գունդ մի բոլորշի ձգել հնար իցէ:

Զայս մասն առաւել եւս քաջ իմանայցեն ուսանելիք, յորժամ գայցեն յընթեռնուլ զճառն որ ի վերայ գնդոյ:

358. Ամենայն երկայնաձեւ խորանարդ հասարակի ի ձեռն կտրուածոյ անկիւնագծի:

Երկուց դիպաց մարթ է դիպել ի սմին, զի կամ ուղղորդ է երկայնաձեւ խորանարդն, եւ կամ ծուռ:

Ա. Իցէ ուղղորդ երկայնաձեւ խորանարդն ԱԲԳԵ (Ձեւ 168.): Վասնզի ԱԳ անկիւնագիծն հատանէ զհաւասար հեռաւոր ձեւն ԱԲԳԴ յերկուս ԱԲԳ եւ ԱԳԴ երեքանկիւնս պատշաճականս, եւ ԲԷ երեսք կողմանցն հաւասար հեռաւոր եւ պատշաճական եւս է ԱԸ երեսաց կողմանցն, եւ դարձեալ ԲԵ հաւասար հեռաւոր եւ պատշաճական ընդ ԳԸ (Հ. 256.), ապա ուրեմն երկուց ԱԲԳԶԷԵ եւ ԱԳԴԸԵԷ երեքկողմեան սղոցածից հաւասար է մի անկիւն մարմնոյ որ կայ ի մէջ երից երեսաց կողմանցն որք կարգաւ միմեանց պատշաճականք են: Զսոյն զհետ գայ, եթէ եւ սղոցածքն ի գլխովին պատշաճական իցեն (Հ. 255.), այս ինքն եթէ ԱԳԷԵ կտրուածն անկիւնագծի հասարակէ զԱԷ զուղղորդ երկայնաձեւ խորանարդն:

Բ. Դիցուք գրեսցուք, եթէ իցէ ԱԲԳԴԵԶԷԸ (Ձեւ 169.) ծուռ երկայնաձեւ խորանարդ, զոր համառօտիւք իմն Խ նշանագրով նշանակեսցուք: Արդ ընդ Ա եւ ընդ Ե կէտս հատանես Աբգդ եւ Եզէը երեսս, որ ուղղորդ ի վերայ ԱԵ կողին կայցեն (ուստի եւ ուղղորդ եւս ի վերայ չորից կողից երկայնաձեւ խորանարդին), աստանօր յայտ է եթէ ընդ Ե հատանեալ երեսքն զԽ հատանիցեն Եզէը ձեւով, եւ ընդ Ա հատանեալ երեսքն զԽ հատանեն Աբգդ ձեւով: Արդ որովհետեւ զը եւ բդ երեսքն ուղղորդ եւս են ի վերայ ԱԵ ուղիղ գծին, ուրեմն հաւասար հեռաւոր են ի միմեանց (Հ. 221.), ուստի է եւս

Եզ || Աբ, Եը || Ադ, ըէ || դգ, եւ էզ || բգ (Հ. 219.)

եւ քանզի ԱԵ || ԴԸ || ԳԷ, եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ, ուրեմն գիծքն այնոքիկ եւ միմեանց հաւասար իցեն փոխանակաւ: Աստանօր մարթեմք յանձնէ իմանալ եթէ Աբգդ եւ Եզէը ձեւքն պատշաճական հաւասար հեռաւոր ձեւք իցեն, ուստի եւ մարմինն՝ որ յայսոցիկ երեսաց եւ յԱզ, Աը, դէ եւ գզ երեսաց կողմանցն փակիցի է ուղղորդ երկայնա-

ձեւ խորանարդ զոր Խ նշանագրով կամիմք նշանակել, որ եւ (ըստ Ա.) ի ձեւն ԱԵԷՓ կտրուածոյ անկիւնագծի հատարակի։

Արդ որովհետեւ ԱԵ = ԲԶ, եւ եւս ԱԵ = ՔՂ որպէս յանդիմանակաց կողմն ի մի եւ ի նոյն հաւասար հեռաւոր ձեւ, ուրեմն ԲԶ = ՔՂ, որով եւ ԲԶ — ԲՂ = ՔՂ — ԲՂ, այս ինքն ԲՔ = ԶՂ։ Սովին օրինակաւ ցուցանի եւս թէ ԳՓ = ԻԷ, եւ ԴՏ = ԸՐ իցէ։ Յորժամ ԱՔՓԳԲ մարմինն այնպէս համատարեալ զետեղիցի ի վերայ ԵՂԷԻԶ զի պատշաճական խարիսխքն ԱՔՓ եւ ԵՂԷ հաւասարեալ ի միմեանց վերայ անկանիցին, յայնժամ հարկ է եւս զի ուղղորդ գիծքն ՔԲ եւ ՓԳ յուղղութեան ՂԶ եւ ԷԻ ուղղորդ գծիցն անկանիցին (Հ. 211.), ուստի եւ Բ ի Զ եւ Գ ի Ի գտանիցի, քանզի ուղղորդ գիծքն այնոքիկ միմեանց հաւասար են փոխանակաւ, ուրեմն եւ ΔԱԲԳ եւ ΔԵԶԻ ի միասին ի միում վայրի գտանին, այս է եթէ մարմինն ԱՔՓԳԲ եւ ԵՂԷԻԶ միմեանց պատշաճականք իցեն։ Իբրեւ յերկոսին մարմինս յաւելուցումք զմարմինն ԱԲԳԷՂ, ելանէ

ԱՔՓԵՂԷ = ԱԲԳԵԶԻ։

Սմին նման կարիցեմք զպատշաճականութիւն ԱՓՏԴԳ եւ ԵԷՐԸԻ մարմնոցն ցուցանել, որով եւ զհաւասարութիւն ԱՓՏԵԷՐ եւ ԱԳԴԵԻԸ մարմնոց։ Իսկ արդ որովհետեւ ԱՔՓԵՂԷ = ԱՓՏԵԷՐ = ½Խ (ըստ Ա.) առըստին յայտ է, եթէ եւ ԱԲԳԵԶԻ = ԱԳԴԵԻԸ = ½Խ այս ինքն է Խ ծուռ երկայնաձեւ խորանարդն ի ձեւն ԱԳԻԵ կտրուածոյ անկիւնագծին հատարակի։

259. Վերին երեւք սղոցածի, չհամարեալ ի միասին զերկուս խարիսխսն, գտանի, եթէ ոք զշըրջանակ կտրուածոյն, որ ուղղորդ ի վերայ կողմանց սղոցածի կայցէ, միով կողմամբ սղոցածի բազմացուցանիցէ։

Դիցուք գրեսցուք եթէ ԱԻ սղոցած մի իցէ (Ձեւ 169.)։ Իբրեւ ընդ կէտն Ե հատանիցեմք

զԵԸԷՂ ուղղորդ ի վերայ կողմանցն, յայնժամ ուղիղ գիծքն ԵԸ, ԸԷ, ԷՂ եւ ՂԵ բարձրութիւնք իցեն ԱԸ, ԴԻ, ԲԻ եւ ԲԵ երեսաց կողմանցն։ Արդ եթէ զվերին երեսս սղոցաձի, առանց ինչ զԱԴ եւ զԵԻ խարխալման ի միասին թուելոյ, նշանակիցեմք Խ նշանագրաւ, լինիցի

Խ = ԱԸ + ԴԻ + ԲԻ + ԲԵ = 2·ԱԸ + 2·ԱՁ = 2·ԱԵ·ԵԸ + 2·ԱԵ·ԵՂ = ԱԵ·2 (ԵԸ + ԵՂ) = ԱԵ (ԵԸ + ԸԷ + ԷՂ + ՂԵ)։

Ա. Եթէ ուղղորդ իցէ սղոցաձն, յայնժամ վերին երեսքն նորին հաւասար է շրջանակի խարխալին, որ բազմացուցեալ իցէ միով կողմամբ սղոցաձի։

Բ. Ապա ուրեմն բովանդակ վերին երեսք սղոցաձի է

ԱԻ = Խ + ԲԴ + ՁԸ = Խ + 2·ԲԴ·

260. Բուրգն մի ՍԱԲԳԴ (Ձեւ 170.) պատշաճական է այլում սաբգդ բրգան, եթէ Ա անկիւն մարմնոյ խարսխին հաւասար իցէ ա անկեան մարմնոյ խարսխի միւսոյն, եւ եթէ Ա եւ ա անկիւնքն մարմնոյ յերից երեսաց կողմանց, որ կարգաւ պատշաճական իցեն, յօդեալ իցեն։

Համարեսցուք եթէ իցէ ԱԲԳԴ ≅ աբգդ, ΔՍԱԲ ≅ Δսաբ, ΔՍԱԴ ≅ Δսադ։ Յորժամ զբուրգն սաբգդ այնպէս իմն զետեղիցեմք ի ՍԱԲԳԴ, որպէս զի ագ եւ ԱԳ խարսխաց հաւասարեաւ ի միմեանց վերայ անկանել, յայնժամ, վասն Ա եւ ա անկեանց մարմնոյ հաւասարութեան զոր յառաջագոյն համարեցաք, հարկ է զի Δսաբ յԱԲՍ երեսս անկանիցի եւ սադ յԱՍԴ երեսս, ուստի եւ սա ի վերայ ԱՍ գծի, եւ ս ի Ս, քանզի սա = ԱՍ։ Վասն այսորիկ իսկ սբ եւս անկանի ի ՍԲ, սգ ի ՍԳ, եւ սդ ի ՍԴ, այս ինքն, եթէ երկոքին բրգունքն ամենայն եզերօք ի միմեանց վերայ անկանին, ուստի եւ են միմեանց պատշաճական։

Ապա ուրեմն եւ Երկու բրգունք միմեանց պատշաճական են, եթէ խարիսխք նոցա պատշաճական իցեն, եւ երկու միաբան կողք նոցա հաւասար իցեն, եւ ըստ նոյն ուղղութեան հաւասար միտութիւնս առ խարիսխսն, որ նոցին կշռիցին, ունիցին։

Այնպէս, Երկու բրգունք միմեանց պատշաճականք են, յորժամ պատշաճական խարիսխք իցեն նոցա, եւ մի եւս կողմն երեսաց նոցա, որ յերկոսին բրգունս հաւասար միտութիւնս առ խարիսխն ունիցին, պատշաճական իցէ։

261. Եթէ բուրգն մի հաւասար հեռաւոր ի խարսխէ անտի հատանիցի, յայնժամ Ա. կողմանք բրգանն հատանին համեմատական, Բ. երեսք կտրուածոյն նման է խարսխին եւ ի կատարած Գ. հաւասար հեռաւոր հատածքն ընդ միմեանս կշռին, որպէս երկրորդ կարողութիւնք բացարձակութեանց նոցա ի գագաթանէ բրգանն ընդ միմեանս համեմատիցին։

Ցուցանի դիւրագոյնս յ226 համարոյ։

262. Խնդիր։ Հաշուել զվերին երեսս բովանդակ բրգանն եւ զկոճեղ։

Լուծումն։ Առաջին՝ Հաշուեա զերեսս կողմանցն առանձինն, բովանդակութիւն նոցա խարսխաւն հանդերձ զբովանդակ վերին երեսս բրգանն ցուցանիցէ։

Երկրորդ՝ Հաշուեա զերեսս կողմանց առանձինն, որ են սեղանք, եւ զբովանդակութիւն նոցին յաւել ի բովանդակութիւն երկուց խարսխացն, ելանիցէ վերին երեսք կոճեղն։

Ա. Որովհետեւ ի հաւասարակող բրգունս ամենայն երեսք կողմանց միմեանց պատշաճական հաւասարասրուն երեքանկիւնք են, ուրեմն վերին երեսք սոյնպիսի բրգանց հաւասար է բովանդակութեան խարսխին եւ միոյ յերեսաց կողմանցն որ բազմացուցեալ իցէ թուով կողմանց խարսխին։ Այսինքն եթէ հաւասարակող իցէ բուրգնն ՍԱԲԳ (Ձեւ 171.)․ եթէ զբովանդակ վերին երեսս Խ նշա-

նագրով նշանակիցեմք, եւ զԹիւ համարոյ կողմանց խարսխին Ն գնիցեմք, յայնժամ

$$\text{Խ} = \Delta\text{ԱԲԳ} + \text{Ն} \cdot \Delta\text{ԱԲՍ},$$

Իբրեւ ձգիցի ՍՊ ⊥ ԱԲ, յայնժամ

$$\text{Խ} = \Delta\text{ԱԲԳ} + \text{Ն} \cdot \text{ՍՊ} \cdot \tfrac{1}{2}\text{ԱԲ} = \Delta\text{ԱԲԳ} + \text{Ն} \cdot \text{ԱԲ} \cdot \tfrac{1}{2}\text{ՍՊ},$$

այս ինքն է վերին երեսք հաւասարակող բրգան հաւասար է խարսխին, յոր յաւելուցու արդիւնք շրջանակի նորին եւ կիսոյ ՍՊ հեռագրին:

Զոր օրինակ, եթէ յերեքկողմեան հաւասարակող բրգան ԱԲ = ա, եւ կողմն ԲՍ = բ գնիցեմք, յայնժամ, եթէ ԱԴ ⊥ ԲԳ ձգիցեմք, լինիցի

$$\Delta\text{ԱԲԳ} = \tfrac{1}{2}\text{ԲԳ} \cdot \text{ԱԴ} = \frac{\text{ա}}{2} \cdot \frac{\text{ա}}{2}\sqrt{3} = \frac{\text{ա}^2\sqrt{3}}{4},$$

եւ

$$\Delta\text{ԱԲՍ} = \tfrac{1}{2}\text{ԱԲ} \cdot \text{ՍՊ} = \frac{\text{ա}}{2}\sqrt{\left[\text{բ}^2 - \frac{\text{ա}^2}{4}\right]} =$$

$$\frac{\text{ա}}{4}\sqrt{[4\text{բ}^2 - \text{ա}^2]},$$

ուստի եւ

$$\text{Խ} = \Delta\text{ԱԲԳ} + 3 \cdot \text{ԱԲՍ} = \frac{\text{ա}^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\text{ա}\sqrt{[4\text{բ}^2 - \text{ա}^2]} =$$

$$\frac{\text{ա}}{4}(\text{ա}\sqrt{3} + 3\sqrt{[4\text{բ}^2 - \text{ա}^2]}):$$

Բ. Եթէ հաւասարակող բուրգն հաւասար հեռաւոր ի խարսխէ անտի՝ հատանիցի, երեսք կողմանց կոճեղն պատշաճական սեղանք են, քանզի, որովհետեւ երեսք կողմանց ողջոյն բրգանն, որպէս եւ ի բաց հատեալ բրգան պատշաճական երեքանկիւնք են, ապա ուրեմն այլակերպութիւն երկուց սոյնպիսի երեքանկեանց պատշաճական սեղանք ի-

ցեն։ Արդ եթէ հաւասարակող բուրգն Ն կողմանս ունիցի, յայնժամ բովանդակ վերին երեաք կոճեղն հաւասար է բովանդակութեան երկուց հաւասար հեռաւոր խարսխաց, յոր յաւելուցու մի սեղանաձեւ երեաք կողմանցն, բազմացուցեալ Ն թուով։

Զոր օրինակ վերին երեաք կոճեղն

$$\text{ԱԲԳգբա} = \Delta\text{ԱԲԳ} + \Delta\text{աբգ} + 3\cdot\text{Աբ}$$

$$= \Delta\text{ԱԲԳ} + \Delta\text{աբգ} + 3\cdot\text{Պպ}\left(\frac{\text{ԱԲ} + \text{աբ}}{2}\right)։$$

Իբրեւ հասարակիցի Պպ, կամ Բբ, եւ ընդ կէտն հատանելոյ հատատիցի կտրուած երեաց աբդ, որ հաւասար հեռաւոր իցէ ի խարսխէն, յայնժամ

$$\text{աբ} = \frac{\text{ԱԲ} + \text{աբ}}{2} = \text{ադ} = \text{բդ},$$

յորմէ եւ վերին երեաք կոճեղն է

$$= \Delta\text{ԱԲԳ} + \Delta\text{աբգ} + 3\text{Պպ}\cdot\text{աբ} = \Delta\text{ԱԲԳ} + \Delta\text{աբգ} + \text{Պպ}\,(\text{աբ} + \text{բդ} + \text{ադ})։$$

Ապա ուրեմն բովանդակութիւն երեաց կողմանց կրճատեալ հաւասարակող բրգան գտանի, յորժամ ոք գշրջանակ կտրուածոյ՝ որ ընդ ա միջին կէտ Աա կողման հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն դիցի՝ բազմացուցանիցէ Պպ բացարձակութեամբ Աբ եւ աբ կողմանցն, եւ յայն յաւելուցու զերկոսին խարիսխսն եւս։

263. Յամենայն հաւասարակող բրգունս ամենայն երեաց կողմանց առ խարիսխն հաւասար միտութիւն է։

Դնիցուք դրեսցուք, եթէ ՍԱԲԳԴ (Չեւ 172.) բուրգնն հաւասարակող իցէ. ըստ մեկնութեանն որ ի Հ. 245. է

$$\text{ՍԱ} = \text{ՍԲ} = \text{ՍԳ} = \text{ՍԴ},\ \text{եւ}\ \text{ԱԲ} = \text{ԲԳ} = \text{ԳԴ} = \text{ԱԴ}։$$

Արդ իբրեւ ձգիցի ՍՄ ուղղորդ ի վերայ ԱԳ երեսաց, Մ լինիցի միջոց բոլորակին, զոր մարթ իցէ շուրջանակի զԱԲԳԴ չորեքկուսւով ձգել: Արդ յորժամ հատարակիցեմք յԷ կէտն զուղիղ գիծն ԱԴ, եւ զԷ յօդիցեմք ընդ Ս եւ Մ, յայնժամ եւ ՄԷ եւ ՍԷ ուղղորդ կան ի վերայ ԱԴ գծի, ուրեմն անկիւնն ՍԷՄ է անկիւն միտութեան ԱՍԴ եւ ԱԳ երեսաց:

Ըստ նմին օրինակի գտցես դայ, եթէ անկ. ՍԵՄ, իցէ անկիւն միտութեան ԱԲՍ երեսաց առ ԱԳ խարիսխն, եւ թէ ԱԵ=ԲԵ՝: Արդ իբրեւ զուղղանկիւն երեքանկիւնս ՍՄԷ եւ ՍՄԵ ի կշիռ համեմատութեան բերիցեմք, գտանեմք եթէ (որովհետեւ ՍՄ=ՍՄ, եւ ՄԵ=ՄԷ) պատշաճական իցեն երեքանկիւնքն, ուստի եւ անկ. ՍԷՄ = անկ. ՍԵՄ, այս ինքն է եթէ ԱՍԴ եւ ԱՍԲ երեւք կողմանցն առ ԱԳ խարիսխն հաւասար միտեալ իցեն:

Նոյն օրինակաւ ցուցանի եւս, եթէ ԲՍԳ եւ ԳՍԴ երեսաց կողմանցն առ խարիսխն ԱԳ ընդ առաջնոցն հաւասար միտութիւն է:

264. Եթէ հարթ անկիւնքն՝ որ ի գագաթան ուղղորդ ինչ բրգան, միմեանց հաւասար իցեն, բուրգնն հաւասարակող է:

Համարեսցուք, եթէ ՍԱԲԳԴ (Ձեւ 172.) իցէ ուղղորդ բուրգն, եւ անկ. ԱՍԴ = անկ. ԱՍԲ = անկ. ԲՍԳ = անկ. ԳՍԴ: Որովհետեւ ուղղորդ է բուրգնն, յայտ է եթէ եւ ՍԱ = ՍԲ = ՍԳ = ՍԴ, որով եւ երեւք կողմանցն միմեանց պատշաճական երեքանկիւնք են (Հ. 52.). ուստի ԱԲ = ԲԳ = ԳԴ = ԱԴ: Դարձեալ հարկ է, վասն յառաջագոյն զբուրգնն ուղղորդ համարելոյ մերոյ, զի մարթ իցէ շուրջ զԱԲԳԴ խարսխաւ բոլորակ ինչ ձգել, ուստի եւ յայտ է, եթէ հաւասարակող բազմանկիւնն ԱԲԳԴ հաւասարանկիւն եւս է, որով եւ կարգաւոր.

զորոյ զհետ գայ, եթէ բուրգն ՍԱԲԳԴ հաւասարակող իցէ։

265. Եթէ ընդ կողմանս երեք կարգաւոր բազմանկեան հաստատիցես երեսս, որ հաւասար չափով միտեալ իցեն առ երեսս բազմանկեանն, յայնժամ յօրինեալ կազմի ի նոցանէ եւ ի կարգաւոր բազմանկեանէ անտի հաւասարակող բուրգն, որոյ խարիսխ է բազմանկիւնն կարգաւոր։

Իցէ ԱԲԳԴ (Ձեւ 172.) կարգաւոր ինչ չորեքանկիւն, ուստի եւ չորեքկուսի։ Ի Մ միջոցի այոր ձեւոյ կանգնեա ի վերայ երեսաց բազմանկեան ուղղորդ ինչ գիծ ՄՔ։ Արդ ընդ ԱԲ կողմն եւ ընդ որ զինչ եւ իցէ Ս կէտ ՄՔ ուղղորդ գծին հաստատեա երեսս ինչ ԱԲՍ, որոյ անկիւն միտութեան առ ԱԳ խարիսխն է անկիւն ՍԵՄ։ Արդ եթէ ընդ ԱԳ կողմն նովին անկեամբ միտութեան երեսս ինչ հաստատիցես, ի հարկէ իսկ զՄՔ ուղղորդ գիծն ի նմին Ս կիտի հատանիցէ, ապա թէ ոչ ՄԷՍ անկիւնն միտութեանն որ ի ՄԷ եւ ԷՍ ուղղորդ գծից յօրինի, չլինէր հաւասար ՍԵՄ անկեան, որ հակառակն է մերում համարման։ Ըստ նմին օրինակի հարկ է եւս զի երեսքն՝ որ ընդ ԲԳ, ԳԴ կողմանս նովին ՍԵՄ միտութեան անկեամբ հաստատիցին, զուգիւ գիծն ՄՔ ի Ս կիտի անդ հատանիցեն. ապա ուրեմն ամենայն երեսքն, որ նովին անկեամբ միտութեան ընդ կողմանս այնր բազմանկեան ձգիցին ի միում Ս կիտի զմիմեանս հատանեն, ուստի եւ ընդ ԱԳ խարսխին բուրգն մի յօրինեալ կազմեն։

Դարձեալ որովհետեւ ըստ յառաջագոյն ընդունելոյ մերոյ ԱՄ = ԲՄ = ԳՄ = ԴՄ, ուստի եւս ՍԱ = ՍԲ = ՍԳ = ՍԴ (Հ. 214. Առա.), ուրեմն ուղղորդ է բուրգն ՍԱԲԳԴ։ Եւ ի կատարած. որովհետեւ ԱԲԳԴ խարիսխն ՍԱԲԳԴ բրգան է կարգաւոր բազմանկիւն, ուրեմն հաւասարակող եւս է բուրգն։

266. Խնդիր: Կողմն կարգաւոր ինչ բրգան իցէ $=\text{ա}$, Թիւ համարոյ կողմանց խարսխին $=\text{ն}$ եւ կէս երկակտուր բոլորակին, որ զխարսխաւ արտաքոյ ձգիցի $=\text{ճ}$, արդ կամք են 1) զանկիւնսն մարմնոյ, 2) զմերին երեսս, 3) զբարձրութիւն բրգանն հաշուել:

Լուծումն: Ա. Քանզի ի գագաթան կարգաւոր բրգան ն հաւասարակող երեքանկիւնք միմեանց պատահեն, ուրեմն անկիւն մարմնոյ գագաթան է $=\text{ն}\cdot 60^0$: Դարձեալ որովհետեւ մի մի անկիւն ի խարսխի անդ է $= 180 - \frac{360}{\text{ն}}$ (Հ. 122. Գ.) զորին զհետ գայ, եթէ իւրաքանչիւր անկիւն մարմնոյ ի խարսխին է

$$=180^0 - \frac{360^0}{\text{ն}} + 2\cdot 60^0 = 300^0 - \frac{360^0}{\text{ն}},$$

ուստի բովանդակութիւն անկեանց մարմնոյ ի խարսխին է

$$=\text{ն}\cdot 300^0 - 360^0,$$

ուրեմն բովանդակութիւն ամենայն անկեանց մարմնոյ բրգանն իցէ

$$=\text{ն}\cdot 60^0 + \text{ն}\cdot 300^0 - 360^0 = \text{ն}\cdot 360^0 - 360^0 = (\text{ն} - 1)\, 360^0:$$

Բ. Ի ՍԱԲԳԴ կարգաւոր բրգան (Ձեւ 172.) է

$$\text{ՄԵ} = \sqrt{(\overline{\text{ԱՄ}}^2 - \overline{\text{ԱԵ}}^2)} = \sqrt{\left(\text{ճ}^2 - \frac{\text{ա}^2}{4}\right)},$$

ուրեմն $\Delta\text{ԱԲՄ} = \frac{1}{2}\text{ԱԲ}\cdot\text{ԵՄ} = \frac{\text{ա}}{2}\cdot\sqrt{\left(\text{ճ}^2 - \frac{\text{ա}^2}{4}\right)}$

$$= \tfrac{1}{4}\,\text{ա}\cdot\sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)},$$

ուստի եւ խարիսխն

$$\text{ԱԲԳԴ} = \text{ն}\cdot\Delta\text{ԱԲՄ} = \frac{\text{նա}}{4}\sqrt{(4\text{ճ}^2 - \text{ա}^2)}:$$

Դարձեալ որովհետեւ յԱՍԵ ուղղանկիւն երեքանկեան կողմն

$$ՍԵ = \sqrt{(\overline{ԱՍ}^2 - \overline{ԱԵ}^2)} = \sqrt{(ա^2 - \tfrac{1}{4}ա^2)} = \frac{ա}{2}\sqrt{3},$$

ուրեմն $\Delta ԱՍԲ = \frac{1}{2} ԱԲ \cdot ՍԵ = \frac{ա}{2} \cdot \frac{ա}{2}\sqrt{3} = \frac{ա^2}{4}\sqrt{3},$

ուստի եւ բովանդակութիւն երեսաց կողմանցն (զոր Կ նշանագրաւ նշանակեսցուք) այսինքն $Կ = ն \cdot \Delta ԱՍԲ = \frac{նա^2}{4}\sqrt{3}$· զորոյ զհետ գայ, եթէ բովանդակ մերին երեսքն

$$Խ = ԱԲԳԴ + ն \cdot \Delta ԱՍԲ = \frac{նա}{4}\sqrt{(4բ^2 - ա^2)} + \frac{նա^2}{4}\sqrt{3} = \frac{նա}{4}\left(\sqrt{(4բ^2 - ա^2)} + ա\sqrt{3}\right)։$$

Գ · Ի կատարած ի ՍՄԱ ուղղանկիւն երեքանկեան բարձրութիւնն

$$ՍՄ = \sqrt{(\overline{ՍԱ}^2 - \overline{ԱՄ}^2)} = ա^2 - բ^2 ։$$

Ա · Որովհետեւ անկիւնն մարմնոյ $Ս = ն \cdot 60^0$. նմին իրի հարկ է զի $ն < 6$ իցէ։ Զանզի եթէ լինէր $ն \geqq 6$, յայնժամ եւ $Ս \geqq 360^0$, որ անհնարին է (Հ · 234 ·)։

Բ · Իսկ արդ որովհետեւ ն ողջոյն ինչ թիւ նշանակեալ ցուցանէ, ուրեմն ն, զզօրութիւնս 3, 4, եւ 5 ունել կարէ· որով եւ երից ազգաց կարգաւոր բրգանց լինել հնար է· Առաջին, կարգաւոր երեքկողմեան բուրգն, որ ի չորից պատշաճական հաւասարակող երեքանկեանց շուրջ փակեալ է· Երկրորդ, կարգաւոր չորեքկողմեան բուրգն, որոյ չորեքբեքկուսի խարիսխ է, եւ չորք պատշաճական հաւա-

տարակող երեքանկիւնք կողմանց են, եւ Երրորդ կարգաւոր հնգկողմեան բուրգն, որոյ վերին երեսքն ի միոյ կարգաւոր հնգանկենէ, եւ ի հինգ պատշաճական կարգաւոր երեքանկեանց կայ:

Գ. 1). Ապա ուրեմն ի կարգաւոր երեքկողմեան բրգան անկիւնն մարմնոյ որ ի գագաթան է $= 3\cdot60^0 = 180^0$, եւ մի անկիւն մարմնոյ խարսխին $= 180^0$, ուրեմն բովանդակութիւն ամենայն անկեանց մարմնոյ $= 720^0$: Դարձեալ յայսպիսի բրգան է

$\text{ա} = \text{ճ}\sqrt{3}$, ուստի $\text{ճ} = \frac{\text{ա}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\text{ա}\sqrt{3}$, եւ

$\text{ԱԵ} = \frac{1}{2}\text{ճ} = \frac{1}{6}\text{ա}\sqrt{3}$, $\text{ՍԵ} = \frac{\text{ա}}{2}\sqrt{3}$, ուստի եւ $\text{Կ} = \frac{3\text{ա}^2\sqrt{3}}{4}$, եւ $\text{Խ} = \text{ա}^2\sqrt{3}$, եւ ի կատարած $\text{ՍՄ} = \frac{\text{ա}}{3}\sqrt{6}$:

2). Ի կարգաւոր չորեքկողմեան բրգան է $\text{Ն} = 4$, ուրեմն անկիւնն մարմնոյ որ ի գագաթան $= 4\cdot60^0 = 240$, եւ մի անկիւն մարմնոյ ի խարսխին

$$= 300^0 - \frac{360}{4} = 300^0 - 90^0 = 210^0:$$

ուստի եւ բովանդակութիւն ամենայն անկեանց մարմնոյ

$$= 240^0 + 4\cdot210^0 = 1080^0:$$

Դարձեալ յայսպիսի բրգան է

$$\text{ա} = \text{ճ}\sqrt{2},\ \text{ճ} = \tfrac{1}{2}\text{ա}\sqrt{2},$$

$$\text{ՄԵ} = \sqrt{\left(\text{ճ}^2 - \frac{\text{ա}^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\text{ա}^2}{2} \,|\, \frac{\text{ա}^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{\text{ա}^2}{4}} = \frac{\text{ա}}{2},$$

$\text{ԱԲԳԴ} = \text{ա}^2$, $\text{Կ} = \text{ա}^2\sqrt{3}$, $\text{Խ} =$
$\text{ա}^2 + \text{ա}^2\sqrt{3} = \text{ա}^2(1 + \sqrt{3})$,

$$\text{եւ ՍՄ} = \sqrt{\left(\text{ա}^2 - \frac{\text{ա}^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\text{ա}^2}{2}} = \frac{\text{ա}\sqrt{2}}{2}:$$

3)․ Ի կարգաւոր հնգկողմեան բրգան է $Ն = 5$, ուրեմն անկիւնն մարմնոյ ի գագաթան $= 5 \cdot 60^0 = 300^0$․ մի անկիւն մարմնոյ ի խարսխին $= 300^0 - \frac{360}{5} = 300^0 - 72^0 = 228^0$, յորմէ եւ բովանդակութիւն ամենայն անկեանց մարմնոյ

$$= (5-1)\, 360^0 = 4 \cdot 360^0 = 1440^0 ։$$

Ի սմին բրգան է

$$\text{ա} = \frac{\text{ճ}}{2} \sqrt{[10 - 2\sqrt{5}]} \;\; (\text{Հ}\cdot\ 170 \cdot \text{Բ}\cdot), \;\; \text{եւ} \;\; \text{ճ} = \frac{2\text{ա}}{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}} = \text{ա}\sqrt{\left[\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right]}$$

ուրեմն

$$\text{ՄԵ} = \sqrt{\left[\text{ճ}^2 - \frac{\text{ա}^2}{4}\right]} = \sqrt{\left(\frac{\text{ա}^2 (5+\sqrt{5})}{10} - \frac{\text{ա}^2}{4}\right)} = \frac{\text{ա}}{2} \sqrt{(1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5})}\cdot$$

աստի եւ խարսխին $= \frac{5\text{ա}^2}{4} \sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$ եւ բովանդակութիւն հինգ երեսաց կողմանց $\text{Կ} = \frac{5\text{ա}^2}{4}\sqrt{3}$, զորոյ զհետ գայ, եթէ

$$\text{Վ} = \frac{5\text{ա}^2}{4}\sqrt{3} + \frac{5\text{ա}^2}{4}\sqrt{(1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5})} = \frac{5\text{ա}^2}{4}\left[\sqrt{3} + \sqrt{(1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5})}\right],$$

եւ ի կատարած բարձրութիւնն

$$\text{ՍՄ} = \sqrt{(\text{ա}^2 - \text{ճ}^2)} = \sqrt{\left[\text{ա}^2 - \text{ա}^2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\right]} = \text{ա}\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)} ։$$

ՀԱՏԱԾ Գ

ՑԱՂԱԳՍ ՆՄԱՆՈՒԹԵԱՆ ԱՆԿԻՒՆԱՒՈՐ ՄԱՐՄՆՈՑ

267. ՙՆՄԱՆ *ասին երկու անկիւնաւոր մարմինք, եթէ ամենայն անկիւնք մարմնոյ կարգաւ միմեանց հաւասար իցեն, եւ ամենայն երեսք կողմանցն կարգաւ միմեանց նման իցեն (տես* Հ. 27. *եւ համեմատեա)։*

Ա. *Ապա ուրեմն յամենայն նման անկիւնաւոր մարմինս ամենայն անկիւնք երեսաց, եւ ամենայն անկիւնք միտութեան միմեանց հաւասար են փոխանակաւ, եւ ամենայն միաբան կողք փոխանակաւ համեմատականք են։*

Դարձեալ որովհետեւ ի նման բազմանկիւնս միաբան անկիւնագիծքն համեմատականք են միաբան կողմանց, ուրեմն եւ նման անկիւնաւոր մարմնոց ամենայն միաբան անկիւնագիծքն համեմատականք են փոխանակաւ։

Բ. *Եթէ յերկուս նման մարմինս, զերկուս միաբան կողմանսն հաւասարս դնիցեմք, հարկ է երկոցունց մարմնոց միմեանց պատշաճական լինել* (Հ. 27)։

268. *Եթէ երեքկողմեան բուրգն* ՍԱԲԳ (Ձեւ 173.) *հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն հատանիցի, ի բաց հատեալ բուրգնն նման է բովանդակ բրգան։*

Իցէ հատածն Ա′Բ′Գ′ *հաւասար հեռաւոր յ*ԱԲԳ *խարսխէն, յայտ է եթէ* ΔԱ′Բ′Ս ∾ ΔԱԲՍ, ΔԲ′Գ′Ս ∾ ΔԲԳՍ, ΔԱ′Գ′Ս ∾ ΔԱԳՍ, *եւ* ΔԱ′Բ′Գ′ ∾ ΔԱԲԳ, (Հ. 261.). *դարձեալ է անկ.* Բ′Ա′Գ′ = *անկ.* ԲԱԳ, *անկ.* ՍԱ′Բ′ = *անկ.* ՍԱԲ, *եւ անկ.* ՍԱ′Գ′ = *անկ.* ՍԱԳ, *ապա եւ անկիւնն մարմնոյ* Ա′ = Ա (Հ. 235.), *եւ վասն սոյին իսկ պատճառաց անկիւնն մարմնոյ* Բ′ = Բ *եւ* Գ′ = Գ, *եւ* Ս *է երկոցունցն եւս է հասարակաց։ Արդ որովհետեւ երկուց* ՍԱԲԳ *եւ եւ* ՍԱ′Բ′Գ′ *բրգանց ամենայն անկիւնքն մարմնոյ միմեանց հաւասար են փոխանակաւ, եւ ամենայն երեսք կողմանցն*

կարգաւ նման են, ապա ուրեմն եւ երկոքին բրգունքն ի գլխովին միմեանց նման իցեն (Հ. 267.)։

Եթէ կտրուածն սագ հաւասար հեռաւոր իցէ՝ ի ՍԱԳ երեսաց կողմանցն, յայնժամ նովին օրինակաւ ցուցանի, եթէ բուրգնն սագբ ∾ ՍԱԳԲ ∾ ՍԱ′Բ′Գ′։

Ա. Եթէ որպիսի ինչ եւ իցէ բուրգն հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն հատանիցի, ի բաց հատեալ բուրգն ցանգ նման է ողջոյն բրգան, որչափ եւ բազում կողմանս բուրգնն ունիցի։ Ցուցումն նոյն է։ Ապա ուրեմն որ զինչ եւ իցէ երկու բրգունք նման են եթէ անկիւնք մարմնոյ նոցա որ ի գագաթան հաւասար իցեն, եւ կողմանքն որ ի գագաթան զմիմեանս հատանիցեն, համեմատականք իցեն։

Բ. Յորժամ Բս = Բ′Ս անկիցեմք, յայնժամ բուրգնն սԲգս պատշաճական է ՍԱ′Բ′Գ′ բրգան, քանզի ամենայն երեսք կողմանց նոցա միմեանց պատշաճական են փոխանակաւ (Հ. 260.) եւ է եւս սը = ՍԸ′։ Իսկ արդ ՍԸ′ : ՍԸ = ՍԱ′ : ՍԱ = Ա′Բ′ : ԱԲ (Հ. 226.), ուրեմն եւ սը : ՍԸ = սա : ՍԱ = աբ : ԱԲ, այս ինքն ի նման բրգունս բարձրութիւնքն ընդ կողմանսն ուղիղ համեմատին։

269. Երկու երեքկողմեան բրգունք նման են, եթէ կամ Ա) ամենայն անկիւնք մարմնոյ նոցա կարգաւ միմեանց հաւասար իցեն, եւ կամ Բ) ամենայն երեսք կողմանցն նման իցեն միմեանց փոխանակաւ։

Առաջին մասն։ Համարեսցուք, եթէ իցեն ՍԱԲԳ եւ սաբգ (Ձեւ 173.) երկու երեքկողմեան բրգունք, յորս անկիւնն մարմնոյ Ս = ս, Ա = ա, Բ = բ, Գ = գ, արդ պարտ եւ պատշաճ է մեզ ցուցանել եւեթ, եթէ եւ երեսք կողմանցն երկոցունց բրգանցն փոխանակաւ միմեանց նման իցեն։ Զմտաւ ած, եթէ սաբգ բուրգնն այնպէս իմն ի ՍԱԲԳ զետեղեալ իցէ, որպէս զի երեսք կողմանց ս անկեան մարմնոյ ի վերայ երեսաց կողմանց Ս անկեան անկանիցին,

որ վասն հաւասարութեան երկոցունց անկեանցն զոր յառաջագոյն համարեցաք, հնարաւոր իսկ է. եւ յանձն առցուք եւս եթէ կէտքն ա, բ, գ, ի վերայ Ա՛, Բ՛, Գ՛ կիտից անկանիցին, յայտ է եթէ բուրգնն ՍԱ՛Բ՛Գ՛ ≅ սաբգ (Հ. 260.), եւ մնայ մեզ զնմանութիւն ՍԱ՛Բ՛Գ՛ եւ ՍԱԲԳ բրգանցն յայտնի կացուցանել: Բայց արդ ըստ կազմածոյն է անկիւնն մարմնոյ Ա՛ = ա, ուրեմն հարկ է զի անկիւնն ՍԱ՛Բ = սաբ = ՍԱԲ, յորմէ եւ Ա՛Բ՛ ‖ ԱԲ իցէ: Ըստ նմին օրինակի ցուցանի, եթէ Բ՛Գ՛ ‖ ԲԳ, ուստի եւ Ա՛Բ՛Գ՛ երեսքն հաւասար հեռաւոր են յԱԲԳ երեսաց: Ուրեմն բուրգնն ՍԱ՛Բ՛Գ՛ ∾ ՍԱԲԳ (Հ. 268.) յորմէ եւ բուրգնն սաբգ ∾ բուրգ. ՍԱԲԳ:

Երկրորդ մասն: Իցէ △սաբ ∾ △ՍԱԲ, △սբգ ∾ △ՍԲԳ, △սագ ∾ ՍԱԳ, եւ △ԱԲԳ ∾ △աբգ. եւս եւ է անկ. սաբ = անկ. ՍԱԲ, անկ. սագ = անկ. ՍԱԳ, եւ անկ. բագ = ԲԱԳ, յորմէ եւ անկիւնն մարմնոյ Ա = ա (Հ. 238.): Վասն սոյին իսկ պատճառաց անկիւնն մարմնոյ բ = Բ, գ = Գ, եւ անկիւնն մարմնոյ ս = Ս, զորոյ զհետ գայ, եթէ սաբգ ∾ ՍԱԲԳ (ըստ Ա.):

Ա. Ապա ուրեմն եթէ երկուց բրգանց ամենայն անկիւնքն մարմնոյ միմեանց հաւասար իցեն փոխանակաւ, յայնժամ եւ ամենայն երեսք կողմանցն կարգաւ միմեանց նման են:

Բ. Ուրեմն եւ երկու եռեքկողմեան բրգունք միմեանց նման են, եթէ անկիւնք երեսաց որ ի գագաթան, հաւասար իցեն փոխանակաւ, եւ կողքն որ ի գագաթան զմիմեանս բաղխիցեն համեմատական իցեն փոխանակաւ:

Գ. Նոյնպէս երկու բրգունք միմեանց նման են, եթէ անկիւնք մարմնոյ որ ի խարսխին միմեանց հաւասար իցեն փոխանակաւ: Զի թէ եթէ ա = Ա, բ = Բ, եւ Գ = գ, յայնժամ եւ անկ. սաբ = անկ. ՍԱԲ, անկ. սբա = ՍԲԱ, ուստի եւ անկ. սաբ = անկ. ԱՍԲ: Ըստ նմին օրինակի ցուցանի, եթէ անկ.

բսգ = անկ. ԲՍԳ, եւ անկ. ասգ = անկ. ԱՍԳ, ուրով եւ անկիւնն մարմնոյ ս = Ս է։

270. Որ զինչ երկու նման բրգունք, մարթեն յերեքկողման բրգունս կտորել, որք կարգաւ միմեանց նման են, եւ թիւ համարոյ նոցա միմեանց հաւասար. եւ ոմին հակառակ. Եթէ երկու բրգունք ի նոյնչափ երեքկողման բրգանց յօդեալ իցեն, որք եւ կարգաւ նման իցեն միմեանց, երկոքին բրգունքն եւս նման են։

Համարեսցուք եթէ հնգկողման բրգունքն ՍԱԲԳԴԵ եւ սաբգդե (Ձեւ 174.) միմեանց նման իցեն. յայտ է եթէ ամենայն անկիւնքն մարմնոյ եւ երեսաց նոցին հաւասար իցեն միմեանց փոխանակաւ, եւ ամենայն երեսք կողմանցն կարգաւ նման են. ուրեմն եւ ամենայն միաբան կողքն փոխանակաւ համեմատականք են։ Արդ իբրեւ ի նման խարիսխն ԱԲԳԴԵ եւ աբգդե զմիաբան անկիւնագիծն ԱԳ, ԱԴ, եւ ագ եւ ադ ձգիցեմք, եւ ընդ անկիւնագիծս ընդ այսոսիկ եւ ընդ Ս եւ ս գագաթունս զերեսն ԱՍԳ, ԱՍԴ, ասգ եւ ասդ հաստատիցեմք, յայնժամ երկոքին բրգունքն յերիս երեքկողմեան բրգունս հատանիցին։ Արդ որովհետեւ վասն նմանութեան երկացունց բրգանցն, զոր յառաջագոյն համարեցաք, անկիւնն մարմնոյ Բ = բ, եւ ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ, ΔԱԲՍ ∾ Δաբս, եւ ԲԳՍ ∾ Δբգս, ուրեմն

ԱՍ : աս = ԱԲ : աբ = ԱԳ : ագ = ԲԳ : բգ = ԳՍ : գս,

սստի եւս է ΔԱԳՍ ∾ Δագս. ապա ուրեմն բուրգնն ՍԱԲԳ ∾ սաբգ (Հ. 269.)։ Զայսն ձեւ օրինակի ցուցանի եւս նմանութիւն ՍԱԴԵ եւ սադե բրգանցն։ Նաեւ ի կատարած որովհետեւ ΔԱԳԴ ∾ Δագդ, ΔԱԳՍ ∾ ագս, եւ ΔԱԴՍ ∾ Δադս որպէս հնար իսկ է ցուցանել, եւ ΔԳԴՍ ∾ գդս ըստ մերոյ համարելոյս, ուրեմն բուրգնն ՍԱԳԴ ∾ սագդ։

Յուցանի եւ երկրորդ մասնն։ Համարեսցուք, եթէ իցէ բուրգնն ՍԱԲԳ ∾ սաբգ, ՍԱԳԴ ∾ սագդ, եւ ՍԱԴԵ ∾ սադե. ուրեմն երկու ՍԱԲԳԴԵ եւ սաբգդե ողջոյն բրգանցն երեսք կողմանցն կարգաւ միմեանց նման են, եւ եւս խարիսխքն ԱԲԳԴԵ ∾ աբգդե (Հ. 127.), ուրեմն երկոքին բրգունքն ի գլխովին, զորոց բանքս են, նման են (Հ. 269.)։

Մարթ է զնմանութիւն երկոցունց բրգանցըն եւ անտուստ եւս յայտ արարեալ ցուցանել, յորժամ զհաւասարութիւն անկեանց մարմնոյ խարըխին ցուցանիցեմք։

Զասացելոցս զհետ գայ, եթէ Երկու բազմանիստ բրգունք եւս նման են, յորժամ նովին չափով անկիւնս մարմնոյ ունիցին, որք կարգաւ միմեանց հաւասարք իցեն, կամ թէ եւս, եթէ ի նովին չափով ձեւոց որք կարգաւ միմեանց նմանք իցեն, շուրջ փակիցին։

271. Երկու նման սղոցածք կազմեալ են ի հաւասար թուով բրգանց, որք կարգաւ միմեանց նման են. եւ սմին հակառակ. Եթէ երկու սղոցածք, ի հաւասար թուով բրգանց, որք կարգաւ նման իցեն՝ յօդիցին, երկոքին սղոցածքն եւս միմեանց նման են։

Երկուց դիպաց մարթ է դիպել, զի կամ երկոքին սղոցածքն երեքկողմեան են, եւ կամ բազմակողմեան։

Ա. Իցեն երկոքին սղոցածքն երեքկողմեան։

1) Իցէ սղոցածն ԱԲԳԴԵԶ ∾ աբգդեզ (Ձեւ 175.)։ Եթէ ընդ Ա, Ե եւ Գ կէտս հարթ երեսս ինչ հատանիցեմք, ունիցիմք ի ձեռին մի երեքկողմեան բուրգն ԵԱԲԳ եւ մեւս եւս չորեքկողմեան ԵԱԳԴԶ, յորս առաջին նշանագիրքս զգագաթունս բրգանցն նշանակեն։ Դարձեալ եթէ ընդ Ա, Ե, Զ հատանիցեմք երեսս, ելանիցեն երկու երեքկողմեան բրգունք ԵԱԳԶ եւ ԵԱԴԶ,

որով սղոցածն ԱԶ յերիս երեքկողմեան բրգունս կոտորեցաւ։ Ըստ սմին օրինակի եւ սղոցածն աղ բաժանի յերիս երեքկողմեան բրգունս եաբգ, եագզ եւ եադզ։ Արդ որովհետեւ ըստ մերոյ համարելոյ անկիւնն մարմնոյ Բ = բ, եւ ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ = ԲԵ : բե, ուրեմն երկոքին բրգունքն ԵԱԲԳ եւ եաբգ նման են, եթէ զերեքանկիւնան ԱԳԵ եւ ագե որպէս խարիսխս նոյին դնիցեմք (Հ. 268. Ա.)։ Սոյին օրինակաւ եւ հասանեմք ի վերայ նմանութեան միաբան ԵԱԴԶ եւ եադզ բրգանցն։ Դարձեալ որովհետեւ ΔԱԳԶ ∾ Δագզ, եւ ΔԳԶԵ ∾ Δգզե (Հ. 99.), եւ ΔԱԳԵ ∾ Δագե, ΔԱԵԶ ∾ Δաեզ, ուրեմն եւ բուրգնն ԵԱԳԶ ∾ եագզ (Հ. 268.)։

2). Դիցուք գրեսցուք եթէ բուրգնն ԵԱԲԳ ∾ եաբգ, ԵԱԳԶ ∾ եագզ, եւ ԵԱԴԶ ∾ եադզ. յայտ է եթէ անկիւնն մարմնոյ Ե = ե, ուստի անկիւնն երեսաց

ԱԲԵ = անկ. աբե, անկ. ԳԲԵ = անկ. գբե, եւ անկ. ԱԲԳ = անկ. աբգ, եւ

ա) ԱԲ : աբ = ԲԳ : բգ = ԱԳ : ագ = ԲԵ : բե
= ԱԵ : աե = ԳԵ : գե

քանզի բուրգնն ԵԱԲԳ ∾ եաբգ։

Դարձեալ զնմանութեան ԵԱԴԶ եւ եադզ բրգանցն զհետ գայ, եթէ անկիւնն մարմնոյ Դ = դ ուստի եւ անկիւնն երեսաց

ԱԴԵ = անկ. ադե, անկ. ԱԴԶ = անկ. ադզ, անկ. ԵԴԶ = անկ. եդզ, եւ

բ) ԱԵ : աե = ԵԴ : եդ = ԵԶ : եզ = ԴԶ : դզ = ԱԴ : ադ = ԱԶ : ազ,

եւ վասն նմանութեան եւս ԵԱԳԶ եւ եագզ բրգանցն, է

գ) ԱԵ : աե = ԵԶ : եզ = ԱԶ : ազ = ԳԶ : գզ = ԵԳ : եգ = ԱԳ : ագ։

Որդ ա ցուցանէ եթէ ΔԱԲԵ ∾ Δաբե, եւ բ յայտ առնէ եթէ ΔԱԴԵ ∾ Δադե (Հ. 100.), յորմէ եւ ԱԲԵԴ ∾ աբեդ (Հ. 127.):

Դարձեալ բ ցուցանէ եթէ ΔԱԴԶ ∾ Δադզ (Հ. 100.) եւ գ եթէ ΔԱԳԶ ∾ Δագզ (Հ. 100.), ուրեմն եւ երեւք կողմանցն ԱԳԶԴ ∾ ագզդ (Հ. 127.): Այնգունակ զա համեմատութեանցն զհետ գայ նմանութիւն ԲԳԵ եւ բգե երեքանկեանց, եւ զդ համեմատութեան՝ նմանութիւն ԳԵԶ եւ գեզ երեքանկեանց, որով եւ երեւք կողմանցն ԲԳԶԵ ∾ բգզե, եւ ի կատարած ըստ մերոյ համարելոյ ΔԱԲԳ ∾ Δաբգ եւ ΔԴԵԶ ∾ Δդեզ: Ուրեմն երկուց ԱԶ եւ ազ սղոցածիցն ամենայն երեւք կողմանցն կարգաւ նման են, զորոյ զհետ գայ եւ փոխանակաւ հաւասարն լինել ամենայն հարթ անկեանցն, ուստի եւս ամենայն անկեանց մարմնոյ հաւասարութիւն. ուրեմն երկոքին ԱԶ եւ ազ սղոցածքն նման են միմեանց (Հ. 267.):

Բ. Երկոքին ԱԸ եւ աը սղոցածքն (Ձեւ 176.) Նկողմեան իցեն:

1). Դիցուք եթէ սղոցածն ԱԸ ∾ աը: Իբրեւ յԱԲԳԴԵ եւ աբգդե խարխախն զմիաբան անկիւնագծիւն ԱԴ, ԱԳ, ... եւ ադ, ագ, ... ձգիցեմք, եւ յերկուս եւս այլ խարխախն զմիաբան անկիւնագծիւն ԶԹ, ԶԸ, ... եւ զթ, զը..., իւրաքանչիւր խարխախ ի Ն — 2 երեքանկիւնս բաժանիցի, որպէս զի երեքանկիւնքն որ ի միում եւ ի միւսում խարխախի երկոցունցն սղոցածիցն գտանիցին, կարգաւ միմեանց նման են, քանզի բովանդակ իսկ խարխախքն միմեանց նման են: Իբրեւ հատանիցին ԱԹ եւ ԱԸ, ... եւ աթ եւ աը, ... կտրուածքն անկիւնագծի, յայնժամ երկոքին սղոցածքն ի Ն — 2 երեքկողմեան սղոցածս հատանիցին որք փոխանակաւ նման են միմեանց: Քանզի վասն նմանութեան երկոցունց սղոցածիցն, զոր յառաջագոյն համարեցաք, եւ վասն ΔԱԴԻ ∾ Δադե, եւ ΔԶԺԹ ∾ զժթ լինելոյ, է

ա) ԱԵ : աե = ԱԴ : ադ = ԱԶ : ազ = ԴԹ : դթ = ԶԹ : զթ = ... :

Արդ ածցուք զմտաւ, եթէ աը սղոցաձն այնպէս իմն յԱԸ զետեղիցի, որպէս զի դ կէտն ի Դ, կողմն դե ի ԴԵ ուղղութիւն, դգ ի ԴԳ ուղղութիւն, եւ դա ի ԴԱ ուղղութիւն անկանիցին, (որ վասն նմանութեան ԱԲԳԴԵ եւ աբգդե խարսխացն հնարաւոր է) հարկ է եւս զի դթ կողն ի ԴԹ ուղղութեան գտանիցի, վասն հաւասարութեան Դ եւ դ անկեանց մարմնոյն զոր յառաջագոյն համարեցաք: Արդ որովհետեւ դթ ի ԴԹ եւ դա ի ԴԱ կան, ուրեմն եւ անկ. ադթ = անկ. ԱԴԹ, զորս եւ զա համեմատութեան (Հ. 100.) զհետ գայ, եթէ երեքանկիւնքն ԱԴԹ եւ ադթ, որով եւ երեքանկիւնքն ԱԶԹ եւ ազթ նմանք են, ուստի հատածն անկիւնագծի ԱԶԹԴ ∾ ազթդ : Ուրեմն յերեքկողմեան ԱԴԵԺԹԶ եւ ադեժթզ սղոցաձս ամենայն երեսք կողմանցն կարգաւ նման են, ուստի եւ ամենայն անկիւնքն մարմնոյ կարգաւ հաւասար են միմեանց. զորս զհետ գայ, եթէ երկոքին սղոցաձքս նման իցեն միմեանց: Սովին օրինակաւ ցուցանի եւս նմանութիւն ԱԳԸԶ եւ ագըզ հատածոյն անկիւնագծի, եւ երեքկողմեան ԱԲԳԷԶԸ եւ աբգէզը սղոցաձիցն : Նոտըսաին ինքնին յառաջ գայ նմանութիւն ԱԳԴԶԸԹ եւ ագդզըթ սղոցաձիցն, քանզի ամենայն երեսք կողմանցն նոյա մի ըստ միոջէ միմեանց նման են: Ապա ուրեմն ի ձեռն հատածոյն անկիւնագծի, զորոց բանք եղեն, երկոքին բազմանկիւն սղոցաձքն յերիս երեքկողմեան սղոցաձս կտորեցան, որք կարգաւ միմեանց նման են: Իսկ արդ զերկուս նման սղոցաձս մարթեմք ի բրգունս որք կարգաւ նման իցեն, բաժանել (ըստ Ա), ապա ուրեմն եւ որ զինչ եւ իցէ երկու նման սղոցաձք ի հաւասար թուով բրգանց, որք կարգաւ նման իցեն, յօդել կարեն:

2). Ցուցումն այն հակառակին նման է այնմ՝ զոր վերագոյն ասացաք:

272. Եթէ որ զինչ եւ իցէ երկու անկիւնաւոր մարմինք ի հաւասար թուով բրգանց որ կարգաւ նման իցեն, յոդեալ եւ յօրինեալ իցեն, երկուքին մարմինքն միմեանց եւս նման են, եւ այն հակառակ, Երկու նման անկիւնաւոր մարմինք, կազմեալ են, ի հաւասար թուով բրգանց որք կարգաւ նման են միմեանց:

Ցուցանի ամենեւին նովին օրինակաւ, որպէս յառընթերակաց համարն յայտ արարաւ:

273. Վերին երեսք նման մարմնոց համեմատին ընդ միմեանս, որպէս երկրորդ կարողութիւնք միաբան կողիցն կամ անկիւնագծից:

Ընջրպետութիւնք երեսաց երկուց միաբան երեսաց կողմանցն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս երկրորդ կարողութիւնք միաբան կողմանց նոցա ընդ միմեանս: Իսկ արդ կողմանքս այսուքիկ են եւ միաբան կողք նման մարմնոց, ուրեմն երկու երկու միաբան երեսք կողմանցն համեմատին ընդ միմեանս որպէս երկրորդ կարողութիւնքն երկուց միաբան կողից. ուստի եւ որպէս երկրորդ կարողութիւնքն միաբան անկիւնագծից. եւ քանզի ի նման մարմինս ամենայն միաբան կողք եւ անկիւնագիծք միմեանց համեմատական են փոխանակաւ (Հ. 267. Ա.), ուրեմն հաստատուն իմն կշռութիւն է ընդ միմեանս միաբան երեսաց կողմանց նման մարմնոց. զորոյ գտեալ գայ եթէ եւ ընդ միմեանս համեմատին բովանդակութիւնք ամենայն երեսաց կողմանցն, այս ինքն է բովանդակ վերին երեսք երկուց նման մարմնոց, որպէս երկրորդ կարողութիւնք միաբան կողիցն, ուստի եւ որպէս երկրորդ կարողութիւնք երկուց երկուց միաբան անկիւնագծից:

ՀԱՏՈՒԱԾ Դ

ՑԱՂԱԳՍ ՉԱՓԵԼՈՑ ԵՒ ՀԱՄԵՄԱՏԵԼՈՑ ԱՆԿԻՒՆԱՒՈՐ ՄԱՐՄՆՈՑ

274. Եթէ երկու երկայնաձեւ խորանարդաց նոյն խարիսխ, եւ հաւասար բարձրութիւն իցէ, խորանարդքն ի գլխովին միմեանց հաւասար են։

Համարեսցուք եթէ ԱԷ, եւ ԱԻ (Ձեւ 177 եւ 178.) իցեն երկու երկայնաձեւ խորանարդք, որոց ԱԲԳԴ խարիսխ իցէ հասարակաց, եւ որոց այլ երկու ԵԶԷԸ եւ ԹԺԻԼ ի մի եւ ի նոյն երեսս գտանիցին, որպէս զի երկոքեանն եւս զնոյն բարձրութիւն ունիցին։

Արդ պարտ եւ պատշաճ է մեզ երկուս դէպս առաջի ունել, քանզի կամ երկոքին երեւք կողմանցն ԱԶ եւ ԱԺ ի միոյ երեսաց վերայ գտանին եւ կամ ոչ։

Ա. Յառաջին դէպսն (Ձեւ 177.) կողմանքն ԹԺ եւ ԻԼ երկայնութիւնք են ԵԶ եւ ԸԷ կողմանցն, որպէս եւ ինքնին իսկ յայտ է, եւ ԴԷ եւ ԴԻ երեւք կողմանցն ի միոյ ԴԳԼ երեսաց վերայ կան, որ եւ հաւասար հեռաւոր է յԱԲԺ երեսաց։ Ապա ուրեմն երեքանկիւնքն ԴԸԼ եւ ԵԱԹ, զոր իբրեւ խարիսխս համարեսցուք, եւ ԱԸ, ԵԼ, եւ ԱԼ հաւասար հեռաւոր ձեւքն յօրինեալ կազմեն զողոցածն ԱԵԹԴԸԼ. ըստ նմին օրինակի եւ երեքանկիւնքն ԳԷԻ, ԲԶԺ եւ ԲԷ, ԷԺ, ԲԻ հաւասար հեռաւոր ձեւքն զերեքկողմեան ողոցածն ԲԶԺԳԷԻ, զոր համառօտիւք = Պ′ դիցուք, եւ զառաջինն = Պ։ Իսկ արդ է ΔԴԸԼ ≌ ΔԷԳԻ (Հ. 51.), ուրեմն եւ ΔԵԱԹ ≌ ΔԶԲԺ, դարձեալ ԱԸ ≌ ԲԷ (Հ. 256.) եւ ԸԹ ≌ ԷԺ, զոր դիւրին է ցուցանել, ապա Ը եւ Է անկիւնքն մարմնոյ յերից երեսաց կողմանց կազմեալ են, որք կարգաւ միմեանց պատշաճականք են,

ուստի եւ սղոցաձքն Պ եւ Պ՛ ի գլխովին պատշա-
ճականք են (Հ. 255)։

Նու ի կատարած եթէ զմարմինն ԱԼ (որ ի
ԱԲԺԵ, ԲԺԻԳ, ԳԴԸԻ, ԱԴԸԵ եւ ԸԻԺԵ երեսաց
շուրջ պատեալ է) Մ նշանագրովն նշանակիցեմք, յայտ
է եթէ Մ — Պ՛ = ԱԲԳԴԵՁԷԸ = ԱԷ է, եւ Մ — Պ =
ԱԲԳԴԹԺԻԼ = ԱԼ է, եւ քանզի Պ՛ = Պ ըստ մե-
րոյ ցուցանելոյ, ուրեմն եւ Մ — Պ՛ = Մ — Պ, այս
ինքն երկայնաձեւ խորանարդն ԱԷ = ԱԻ։

Բ. Դիցուք եթէ ԱԷ եւ ԱԻ (Ձեւ 178.) եր-
կայնաձեւ խորանարդքն ի վերայ նորին ԱԲԳԴ խա-
րըսխի կանգնեալ իցեն, եւ, վերին խարիսխքն նոցա
ԵՁԷԸ եւ ԹԺԻԼ ի միոյ երեսաց վերայ գտանիցին,
իսկ երեսք կողմանցն ԱՁ եւ ԱԺ յայլեւայլ երեսս։
Արդ ի դէպս յայս երկայնեսցուք զկողմանսն ԸԷ եւ
ԷՁ մինչեւ հատանել նոցա զերկայնեալ կողմանսն
ԻԼ եւ ԺԹ, աստանօր յերեսս վերին խարսխին ե-
լանիցէ հաւասար հեռաւոր ձեւն ՆՄՊՌ, որ որպէս
յայտ է, պատշաճական է ԱԲԳԴ խարսխին եւ հա-
ւասար հեռաւոր է ի նմանէ. եւ եթէ զՆ, Մ, Պ,
Ռ կէտսն ընդ Ա, Բ, Գ, Դ կիտից ուղիղ գծիւ
յօդիցեմք, գիծքն այնուքիկ ի միմեանց հաւասար
հեռաւորք են, եւ միմեանց հաւասար, եւ երկու եր-
կու ի միոյ երեսաց վերայ գտանին, ուրեմն մարմինն
ԱԲԳԴՆՄՊՌ է երկայնաձեւ խորանարդ, որ ըստ
առաջին դիպացն = ԱԷ, եւ եւս = ԱԻ, ուրեմն
ԱԷ = ԱԻ։

Ապա ուրեմն առ հասարակ երկու երկայնաձեւ
խորանարդք, միմեանց հաւասարք են, եթէ խարիսխ
նոցա իցէ նոյն եւ բարձրութիւնն հաւասար։

Ա. Օրացուցելոցս զհետ գայ, եթէ ամենայն
ծուռ երկայնաձեւ խորանարդ ԱԻ յուղղորդ ինչ
խորանարդ որոյ հաւասար զօրութիւնն իցէ, փոփո-
խել կարէ, եթէ ոք յԱ, Բ, Գ, Դ կէտս ի վերայ
ԱԳ խարսխին զուղղորդ գիծսն ԱԵ, ԲՁ, ԳԷ եւ

ԴԸ կանգնիցէ, որք յերկայնեալ ԺԼ վերին խարսխէ անտի հատանիցին, եւ ընդ ուղղորդ գծան ընդ այնոսիկ երեւքն ԱԶ, ԲԷ, ԳԸ եւ ԴԵ հաստատիցին:

Բ. Ապա ուրեմն մարթի եւ ամենայն ծուռ երկայնաձեւ խորանարդ յուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդ փոփոխել: Քանզի իբրեւ ծուռ երկայնաձեւ խորանարդն (ըստ Ա.) յուղղորդ ԱԷ (Ձեւ 179.) երկայնաձեւ խորանարդ փոփոխիցի, եւ ապա յորժամ զխարիսխն ԱԳ յուղղանկիւնն ԱԲՆՄ շրջիցես, որ ընդ ծռանկիւն ԱԳ հաւասար հեռաւոր ձեւոյ հաւասար անջրպետութիւն երեսաց ունիցի (Հ. 179.), եւ ընդ ԵԱՄ, ԶԲՆ անկիւնան՝ երեսս հաստատիցես, որ զերեսս կողմանց կամ զերկայնութիւնն ուղղորդ երկայնաձեւ խորանարդին յուղիղ գիծս ԵՌ, ՄՌ, ԶՊ, ՊՆ, ԱՄ եւ ԲՆ հատանիցեն, ելանիցէ ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդն ԱՊ, որ (եթէ ԱԶ երեւքն իբրեւ խարիսխ գրեսցի) ըստ մերոց օրինաց, ԱԷ ուղղորդ երկայնաձեւ խորանարդին հաւասար է, ուստի եւ = ԱԻ:

Ապա ուրեմն երկայնաձեւ խորանարդն հաւասար է ուղղանկիւն ինչ երկայնաձեւ խորանարդի որոյ ընդ նմա հաւասար խարիսխ եւ նոյն բարձրութիւն իցէ:

Գ. Որովհետեւ ամենայն երկայնաձեւ խորանարդք ի ձեռն կտրուածոյ անկիւնագծի հասարակի (Հ. 258.) աստստին յայտ է, եթէ եւ երկու երեքկողմեան ողոցածք որոց հաւասար իցէ խարիսխն եւ նոյն բարձրութիւն, միմեանց հաւասար են:

Քանզի իբրեւ զհաւասար երեքկողմեան խարիսխսն ԱԲԳ, ԴԵԶ, եւ Ա՛Բ՛Գ՛, Դ՛Ե՛Զ՛ (Ձեւ 180.) ի հաւասար հեռաւոր ձեւս ԱԷ, ԴԸ եւ Ա՛Է՛, Դ՛Ը՛ կատարիցեմք, յայնժամ եւ հաւասար հեռաւոր ձեւքս հաւասար իցեն, եւ իբրեւ ընդ ԵԲԷ, ԶԳԷ եւ Ե՛Բ՛Է՛, Զ՛Գ՛Է՛ անկիւնան երեսս հաստատիցեմք, ելանիցեն երկու երկայնաձեւ խորանարդք ԱԸ եւ Ա՛Ը՛, որոց հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրու-

թիւն է, որով յայտ է եթէ միմեանց հաւասար են։ Իսկ արդ որովհետեւ երկայնաձեւ խորանարդն ԱԸ ի ձեռն ԲԳԶԵ կտրուածոյ անկիւնագծի, եւ Ա՛Ը՛ ի ձեռն Բ՛Գ՛Զ՛Ե՛ կտրուածոյն հատարակի, ուրեմն, քանզի ամբողջքն միմեանց հաւասարք են, եւ կէսքն հաւասար իցեն, այս ինքն է, հարկ է զի եւ ԱԲԳԴԵԶ = Ա՛Բ՛Գ՛Դ՛Ե՛Զ՛ *իցէ։*

275. *Երկու ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդք որոց հաւասար խարիսխք իցեն, համեմատին ընդ միմեանս, որպէս նոցին բարձրութիւնքն ընդ միմեանս. եւ խոտորնակս, Երկու ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդք, որոց նոյն բարձրութիւն իցէ, կշռին ընդ միմեանս, որպէս նոցին խարիսխքն ընդ միմեանս համեմատիցին։*

Ա *մասն*։ *Երկուց դիպաց մարթ է ի սմին դիպել, քանզի բարձրութիւնք երկայնաձեւ խորանարդաց կամ չափելի են եւ կամ անչափական։*

ա). *Չափելի իցեն* ԲԺ *եւ* ԲԶ *բարձրութիւնքն* ԱԻ *եւ* ԱԼ *երկայնաձեւ խորանարդաց* (*Չեւ* 181.)։ *Համարեսցուք եթէ* ԲԽ *իցէ հասարակաց իմն կշիռ* ԲԺ *եւ* ԲԶ *բարձրութեանցն, ուստի եւ իցէ* ԲԺ = *մ* . ԲԽ, ԲԶ = *ն* . ԲԽ, *որով* ԲԺ : ԲԶ = *մ* : *ն*։ *Արդ զմտաւ ած եթէ բարձրութիւնն* ԲԺ *ի մ մասունս հաւասարս կտորեալ իցէ, յորոց ն մասունքն ի* ԲԶ *բովանդակեալ գտանիցին, եւ ընդ ամենայն կէտս բաժանման հարթ երեսք հաստատեալ իցեն, որք եւ հաւասար հեռաւոր իցեն յԱԲԳԴ խարսխէն. ամենայն կտրուածքս այսոքիկ պատշաճական են խարսխին, յորմէ եւ երկայնաձեւ խորանարդն ի մ հաւասար մասունս բաժանիցի, յորոց մի է* ԱԲԳԴՒՍԽԿ (*Հ.* 274.)։ *Արդ է* ԱԻ = *մ* . ԱԿ, *եւ* ԱԲ = *ն* . ԱԿ, *յորմէ* ԱԻ : ԱԼ = *մ* : *ն*, *իսկ արդ եւ* ԲԺ : ԲԶ = *մ* : *ն*, *ապա ուրեմն* ԱԻ : ԱԼ = ԲԺ : ԲԶ։

բ). *Դնիցուք դրեսցուք եթէ* ԲԺ : ԲԶ *իցէ անչափական կշռութիւն*։ *Եթէ յայս դէպս չիցէ*

ԱԻ : ԱԼ = ԲԺ : ԲԶ,

հարկ է զի իցէ

$$Աի : Աէ \gtrless Բժ : ԲՁ,$$

կամ թէ չորրորդ համեմատականն առ Աի, Աէ, եւ Բժ հարկ է զի $\gtrless$ ԲՁ իցէ։ Արդ առցուք յանձն եթէ Աի : Աէ = Բժ : Բք, եւ տեսցուք եթէ զինչ ինչ արդեւք զհետ գայցէ։ Իբրեւ զԲժ բարձրութիւնն յայնպիսի փոքր մասունս հաւասարս հատանիցեմք որպէս զի որ զինչ եւ իցէ մի կէտ բաժանման + ի միջին վայրի Ձ եւ ք կիտից գտանիցի, եւ ընդ + կէտն երեսս փ+ հատանիցեմք, որ յԱԲԳԴ խարսխէն հաւասար հեռաւոր իցէ, ծագէ Բփ երկայնաձեւ խորանարդն որ ընդ Աի զնոյն ԱԳ խարիսխ ունի, եւ որոյ բարձրութեան ընդ Բժ բարձրութեան չափելի իմն կշռութիւն է, ուստի եւ ըստ ա է

$$Աի : Բփ = Բժ : Բ+,$$

եւ քանզի

$$Աի : Աէ = Բժ : Բք$$

ըստ մերոյ յանձն առնլոյ, ուրեմն

$$Բփ : Աէ = Բ+ : Բք,$$

որ անպատեհ իմն է, քանզի Աէ < Բփ, եւ Բք > Բ+։ Ապա ուրեմն չկարէ չորրորդ համեմատականն մեծագոյն քան զԲՁ լինել։

Արդ դիցուք գրեսցուք եթէ իցէ

$$Աի : Աէ = Բժ : Բց։$$

Իբրեւ դարձեալ զԲժ յայնպիսի փոքր հաւասար մասունս բաժանիցես, որպէս զի մի կէտ բաժանման յ ի միջին վայրի ց եւ Ձ կիտից գտանիցի, եւ ընդ յ երեսս ւյ հաւասար հեռաւոր յԱԳ

խարսխէն հատանիցես, ելանիցէ նոր երկայնաձեւ խորանարդ, ուստի եւ ըստ ա,

$$\text{Աի} : \text{Բր} = \text{Բժ} : \text{Բյ},$$

յորմէ եւ լինէր

$$\text{Աէ} : \text{Բր} = \text{ԲՑ} : \text{Բյ},$$

եւ քանզի ի սմին $\text{Բր} < \text{Աէ}$, իսկ $\text{Բյ} > \text{ԲՑ}$ է, ուրեմն եւ այս համեմատութիւն սուտ է ամենեւին. զորոյ զհետ գայ եթէ եւ ոչ հնար է չորրորդ համեմատականին առ Աի, Աէ եւ Բժ՝ փոքրագոյն քան զԲՋ լինել:

Արդ որովհետեւ Աի : Աէ ոչ փոքր եւ ոչ մեծ քան զԲժ : ԲՋ լինել կարէ, ուրեմն հարկ ի վերայ կայ $\text{Աի} : \text{Աէ} = \text{Բժ} : \text{ԲՋ}$ լինել: Ապա ուրեմն առ հասարակ երկու ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդք որոց նոյն խարիսխ իցէ, համեմատին ընդ միմեանս, որպէս նոցին բարձրութիւնքն ընդ միմեանս կշռիցին:

Բ. մասն: Զերկոսին երկայնաձեւ խորանարդսն Ա՛Է՛ եւ Ա՛Ն՛ (Ձեւ 182.) դիջիր ի վերայ միոյ Գ՛Ի՛Թ՛ երեսաց մօտ առ միմեանս, որպէս զի սրունք Բ՛Ա՛Դ՛ եւ Թ՛Ա՛Ի՛ ուղիղ անկեանցն փոխանակաւ միմեանց երկայնութիւնք լինիցին, որով Բ՛Ա՛Թ՛ եւ Դ՛Ա՛Ի՛ ուղիղ գիծք լինիցին: Արդ իբրեւ այս այսպէս կարգեալ յարդարիցի, որովհետեւ ուղղանկիւն են երկայնաձեւ խորանարդքն եւ հաւասար բարձրութիւն է նոցա, հարկ է զի երկու կողք նոցա յուղղութիւն Ա՛Ե՛ գծին, որ կայ ուղղորդ ի վերայ Գ՛Ի՛Թ՛ երեսաց, ի միմեանց վերայ անկանիցին: Դարձեալ որովհետեւ ընդ կէտն Ե՛ ի Գ՛Ի՛Թ՛ երեսաց միոյ եւեթ հաւասար հեռաւոր գծի ձգել հնար է, ուրեմն ուղղանկիւնքն Ե՛Է՛ եւ Լ՛Մ՛ ի միոյ Ն՛Ե՛Է՛ երեսաց վերայ գտանին: Արդ իբրեւ երեսք Բ՛Է՛ եւ Ի՛Ն՛ ուղղանկեանցն երկայնիցին, ի Պ՛Ռ՛ ուղիղ գծի զմիմեանս հատանեն, աստանօր ելանիցէ երրորդ ուղղանկիւն երկայնաձեւ

խորանարդ Ա՛Ռ՛։ *Իսկ որովհետեւ երկոքին երկայնաձեւ խորանարդքն* Ա՛Ն՛ *եւ* Ա՛Ռ՛ *զնոյն հաւասար խարիսխ* Ա՛Մ՛ *ունին, ուրեմն (ըստ* Ա.),

Ա՛Ն՛ : Ա՛Ռ՛ = Ա՛Թ՛ : Ա՛Բ՛,

եւ քանզի Ա՛Ռ՛ *եւ* Ա՛Է՛ *երկայնաձեւ խորանարդացս նոյն* Ա՛Զ՛ *խարիսխ է, ուրեմն*

Ա՛Ռ՛ : Ա՛Է՛ = Ա՛Ի՛ : Ա՛Դ՛։

Իբրեւ զերկոսին համեմատութիւնսն ընդ միմեանս յօդիցեմք, ելանէ

Ա՛Ն՛ : Ա՛Է՛ = Ա՛Թ՛ × Ա՛Ի՛ : Ա՛Բ՛ × Ա՛Դ՛։

Իսկ արդ է ըստ Հ. 178,

Ա՛Ժ՛ : Ա՛Գ՛ = Ա՛Թ՛ · Ա՛Ի՛ : Ա՛Բ՛ · Ա՛Դ՛,

ուրեմն

Ա՛Ն՛ : Ա՛Է՛ = Ա՛Ժ՛ : Ա՛Գ՛։

Ա. *Ապա ուրեմն առ հասարակ երկու ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդք* Ա՛Ն՛ (*Ձեւ* 182) *եւ* ԲԼ (*Ձեւ* 181.) *յօդուածոյ համեմատութեամբ խարըսխացն եւ բարձրութեանց նոցին ընդ միմեանս համեմատին։*

Քանզի իբրեւ ԲԶ = Ա՛Է՛ *առնիցեմք եւ ընդ* Զ *կէտն երեսս ինչ* ԶԸ *հաստատիցեմք, որ հաւասար հեռաւոր իցէ ի* ԲԴ *խարսխէն, յայնժամ, որովհետեւ* Ա՛Ն՛ *եւ* ԲԸ *երկայնաձեւ խորանարդքն զնոյն բարձրութիւն ունին, նմին իրի.*

Ա՛Ն՛ : ԲԸ = Ա՛Ժ՛ : ԲԴ, *եւ*

ԲԸ : ԲԼ = ԲԶ : ԲԺ = Ա՛Ե՛ : ԲԺ,

քանզի ԲԸ *եւ* ԲԼ *երկայնաձեւ խորանարդաց նոյն խարիսխ է։ Իբրեւ ընդ միմեանս յօդիցին համեմատութիւնքս, գտանիցեմք եթէ*

Ա՛Ն՛ : ԲԼ = Ա՛Ժ՛ · Ա՛Ե՛ : ԲԴ · ԲԺ։

Բ. Որովհետեւ ուղղանկիւնն Ա՛Ժ՛ = Ա՛Թ՛ · Ա՛Ի՛, եւ ուղղանկիւնն ԲԴ = ԱԲ · ԲԴ, ուրեմն փոխանակելով

Ա՛Ն՛ : ԲԼ = Ա՛Թ՛ · Ա՛Ի՛ · Ա՛Ե՛ : ԱԲ · ԲԴ · ԲԺ,

այս ինքն, երկու ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդք համեմատին ընդ միմեանս, որպէս զարդիւնս երից կողից որ ի միում անկեան մարմնոյ միմեանց պատահեն, կամ համեմատին ընդ միմեանս յօդուածոյ համեմատութեամբ երից չափմանց իւրեանց։

276. Խնդիր։ Գտանել զտարածութիւն մարմնոյ ուղղանկիւն ԱԷ (Ձեւ 183.) երկայնաձեւ խորանարդի։

Լուծումն։ Քանզի քանիօնութիւն ինչ, ի ձեռն այլոյ համազգի քանիօնութեան չափել կարէ· աստատին յայտ է, եթէ պարտ եւ պատշաճ է մեզ զմարմին մի իբրեւ միութիւն հաստատուն դնել վասն զայլ մարմինս ընդ նմա համեմատելոյ, քանզի եւ խորանարդ տարածութեան ի վերայ հասանիցեմք յորժամ տեսանիցեմք զհամեմատութիւնն որ գտանիցի ի մէջ մարմնոյն եւ միութիւն համարեալ մարմնոյն։ Այս միութիւն է խորանարդ մարմին ինչ ― կանգնեալ ի վերայ միութեան երեսաց, եւ որոյ երեք չափմունքն են մի միութիւն գծի։

Արդ որովհետեւ ըստ Հ. 275. Բ. է

ԱԷ : աէ = ԱԲ · ԱԴ · ԱԵ : աբ · ադ · աե,

կամ

ԱԷ : աէ = ԱԲ · ԱԴ · ԱԵ : 1,
քանզի աբ = ադ = աե = 1, ուրեմն
ԱԷ = ԱԲ · ԱԴ · ԱԵ · աէ,

այս ինքն է ԱԷ երկայնաձեւ խորանարդն այնչափ ինչ զաէ խորանարդ միութիւն յինքեան բովանդա-

կէ, որչափ ինչ միութիւնք յարդիւնս երից չափմանց երկայնաձեւ խորանարդին (որ նովին միութեամբ գծի դրոշմեալ իցէ, եւ թուովք յայտ արարեալ զմտաւ ածիցի) գտանիցի։

Իբրեւ զխորանարդ միութիւնն —է = 1 դնիցեմք, յայնժամ լինիցի ԱԷ = ԱԲ · ԱԴ · ԱԵ, այս ինքն, Տարածութիւն ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդի գտանի, եթէ ոք զերիս կողս որ ի միում անկեան մարմնոյ միմեանց պատահիցեն, միմեամբք բազմացուցանիցէ։

Ա. Որովհետեւ ԱԲ · ԱԴ = ԱԳ, ուրեմն ԱԷ = ԱԳ · ԱԵ = ԱԲԳԴ · ԱԵ, այս ինքն Տարածութիւն մարմնոյ ուղղանկիւն երկայնաձեւ խորանարդի գտանի, եթէ ոք զխարիսխն բարձրութեամբն բազմացուցանիցէ։

Բ. Եթէ իցէ ԱԲ = ԱԴ, յայնժամ ԱԷ = $\overline{\text{ԱԲ}}^2$ · ԱԵ, եւ եթէ ԱԵ եւս = ԱԲ, յայնժամ ԱԷ = $\overline{\text{ԱԲ}}^3$. այս ինքն խորանարդ տարածութիւն խորանարդին, հաւասար է երրորդ կարողութեան միոյ կողման (որ թուովք իցէ յայտ արարեալ)։

Վասն սոցին իսկ պատճառաց, եղեւ ոմանց յուսողաց, ի համարողութեան զերրորդ կարողութիւնն խորանարդ անուանել (Տես Նշ. Համ. Հ. 244.)։

Գ. Ըստ Հ. 274. Բ, ամենայն երկայնաձեւ խորանարդ հաւասար է ուղղանկիւն ինչ երկայնաձեւ խորանարդի, որոյ հաւասար խարիսխ եւ նոյն բարձրութիւն իցէ ընդ նմա. ապա ուրեմն խորանարդ տարածութիւն ամենայն երկայնաձեւ խորանարդի գտանի, եթէ ոք զխարիսխն բարձրութեամբն բազմացուցանիցէ։

277. Խնդիր։ Զխորանարդ տարածութիւն երեքկողմեան սղոցածի հաշուել։

Լուծումն։ Ըստ 258 համարոյ, Ամենայն երկայնաձեւ խորանարդ հատարակի ի ձեռն կտրուածոյ

անկիւնագծի, ուրեմն եւ խոտորնակի եւս ամենայն երեքկողմեան սղոցած ԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 180.) է կէս ԱԸ երկայնաձեւ խորանարդի որոյ հաւասար բարձրութիւն է ընդ նմա, եւ խարիսխ երկպատիկ մեծ քան զխարիսխն սղոցածի: Արդ եթէ զհաստարակաց բարձրութիւնն բ քանիօնութեամբ նշանակիցեմք, յայնժամ լինիցի ԱԸ = ԱԷ · բ, (Հ. 276. Գ.), ուստի եւ ԱԲԳԴԵԶ = ½ ԱԸ = ½ · ԱԷ · բ = ΔԱԲԳ · բ, այս ինքն, Տարածութիւն մարմնոյ երեքկողմեան սղոցածի գտանի, եթէ ոք զխարիսխն բարձրութեամբն բազմացուցանիցէ:

Ա. Որովհետեւ ամենայն բազմակողմեան սղոցած ԱԸ (Ձեւ 176.) կարէ ի ձեւն կտրուածոց անկիւնագծի, բովանդակ յերեքկողմեան սղոցածս բաժանել, որոց հաստարակաց բ բարձրութիւն իցէ, ուրեմն յայնժամ լինիցի ԱԲԳԶԷԸ = ΔԱԲԳ · բ, ԱԳԴԶԸԹ = ΔԱԳԴ · բ, եւ ԱԴԵԶԹԺ = ΔԱԴԵ · բ, ուստի եւ ԱԲԳԶԷԸ + ԱԳԴԶԸԹ + ԱԴԵԶԹԺ = (ΔԱԲԳ + ΔԱԳԴ + ΔԱԴԵ) բ, այս ինքն է, Տարածութիւն մարմնոյ ամենայն սղոցածից գտանի, եթէ ոք զխարիսխն բարձրութեամբն բազմացուցանիցէ:

Բ. Իբրեւ զխորանարդ տարածութիւնս երկուց սղոցածից Պ եւ պ եւ զխարիսխն Խ եւ խ, եւ զբարձրութիւնսն Բ եւ բ նշանագրովք նշանակիցեմք, յայնժամ Պ = ԽԲ, եւ պ = խբ, ուստի եւ

ա). Պ : պ = ԽԲ : խբ,

այս ինքն, Երկու սղոցածք համեմատին ընդ միմեանս յօդուածոյ համեմատութեամբ խարսխացն եւ բարձրութեանց:

բ). Եթէ Պ = պ իցէ, յայնժամ ԽԲ = խբ, ուստի
եւ Խ : խ = բ : Բ,

այս ինքն, ի հաւասար սղոցածս բարձրութիւնք ընդ խարսխացն խոտորնակս համեմատին:

գ). Եթէ Խ : խ = բ : Բ, յայնժամ ԽԲ = խբ, ուստի Պ = պ, այս ինքն է, Եթէ խարիսխք երկուց սղոցաձից ընդ բարձրութեանցն նոցին խոտորնակս իմն համեմատիցին, յայնժամ եւ երկոքին սղոցաձքն միմեանց հաւասարք են:

դ). Ապա եթէ Խ = խ, յայնժամ

Պ : պ = Բ : բ,

եւ եթէ Բ = բ, յայնժամ

Պ : պ = Խ : խ,

այս ինքն է, Սղոցաձքն որոց հաւասար խարիսխքն իցեն, համեմատին ընդ միմեանս, որպէս բարձրութիւնք նոցա ընդ միմեանս, իսկ սղոցաձքն որոց հաւասար բարձրութիւնքն իցեն, կշռին որպէս խարիսխք նոցա ընդ միմեանս:

ե). Եթէ Բ = բ, եւ Խ = խ իցէ, յայնժամ եւ ԽԲ = խբ, ուստի եւ Պ = պ, այս ինքն, Սղոցաձքն որոց հաւասար իցեն խարիսխքն եւ հաւասար բարձրութիւնքն, միմեանց հաւասարք են:

278. Տարածութիւն մարմնոյ ՍԱԲԳ երեքկողմեան բրգան (Ձեւ. 184.) գտանի, եթէ զարդիւնս խարսխին եւ բարձրութեանն ընդ 3 բաժանիցես:

Ի կէտն ա հասարակեա զկողն ՍԱ, եւ ընդ այն հաստատեա զերեսն աբգ, որ հաւասար հեռաւոր իցէ յԱԲԳ խարսխէն, նոյնպէս հաստատեա զերեսն ադե հաւասար հեռաւոր ի ՍԲԳ երեսաց, այսուհետեւ եւ կողքն ՍԲ, ՍԳ, ԱԲ, ԱԳ, եւ բարձրութիւնն ՍՄ հասարակիցին (Հ. 226.), եւ քանզի բուրգն Սաբգ ≅ բրգ. աԱդե (Հ. 267. բ) ∾ բրգ. ՍԱԲԳ, ուրեմն եւ Δաբգ ≅ ΔԱդե, եւ որովհետեւ ΔԱդե : ΔԱԲԳ = $\overline{\text{Ադ}}^2 : \overline{\text{ԱԳ}}^2 = 1 : 4$, ուրեմն ΔԱդե = $\frac{1}{4}$ ΔԱԲԳ, նոյնպէս եւ Δաբգ = $\frac{1}{4}$ ΔԱԲԳ, կամ եթէ ΔԱԲԳ = Խ դնիցեմք, յայնժամ ΔԱդե = Δաբգ = $\frac{1}{4}$ Խ: Դարձեալ ձգեա դե || ԱԲ, յայնժամ լինիցի Գե = Բե,

ΔԳդէ = $\frac{1}{4}$ ΔԱԲԳ = $\frac{1}{4}$ Խ, ուստի եւ հաւասար հեռաւոր ձեւն Բեդէ = ΔԱԲԳ — ΔԱդէ — Գդէ = Խ — $\frac{1}{4}$ Խ — $\frac{1}{4}$ Խ = $\frac{1}{2}$ Խ:

Ի բաց ի միջոյ բարձեալ զբրգունսն Սաբզ եւ աԱդէ, մնայցէ մարմինն ԲԳդէաբզ: Իսկ արդ որովհետեւ աբ $\parallel$ ԵԲ $\parallel$ դէ, ուրեմն ի միոյ երեսաց վերայ գտանին աբ եւ դէ (Հ. 217. Ա.) ուստի յայտ է եթէ ձեւն աբէդ հաւասար հեռաւոր ձեւ իցէ (Հ. 82.), յորմէ եւ մարմինն Գդէաբզ երեքկողմեան սղոցած, զոր եթէ դ նշանագրով նշանակիցեմք, եւ որոյ բարձրութիւնն = Մմ = $\frac{1}{2}$ ՍՄ = $\frac{1}{2}$ Բ է, լինիցի դ = ΔԳդէ . Մմ (Հ. 277.) = $\frac{1}{4}$ Խ . $\frac{1}{2}$ Բ = $\frac{1}{8}$ Բ. Խ:

Նոյն ի կատարած ունիմք ի ձեռին եւ զերեքկողմեան սղոցածն Բբէադէ, որոյ խարիսխք են երեքանկիւնքն Բբէ եւ ադէ, եւ որոյ երեսք կողմանց են հաւասար հեռաւոր ձեւքն Բա, Բդ եւ աէ:

Կամք են մեզ զսղոցածս = դ' գտնել: Իբրեւ ընդ Բէ ուղիղ գիծն՝ հաստատիցեմք զԲդ երեսս, որ հաւասար հեռաւոր իցէ յաէ երեսաց, եւ երկայնիցեմք զերեսան ադէ, աբզ եւ ԳԲ, ծագէ երկայնաձեւ խորանարդ դը, որոյ խարիսխն Բդ = $\frac{1}{2}$ Խ, եւ որոյ բարձրութիւնն Մմ = $\frac{1}{2}$ Բ: Իսկ արդ որովհետեւ հաւասար հեռաւոր ձեւն Բա իբրեւ կտրուած անկիւնագծի՝ հասարակէ զերկայնաձեւ խորանարդն դը, ուրեմն սղոցածն

դ' = $\frac{1}{2}$ դը = $\frac{1}{2}$. Բդ . Մմ (Հ. 276. Գ.)
= $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ Խ . $\frac{1}{2}$ Բ = $\frac{1}{8}$ Խ.Բ:

Արդ ուրեմն բուրգնն, զորմէ են բանքս,

ա). ՍԱԲԳ = բրգ. Սաբզ + բուրգն աԱդէ + դ + դ' =
2 բուրգն Սաբզ + դ + դ' =
2 բուրգն Սաբզ + $\frac{2}{8}$ Խ . Բ =
2 բուրգն Սաբզ + $\frac{1}{4}$ Խ . Բ:

Արդ դիցուք գրեսցուք, եթէ երեքկողմեան բուրգնս

ՍԱԲԳ իցէ որ զինչ եւ իցէ մասն, զոր օրինակ $\frac{1}{\text{ն}}$ մասն իրիք (Պ) սղոցածի որոյ ընդ նմա հաւասար խարիսխ (Խ), եւ հաւասար բարձրութիւն (Բ) իցէ, յանձնէ իսկ յայտ է, եթէ (քանզի բուրգն Սաբգ ∾ ՍԱԲԳ) բուրգն Սաբգ նոյնչափ իսկ մասն իցէ այլոյ (Պ′) սղոցածի, որոյ խարիսխն = աբգ, եւ բարձրութիւնն = Սմ: Ուստի եւ եթէ դնիցեմք,

$$\text{բ). ՍԱԲԳ} = \frac{1}{\text{ն}} \cdot \text{Պ} = \frac{1}{\text{ն}} \cdot \text{Խ} \cdot \text{Բ},$$ հարկ է զի իցէ

եւ

$$\text{Սաբգ} = \frac{1}{\text{ն}} \cdot \text{Պ}' = \frac{1}{\text{ն}} \cdot \Delta\text{աբգ} \cdot \text{Սմ} = \frac{1}{\text{ն}} \cdot \tfrac{1}{4}\text{Խ} \cdot \tfrac{1}{2}\text{Բ} = \frac{1}{8\text{ն}} \cdot \text{Խ} \cdot \text{Բ} :$$

Իբրեւ զնշանակութիւնս զայսոսիկ փոխանակիցեմք յա հաւասարութեան, գտանիցեմք եթէ

$$\frac{1}{\text{ն}} \cdot \text{Խ} \cdot \text{Բ} = 2\,\frac{1}{8\text{ն}}\text{Խ} \cdot \text{Բ} + \tfrac{1}{4}\text{Խ} \cdot \text{Բ}$$

կամ

$$\frac{1}{\text{ն}} = \frac{1}{4\text{ն}} + \frac{1}{4},$$ յորմէ $4 = 1 + \text{ն}$,

զորոյ զհետ գայ եթէ

$$\text{ն} = 3 :$$

Իբրեւ զնշանակութիւնս զայս դնիցեմք ի բ, ծագէ

$$\text{ՍԱԲԳ} = \tfrac{1}{3}\text{Խ} \cdot \text{Բ} = \frac{\text{Խ} \cdot \text{Բ}}{3} :$$

Ա. Ապա ուրեմն ամենայն երեքկողմեան բուրգն, է երրորդ մասն միոյ սղոցածի որոյ հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն իցէ ընդ նմա:

Բ. Ամենայն բազմակողման բուրգն ՍԱԲԳԴԵ (Ձեւ 174.) կարէ բովանդակ յերեքկողման բրգունս, որոց նոյն բարձրութիւն իցէ, կտորել, եթէ ընդ ԱԳ եւ ԱԴ անկիւնագիծս խարսխին եւ ընդ Ս գագաթն երեսս հատանիցեմք: Արդ եթէ զբարձրութիւն բովանդակ բրգանն $=$ Բ դնիցեմք, յայնժամ

$$\text{բուրգն ՍԱԲԳ} = \tfrac{1}{3} \cdot \Delta\text{ԱԲԳ} \cdot \text{Բ},$$
$$\text{բուրգն ՍԱԳԴ} = \tfrac{1}{3} \cdot \Delta\text{ԱԳԴ} \cdot \text{Բ},$$
$$\text{բուրգն ՍԱԴԵ} = \tfrac{1}{3} \cdot \Delta\text{ԱԴԵ} \cdot \text{Բ},$$

ուստի եւ յաւելլով,

$$\text{բուրգնն ՍԱԲԳԴԵ} = \text{ՍԱԲԳ} + \text{ՍԱԳԴ} + \text{ՍԱԴԵ} + \cdots =$$
$$= \tfrac{1}{3}\Delta\text{ԱԲԳ} \cdot \text{Բ} + \tfrac{1}{3}\Delta\text{ԱԳԴ} \cdot \text{Բ} + \tfrac{1}{3}\Delta\text{ԱԴԵ} \cdot \text{Բ} + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{3}(\Delta\text{ԱԲԳ} + \Delta\text{ԱԳԴ} + \Delta\text{ԱԴԵ} + \cdots)\,\text{Բ}$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot \text{ԱԲԳԴԵ} \cdot \text{Բ},$$

Ապա ուրեմն, Տարածութիւն մարմնոյ ամենայն բրգանց գտանի, եթէ ոք զարդիւնս խարսխին եւ բարձրութեանն ընդ 3 բաժանիցէ:

Գ. Ապա ուրեմն եւ ամենայն բուրգն երրորդ մասն է իրիք սղոցածի, որոյ ընդ նմա հաւասար խարիսխ իցէ եւ հաւասար բարձրութիւն:

Դ. Արդ զտարածութիւնս մարմնոյ երկուց բրգանց նշանակեսցուք Պ եւ պ, զխարիսխսն Խ եւ խ, եւ զբարձրութիւնսն Բ եւ բ նշանագրովք, յայտ է եթէ

$$\text{Պ} = \tfrac{1}{3}\text{Խ} \cdot \text{Բ}, \quad \text{եւ} \quad \text{պ} = \tfrac{1}{3}\text{խ} \cdot \text{բ},$$

յորմէ

$$\text{ա).} \quad \text{Պ} : \text{պ} = \text{Խ} \cdot \text{Բ} : \text{խ} \cdot \text{բ},$$

այս ինքն է Երկու բրգունք համեմատին ընդ միմեանս յօդուածոյ համեմատութեամբ խարսխացն եւ բարձրութեանց:

բ). Եթէ $\text{Պ} = \text{պ}$ իցէ, յայնժամ $\text{Խ}\cdot\text{Բ} = \text{խ}\cdot\text{բ}$, ուստի

ուստի եւ

Խ : խ = բ : Բ,

այս ինքն է ի հաւասար բրգունս խարիսխքն ընդ բարձրութեանցն խոտորնակս իւ̃ն համեմատին:

գ). Եթէ Խ.Բ = խ.բ, ուստի եւ Խ : խ = բ : Բ, յայնժամ եւ

Պ = պ,

այս ինքն Եթէ խարիսխք երկուց բրգանց ընդ բարձրութեանցն խոտորնակս համեմատիցին, յայնժամ երկոքին բրգունքն միմեանց հաւասարք են:

դ). Ապա եթէ Խ = խ իցէ, յայնժամ

Պ : պ = Բ : բ, իսկ եթէ Բ = բ, յայնժամ
Պ : պ = Խ : խ,

այս է, Բրգունքն՝ որոց հաւասար խարիսխք իցեն համեմատին ընդ միմեանս, որպէս բարձրութիւնք նոցա ընդ միմեանս, եւ խոտորնակս, Բրգունքն՝ որոց հաւասար բարձրութիւն իցէ համեմատին ընդ միմեանս որպէս խարիսխք նոցա ընդ միմեանս:

ե). Իսկ եթէ Խ = խ, եւ Բ = բ, յայնժամ

Խ.Բ = խ.բ, ուստի եւ Պ = պ.

այս ինքն, Երկու բրգունք, որոց հաւասար խարիսխք իցեն եւ հաւասար բարձրութիւնք, միմեանց հաւասարք են:

279. Խնդիր: Զտարածութիւն մարմնոյ գլխատեալ բրգան հաշուել, ծանուցեալ զերկոսին հաւասար հեռաւոր խարիսխսն եւ զբարձրութիւն կոճեղն:

Լուծումն: Եթէ զտարածութիւն մարմնոյ ՍԱԲԳ բրգան (Ձեւ 184.) նշանակեսցուք Տ նշանագրով, եւ զտարածութիւն Սաբգ բրգան տ նշանագրով, եւ Տ — տ = Կ դիցուք, զստորին խարիսխն

$\text{ԱԲԳ} = \text{Խ}$, *եւ զվերինն* $\text{աբգ} = \text{ի}$, *զբարձրութիւնն* $\text{Մճ} = \text{ք}$, *եւ* $\text{ՍՄ} = \text{ւ}$, *ուստի եւ*

$$\text{Սճ} = \text{ՍՄ} - \text{Մճ} = \text{ւ} - \text{ք}.$$

աստանօրէն յայտ է եթէ

$$\text{Տ} = \tfrac{1}{3} \cdot \text{Խ}\cdot\text{ւ},\ \text{տ} = \tfrac{1}{3}\text{ի}\,(\text{ւ} - \text{ք}),$$

ուստի եւ ա) $\text{Տ} - \text{տ} = \text{Կ} = \tfrac{1}{3}\text{Խ}\cdot\text{ւ} - \tfrac{1}{3}\text{ի}\,(\text{ւ} - \text{ք})$,

$$= \tfrac{1}{3}\text{Խ}\cdot\text{ւ} - \tfrac{1}{3}\text{ի}\cdot\text{ւ} + \tfrac{1}{3}\text{ի}\cdot\text{ք}$$
$$= \tfrac{1}{3}(\text{Խ} - \text{ի})\,\text{ւ} + \tfrac{1}{3}\text{ի}\cdot\text{ք} \cdots$$

Իսկ *արդ ըստ* **226** *համարոյ է*

$$\Delta\text{ԱԲԳ} : \Delta\text{աբգ} = \overline{\text{ՍՄ}}^2 : \overline{\text{Սճ}}^2,\ \textit{կամ}$$
$$\text{Խ} : \text{ի} = \text{ւ}^2 : (\text{ւ} - \text{ք})^2,$$

ուստի

$$(\text{ւ} - \text{ք})^2\,\text{Խ} = \text{ի}\,\text{ւ}^2,\ \textit{կամ}\ (\text{ւ} - \text{ք})\sqrt{\text{Խ}} = \text{ւ}\sqrt{\text{ի}},$$
$$\text{ւ}\sqrt{\text{Խ}} - \text{ք}\sqrt{\text{Խ}} = \text{ւ}\sqrt{\text{ի}},$$

յորմէ

$$\text{ւ} = \frac{\text{ք}\sqrt{\text{Խ}}}{\sqrt{\text{Խ}} - \sqrt{\text{ի}}} = \frac{\text{ք}\sqrt{\text{Խ}}\,(\sqrt{\text{Խ}} + \sqrt{\text{ի}})}{\text{Խ} - \text{ի}} =$$
$$\frac{\text{ք}\,(\text{Խ} + \sqrt{[\text{Խ}\cdot\text{ի}]})}{\text{Խ} - \text{ի}},$$

Արդ փոխանակելով զնշանակութիւնս յա, ելանէ

$$\text{Կ} = \tfrac{1}{3}(\text{Խ} - \text{ի})\cdot\frac{\text{ք}\,(\text{Խ} + \sqrt{[\text{Խ}\cdot\text{ի}]})}{\text{Խ} - \text{ի}} + \tfrac{1}{3}\text{ի}\cdot\text{ք} =$$
$$\tfrac{1}{3}\text{ք}\cdot(\text{Խ} + \sqrt{\text{Խ}\cdot\text{ի}} + \text{ի})$$
$$= \tfrac{1}{3}\text{ք}\,(\text{Խ} + \text{ի} + \sqrt{\text{Խ}\cdot\text{ի}}),$$

այս ինքն. Եթէ բուրգն հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն հատանիցի, կոճղն նորա հաւասար է բովանդակութեան երից բրգանց, որոց խարիսխք են՝ երկոքին հաւասար հեռաւոր խարիսխք կոճեղն, եւ միջին երկրաչափական համեմատականն այսոցիկ խաբըսխաց. իսկ բարձրութիւն նոցա՝ է բարձրութիւն կոճեղն:

280. Մարթ է զամենայն երեքկողմեան աղոցած յերկս հաւասար բրգունս կտորել:

Եթէ ընդ Ա, Ե, Գ կէտս (Ձեւ 175.) հարթ երեսս հատանիցեմք, յայնժամ ի բաց հատանիցի երեքկողմեան բուրգն ԵԱԲԳ (զոր դիցուք = Պ), որոյ ընդ ԱԲԳԴԵԶ աղոցածի նոյն խարիսխ ԱԲԳ (= Խ), եւ նոյն բարձրութիւնն (= Բ) է: Յետ զՊ բուրգնն ի բաց ի միջոյ բառնալոյ մնայ, չորեքկողմեան բուրգն ԵԱԳԶԴ, որոյ գագաթն կայ յԵ, եւ որոյ խարիսխ է ԱԳԶԴ հաւասար հեռաւոր ձեւն: Դարձեալ եթէ ընդ ԱԶ անկիւնագիծն եւ ընդ Ե գագաթն երեսս ԱԵԶ հատանիցեմք, բուրգն ԵԱԳԶԴ բաժանիցի յերկուս երեքկողմեան բրգունս ԵԱԴԶ (= Պ′) եւ ԵԱԳԶ (= Պ″), որոց հաւասար խարիսխ է (Հ. 116.) եւ որոց գագաթունքն կան յԵ: Իսկ քանզի յԵ կիտէ միոյ եւեթ ուղղորդ գծի մարթ է ի վերայ ԱԳԶԴ երեսաց անկանել. ուրեմն Պ′ եւ Պ″ բրգանցն նոյն բարձրութիւն է, ուրեմն եւ միմեանց ի գլխովին հաւասարք իցեն (Հ. 278. Դ. Ե.): Եթէ զΔԴԵԶ (= ΔԱԲԳ = Խ) որպէս խարիսխ համարիցիմք Պ′ բրգան յայտ է եթէ գագաթն նորա գտանիցի յԱ, որով եւ ընդ Պ բրգան ունիցի հաւասար խարիսխ, եւ հաւասար բարձրութիւն Բ. ուրեմն է Պ′ = Պ, զորոյ զհետ գայ եթէ Պ = Պ′ = Պ″:

281. Եթէ երեքկողմեան ինչ աղոցած յերեսաց՝ որ ի խարիսխն կոյս միտեալ իցէ՝ հատանիցի, տարածութիւն մարմնոյ այսր կրճատեալ աղոցածի հաւասար է բովանդակութեան երից բրգանց, որոց ընդ աղոցածին հաւասար խարիսխ է, եւ որոց գագաթունքն յանկիւնս մարմնոյ ծուռ կտրուածոյն կան:

Համարեսցուք եթէ ԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 185.) իցէ ծուռ հատեալ աղոցած: Իբրեւ ընդ Բ, Դ եւ Գ կէտսն հատանիցեմք զերեսս ԲԳԴ, յայտ է եթէ ի կրճատեալ աղոցածէն ի բաց հատանիցի բուրգնն

ԴԱԲԳ որոյ ΔԱԲԳ խարիսխ է, եւ գագաթնն կայ ի կէտն Դ: Մնացորդն ԴԲԳԶԵ է չորեքկողմեան բուրգն, որոյ գագաթն կայ ի Դ եւ խարիսխն է ԲԳԶԵ սեղանն: Արդ իբրեւ ընդ ԳԵ անկիւնագիծն եւ ընդ կէտն Դ երեւք ինչ հատանիցին, չորեքկողմեան բուրգն ԴԲԳԶԵ բաժանիցի յերեքկողմեան բուրգն ԴԳԵԶ, որոյ գագաթն ի Դ կայ, եւ խարիսխն է ΔԳԵԶ, եւ յերեքկողմեան բուրգն ԴԲԳԵ, որոյ գագաթն կայ ի Դ, եւ խարիսխն է ΔԲԳԵ:

Եւ արդ ձգեա զուղիղ գիծսն ԱԶ, ԲԶ, եւ ԱԵ: Իբրեւ ընդ միմեանս հարկանիցեն զբրգունսն ԴԳԵԶ եւ ԱԲԳԶ, որոյ գագաթն կայ յԱ, եւ որոյ խարիսխ է ΔԲԳԶ, տեսանիցես եթէ բրգունքս այսոքիկ միմեանց հաւասար իցեն, քանզի հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն է նոցա. որովհետեւ ΔԳԶԵ=ΔԳԶԲ, քանզի ԳԶ || ԲԵ, եւ գագաթունքն Ա եւ Դ ի վերայ նորին ԱԴ ուղիղ գծի գտանին, որ հաւասար հեռաւոր է ի ԲԳԶ խարըսխէն, ուստի եւ հաւասար հեռի են ի խարսխէ անտի: Իսկ արդ որովհետեւ ΔԱԲԳ մարթի որպէս խարիսխ ԱԲԳԶ բրգան համարել, որոյ գագաթն կայ ի Զ, ուրեմն եւ բուրգն ԴԳԶԵ հաւասար է բրգանն ի վերայ ԱԲԳ խարսխին կանգնելոյ, որոյ գագաթն ի Զ գտանի:

Եւ ի կատարած ԴԲԳԵ եւ ԱԲԳԵ բրգանցն ԲԳԵ հասարակաց խարիսխ է, եւ գագաթունքն կան ի Դ եւ յԱ: Իսկ արդ որովհետեւ ԱԴ հաւասար հեռաւոր է ի ԲԳԶԵ երեսաց, յայտ է եթէ ուղղորդ գիծն որ ի Դ եւ յԱ կիտից ի վերայ երեսացն այնոցիկ անկանիցին միմեանց հաւասարք են, ուստի յայտ եւս է թէ երկոցունց բրգանցն այնոցիկ հաւասար իցէ բարձրութիւնն որով եւ միմեանց հաւասարք իցեն (Հ. 278. Դ. ե.), այս ինքն եթէ բուրգնն ԴԲԳԵ հաւասար է ԱԲԳԵ բրգան, զոր մարթ

է մեզ ի վերայ ԱԲԳ խարսխի կանգնեալ համարել, որոյ գագաթն կայ յԵ:

Ապա ըստ ասացելոցս

ԱԲԳԴԵԶ = բրգ·ԱԲԳԴ + բրգ·ԴԵԶԳ + բրգ·ԲԳԵԴ
= բրգ·ԱԲԳԴ + բրգ·ԱԲԳԶ + բրգ·ԱԲԳԵ:

Ա. Եթէ ուղղորդ իցէ սղոցածն, յայնժամ կողմանք ԱԴ, ԲԵ եւ ԳԶ կան ուղղորդ ի վերայ ԱԲԳ խարսխին ուստի

բուրգն ԱԲԳԴ = $\frac{1}{3}\cdot\Delta$ԱԲԳ·ԱԴ,
բուրգն ԱԲԳԵ = $\frac{1}{3}\cdot\Delta$ԱԲԳ·ԲԵ, եւ
բուրգն ԱԲԳԶ = $\frac{1}{3}\cdot\Delta$ԱԲԳ·ԳԶ,

եւ յաւելլով ի միմեանս զերիս հաւասարութիւնն

ԱԲԳԴԵԶ = $\frac{1}{3}\Delta$ԱԲԳ (ԱԴ + ԲԵ + ԳԶ),

այս ինքն, Տարածութիւն մարմնոյ ծուռ հատեալ ուղղորդ երեքկողմեան սղոցածի գտանի, եթէ ըզ զարդիւնս խարսխին եւ երից կողմանցն ընդ 3 բաժանիցէ:

Բ. Օգնականութեամբ օրինացս այսոցիկ մարթ է մեզ զտարածութիւնս մարմնոյ բազում անկարգ մարմնոյն հաշուել:

Համարեսցուք եթէ իցէ մարմին ինչ, զոր օրինակ ԱԲԳԴԵԶ (Ձեւ 186.) յերկոսին խարիսխն ծուռ հատեալ սղոցած, ուստի եւ է ԱԴ ∥ ԲԶ ∥ ԳԵ: Արդ իբրեւ ընդ որ զինչ եւ իցէ ա կէտ ԱԴ կողման ի վերայ երից կողմանցն ուղղորդ ինչ հատանող երեսս աբգ հատանիցեմք, ելանիցեն երկու աբգԱԲԳ եւ աբգԴԵԶ սղոցածք որ ի վերին խարիսխն ծուռ հատեալք են. ուստի եւ

աբգԱԲԳ = $\frac{1}{3}\Delta$աբգ (աԱ + բԲ + գԳ), եւ
աբգԴԵԶ = $\frac{1}{3}\Delta$աբգ (աԴ + բԶ + գԵ), յորմէ

բրգԱԲԳ + բրգԳԴԵԶ = ⅓ Δ·բրգ (ԱԴ + ԲԶ + ԳԵ), այս է

ԱԲԳԴԵԶ = ⅓ Δ·բրգ (ԱԴ + ԲԶ + ԳԵ):

Ապա ուրեմն տարածութիւն մարմնոյ այսր մարմնոյ, գտանի եթէ զերրորդ մասն հատանօղ երեսաց բովանդակութեամբ երից հաւասար հեռաւոր կողիցն բազմացուցանիցես:

Գ. Եթէ հարկ ի վերայ կայցէ զանկարգ մարմին ինչ, որ ոչ պատշաճիցի ի կարգ մարմնոց զորոց ճառեցաք, հաշուել, յայնժամ պարտ եւ պատշաճ է զայն ի բրգունս, յերկայնաձեւ խորանարդս, եւ ի սղոցաձեւս հատանել բաժանել, եւ առանձինն զմասունսն հաշուել. բովանդակութիւն նոցա է տարածութիւն մարմնոյ խնդրելոյն: Իսկ զմարմինն ուռուցեալ, որ բովանդակ ի հարթ երեսաց շուրջ փակեալ իցէ, մարթեմք բովանդակ ի բրգունս կտորել, յորժամ զկէտ մի որ ի միջին կայցէ ընդ ամենայն մարմնոյ անկիւնսն յօդիցեմք եւ ընդ երկուս երկուս գիծս յօդիչս երեսս հատանիցեմք, յորմէ մարմինն յայնչափ ինչ բրգունս կտորիցի, որչափ միանգամ երեսք կողմանց իցեն նորա: Արդ իբրեւ հաշուիցին ամենայն բրգունքն գտանիցի եթէ, Տարածութիւն մարմնոյ ծանուցեալ մարմնոյն հաւասար իցէ վերին երեսաց, որ բազմացուցեալ իցէ երրորդ մասամբ բովանդակութեան բացարձակութեանց երեսաց կողմանց ի գագաթանէ, որ ամենայն բրգանցն հասարակաց իցէ:

Դ. Եթէ մարմին ինչ, չպատշաճիցի ի կարգս մարմնոցն, զորոց անկաւ ճառս, եւ չիցէ հնար, որպէս բազում անգամ պատահէ, զայն կտորել, յայնժամ զխորանարդ տարածութիւն նորին բազմադիմի օրինակաւ մարթ է գտանել, զորոց փիւսիկեան փիլիսոփայութեան անկ է ճառել: Այլ սակայն աստէն ի սմին վայրի զերկուս օրինակսն եւեթ հարկանել ի գրի կամք են մեզ:

Առաջին ։ Առ անօթ ինչ, որոյ ձեւ զոր օրինակ իցէ երկայնաձեւ խորանարդի եւ զորոյ զբաւականութիւնն (capacité) ճշդիւ գտակաւ գիտիցես ։ Դիջիր ի նմա զմարմինն եւ լից զանօթն ջրով, կամ որ զինչ եւ իցէ այլով հեղլի ինչ նիւթով ։ Հան զմարմինն յանօթոյն. այլակերպութիւնն, որ ի մէջ բաւականութեան անօթոյն եւ ծաւալի ջրոյն որ ի ժամանակին յայնմիկ յանօթն գտանիցի, ցուցանիցէ զխորանարդ տարածութիւն մարմնոյն ։

Երկրորդ ։ Կշռելով եւս կարիցեմք զխորանարդ տարածութիւն մարմնոյ գտանել ։ Այս ինքն պարտ է զփոքր ինչ մարմին, որոյ ընդ հաշուելի մարմնոյն նոյն զանգուած իցէ, առնուլ, եւ որոյ ծաւալն զոր օրինակ իցէ մի խորանարդ մատն. ապա կշռել զայն ճիշդ կշռորդաւ, եւ յետ այնորիկ գտանել եւ զկշիռ ծանուցեալ մարմնոյն, եւ կարգել համեմատութիւն այսպիսի, Որպէս կշիռ միութիւն համարեալ մարմնոյն առ կշիռ ծանուցեալ մարմնոյն համեմատիցի, նոյնպէս իմն կշռի մի խորանարդ մատն առ ծաւալ ծանուցեալ մարմնոյն ։

282 . Տարածութիւնք մարմնոյ նման բրգանց համեմատին ընդ միմեանս, որպէս երրորդ կարողութիւնք միաբան չափմանց ։

Համարեսցուք եթէ իցէ տարածութիւն մարմնոյ (Ձեւ 174.), ՍԱԲԳԴԵ բրգան $= \text{Պ}$, իսկ տարածութիւն մարմնոյ նման սաբգդե բրգան $= \text{պ}$, արդ է $\text{Պ} = \frac{1}{3}\,\text{ԱԲԳԴԵ} \cdot \text{ՍՄ}$, եւ $\text{պ} = \frac{1}{3}\,\text{աբգդե} \cdot \text{սմ}$, ուստի եւ $\text{Պ} : \text{պ} = \text{ԱԲԳԴԵ} \cdot \text{ՍՄ} : \text{աբգդե} \cdot \text{սմ}$ ։

Իսկ արդ որովհետեւ վասն նմանութեան երկոցունց բրգանցն եւ $\text{ԱԲԳԴԵ} \sim \text{աբգդե}$, ուրեմն
$\text{ԱԲԳԴԵ} : \text{աբգդե} = \overline{\text{ԱԲ}}^2 : \overline{\text{աբ}}^2 = \overline{\text{ԲԳ}}^2 : \overline{\text{բգ}}^2 = \ldots$
եւ իբրեւ զայս ընդ մօտաւոր համեմատութեանս

$$\text{ՍՄ} : \text{սմ} = \text{ՍՄ} : \text{սմ}$$

յօդիցիմք, ելանէ

$ԱԲԳԴԵ \cdot ՍՄ : աբգդե \cdot սմ = \overline{ԱԲ}^2 \cdot ՍՄ : \overline{աբ}^2 \cdot սմ$ · ապա ուրեմն

$$Պ : պ = \overline{ԱԲ}^2 \cdot ՍՄ : \overline{աբ}^2 \cdot սմ :$$

Իսկ $ՍՄ : սմ = ԱՍ : աս$ (Հ. 268. Բ.) $= ԱԲ : աբ = \cdots$ (Հ. 226.), եւ իբրեւ այս՝ համեմատութիւն ընդ մօտաւորս

$$\overline{ԱԲ}^2 : \overline{աբ}^2 = \overline{ԱԲ}^2 : \overline{աբ}^2 \text{ յօդիցի,}$$

ելանէ

$$\overline{ԱԲ}^2 \cdot ՍՄ : \overline{աբ}^2 \cdot սմ = \overline{ԱԲ}^3 : \overline{աբ}^3$$

ուրեմն եւ

$$Պ : պ = \overline{ԱԲ}^3 : \overline{աբ}^3 = \overline{ԲԳ}^3 : \overline{բգ}^3 = \overline{ԱԳ}^3 : \overline{ագ}^3 = \cdots,$$
$$= \overline{ԱՍ}^3 : \overline{աս}^3 = \overline{ԲՍ}^3 : \overline{բս}^3 = \cdots = \overline{ՍՄ}^3 : \overline{սմ}^3.$$

Ասացելոցս զհետ գայ եւ այս:

Համարեսցուք եթէ Մ եւ մ իցեն որ զինչ եւ իցէ երկու նման մարմինք, որք կարգաւ ի նման բրգունս կտորել բաժանել կարիցեն: Արդ դիցուք եթէ Մ ի Պ, Պ′, Պ″,… բրգանց կազմեալ իցէ, իսկ մ ի պ, պ′, պ″,…. բրգանց անտի յօդեալ. առանց յերկուանալոյ է Պ ∾ պ, Պ′ ∾ պ′, Պ″ ∾ պ″, սոյնպէս եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ. եւ եթէ Ա եւ ա երկու միաբան կողք առաջին Պ եւ պ բրգանցն իցեն, յայնժամ ամենայն միաբան կողքն կամ անկիւնագիծք Մ եւ մ նման մարմնոցն Ա : ա հաստատուն կշռութեամբ համեմատին, ուստի եւ ըմերոյ կանոնիս զհետ գայ,

$$Պ : պ = Ա^3 : ա^3$$
$$Պ' : պ' = Ա^3 : ա^3$$
$$Պ'' : պ'' = Ա^3 : ա^3$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{ուստի}$$

$$Պ : պ = Պ' : պ' = Պ'' : պ'' = \cdots = Ա^3 : ա^3$$

յորմէ եւ

$$(\text{Պ}+\text{Պ}'+\text{Պ}''+\cdots):(\text{պ}+\text{պ}'+\text{պ}''+\cdots)=\text{Ա}^3:\text{ա}^3,$$

այս ինքն

$$\text{Մ}:\text{մ}=\text{Ա}^3:\text{ա}^3,$$

Այս ուրեմն առ հասարակ, խորանարդ տարածութիւնք նման մարմնոց համեմատին ընդ միմեանս կշռութեամբ երրորդ կարողութեան միաբան չափմանցն ։

ՀԱՏԱԾ Ե

ՎԱՍՆ ԿԱՐԳԱՒՈՐ ՄԱՐՄՆՈՑ

283. Կարգաւոր կոչի բազմանիստն, եթէ վերին երեսք նորա բովանդակ՝ ի կարգաւոր, հաւասար եւ նման ձեւոց կազմիցի, եւ ամենայն անկիւնքն մարմնոյ ի հաւասար թուոյ հարթ անկեանց, որք զմի եւ զնոյն միութիւն առ միմեանս ունիցին, շուրջ փակեալ իցեն ։

Ա. Որովհետեւ չէ հնար, իւիք մարմնոյ յայնպիսի ինչ ձեւոց, որոց վեց կամ աւելի եւս կողմանք իցեն, շուրջ փակել (Հ. 251. Բ.), նմին իրի երեք ազգք միայն են կարգաւոր մարմնոցն, այս ինքն առաջին ազգ այնոցիկ, որոց վերին երեսքն բովանդակ ի հաւասարակող երեքանկեանց կազմեալ իցեն, երկրորդ ազգ այնպիսեացն, որք ամենեւին ի չորեքկուսեաց փակիցին, եւ ի կատարած երրորդ ազգ, որոց երեսք բովանդակ ի պատշաճական կարգաւոր հնգանկեանց շուրջ պատեալ իցէ ։

Բ. Դարձեալ որովհետեւ առ կազմած միոյ անկեան մարմնոյ գոնեայ երից հարթ անկեանց պէտք են, իսկ մարմնոյ անկիւնքն ի գլխովին ցանգ փոքրագոյն քան զ360° են (Հ. 234.), եւ ի մէջ կարգաւոր բազմանկեանց հաւասարակող երեքանկիւնն

զփոքրագոյն անկիւն ունի ի շրջանակին, աստուստին յայտ է, եթէ ի կարգաւոր մարմինս մի անկիւն մարմնոյ գոնեա = 180° հարկ է լինել, եւ թէ չէ հնար անկեան մարմնոյ ի վեց կամ յաւելի եւս հարթ անկեանց յարդարել:

Գ. Եթէ վերին երեսք կարգաւոր ինչ մարմնոյ բովանդակ ի հաւասարակող երեքանկեանց յօրինիցի, մի մի անկիւնն մարմնոյ կարէ յ 3, 4, 5 հարթ անկեանց կազմել:

1). Եթէ իւրաքանչիւր անկիւնն մարմնոյ կարգաւոր մարմնոյն յերից հարթ անկեանց կազմիցի, յայնժամ (ըստ օրինակի նշանակելոյն զոր ի Հ. 246. Բ. հաստատուն կալաք) Ա = 3ա, եւ եւս Ա = 3Ե, ուստի ա = Ե: Իսկ արդ է Ա = 2կ (Հ. 246.), եւ կ = Ե + ա − 2 (Հ. 249.) = 2Ե − 2 = 2ա − 2, քանզի Ե = ա, ուրեմն եւ 2կ = 4Ե − 4 = 4ա − 4, եւ սովիմբ եւս Ա = 2կ = 3Ե = 4Ե − 4, կամ Ա = 2կ = 3ա = 4ա − 4, յորմէ Ե = ա = 4, եւ կ = 2.4 − 2 = 6 գտանիցի: Արդ յայս դէպս կարգաւոր մարմնոյն են չորք երեսք կողմանց, չորք անկիւնք մարմնոյ եւ վեց կողք: Վասն այսորիկ այս մարմին անուանեալ կոչի Չորեքանիստ, եւ է երեքկողմեան հաւասարակող բուրգն: Յայսմ մարմնի մի մի անկիւն մարմնոյ է = 3.60° = 180°, ուստի եւ բովանդակութիւն ամենայն անկեանց մարմնոյ = 4.180° = 720° (Չեւ 187.):

2). Եթէ իւրաքանչիւր անկիւն կարգաւոր մարմնոյ ի չորից հարթ անկեանց կազմեալ իցէ, յայնժամ Ա = 4ա = 3Ե, ուստի ա = ¾ Ե: Իսկ արդ կ = ա + Ե − 2, եւ 2կ = Ա, ուրեմն եւ Ա = 2ա + 2Ե − 4, յորմէ 4ա = 3Ե = 2ա + 2Ե − 4, յորմէ եւ Ե = 8, ա = 6, եւ կ = 6 + 8 − 2 = 12 եւ Ա = 4.6 = 24 գտանիցի: Ուրեմն այսր կարգաւոր մարմնոյն են 8 երեսք կողմանց վասն որոյ եւ անուանի Ութանիստ, 6 անկիւնք մարմնոյ, 12 կողք, եւ 24

հարթ անկիւնք ։ Յորմէ եւ մարթես իմանալ եթէ յութանիստ մարմնոյ մի մի անկիւն մարմնոյ $= 4 \cdot 60^\circ$, եւ բովանդակութիւն ամենայն մարմնոյ անկեանցն $= 6 \cdot 240^\circ = 1440^\circ$ (Ձեւ 188)։

3)· Եթէ իւրաքանչիւր անկիւն կարգաւոր մարմնոյն ի հինգ հարթ անկեանց կազմեալ իցէ, յայնժամ $Ա = 5ա = 3ե$, ուստի $ա = \frac{3}{5} ե$, եւ քանզի $Ա = 2Կ = 2(ա + ե - 2) = 2ա + 2ե - 4$, ուրեմն եւ $5ա = 2ա + 2ե - 4$, եւ $3ե = 2ա + 2ե - 4$, եւ $3ա = 2ե - 4$, եւ $ե = 2ա - 4$։

Ի յետին երկուց հաւասարութեանց զհետ գայ, եթէ
$3ա = 2(2ա - 4) - 4 = 4ա - 12$, կամ $ա = 12$, եւ վասն այսորիկ $ե = 2 \cdot 12 - 4 = 20$· զորոյ զհետ գայ $Կ = 12 + 20 - 2 = 30$ եւ $Ա = 60$։ Այս մարմին կարգաւոր ի 20 հաւասարակողմ երեքանկեանց շուրջ փակեալ, յորջորջի Քսանանիստ, եւ ունի անկիւնս մարմնոյ 12, կողս 30, եւ հարթ անկիւնս 60։ Իւրաքանչիւր անկիւն մարմնոյ նորա է $= 5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$, ուստի եւ ամենայն մարմնոյ անկեանցն բովանդակութիւն $= 12 \times 300^\circ = 3600$ (Ձեւ 189.)։

Դ· Եթէ կարգաւոր մարմինն բովանդակ ի չորեքկուսեաց կազմեալ իցէ, յայնժամ հարկ է զի իւրաքանչիւր անկիւն մարմնոյ յերից հարթ անկեանց, յորոց մին $= 90^\circ$ է, կազմեալ իցէ։ Իսկ արդ յայսմ մարմնի $Ա = 3ա = 4ե$, եւ քանզի $Ա = 2Կ = 2(ա + ե - 2)$, ուրեմն եւ $3ա = 2ա + 2ե - 4$, եւ $ա = 2ե - 4$, եւ $4ե = 2ա + 2ե - 4$, կամ $ե = ա - 2$։

Ի հաւասարութեանց անտի որ առ ե եւ առ ա կշռին, յառաջ գայ $ե = 2ե - 4 - 2 = 2ե - 6$, ուստի եւ $ե = 6$, եւ $ա = 2 \cdot 6 - 4 = 8$, որով $Կ = 6 + 8 - 2 = 12$, եւ $Ա = 2 \cdot 12 = 24$։ Այս մարմին ի վեց չորեքկուսեաց շուրջ փակեալ, որոյ վասն ասի Վեցանիստ ունի անկիւնս մարմնոյ 8, յորոց մի մի

է = 3·90° = 270°, եւ որոց բովանդակութիւն = 8·270° = 2160°, կողս 12, եւ հարթ անկիւնս 24 (Ձեւ 190)։

Ե. Ի կատարած. եթէ կարգաւոր մարմին ինչ բովանդակ ի հնգանկեանց սահմանեալ իցէ, յայնժամ անկիւնքն մարմնոյ յերից եւեթ հարթ անկեանց կազմել կարեն, քանզի իւրաքանչիւրն = 108° է։ Աստուստ յայտ է եթէ ի մարմնս Ա = 3ա = 5.ե է, եւ վասն Ա = 2կ = 2ա + 2ե − 4 լինելոյ, եւ 3ա = 2ա + 2ե − 4 կամ ա = 2ե − 4, եւ 5.ե = 2ա + 2ե − 4, կամ 3ե = 2ա − 4 է։ Արդ զայսոցիկ զհետ գայ, 3ե = 2 (2ե − 4) − 4 = 4ե − 12, ուրեմն ե = 12, եւ ա = 2·12 − 4 = 20, կ = 12 + 20 − 2 = 30, եւ Ա = 60։ Այս մարմին, որոյ 12 կարգաւոր հնգանկիւն երեսք կողմանց են, որոյ վասն ասի Երկոտասանանիստ, ունի 20 անկիւնս մարմնոյ, 30 կողս, 60 հարթ անկիւնս։ Իւրաքանչիւր անկիւն մարմնոյ է = 3·108° = 324° եւ ամենայն մարմնոյ անկեանցն բովանդակութիւն = 20·324° = 6480° (Ձեւ 191.)։

> Արդ հինգ այս ազգ են կարգաւոր մարմնոց, որ անուանեալ կոչին Պղատոնականք, քանզի Պղատոն իմաստուն ի յունաց, զառաջինն զայսոսիկ առանձինն ինչ իրս նոցա քննեաց։ Ձեւքն 187, 188, 189, 190, 191 առաջի առնեն զկարգ այսց մարմնոց։

284. Խնդիր։ Զվերին երեսս կարգաւոր մարմնոցն հաշուել։

Լուծումն։ Դիցուք գրեսցուք, եթէ երեսք կողմանցն ծանուցեալ կարգաւոր մարմնոյն իցեն կարգաւոր Նկողմեան բազմանկիւնք, յորոց իւրաքանչիւր կողմն իցէ = +, ուստի եւ Շ շրջանակն այսր բազմանկեան = Ն+։ Արդ որովհետեւ շուրջ զամենայն կարգաւոր բազմանկեամբ մարթի բոլորակ ինչ ձգել. զորոյ եթէ զկէս երկակտուրն = ✦ դնիցեմք, յայնժամ ‡ հեռաւորութիւն միոյ կողման բազման-

կեան ի միջոցէ ձեւոյն իցէ $= \sqrt{[\text{փ}^2 - \frac{1}{4}\text{ֆ}^2,]}$ յորմէ եւ տարածութիւն միոյ յերեսաց կողմանցն

$$\text{Ե} = \tfrac{1}{2}\text{Նֆ} \cdot \sqrt{[\text{փ}^2 - \tfrac{1}{4}\text{ֆ}^2]}, \text{ եւ}$$
$$\text{Վ} = \tfrac{1}{2}\text{Թ} \cdot \text{Նֆ}\sqrt{[\text{փ}^2 - \tfrac{1}{4}\text{ֆ}^2]},$$

եթէ զբովանդակ վերին երեսս մարմնոյն Վ նշանագրով, եւ զթիւ համարոյ երեսաց կողմանցն Թ նշանագրաւ յայտ առնել կամիցիմք ։

Ա. Արդ ի չորեքանիստ մարմնի է $\text{Շ} = 3\text{ֆ}$,

$\text{Ե} = \frac{1}{2}\text{Շ} \cdot \text{ǂ} = \frac{1}{2}3 \cdot \text{ֆ} \cdot \frac{\text{ֆ}\sqrt{3}}{6} = \frac{\text{ֆ}^2\sqrt{3}}{4}$ ։ Քանզի ըստ Հ. 168. Բ է $\text{ֆ} = \text{փ}\sqrt{3}$. ուստի $\text{փ} = \frac{\text{ֆ}}{\sqrt{3}}$ ։ Իսկ արդ $\text{ǂ} = \sqrt{[\text{փ}^2 - \frac{1}{4}\text{ֆ}^2]} = \sqrt{\left[\frac{\text{ֆ}^2}{3} - \frac{1}{4}\text{ֆ}^2\right]} = \sqrt{\left[\frac{4\text{ֆ}^2 - 3\text{ֆ}^2}{12}\right]} = \sqrt{\frac{\text{ֆ}^2}{12}} = \frac{\text{ֆ}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ֆ}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\text{ֆ}\sqrt{3}}{6}$ ։ Ուրեմն $\text{Ե} = \frac{1}{2}\text{Շ} \cdot \text{ǂ} = \frac{1}{2}3 \cdot \text{ֆ} \cdot \frac{\text{ֆ}\sqrt{3}}{6} = \frac{\text{ֆ}^2\sqrt{3}}{4}$ ։

$$\text{Վ} = \text{Թ} \cdot \text{Ե} = 4 \cdot \frac{\text{ֆ}^2\sqrt{3}}{4} = \text{ֆ}^2\sqrt{3} \text{ ։}$$

Բ. Յութանիստ մարմինս

$$\text{Շ} = 3\text{ֆ}, \ \text{Ե} = \tfrac{1}{2}\text{Շ} \cdot \text{ǂ} = \frac{\text{ֆ}^2\sqrt{3}}{4}, \text{ եւ}$$

$$\text{Վ} = \text{Թ} \cdot \text{Ե} = 8 \cdot \frac{\text{ֆ}^2\sqrt{3}}{4} = 2\text{ֆ}^2\sqrt{3} \text{ ։}$$

Գ. Ի քսանանիստ մարմինս է

$$\text{Շ} = 3\text{ֆ}, \ \text{Ե} = \frac{\text{ֆ}^2\sqrt{3}}{4}, \text{ իսկ}$$

$$\text{Վ} = 20 \cdot \frac{\text{ֆ}^2\sqrt{3}}{4} = 5\text{ֆ}^2\sqrt{3} \text{ ։}$$

Դ. Ի վեցանիստ մարմնոյ է

$$Ղ = 4ք,\ Ն = ք^2\ (Հ.\ 176.\ Ա.)\ եւ$$
$$Վ = Թ \cdot Ն = 6ք^2$$

Ե. Երկոտասանանիստ մարմնոյ

$$Ղ = 5ք,$$

$Ն = \frac{1}{2} \cdot 5ք \cdot ֆ = \frac{5ք}{2} \cdot \frac{1}{2}ք\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$: Քանզի $ք^2 = \frac{փ^2}{2}(5 - \sqrt{5})$ (Հ. 170. Գ.), յորմէ $փ^2 = \frac{2ք^2}{5 - \sqrt{5}}$.

ուրեմն փոխանակելով $ֆ = \sqrt{(փ^2 - \frac{1}{4}ք^2)} =$

$$\sqrt{\left[\frac{2ք^2}{5-\sqrt{5}} - \frac{1}{4}ք^2\right]} = \sqrt{\left[\frac{8ք^2 - ք^2(5-\sqrt{5})}{4(5-\sqrt{5})}\right]} =$$
$$\sqrt{\left[\frac{ք^2(8 - 5 + \sqrt{5})}{4(5-\sqrt{5})}\right]} = \frac{1}{2}ք\sqrt{\left[\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right]} =$$
$$\frac{1}{2}ք\sqrt{\left[\frac{(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}\right]} =$$
$$\frac{1}{2}ք\sqrt{\left[\frac{15+5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{25-5}\right]} = \frac{1}{2}ք\sqrt{\left[\frac{20+8\sqrt{5}}{20}\right]}$$

$= \frac{1}{2}ք\sqrt{[1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}]}$, ուստի եւ $Ն = \frac{5}{4}ք^2\sqrt{(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})}$
եւ $Վ = Թ \cdot Ն = 12 \cdot \frac{5}{4}ք^2\sqrt{[1 + \frac{2}{3}\sqrt{5}]} =$
$$15ք^2\sqrt{[1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}]}$$

285. Խնդիր: Զխորանարդ տարածութիւն կարգաւոր ինչ մարմնոյ հաշուել:

Լուծումն: Համարեսցուք եթէ իցէ ԱԲԳԴԵԺ (Ձեւ 192.) որ զինչ եւ իցէ կարգաւոր մարմին, եւ Մ միջոց նորին: Արդ իբրեւ գագաթունք Ա, Բ, Գ, Դ, Ե անկեանց ԱԲԳԴԵ երեսաց կողմանցն ընդ Մ կիտի յօդիցին, եւ ածիցեմք եւս զմտաւ, եթէ ընդ երկու երկու ճառագայթս երեսք ինչ հարթ հաստատեալ իցեն, յայտ է եթէ հաւասարաչափ երեքանկիւնքն ԱԲՄ, ԲԳՄ, ԳԴՄ, եւ այլքն եւս մի

ըստ միջէ, միմեանց պատշաճական իցեն, յորոց եւ ԱԲԳԴԵ երեսօք կողմանցն հանդերձ, բուրգն մի հաւասարակող յօրինեալ կազմիցի (Հ. 245.), որոյ խարիսխ իցէ կարգաւոր բազմանկիւն ԱԲԳԴԵ, եւ բարձրութիւն = ՄԽ, այս ինքն, հաւասար կէս երկակորոյ գնդոյն ներքոյ ձգելոյ, զոր եթէ = ճ դնիցեմք, եւ զԱԲԳԴԵ երեսս կողմանցն = Ե, լինիցի խորանարդ տարածութիւն բրգանն ԱԲԳԴԵՄ = $\frac{1}{3}$.Ե.ճ (Հ. 278. Բ.): Իսկ արդ որովհետեւ կարեմք զբովանդակ կարգաւոր անկիւնաւոր մարմինըն յայնչափ ինչ բրգունս կտորել, որչափ ինչ միանգամ երեսք կողմանց իցեն մարմնոյն, եւ ամենայն բրգանցն նոյն ԽՄ բարձրութիւն է, ուրեմն խորանարդ տարածութիւն ամենայն կարգաւոր մարմնոց հաւասար է երրորդ մասին կէս երկակորոյ գնդոյն ներքոյ ձգելոյ, բազմացուցեալ վերին երեսօք մարմնոյն, այս ինքն հասարակաց իմն օրինակաւ Մ = $\frac{1}{3}$ ճ.Վ. եթէ Մ զտարածութիւն մարմնոյն, եւ Վ զվերին երեսսն ցուցանիցէ:

Զատացելոյս զհետ գայ: Որովհետեւ Վ = $\frac{1}{2}$ խ.ն.ք $\sqrt{(փ^2 - \frac{1}{2} ք^2)}$ (Հ. 284.), յորում նշանագիրքն, զնոյն ինչ իրս ցուցանեն, զոր ի նմին համարի յայտ արարին, ուրեմն փոխանակելով

$$Մ = \frac{1}{3} ճ . \frac{1}{2} թ.ն.ք \sqrt{(փ^2 - \frac{1}{4} ք^2)} = \frac{1}{6} թ.ն.ճ.ք \sqrt{(փ^2 - \frac{1}{4} ք^2)} :$$

Իսկ արդ ըստ 252. համարոյ. Ա, Բ, Գ, Դ, Ե,

ի չորեքանիստ մարմնի $Վ = ք^2\sqrt{3}$

ի յութանիստ " $Վ = 2ք^2\sqrt{3}$

ի քսանանիստ " $Վ = 5ք^2\sqrt{3}$

ի վեցանիստ " $Վ = 6ք^2$, եւ

ի յերկոտասանանիստ " $Վ = 15ք^2\sqrt{[1 + \frac{2}{3}\sqrt{5}]}$,

ուրեմն փոխանակելով զզօրութիւնս զայսոսիկ ի հասարակաց օրինակին,

$$\text{Մ} = \tfrac{1}{3}\,\text{ճ} \cdot \text{Վ},$$

ի չորեքանիստ մարմնի $\text{Մ} = \tfrac{1}{3}\,\text{ճ} \cdot +^2\sqrt{3}$,

ի յութանիստ „ $\text{Մ} = \tfrac{1}{3}\,\text{ճ} \cdot 2+^2\sqrt{3} = \tfrac{2}{3}\,\text{ճ}\,+^2\sqrt{3}$,

ի քսանանիստ „ $\text{Մ} = \tfrac{1}{3}\,\text{ճ} \cdot 5+^2\sqrt{3} = \tfrac{5}{3}\,\text{ճ}+^2\sqrt{3}$,

ի վեցանիստ „ $\text{Մ} = \tfrac{1}{3}\,\text{ճ} \cdot 6+^2 = 2\text{ճ}+^2$

յերկոտասանանիստ „ $\text{Մ} = \tfrac{1}{3}\,\text{ճ} \cdot 15+^2\sqrt{[1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}} = 5\text{ճ}+^2\sqrt{[1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}]}$

լինիցի:

ԳԼՈՒԽ Գ

ՑԱՂԱԳՍ ԲՈԼՈՐՇԻ ՄԱՐՄՆՈՑ

ՀԱՏԱԾ Ա

ԳԼԱՆ

286. Եթէ *ուղիղ ինչ գիծ այնպէս իմն յանջրպետութեան ուրեք շարժիցի, որպէս զի ցանգ ընդ կոր ինչ գիծ անցանիցէ, եւ հանապազ ի միջէ հաստատուն ուղիղ գծէ առանց փոփոխելոյ հաւասար հեռաւոր մնայցէ, երեւոյթն՝ որ այսու օրինակաւ գրիցին անուանեալ կոչին Գլանաձեւ: Շարժուն ուղիղ գիծն յորջորջի Ծնանելի, հաստատուն ուղիղ գիծն Առանցք, իսկ կոր գիծն, զոր ըստ կամաց ընտրեցաք, Ուղղիչ:*

Յանձնէ իսկ մարթես իմանալ, եթէ յայսմ վայրի ծնանելին եւ առանցքն, առանց եղերաց զմտաւ ածին:

Քանզի բազում եւ բազմադիմի են կոր գիծք. իսկ ամենայն կոր գիծ կարէ ուղղիչ լինել, աստըստին յայտ է եթէ անթիւ եւ անհամար գլանաձեւ երեւոյթ հնար է լինել, այլ սակայն ամենեցուն իսկ նոցա առ հասարակ այս նշանակ է հասարակաց, զի յերեւացն՝ որ ընդ առանցսն հատանիցին՝ յուղիղ ինչ գծի՝ որ հաւասար հեռի իցէ յառանցից, հատանին, քանզի զամենայն այնպիսի կտրուածս մարթեմք որպէս հաստատուն ինչ դիրս ծնանելոյն համարել: Ամենայն այնպիսի գիծ հատանելոյ ասի կողմն գլանին:

Եթէ ուղղիչն բոլորակ իցէ, յայնժամ ծագէն առանձինն գլանաձեւ երեւոյթն, զորմէ միայն ճառէ խոնարհագոյն երկրաչափութիւն: Արդ զայս առանձին գլանաձեւ երեւս ածցուք զմտաւ, երկոքումբք երեւօք փակեալ, որք հաւասար հեռաւորք իցեն յերեւաց ուղղչին, աստի ելանիցէ անջրպետու-

թիւն ինչ յամենայն կողմանց շուրջ պատեալ պաշարեալ, զոր ճշդիւ Գլան անուանեալ կոչեմք, եւ կամիմք զի այսպէս եւ ուսանելիքն իմանայցեն, յորժամ ի մատենիս զմանէ անկանիցի ճառս:

Կոր երեսք այսր գլանի ասի Երեսք կողմանց, իսկ երկու հաւասար հեռաւոր երեսքն, որք յերեսաց կողմանցն փակիցին, Հաւասար հեռաւոր խարիսխք, բացարձակութիւն երկոցունց խարսխացն Բարձրութիւն գլանի:

Յայնցանէ զորս վասն գլանի ասացաք, մարթես յանձնէ իմանալ եթէ վերին երեսք գլանի հատանի ի հաւասար հեռաւոր ձեւ յորժամ երեսք ինչ ընդ առանցսն հաստատեալ՝ զգլանն հատանիցէ, քանզի կոր երեսքն կողմանց հատանին յերկուս ուղիղ գիծս հաւասար հեռաւորս յառանցից անտի, ուստի եւ ի միմեանց իսկ ի գլխովին հաւասար հեռաւորս. եւ քանզի հաւասար հեռաւորքս այսոքիկ ի մէջ հաւասար հեռաւոր երեսաց կան, ուրեմն եւ միմեանց հաւասարք են, յորմէ եւ յայտ է եթէ եւ գիծքն հատանելոյ հատանող երեսաց եւ երկոցունց խարսխաց հաւասար հեռաւորաց ի գլխովին միմեանց հաւասար, եւ ի միմեանց հաւասար հեռաւոր իցեն. զորոյ զհետ գայ, եթէ կտրուածն այն իցէ հաւասար հեռաւոր ձեւ:

Ապա ուրեմն կողմանք գլանին հաւասար եւ հաւասար հեռաւոր են յառանցից անտի, եւ երկոքին խարիսխքն են երկու հաւասար հեռաւոր եւ պատշաճական երեսք բոլորակի, ընդ որոյ կենդրոնն առանցք գլանին անցանեն:

Արդ եթէ գլան մի ի ձեռն իրիք երեսաց հաւասար հեռաւոր ի խարսխէ անտի հատանիցի, ի հարկէ իսկ կտրուածն այն բոլորակ ինչ է ընդ խարսխին պատշաճական:

Եթէ առանցքն ուղղորդ ի վերայ խարսխին կայցէ, գլանն եւս ասի Ուղղորդ կամ Ուղիղ. իսկ

եթէ ամէն հակառակն դիպիցի, Նոյն: Ի կատարած. Եթէ առանցք ուղղորդ գլանի հաւասար իցէ երկակտրոյ խարսխին, անուանեալ կոչի գլանն Հաւասարակող:

Յամենայն ուղղորդ գլանի կողմն եւ բարձրութիւնն հաւասար է առանցին, քանզի ուղղորդ գիծք են ձգեալք ի մէջ երկուց հաւասար հեռաւորաց: Դարձեալ եւ ամենայն կտրուածք, որ ուղղորդ ի վերայ խարսխին ձգիցին, ուղղանկիւնք են, յառանցից անտի հաւասար հեռաւորք:

287. Խնդիր: Զվերին երեսս ուղղորդ գլանի հաշուել:

Լուծումն: Համարեսցուք եթէ շուրջ զԱԲԷ խարսխաւ (Ձեւ 193.) ԱէՋՄ ուղղորդ գլանի կարգաւոր ինչ բազմանկիւն ԱէԸԲԹԺ Նկողմեան՝ ներքոյ ձգեալ իցէ. եւ ընդ ԳԴ առանցսն եւ ընդ կէտսն Ա, Է, Ը, Բ, Թ, Ժ,.... հարթ երեսք հատատեալ իցեն, յորոց երկոքին խարխսխքն ԱԷԲ, եւ ԵԻԶ յԱԳ եւ ԵԴ, ԷԳ եւ ԻԴ, ԸԳ եւ ԽԴ,... հաւասար հեռաւոր գիծս հատանիցեն, յայնժամ եւ հարթ անկիւնքն, որ ի Գ եւ Դ միջոցս խարսխացն կազմիցին, միմեանց հաւասարք են, այս ինքն անկ. ԱԳԷ = անկ. ԵԴԻ = անկ. ԷԳԸ = անկ. ԻԴԽ, եւ այլքն եւս, եւ եթէ ձգիցեմք զլարսն ԱԷ, ԷԸ, ԸԲ,... եւ զլարսն ԵԻ, ԻԽ, ԽԶ,... յայնժամ, որովհետեւ յերկոսին խարխսխսն կէս երկակտուրքն հաւասարք են միմեանց, եռեքանկիւնքն ԱԳԷ, ԷԳԸ, ԸԳԲ,... պատշաճական իցեն ԵԴԻ, ԻԴԽ, ԽԴԶ,... եռեքանկեանց (Հ. 52.), ուրեմն եւ բովանդակ իսկ բազմանկիւնքն ԵԻԽԶՆՄ եւ ԱԷԸԲԹԺ (Հ. 126.): Արդ իբրեւ ընդ ԱԷ եւ ԵԻ, ԷԸ եւ ԻԽ, ԸԲ եւ ԽԶ,... հաւասար հեռաւոր կողմանսն հարթ երեսս հատանիցեմք, յայտ է եթէ այսուքիկ ընդ ԱԷԲԺ եւ ԵԻԶՄ բազմանկիւնս Նկողմեան ինչ ողոցած յօրինեալ կազմիցեն, որ զծանուցեալ գլանաւ ներքոյ գրեալ է,

եւ որ ուղղորդ եւս է, քանզի գլանն որ արտաքոյ ի գլխովին ուղղորդ է:

Արդ իբրեւ զշրջանակ ԱԷԸԹ խարսխի այսր ողոցածի Շ դնիցեմք եւ զԳԴ առանցս գլանին, որ եւ բարձրութիւն եւս է գլանին եւ ներքոյ ձգեալ ողոցածի, Բ քանիօնութեամբ նշանակիցեմք, յայնժամ բովանդակութիւն ամենայն երեսաց կողմանցն ողոցածի իցէ = Ե = Շ · Բ = (Համ. 259. Ա.) կամ ԹԷ ԱԷ = + ուստի եւ Շ = Ն+ իցէ, լինիցի Ե = Ն+·Բ:

Արդ որչափ ինչ միանգամ մեծ իցէ Ն, կամ որչափ փոքրագոյն լինիցի +, այնչափ Շ մերձենայ ի նշանակութիւն շրջապատի խարսխի գլանին, ուստի եւ այնչափ առաւել փոքրագոյն լինիցի այլակերպութիւնն որ կայ ի միջի կոր վերին երեսաց գլանին եւ բովանդակութեան երեսաց կողմանց ներքոյ ձգեալ ողոցածի, եւ եթէ զՆ յանսահմանս առանց կատարելոյ մեծ դնիցեմք, յայնժամ եւ այլակերպութիւնն իցէ զատարկ, այս ինքն վերին երեսք ներքոյ ձգեալ ողոցածի անկանի ի վերայ վերին երեսաց գլանին: Ապա ուրեմն երեսք կողմանց գլանի հաւասար է շրջապատի իւրոյ խարսխին, բազմացուցեալ կողմամբ կամ առանցիւք գլանին. եւ եթէ ոք ի վերին երեսս՝ այս ինքն ի բովանդակութիւն երեսաց կողմանցն զերկոսին եւս խարիսխսն յաւելուցու, գտանի բովանդակ վերին երեսք գլանին:

Ա. Ապա ուրեմն մարթեմք զգլանն որպէս անբաւ անկիւնաւոր ողոցած համարել:

Բ. Իբրեւ զերեսս կողմանց = Ե, զվերին երեսս = Վ, զկէս երկակտուրն ԱԳ = ճ, զշրջապատն խարսխին շ, իսկ զխարիսխն = խ դնիցեմք, յայնժամ $շ = 2ճշ$, $խ = ճ^2շ$, ուստի եւ $Ե = շ \cdot Բ = 2ճշ \cdot Բ$, $Վ = շԲ + 2խ = 2ճշ \cdot Բ + 2ճ^2շ = 2ճշ (Բ + ճ)$:

Գ. Ի հաւասարակող գլանի $Բ = 2ճ$, ուստի եւ $Ե = 2ճշ \cdot 2ճ = 4ճ^2շ$, եւ $Վ = Ե + 2խ =$

$4ձ^2շ + 2ձ^2շ = 6ձ^2շ$։ Ապա ուրեմն երեւք կողմանց հաւասարակող գլանի, հաւասար է չորեքպատիկ խարսխին, եւ վերին երեւքն վեցպատիկ խարսխի։

Դ․ Երեւք կողմանց գլանի հաւասար է միոյ ուղղանկեան, որոյ ընդ գլանին հաւասար բարձրութիւն է, եւ խարիսխն հաւասար է շրջապատի խարսխի գլանին։

Ապա ուրեմն երեւք կողմանց երկուց գլանաց, որոց նոյն բարձրութիւն իցէ համեմատին ընդ միմեանս, որպէս շրջապատք խարսխաց նոցին, ուստի եւ որպէս կէս երկակտուրքն կամ երկակտուրք խարսխացն։ Իսկ երեւք կողմանց երկուց գլանաց, որոց հաւասար խարիսխ իցէ, կշռին ընդ միմեանս, որպէս բարձրութիւնք նոցա, ուստի եւ որպէս առանցք երկոցունց գլանացն ընդ միմեանս։

Եւ ի կատարած․ Բովանդակ վերին երեւք երկուց հաւասարակող գլանաց համեմատին ընդ միմեանս, զոր օրինակ երկրորդ կարողութիւնք ճառագայթից կամ երկակտրոց խարսխաց նոցին ընդ միմեանս կշռիցին։

Ե․ Եթէ երեւք կողմանց երկուց գլանաց հաւասար իցեն, յայնժամ բարձրութիւնք գլանացն այնոցիկ խոտորնակս իմն ընդ շրջապատաց խարսխացն, որով եւ խոտորնակս ընդ ճառագայթից կամ երկակտրոցն համեմատին։

288․ Խնդիր։ Զվերին երեսս փորեալ ուղղորդ գլանի հաշուել։

Լուծումն։ Համարեսցուք եթէ գլանն (Չեւ 194․) փորեալ իցէ, եւ դիցուք եթէ ԱԳ $=$ ձ, ԲԳ $=$ ճ եւ ԱԶ $=$ ԲԷ $=$ Բ իցէ, յայտ է եթէ երեւք կողմանց բովանդակ գլանին իցէ $= 2ձշԲ$ (Հ․ 287․)․ իսկ օղաձեւ խարիսխն $= (ձ^2 - ճ^2)շ$, արտաքին երեւք փորեալ գլանին $= 2ձշ \cdot Բ + 2\,(ձ^2 - ճ^2)\,շ$, յոր եթէ զներքին կոր երեսս փորեալ գլանին յաւելուցումք կամ թէ զերեսս կողմանց ի բաց հանեալ

գլանին որ է $= 2ճշ \cdot Բ$, ելանիցեն վերին երեւքն փորեալ գլանին $= 2Ճշ \cdot Բ + 2ճշ \cdot Բ + 2(Ճ^2 - ճ^2)շ =$ $2շ \cdot Բ(Ճ + ճ) + 2(Ճ^2 - ճ^2)շ = 2շ(Ճ + ճ)(Բ + Ճ - ճ)$։

289. Խնդիր։ Զխորանարդ տարածութիւն գլանի հաշուել։

Լուծումն։ Որովհետեւ կարեմք զգլանն յանտահմանս անկիւնաւոր աղօյած համարել (Հ. 287. Ա.), ուրեմն տարածութիւն մարմնոյ գլանին գտանիցի, եթէ ոք զխարիսխն բարձրութեամբն բազմացուցանիցէ։ Արդ զխարիսխն դիցուք $= Խ$, զբարձրութիւնն $= Բ$, զկէս երկակտուրն խարսխին $= Ճ$, տարածութիւն մարմնոյ գլանին է $Գ = Խ \cdot Բ = Ճ^2 շ \cdot Բ$։

Ա. Ի հաւասարակող գլանի է $Բ = 2Ճ$, ուրեմն $Գ = 2Ճ^3 շ$։

Բ. Արդ եթէ զտարածութիւն մարմնոյ փորեալ ուղղորդ գլանի (Ձեւ 194.) առաջի կայցէ գտանել, պարտ եւ պատշաճ է ի Գ տարածութենէ մարմնոյ ԱԵԴԹԺԶ բովանդակ գլանին զֆ տարածութիւն մարմնոյ ԲԻԸԷ ի բաց հանեալ գլանին հանել, Մ մնացորդն է տարածութիւն մարմնոյ փորեալ գլանին։ Արդ՝ եթէ զօրինակ նշանակելոյ 289 համարոյն հաստատուն պահիցեմք, իցէ $Գ = Ճ^2 շԲ$, $ֆ = ճ^2 շԲ$, ուստի եւ $Մ = Գ - ֆ = Ճ^2 շԲ - ճ^2 շԲ = (Ճ^2 - ճ^2) շԲ$։ Ապա ուրեմն, Տարածութիւն մարմնոյ փորեալ գլանի գտանի, եթէ ոք զեւր օղաձեւ խարիսխն ընդ բարձրութեանն բազմացուցանիցէ։

Գ. Եթէ Գ եւ ֆ երկու գլանք իցեն, որոց բարձրութիւնք Բ եւ բ, եւ խարիսխքն Խ եւ խ իցեն, նիցի $Գ = Բ \cdot Խ$, եւ $ֆ = խ \cdot բ$, յորմէ $Գ : ֆ = ԽԲ : խբ$։ Այն համեմատութիւնս գտանի եթէ Գ եւ ֆ զերեսս կողմանց երկուց ուղիղ գլանաց, Խ եւ խ կշրջապատս խարսխացն նշանակեալ յայտ առնիցեն։ Յանձնէ իսկ յայտ է եթէ աստատին վասն գլանաց եւ երեսաց կողմանց ուղղորդ գլանաց նոյն ինչ առանձինն իրք, որք զղօղցածից ի Հ. 277. ցուցան, գտանիցին։

290. Երկու գլանք ԱԽԲԴ եւ ախբդ (Ձեւ. 195.) ասին նման միմեանց, եթէ առանցք նոցա համեմատականք իցեն երկակտրոց խարսխաց նոցին, եւ զնոյն միտութիւն առ խարիսխս ունիցին: Այս ինքն եթէ ձգիցեմք ՄՊ ուղղորդ ի վերայ ԱԽԲ խարսխին եւ մպ ուղղորդ ի վերայ ախբ խարսխին եւ ընդ Պ եւ պ կէտս զերկակտուրսն ԱԲ եւ աբ, յայնժամ անկիւնքն ՄԿՊ եւ մկպ իցեն անկիւնք միտութեան ՄԿ եւ մկ առանցից առ ԱԽԲ եւ ախբ խարիսխս: Արդ եթէ է ԿՄ : կմ = ԱԲ : աբ, եւ անկ. ԲԿՄ = անկ. բկմ, յայնժամ գլանն ԱԽԲԴ ∾ գլ. ախբդ:

Ա. Ապա ուրեմն եւս եւ է ԿՄ : կմ = ՄՊ : մպ = ԱԴ : ադ = ԱԲ : աբ, այս ինքն, Առանցքն, ուստի եւ կողմանքն եւ երկակտուրք խարսխացն նման գլանաց ընդ բարձրութիւնսն համեմատականք են:

Բ. Ուրեմն ամենայն հաւասարակող գլանք միմեանց նման են:

Գ. Հասարակաց իմն օրինակաւ է Գ : գ = ԽԲ : խբ = Ճ²ՀԲ : ճ²Հբ = Ճ²Բ : ճ²բ: Արդ եթէ Գ ∾ գ, յայնժամ

$$\text{ՄՊ} : \text{մպ} = \text{ԿՄ} : \text{կմ} = \text{ԱԲ} : \text{աբ} \ (\text{ըստ Ա.}),$$

ուրեմն եւ

$$\overline{\text{ՄՊ}}^3 : \overline{\text{մպ}}^3 = \overline{\text{ԿՄ}}^3 : \overline{\text{կմ}}^3 = \overline{\text{ԱԲ}}^3 : \overline{\text{աբ}}^3 = \overline{\text{ԱԿ}}^3 : \overline{\text{ակ}}^3 :$$

Արդ որովհետեւ

$$\begin{array}{l} \text{Ճ}^2 : \text{ճ}^2 = \text{Ճ}^2 : \text{ճ}^2 \ \text{եւ} \\ \underline{\text{Բ} : \text{բ} = \text{Ճ} : \text{ճ}, \ \text{ուրեմն եւ}} \\ \text{Ճ}^2\text{Բ} : \text{ճ}^2\text{բ} = \text{Ճ}^3 : \text{ճ}^3 = \text{Բ}^3 : \text{բ}^3 = \overline{\text{ԿՄ}}^3 : \overline{\text{կմ}}^3 . \end{array}$$

յորմէ եւ $\text{Գ} : \text{գ} = \text{Ճ}^3 : \text{ճ}^3 = \text{Բ}^3 : \text{բ}^3 = \overline{\text{ԿՄ}}^3 : \overline{\text{կմ}}^3 = \ldots.$ այս ինքն, Խորանարդ տարածութիւնք նման գլանաց ընդ միմեանս համեմատին, որպէս երրորդ կարողութիւնք նոցին միաբան չափմանցն ընդ միմեանս:

ՀԱՏԱԾ Բ

ԿՈՆ

291. Եթէ ուղիղ ինչ գիծ առանց եղերաց յանջրպետութեան ուրեք շարժիցի, որպէս զի ընդ մի հաստատուն կէտ, եւ ընդ կէտս կոր ինչ գծի ծանուցելոյ, գնասցէ, անտուստին ծնանին կոր ինչ երեսք, որք կոնաձեւ երեսք ասին: Շարժուն ուղիղ գիծն ասի Ծնանելի, կոր գիծն Ուղղիչ, հաստատուն կէտն Գագաթն կամ Ծայր երեսաց կոնի:

Աստուստին յայտ է, եթէ բազում եւ բազմադիմի կոնաձեւ երեսք կայցեն առանց թուոյ համարոյ, քանզի անթիւ ուղղիչք գտանին, այլ սակայն ամենայն կոնաձեւ երեսաց այս ինչ հասարակաց յատարար նշանակ է, զի ամենայն հարթ երեսք որ ընդ գագաթն եւ ընդ որ զինչեւ իցէ կէտ ուղղչին հատանիցի, զկոնն յուղիղ ինչ գծի հատանեն, քանզի այնպիսի կտրուածք հաստատուն ինչ գիծք են ուղղչին: Այնպիսի գիծ հատանելոյ ասի Կողմն երեսաց կոնի:

Քանզի կարեմք զծնանելին արտաքոյ քան զգագաթն առանց կատարածի երկայնեալ համարել, աստուստին յայտ է, եթէ յամենայն նուագի ծնանելին գրէ երկուս կոնաձեւ երեսս՝ որ ի գագաթան միմեանց ընդդիմակաց են:

Եթէ ուղղիչն բոլորակ ինչ իցէ, յայնժամ առանձինն ծագեն կոնաձեւ երեսքն, զորմէ միայն խոնարհագոյն երկրաչափութեան պատշաճի ճառել, եւ իբրեւ երեսք բոլորակին զանջրպետութիւն ինչ ի միջի փակիցէ ճշգիւ, ասի կոն: Կոնաձեւ երեսքն յայս դէպս ասի Երեսք կողմանց կոնի, իսկ երեսք այնր բոլորակի, Խարիսխ: Ուղիղ գիծն, որ զգագաթնն ընդ կենդրոնի բոլորակին յօդիցէ, ասի Առանցք,

իսկ ուղղորդ գիծն, որ ի գագաթանէ անտի ի վերայ խարսխին անկանիցի է Բարձրութիւն կոնի։ Կոնն առի Ուղղորդ կամ Ուղիղ, յորժամ առանցքն ուղղորդ իցէ ի վերայ խարսխին, իսկ ի հակառակ դէպսն, Ծուռ։ Եթէ կողմն ուղիղ կոնի հաւասար իցէ երկակտրոյ խարսխին, կոչի Կոն հաւասարակող։

Եթէ հատանիցի կոնն յերեսաց ինչ հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն, մասնն՝ որ ի մէջ երկուց հաւասար հեռաւոր խարսխաց գտանիցի, առի Գլխատեալ կամ Կրճատեալ կոն, կամ Կոճղ։

Նմանայն հարթ երեսք, որ ընդ առանցս ուղիղ կոնի հատատիցին, հատանեն զկոնն յերկուս ուղիղ գիծս, որ ընդ գծի հատանելոյ խարսխին, հաւասարասրուն եռանկիւն ինչ յօրինեալ կազմեն, իսկ կորուածն, որ յերեսաց հատատելոյ ընդ առանցս հաւասարակող կոնի, ծագիցէ, է հաւասարակող եռանկիւն։

292. Եթէ կէս կարգաւոր բազմանկիւն, զուղիղ գծիւ որ զբազմանկիւնն հասարակեաց, շարժիցի, ծագէ մարմին ինչ, որ անուանեալ կոչի Գնդակերպ։ Ուղիղ գիծն՝ զորով կէս բազմանկիւնն շարժիցի, առի Առանցք, զծայրս առանցիցն կոչեմք Բեւեռս։ Կողմանք բազմանկեանն ի ժամանակի անդ շարժելոյն գրեն զերեսս կողմանց ուղղորդ կոնի, գլխատեալ կոնի, եւ ուղղորդ գլանի։ Եթէ թիւ համարոյ կողմանց բազմանկեանն, որոյ կէսն զառանցիւքն շարժի, զոյգ իցէ, յայնժամ մի կողմն բազմանկեան կայ հաւասար հեռաւոր յառանցից անտի շրջելոյն։ Ապա եթէ անզոյգ իցէ թիւ համարոյ կողմանցն, յայնժամ կէսն միոյ կողման բազմանկեան, շարժի ի միասին, եւ ոչ մի կողմն կայ հաւասար հեռաւոր յառանցից, իսկ առանցքն ուղղորդ կայ ի վերայ միոյ ի կողմանցն։

293. Եթէ կոն ինչ ԱԵԲԴ (Ձեւ **196**.) ի հարթ ինչ երեսաց, որ հաւասար հեռաւոր իցէ ի խարսխէն,

հատանիցի, կորուածս այս է բոլորակ, որ համեմատի ընդ խարսխին ըստ երկրորդ կարողութեան բացարձակութեան Դ գագաթան ի նոյանէ:

Դնիցուք գրեսցուք, եթէ աեբ երեսքն հաւասար հեռաւոր իցէ յԱԵԲ երեսաց: Արդ՝ զմտաւ ած, եթէ ընդ ԳԴ առանցան երեսքն ԱԴԲ եւ ԵԴԶ եդեալ իցեն. յայտ է եթէ գիծքն հատանելոյ նոցա զԱԵԲ եւ զաեբ երեսս հաւասար հեռաւորք են ի միմեանց, այս ինքն ԱԳ || ագ, ԲԳ || բգ, ԵԳ || եգ, եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ: Եւ ապա եւս ծագէ ԱԳ : ագ = ԳԴ : գԴ = ԲԳ : բգ = ԵԳ : եգ = …, եւ քանզի ԱԳ = ԲԳ = ԵԳ = …, զորին կշհետ գայ, եթէ եւ ագ = բգ = եգ = …, ուրեմն է աեբ բոլորակ: Իսկ արդ որովհետեւ աեբ : ԱԵԲ = $\overline{\text{ագ}}^2 : \overline{\text{ԱԳ}}^2$ եւ ագ : ԱԳ = գԴ : ԳԴ, ուրեմն եւ աեբ : ԱԵԲ = $\overline{\text{գԴ}}^2 : \overline{\text{ԳԴ}}^2$: Սովին օրինակաւ մարթ է ցուցանել զայս եւ ի ծուռ կոնն:

294: Խնդիր: Զվերին երեսս ուղղորդ կոնի գտանել:

Լուծումն: Զմտաւ ածցուք, եթէ (Ձեւ 196.) զԱԵԲ խարսխաւ կարգաւոր ինչ բազմանկիւն ԱԵԷԲԶԸ ներքոյ ձգեալ իցէ, եւ ընդ ԱԵ, ԵԷ, եւ ընդ այլ եւս կողմանս նորին, եւ ընդ Դ գագաթն հարթ երեսք հաստատեալ իցեն, որք զմիմեանս յերեսս կողմանց կոնին, այս ինքն յԱԴ, ԵԴ, ԷԴ, … հատանեն. ապա հաւասարակող բուրգն զկոնիւն ներքոյ ձգիցի, որոյ խարիսխ է ԱԵԷԲԶԸ բազմանկիւնն, եւ որոյ ընդ կոնին հաւասար ԳԴ բարձրութիւն է: Արդ վերին երեսքն այսր հաւասարակող բրգան հաւասար է խարսխին յոր յաւելուցու արդիւնք շրջանակի նորին եւ կիսոյ հեռագրի միոյ երեսաց կողման (Հ. 262. Ա.):

Արդ դիցուք գրեսցուք, եթէ թիւ համարոյ կողմանց խարսխի այսր բրգան կարի իմն յանսահմանս մեծ իցէ, յայտ է եթէ շրջանակ խարսխին ի միասին ի միում վայրի գտանիցի ընդ շրջապատի խարսխի

կոնին, որով եւ երեւք կողմանց բրգանն ընդ երեսս կողմանց կոնին, եւ հեռագիրն ընդ կողման ի նմին տեղւոջ կայցեն: Ապա ուրեմն եւ երեւք կողմանց կոնին հաւասար է շրջապատի խարսխին, որ բազմացուցեալ իցէ կիսով միոյ կողման կոնին. զորս գհետ գայ եթէ վերին երեւք կոնին հաւասար է խարսխին, յոր յաւելուցու եւ շրջապատն նորին որ բազմացուցեալ իցէ կիսով միոյ կողման կոնին: Այս ինքն, եթէ զկէս երկակոււրն ԱԳ = ձ, զկողմն ԱԴ = ԵԴ = լ, զերեսս կողմանցն = Ե, զխարիսխն = Խ, եւ զվերին երեսս = Վ դնիցեմք, լինիցի շրջապատ խարսխին = 2ձշ, եւ Խ = ձ^{2}շ, ուստի եւ Ե = 2ձշ · $\frac{1}{2}$ լ = ձշ · լ, եւ Վ = Խ + Ե = ձ^{2}շ + ձշ · լ = ձշ (ձ + լ):

Ա. Ի հաւասարակող կոնի է լ = 2ձ, կամ $\frac{լ}{2}$ = ձ, ուստի Ե = ձշ · 2ձ = 2ձ^2 · շ, եւ Վ = 3ձ^{2}շ:
Ուրեմն Երեւք կողմանց հաւասարակող կոնի հաւասար է երկպատիկ խարսխի, եւ վերին երեւքն հաւասար երեքպատիկ խարսխի:

Բ. Ապա ուրեմն Ամենայն կոն մարթի իբրեւ յանաահմանս անկիւնաւոր բուրգն համարել:

Գ. Եթէ փոխանակ լ կողման ծանօթ իցէ բարձրութիւնն ԳԴ = Բ, յայնժամ, որովհետեւ ԱԴ = $\sqrt{[\overline{ԱԳ}^2 + \overline{ԳԴ}^2]}$ կամ լ = $\sqrt{[ձ^2 + Բ^2]}$, փոխանակելով Ե = ձշ · $\sqrt{(ձ^2 + Բ^2)}$ եւ Վ = ձշ (ձ + $\sqrt{[ձ^2 + Բ^2]}$):

295. Խնդիր: Հաշուել զերեսս կողմանց գլխատեալ կոնի, որ հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն հատեալ իցէ, յորժամ ծանուցեալ իցեն կէս երկակուրք երկոցունց խարսխացն, եւ կողմն գլխատեալ կոնին:

Լուծումն: Համարեսցուք, եթէ ոշէ իցէ (Զեւ 196.) հաւասար հեռաւոր յԱԶԲ խարսխէն, ԱԳ = ձ, ոէ = ծ, Աո = լ, եւ ոԴ = +, յայտ է եթէ, քանզի ԱԳ || ոէ. ΔԱԳԴ ∾ Δոէ Դ, զորս զհետ գայ ԱԳ : ոէ = ԱԴ : ոԴ, կամ ձ : ծ = լ +

$ւ : ւ$, ուստի եւ $ճ - ծ : ծ = է : ւ$, յորմէ $ւ = \frac{ծէ}{ճ - ծ}$, եւ

$է + ւ = է + \frac{ծէ}{ճ - ծ} = \frac{ճէ}{ճ - ծ}$: Արդ դիցուք եթէ երեւք կողմանց բովանդակ կոնին իցէ $= Ն$, եւ փոքր ի բաց հատեալ կոնին $= Ե$, եւ գլխատեալ կոնին $=$ $ե$, յայտ է եթէ (քանզի $Ն = ճշ(է + ւ) = ճշ \cdot \frac{ճէ}{ճ - ծ}$ $= \frac{ճ^2 շ \cdot է}{ճ - ծ}$, եւ $Ե = ծշ \cdot ւ = ծշ \cdot \frac{ծէ}{ճ - ծ} = \frac{ծ^2 շ \cdot է}{ճ - ծ}$ (Հ. 294.), $ե = Ն - Ե = \frac{ճ^2 շ \cdot է}{ճ - ծ} - \frac{ծ^2 շ \cdot է}{ճ - ծ} = \frac{շէ}{ճ - ծ}$ $\times (ճ^2 - ծ^2) = շէ(ճ + ծ)$, ուստի եւ բովանդակ վերին երեւք գլխատեալ կոնին $Վ = ե + ճ^2 շ + ծ^2 շ = շէ$ $\times (ճ + ծ) + շ(ճ^2 + ծ^2)$:

Ա. Եթէ փոխանակ է կողման առցի $Գէ = ք$ բարձրութիւնն, յայնժամ մօտաւոր օրինակաւ գտանին երեւք կողմանց ի ձեռն ք, ճ եւ ծ քանիօնութեանց: Չգեա զուղիղ գիծն ակ ուղղորդ ի վերայ ԱԷԲ հարթ երեսայ, ուստի եւ ուղղորդ ի վերայ ԱԳ կէս երկակորդ, յայնժամ է $ակ \# Գէ$, (քանզի եւ $աէ \parallel ԱԳ$,) եւ $Ակ = ԱԳ - Գկ = ԱԳ - աէ =$ $ճ - ծ$. Արդ իբրեւ $Գէ = կա = ք$ դնիցեմք, յայնժամ յԱակ ուղղանկիւն երեքանկեան $Աա = \sqrt{(\overline{Ակ}^2 + \overline{ակ}^2)}$ կամ $է = \sqrt{[(ճ - ծ)^2 + ք^2]}$, ուստի եւ փոխանակելով $ե = շ(ճ + ծ) \cdot է = շ(ճ + ծ) \cdot \sqrt{[(ճ - ծ)^2 +}$ $\overline{ք^2]}$, եւ $Վ = շ(ճ + ծ) \cdot \sqrt{[(ճ - ծ)^2 + ք^2]} + շ(ճ^2 + ծ^2)$:

Բ. Իբրեւ հատարակիցի Աա կողմն ի կէտն ա, եւ յայսմ կիտէ ձգիցի կորուած ինչ հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն, յայնժամ յԱԳէա տեղանն աք $= \frac{ԱԳ + աէ}{2}$ (որպէս օգնականութեամբ 181 Ա. եւ Գ. համարոց գտանի) $= \frac{ճ + ծ}{2}$, կամ $ճ + ծ$

= Ձաք: Հաստատեալ զայս ի հասարակաց օրինակն ե քանիոնութեան, իցէ ե = շ . է. Ձաք = Ձաք. շ.է: Այս ինքն Երեսք կողմանց գլխատեալ կոնին գտանի, եթէ ըք գշրջապատ կորուածոյն, որ ընդ ա միջոց է կողման հաւասար հեռաւոր ի խարսխէն ձգեալ է, ընդ կողման գլխատեալ կոնին բազմացուցանիցէ, քանզի է Ձաք . շ = աբգդ բոլորակին:

296. Խնդիր: Զխորանարդ տարածութիւն 1) բովանդակ, 2) գլխատեալ կոնին հաշուել:

Լուծումն: Ա. Որովհետեւ մարթեմք զկոնն, որպէս յանբաւս անկիւնաւոր բրգանց կազմեալ համարել (Հ. 294.), ուրեմն խորանարդ տարածութիւն կոնին գտանիցի, եթէ ըք զարդիւնս խարսխին եւ բարձրութեանն ընդ 3 բաժանիցէ (Հ. 278. բ.): Արդ դիցուք զտարածութիւն մարմնոյ կոնին = Կ, զխարիսխն = Խ, զբարձրութիւնն = Բ, եւ զկէս երկակուր խարսխին = Ճ, յայտ է եթէ $\text{Կ} = \frac{1}{3}\,\text{ԽԲ} = \frac{1}{3}\,\text{Ճ}^2\text{շ}\cdot\text{Բ}$:

Բ. Դիցուք գրեսցուք, եթէ խորանարդ տարածութիւն ի բաց հատեալ փոքր ԶԷԴ կոնին (Ձեւ 194.) իցէ = է, ԶԷ = ճ, ԷԴ = փ, եւ ԳԷ = բ, եւ իբրեւ զառաջին օրինակ նշանակելոյ հաստատուն ունիցիմք է $\text{Տ} = \text{Կ} - \text{է}$, եթէ Տ տարածութիւն մարմնոյ գլխատեալ կոնին իցէ, կամ $\text{Տ} = \frac{1}{3}\,\text{Ճ}^2\text{շԲ} - \frac{1}{3}\,\text{ճ}^2\text{շ}\cdot\text{փ} = \frac{1}{3}\text{շ}\,(\text{Ճ}^2\text{Բ} - \text{ճ}^2\text{փ})$: Իսկ արդ որովհետեւ ԱԳ : ԶԷ = ԳԴ : ԷԴ, կամ Ճ : ճ = Բ : փ, կամ $\text{Ճ} : \text{ճ} = \text{բ} + \text{փ} : \text{փ}$ ուստի եւ $\text{Ճ} - \text{ճ} : \text{ճ} = \text{բ} : \text{փ}$, յայտ է եթէ $\text{փ} = \frac{\text{բճ}}{\text{Ճ} - \text{ճ}}$, եւ $\text{Բ} = \text{բ} + \text{փ} = \frac{\text{Ճ}}{\text{ճ}}\cdot\text{փ} = \frac{\text{Ճ}}{\text{ճ}}\cdot\frac{\text{բճ}}{\text{Ճ} - \text{ճ}} = \frac{\text{բՃ}}{\text{Ճ} - \text{ճ}}$, եւ ի ձեռն փոխանակելոյ $\text{Տ} = \frac{1}{3}\text{շ}\left(\text{Ճ}^2\cdot\frac{\text{Ճբ}}{\text{Ճ} - \text{ճ}} - \text{ճ}^2\cdot\frac{\text{բճ}}{\text{Ճ} - \text{ճ}}\right) = \frac{1}{3}\,\text{շ}\cdot\text{բ}\left(\frac{\text{Ճ}^3 - \text{ճ}^3}{\text{Ճ} - \text{ճ}}\right) = \frac{1}{3}\text{շ}\cdot\text{բ}\,(\text{Ճ}^2 + \text{Ճճ} + \text{ճ}^2) = \frac{\text{շբ}}{3}\,[(\text{Ճ} + \text{ճ})^2 - \text{Ճճ}] = \frac{\text{բ}}{3}(\text{Խ} + \sqrt{\text{Խխ}} + \text{խ})$, եթէ $\text{շՃ}^2 = \text{Խ}$, $\text{շճ}^2 = \text{խ}$, ուստի եւ $\text{շՃճ} = \sqrt{\text{Խխ}}$:

Ա · Ապա ուրեմն կոնն է երրորդ մասն իւիք գլանի, որոյ ընդ կոնի հաւասար խարիսխ եւ հաւասար բարձրութիւն իցէ։

Բ · Յուղղորդ կոնի է $\text{Բ} = \sqrt{[\text{է}^2 - \text{ճ}^2]}$, եթէ է կողմն կոնին իցէ, եւ ի հաւասարակող կոնի է $\text{Բ} = \sqrt{[(2\text{ճ})^2 - \text{ճ}^2]} = \sqrt{[4\text{ճ}^2 - \text{ճ}^2]} = \text{ճ}\sqrt{3}$, ուստի եւ տարածութիւն ուղղորդ կոնին $= \frac{1}{3}\,\text{ճ}^2\text{Հ} \cdot \sqrt{[\text{է}^2 - \text{ճ}^2]}$ եւ ի հաւասարակող կոնի $= \frac{1}{3}\,\text{ճ}^2\text{Հ} \cdot \text{ճ}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\,\text{ճ}^3 \cdot \text{Հ}\sqrt{3}$։

Գ · Եթէ կ եւ է երկու կոնք իցեն, եւ Բ եւ բ բարձրութիւնք նոցին, Խ եւ խ խարիսխքն, յայնժամ $\text{կ} = \frac{1}{3}\,\text{ԲԽ}$ եւ $\text{է} = \frac{1}{3}\,\text{խ} \cdot \text{բ}$, յորմէ $\text{կ} : \text{է} = \frac{1}{8}\,\text{ԲԽ} : \frac{1}{8}\,\text{բխ} = \text{ԲԽ} : \text{բխ}$։ Սոյն այս համեմատութիւնս ելանէ, յորժամ կ եւ է զերեսս կողմանց երկուց ուղղորդ կոնից, Բ եւ բ զկողմանս, եւ Խ եւ խ զշըրջապատս խարսխաց նոցա յայտ արարեալ ցուցանիցեն։ Առանց ինչ տարակուսելոյ յայտ է եթէ նոյն առանձինն հանգամանք, որք վասն բրգանց ի Հ · 278· ցուցան, եւ կոնից պատշաճին,

297 · Երկու կոնք ասին նմանք միմեանց եթէ առանցք նոցա ընդ երկակտուրս կամ ընդ կէս երկակտուրս խարսխացն ուղիղ համեմատիցին, եւ զնոյն միտութիւն առ խարիսխն ունիցին։ Արդ որովհետեւ (Զեւ 197 ·) $\text{ՍԳ} : \text{սգ} = \text{ԱԲ} : \text{աբ} = \text{ԱԳ} : \text{ագ}$, եւ անկիւնն միտութեան $\text{ՍԳԴ} = \text{սգդ}$, ուրեմն կոնն $\text{ՍԱԴԲ} \backsim \text{սադբ}$։

Ա · Ուրեմն։ Երկու ուղղորդ կոնք, որոց բարձրութիւնն հաւասար իցէ երկակտրոյ խարսխին, նման են միմեանց։

Բ · Ամենայն հաւասարակող կոնք միմեանց նման են։ Քանզի, որովհետեւ ի կոնս յայսոսիկ երեքանկիւնքն ԲՍԳ եւ բսգ ի Գ եւ գ ուղղանկիւնք են, եւ քանզի $\text{ԲՍ} = \text{ԱԲ}$, եւ $\text{բս} = \text{աբ}$ (Հ · 291 ·), յայտ է եթէ $\text{ԳՍ} = \sqrt{[\overline{\text{ԲՍ}}^2 - \overline{\text{ԲԳ}}^2]} = \sqrt{[\overline{\text{ԱԲ}}^2 - \overline{\text{ԲԳ}}^2]} = \sqrt{[(2\text{ԲԳ})^2 - \overline{\text{ԲԳ}}^2]} = \text{ԲԳ}\sqrt{3}$ · նոյնպէս եւ

գս $=$ բգ $\sqrt{3}$, զորոյ զհետ գայ ԳՍ : գս $=$ ԲԳ : բգ $=$ ԱԲ : աբ :

298. Խորանարդ տարածութիւնք նման կոնից համեմատին ընդ միմեանս, որպէս երրորդ կարողութիւնք նոյին միաբան չափմանցն:

Համարեսցուք, եթէ իցէ կոնն ՍԱԲԴ $\backsim$ սաբդ (Ձեւ 197.) կամ Կ $\backsim$ Լ, յայտ է եթէ վասն նմանութեան ՍԳՊ եւ սգպ երեքանկեանցն (Հ. 297.) ԳՍ : գս $=$ ԲԳ : բգ $=$ ՍՊ : սպ, եւ քանզի $\overline{\text{ԲԳ}}^2 : \overline{\text{բգ}}^2 = \overline{\text{ԲԳ}}^2 : \overline{\text{բգ}}^2$, ուրեմն $\overline{\text{ԲԳ}}^3 : \overline{\text{բգ}}^3 = \overline{\text{ԲԳ}}^2 \cdot \text{ՍՊ} = \overline{\text{բգ}}^2 \cdot \text{սպ}$: Իսկ արդ է Կ : Լ $= \overline{\text{ԲԳ}}^2 \cdot \text{ՍՊ} : \overline{\text{բգ}}^2 \cdot \text{սպ}$ (Հ. 296. Գ.), ուրեմն Կ : Լ $=$ $\overline{\text{ԲԳ}}^3 : \overline{\text{բգ}}^3 = \overline{\text{ՍՊ}}^3 : \overline{\text{սպ}}^3 = \overline{\text{ԳՍ}}^3 : \overline{\text{գս}}^3$:

299. Խնդիր: Զմերին երեսս գնդակերպին հաշուել, եթէ ծանուցեալ իցէ Ճ կէս երկակտուրն բոլորակին, որ զծնանելի բազմանկեամբ ներքոյ ձգիցի:

Լուծումն: Իցէ ԱԲԳԴԵԱ՛ (Ձեւ 198.) կէս կարգաւոր ինչ տասնանկեան: Իբրեւ յանկեանց ձեւոյն՝ ԲՊ, ԳՌ, ԴՌ՛, ԵՊ՛ ուղղորդ գիծս ի վերայ ԱԱ՛ առանցիցն ձգիցես, եւ զուղղորդ գիծսն ԷՏ եւ ՁՄ յԷ եւ Ձ միջոցաց ԲԳ եւ ԳԴ կողմանցն եւս. եւ իբրեւ կէս բազմանկիւնն շուրջ զԱԱ՛ առանցիւքն շրջիցի

ա). ԱԲ եւ Ա՛Ե կողմանքն գրեն զերեսս կողմանց ուղղորդ կոնի, իսկ ուղիղ գիծքն ԲՊ եւ ԵՊ՛ են ճառագայթք խարսխաց նոյին եւ ուղիղ գիծքն ԱՊ եւ Ա՛Պ՛ բարձրութիւնք այսց կոնից: Իսկ արդ որովհետեւ ԲՊ $=$ ԵՊ՛, եւ ԱՊ $=$ Ա՛Պ՛, որպէս ի պատճականութենէ ԱԲՊ եւ Ա՛ԵՊ՛ երեքանկեանցն յայտ է, ուրեմն երկոքին կոնքն հաւասար են միմեանց: Արդ զերեսս կողմանց այսր կոնի դիցուք $=$ Ն, եւ զկոնն ի գլխովին $=$ Կ:

բ). Ի ժամանակի անդ բազմանկեանն շուրջ զԱԱ՛ առանցիւք դառնալոյ, կողմանքն ԲԳ եւ ԴԵ գրեն զերեսս կողմանց երկուց հաւասար գլխատեալ ուղղորդ կոնից, քանզի ԲՊՌԳ եւ ԴՌ՛Պ՛Ե միմեանց

պատշաճական են, որպէս մարթ է դիւրաւ ցուցանել։ Արդ զայսպիսի գլխատեալ կոնն, որոյ բարձրութիւնն = ՊՌ = Պ'Ռ' է, դիցուք = Տ, եւ զերեսս կողմանց նորա = Ե'։

գ)․ Ի կատարած․ կողմն ԳԳ, որ յԱԱ' առանցին հաւասար հեռաւոր է, քանզի զոյգ է թիւ համարոյ կողմանց բազմանկեանն, ի ժամանակի շրջելոյն, ձգէ զերեսս կողմանց ուղղորդ գլանի, որոյ խարսխին կէս երկակտուրն է ԳՌ = ՁՄ = Ճ, եւ որոյ բարձրութիւն ԳԳ = ՌՌ' է։ Զերեսս կողմանց այսր գլանի, զոր = Գ դնեմք, իցէ Ե''։

Ապա ուրեմն Վ = 2Ե + 2Ե' + 2Ե'', եթէ զերեսս բովանդակ գնդակերպին = Վ առիցեմք։

Իսկ արդ 2․Ե = 2․ԲՊ․շ․ԱԲ (Հ․ 294․)։ Իբրեւ առ Ն կէտն շօշափման ձգիցեմք զկէս երկակտուրն ՆՄ, ուղղանկիւն երեքանկիւնքն ԱՆՄ եւ ԱԲՊ միմեանց նման են․ զորոյ զհետ գայ եթէ ԱՆ : ՆՄ = ԱՊ : ԲՊ կամ ½ ԱԲ : Ճ = ԱՊ : ԲՊ, զորոյ զհետ գայ ԱԲ · ԲՊ = 2Ճ · ԱՊ, ուստի եւ փոխանակելով 2Ե = 2շ·ԱԲ·ԲՊ = 2շ·2Ճ·ԱՊ = 4Ճշ·ԱՊ։ Դարձեալ է 2Ե' = 2 · շ · ԲԳ (ԳՌ + ԲՊ) (Հ․ 295․ Ա․) = 2·շ·ԲԳ · 2ԷՏ = 4շ·ԲԳ·ԷՏ․ քանզի ըստ Հ․ 181 է սեղանն ԳՌԲՊ = ԲԸ (ԲՊ + ԳՌ / 2) իսկ ըստ Հ․ 181․ Գ․ = ԲԸ · ԷՏ, ուստի ԷՏ = (ԲՊ + ԳՌ) / 2, ուստի 2ԷՏ = ԲՊ + ԳՌ։ Իբրեւ ձգիցեմք ԲԸ ⊥ ԳՌ, ելանիցէ ուղղանկիւն ΔԲԳԸ ∾ ΔԷՄՏ (Հ․ 98․), ուստի եւ է ԲԳ : ԲԸ = ԷՄ : ԷՏ, կամ ԲԳ : ՊՌ = Ճ : ԷՏ, յորմէ յառաջ գայ ԲԳ · ԷՏ = Ճ · ՊՌ, ուստի եւ փոխանակելով 2Ե' = 4շ·Ճ·ՊՌ։ Նոյն ի կատարած, Ե'' = 2 · ԳՌ · շ · ԳԳ · = 2շ · ՁՄ · ՌՌ' = 2շ · Ճ · ՌՌ' (Հ․ 287․)։ Արդ դիցուք զզօրութիւնս զայսոսիկ ի Վ հաւասարութեան, լինիցի Վ = 4Ճշ·ԱՊ + 4շՃ · ՊՌ + 2շՃ · ՌՌ' = 2շՃ (2ԱՊ +

2ՊՌ + ՌՌ′) = 2ճշ (ԱՊ + Ա′Պ′ + ՊՌ + Պ′Ռ′ + ՌՌ′) = 2ճշ (ԱՊ + ՊՌ + ՌՌ′ + Ռ′Պ′ + Պ′Ա′) = 2ճշԱԱ′։ Իսկ արդ 2ճշ է շրջապատ ․․․ բոլորակին, որ շուրջ զբազմանկեամբ ներքոյ ձգիցի. ուրեմն վերին երեսք գնդակերպին գտանի, եթէ ոք զշրջապատ բոլորակին, որ ներքոյ շուրջ զծնանելի բազմանկեամբն ձգիցի, ընդ առանցին բազմացուցանիցէ։

Ա. Տարածութիւն մարմնոյ գնդակերպին է Մ = 2Կ + 2Տ + Գ, յորում Կ, Տ, Գ քանիօնութիւնք մարթին դիւրաւ հաշուել։

ՀԱՏԱԾ Գ

ԳՈՒՆԴ

300. Գունդն՝ երկրաչափական մարմին է, որ միով եւեթ կոր վերին երեսօք շուրջ փակեալ է, եւ ամենայն կէտք երեսացն այնոցիկ հաւասար հեռի են ի միջէ կիտէ որ ի ներքս փակեալ անջրպետութեանն կայ։ Այս կէտ անուանեալ կոչի Կենդրոն կամ Միջօվայր, եւ ամենայն գիծ ուղիղ որ առ որ զինչ եւ իցէ կէտ վերին երեսացն ձգիցի, ասի Կէս երկակտուր գնդոյ։ Ուղիղ գիծն՝ որ զերկուս կէտս երեսաց գնդոյն ընդ միմեանս յօդիցէ եւ ընդ կենդրոն գնդոյն եւս անցանիցէ, ասի, Երկակտուր գնդոյն։ Աստի մարթես ինքնին իմանալ, եթէ ամենայն կէս երկակտուրքն միմեանց հաւասար են, եւ թէ իւրաքանչիւր երկակտուր հաւասար է երկուց կէս երկակտորոց։

Մարթեմք զգունդն անտի իսկ ծագեալ համարել, որպէս թէ կէս բոլորակն ԱԲԳ (Ձեւ 199.) շուրջ զԱԲ երկակտորով շրջիցի։ Այս երկակտուր յորջորջի Առանցք շրջելոյ, իսկ կէս բոլորակն ԱԳԲ կէս բոլորակ ծնանելի։ Եթէ ծնանելի կէս բոլորակն կայցէ ուղղորդ ի վերայ դրից սկզբանն՝ ուստի առ սկիզբն

շարժելոյ, ելանէ Չորրորդն գնդոյն, եւ եթէ ի ժամանակի անդ շարժելոյն յառաջին ԱԳԲ երեսս եկեալ հասանիցէ, ուստի եւ Գ կէտն ի Դ անկանիցի, ծագէ Կիսագունդ:

Եթէ ԱՄԸ բաժանած բոլորակի շուրջ զԱՄ կէս երկակտրովն շարժիցի, մարմինն որ ի շարժելոյ անտի յօրինի, ասի Բաժանած գնդոյ: Վերին երեսքն որ ի ժամանակի անդ շարժելոյ յԱԸ աղեղանն կազմիցի. որ եւ մասն ինչ է վերին երեսաց գընդոյն, ասի Խոյր: Եթէ կէս հատած բոլորակի ԱԸԹ շուրջ զԱԹ մասամբ ԱՄ կէս երկակտրոյն շրջիցի, ելանէ մարմինն, որում անուն եդեալ կարգամբ Հատած գնդոյ: Այլն նման յորժամ սեղանն ԸԹԻԺ զԻԹ բարձրութեամբն շրջիցի, հատած գնդոյ, որ անտի ծագիցէ ասի Գօտի գնդոյ, եւ մասն վերին երեսաց գնդոյն որ ի ԺԸ աղեղանէ անտի գրիցի, ասի Գօտի վերին երեսաց գնդոյն կամ համառօտիւք կարճառօտս Գօտի:

Յայնցանէ՝ զորս ցայս վայր ասացաք կարես առնուլ ի միտ, եթէ ի ժամանակի, յորժամ ԱԳԲ կէս բոլորակն զԱԲ առանցիւք շրջանակիցի, կարգածքն ԸԹ, ԺԻ եւ ԳՄ գրեն բոլորակս, որ ուղղորդ կան ի վերայ առանցից եւ որոց կենդրոնք յԱԲ առանցսն գտանին: Բայց զի կէս երկակտուրն ԳՄ մեծագոյն է քան զայլ կարգածս, որ յԱԳԲ կէս բոլորակի անդ կայցեն, ուստի եւ ԳՄ > ԺԻ. զորին զհետ գայ, եթէ կտրուածն ընդ կենդրոնն հատանեալ, մեծագոյն քան զայլ կտրուածս իցէ: Վասն այսորիկ բոլորակն այն ԳՏԴ, որոյ կենդրոնն ի կենդրոնի գընդոյն կայցէ, եւ որոյ կէս երկակտուրն հաւասար իցէ կէս երկակտրոյ գնդոյն, ասի Մեծագոյն բոլորակ կամ Միջօրեայ, իսկ այլքն Փոքրագոյն, կամ Հաւասար հեռաւոր բոլորակք: Մեծագոյն բոլորակն՝ հատանէ զգունդն յերկուս պատշաճական մասունս, իսկ փոքրագոյն բոլորակն, յերկուս չհաւասար մա-

սունս, յորոց մեծագոյն այն է, յորում կենդրոնն գտանիցի։

Եթէ ԱՀ ⊥ ԱԲ իցէ, յայտ է եթէ յԱ կիտի անդ շօշափէ զբոլորակն ԱԳԲ, եւ ի շարժել ԱԳԲ կէս բոլորակի զԱԲ առանցիւք, ԱՀ եւս գրէ երեսս, որ ի ծայրն առանցից ուղղորդ կայ ի վերայ առանցիցն, վասն որոյ եւ անուանեալ կոչի Շօշափօղ երեսք։ Ապա ուրեմն շօշափօղ երեսքն եւ վերին երեսք գնդոյն մի եւեթ կէտ Ա ունին հասարակաց, որ ասի կէտ շօշափման, քանզի այլ կէտքն առաւել հեռի կան ի Մ կենդրոնէ գնդոյն։

Եթէ ԱԲ երկակատուրն կայցէ ուղղորդ ի վերայ ԳՏԴ մեծագոյն բոլորակի, յայնժամ ամենայն կէտքն մեծագոյն շրջապատին Գ, Լ, Տ, Դ, Պ, . . . յԱ եւ ի Բ կիտից կատարածի ԱԲ երկակորոյ գնդոյն հաւասար հեռի են (Հ. 214.), վասն որոյ եւ Ա, Բ ծայրքն ասին Բեւեռք ԳՏԴ մեծ բոլորակին, որ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԲ երկակորոյն։

301. Եթէ երեք մեծագոյն բոլորակք գնդոյ ԱԴԲ, ԳՊԴ եւ ԵՊՁ զմիմեանս հատանիցեն, մասն ԴՁՊ որ յերից ԴՁ, ԴՊ, եւ ՁՊ աղեղանց բոլորակացն սահմանիցի, ասի Երեքանկիւն գնդական։ ԴՁ, ԴՊ, եւ ՁՊ աղեղունքն բոլորակի յորջորջին կողմանք գնդական երեքանկեան, իսկ անկիւնքն միաութեան երեսաց երկուց երկուց կողմանց, անուանին գնդական անկիւնք։ Ապա Ա գնդական անկիւնն յօրինեալ յերկոցունց ԱԳԲ եւ ԱԼԲ մեծագոյն կէս բոլորակաց նոյն է ընդ ՇԱՀ անկեան, որ յԱՇ եւ յԱՀ շօշափողաց երկուց կէս բոլորակացն կազմիցին։

Մասն վերին երեսաց, որ յաւելի քան զերիս մեծագոյն բոլորակաց փակիցի, ասի Գնդական բազմանկիւն։

Մասն գնդոյն՝ որ ի մէջ երկուց մեծագոյն բոլորակաց կայցէ, ասի Սեպաձեւ բաժանած գնդոյ։ Երկոքին կէս բոլորակքն, կոչին Երեսք կողմանց նորին, երկակատուրն՝ յորում երկոքինն զմիմեանս հատա-

նիցեն, Թիկունք: Կոր վերին երեսքն այնպիսի բաժ-
անածի գնդոյ յորջորջի Ցօղուն:

Եթէ յԱ կատարածի ԱԲ երկակորոյն (Ձեւ 199.) յորում երկոքին մեծ կէս բոլորակքն ԱԲԳ եւ ԱՆԲ զմիմեանս հատանեն, յերկոսին երեսսն կանգնիցին շօշափօղքն ԱՀ եւ Աշ, հարթ անկիւնն՝ որ ի նոցանէն կազմիցի ՀԱշ է = ԼՄԳ անկեան միտութեան երկոցունց երեսաց: Յայսմանէ յայտնապէս տեսանես եթէ մեծութիւն սեպաձեւ բաժանածի, նոյնպէս եւ մեծութիւն կոր վերին երեսաց նորին զՀԱշ անկենէ անտի կախեալ կայ, եւ թէ տարածութիւն մարմնոյ այնպիսի բաժանածի գնդոյ այնպէս իմն կշռի առ տարածութիւն բովանդակ գնդոյն, որպէս անկիւն ՀԱշ առ 4Ո: Նոյն կշռութիւն է եւ կոր վերին երեսաց սեպաձեւ բաժնին առ բովանդակ վերին երեսս գնդոյն:

302. Ա. Եթէ հարթ ինչ երեսաց ընդ վերին երեսս իւիք գնդոյ մի եւեթ կէտ իցէ հասարակաց, ասի, Երեսքն զգունդն շօշափեն: Եթէ կէս երկակորոյն՝ որ առ կէտն շօշափման ձգիցի, ուղղորդ ի վերայ երեսաց շօշափման կայցէ, մարթի ի վերայ հաստատել ի մեկնութենէ անտի գնդոյն (Հ. 300.), եւ ի մեկնութենէ երեսաց շօշափման, զորմէ ասացաք յառաջագոյն:

Եւ սմին հակառակ. Եթէ երեսք ինչ ուղղորդ ի վերայ կէս երկակորոյ գնդոյն կայցէ ի կէտն կատարման, երեսք շօշափման են: Մարթես ինքնին ցուցանել զկրայն ճշմարտութիւն յ300, եւ 64 համարոյ:

Բ. Եթէ ամենայն երեսք կողմանց մարմնոյ զվերին երեսս մի եւ նոյն գնդոյ շօշափիցեն, ասի եթէ մարմինն շուրջ զգնդաւ ձգեալ է արտաքոյ, կամ թէ գունդն շուրջ զմարմնով ներքոյ գրեալ է:

Գ. Եթէ գագաթունքն ամենայն անկեանց մարմնոյ անկիւնաւոր մարմնոյ ի վերին երեսս մի

եւ նոյն գնդոյ գտանիցին, զի եթէ բազմանիստ մարմինն զգնդաւ ներքոյ ձգեալ իցէ, կամ թէ գունդն զբազմանիստ մարմնով շուրջ գրեալ է արտաքոյ:

303. Շուրջանակի զկարգաւոր ինչ մարմնով միոյ եւեթ գնդոյ ներքոյ կամ արտաքոյ ձգել հնար է:

Համարեսցուք եթէ իցեն Խ, Հ եւ Ձ միջոցք հաւասար եւ նման կարգաւոր ԱԲԳԴԵ, ԴԵԶԷԸ, եւ ԲԳԻԺԹ (Ձեւ 192.) բազմանկեանց, որք երեւք կողմանց միոյ անկիւնաւոր մարմնոյ իցեն: Իբրեւ հասարակիցի կողն ԴԵ, եւ Ծ միջոց նորին ընդ Խ եւ Հ յօդիցի, ուղիղ գիծքն ԽԾ եւ ԾՀ ուղղորդ կայցեն ի վերայ ԴԵ գծին, որով եւ անկիւնն ԽԾՀ իցէ անկիւն միտութեան ԴԵԷ եւ ԱԲԳ երեսաց (Հ. 206.), ուղիղ գիծն ԴԵ կայցէ ուղղորդ ի վերայ ԽԾՀՄ երեսաց (Հ. 207.), յորմէ, եւ ԱԲԳ եւ ԴԵԷ երեսքն եւս ուղղորդ կան ի վերայ ԽԾՀՄ երեսաց (Հ. 229.):

Իբրեւ ի Խ եւ ի Ծ կէտսն ի վերայ ԱԲԳ եւ ԴԵԷ երեսաց կանգնիցին ուղղորդ գիծքն ԽՂ եւ ՀՃ, երկոքեանն եւս ի մի եւ ի նոյն ԽԾՀ երեսաց վերայ գտանին (Հ. 230. Բ.), եւ հարկ է նոցա զմիմեանս ի Մ կէտի անդ հատանել (Հ. 80. Դ.):

Արդ յորժամ ձգիցեմք զուղիղ գիծն ԾՄ, յայնժամ ԽԾՄ եւ ԾՄՀ ուղղանկիւն երեքանկեանցն իցէ ԾՄ ներքնաձիգ հասարակաց, եւ էջն ԾԽ = ԾՀ, ուստի եւ միմեանց պատշաճական իցեն երեքանկիւնքն, յորմէ յայտ է եթէ ԽՄ = ՀՄ, եւ անկ. ԽԾՄ = անկ. ՄԾՀ, այս ինքն եթէ ԽԾՀ անկիւնն միտութեան ի ձեռն ԾՄ ուղիղ գծի հասարակիցի: Դարձեալ եթէ ձգիցի ԽԿ $\perp$ ԲԳ, եւ յօդիցի Կ միջոյն ԲԳ կողման ընդ Ձ միջոյի ԲԳԺ երեսաց կողման, յայնժամ եւ ԿՁ $\perp$ ԲԳ, ուստի եւ անկիւնն ԽԿՁ անկիւն միտութեան ԱԲԳ եւ ԲԳԺ երեսացն իցէ: Արդ յօդեա զԿ եւ զՁ կէտս ընդ Մ,

յայնժամ, որովհետեւ ՄԽ = ՄԽ, ԽԾ = ԽԿ, եւ անկ. ՄԽԾ = անկ. ՄԽԿ = Ո, ΔԾՄԽ $\cong$ ΔԽՄԿ. զորոյ զհետ գայ ՄԿ = ՄԾ, եւ անկ. ԽԿՄ = անկ. ԽԾՄ = ½ անկ. ԽԾՀ: Իսկ որովհետեւ յամենայն կարգաւոր մարմինս, երկու երկու երեւք կողմանցն, որ զմիմեանս հատանիցեն, զնոյն միտութիւն առ միմեանս ունին, ուրեմն անկ. ԽԾՀ = անկ. ԽԿՁ, ուստի եւ ½ ԽԾՀ = ½ ԽԿՁ, եւ աստի եւս յառաջ գայ եթէ ԽԿՄ = ½ ՄԿՁ. զորոյ զհետ գայ եթէ անկ. ԽԿՄ = անկ. ՄԿՁ, այս ինքն եթէ ՄԿ ուղիղ գծիւ հատարակի ՄԿՁ անկիւնն միտութեան: Արդ որովհետեւ անկ. ԽԿՄ = անկ. ՄԿՁ, ՄԿ = ՄԿ, եւ ԽԿ = ԿՁ, ուրեմն ΔՄԽԿ $\cong$ ΔՄԿՁ. զորոյ զհետ գայ եթէ ՄԽ = ՄՁ, եւ անկ. ՄԽԿ = անկ. ՄՁԿ. իսկ արդ ՄԽԿ = Ո, ապա եւ անկ. ՄՁԿ = Ո, այս ինքն եթէ ուղիղ գիծն ՄՁ ուղղորդ կայ ի վերայ հատարակաց ԿՁ գծի հատանելոյ զմիմեանս ԲԳԺ եւ ԿՁՄ երեսաց որ ուղղորդ կան ի վերայ միմեանց. զորոյ զհետ գայ եթէ ՄՁ ուղիղ գիծն եւ ի վերայ ԲԳԺ երեսացն ի գլխովին ուղղորդ իցէ (Հ. 229. Դ.):

Նովին օրինակաւ ցուցանի եւս, եթէ ամենայն ուղիղ գիծքն որ զՄ կէտն ընդ միջոցս այլոց երեսաց կողմանցն յօդիցեն, ուղղորդ կան ի վերայ նոցին երեսաց կողմանց, եւ ԽՄ ուղիղ գծին հաւասարք են:

Արդ զմտաւ ած, եթէ գունդ ինչ իցէ, որոյ կենդրոնն ի Մ գտանիցի, եւ որոյ կէս երկատուրն ԽՄ ուղիղ գծին հաւասար իցէ. յայտ է եթէ ամենայն երեւք կողմանցն ծանուցեալ բազմանիստ մարմնոյ երեւք շօշափման են, կամ թէ, յայնժամ գունդն զամենայն երեսս կողմանցն այնր կարգաւոր մարմնոյ ի միջոցս ձեւոցն շօշափէ. ուստի եւ յայտ է թէ գունդն ներքոյ զմարմնովն գրեալ է:

Երկրորդ մասն: Որովհետեւ ԴՆ կողն ուղղորդ ի վերայ ԽԾՀ երեսաց, աստատին յայտ է, եթէ անկ. ՄԾՆ = անկ. ՄԾԴ = Ո, եւ .քանզի ԾՆ

ևս = ԾԴ, և ԾՄ է հասարակաց, ուրեմն ΔՄԾԵ ≅ ΔՄԾԴ, ուստի ՄԵ = ՄԴ: Նովին օրինակաւ ցուցանի ևս, եթէ ՄԲ = ՄԳ իցէ: Դարձեալ ցուցաւ իսկ յԱ, եթէ ՄԾ = ՄԿ, և քանզի ԴԵ ևս = ԲԳ, կամ ½ ԴԵ = ½ ԲԳ, այս ինքն է ԴԾ = ԳԿ, ուրեմն ուղղանկիւնքն ՄԾԴ և ՄԳԿ պատշաճականք են. զորոյ զհետ գայ, եթէ ՄԴ = ՄԳ = ՄԲ: Նովին օրինակաւ ցուցանի ևս, թէ գագաթունք ամենայն մարմնոյ անկեանց մարմնոյն, որ առաջիս կայ, ի Մ կիտէ անտի հաւասար հեռի իցեն:

Ապա ուրեմն գունդն, որ ի Մ միջոցէ անտի ՄԴ կէս երկակտորով ձգիցի, ընդ ամենայն մարմնոյ անկիւնս այսր մարմնոյ անցանէ, որով և զմարմնովն արտաքոյ գրեալ է:

Յասացելոցս զհետ գայ; Գունդն որ զկարգաւոր մարմնով արտաքոյ ձգիցի, ընդ ներքոյ գրեալ գնդոյն կենդրոնակից իցէ, այս ինքն եթէ՝ երկոցունց գնդոցն նոյն է միջոցն: Այս կէտս անուանեալ կոչի Միջոց կամ Միջավայր բազմանիստ մարմնոցն:

304. Եթէ գունդն ի հարթ ինչ երեսաց հատանիցի, կտրուածն է բոլորակ:

Համարեսցուք, եթէ ԱՋԲԷ (Ձեւ 200.) իցէ գիծն հատանելոյ զմիմեանս հարթ ինչ երեսաց և երեսաց գնդոյն, որոյ կենդրոնն է ի Կ: Ձգեա ի Կ կենդրոնէ անտի ի վերայ երեսացն այնոցիկ ուղղորդ գիծն ԿՄ, և ուղիղ գիծսն ԱԿ, ԿՋ, ԿԲ, ԿԷ, . . . ուղիղ գիծքս միմեանց հաւասար են, քանզի ճառագայթք են գնդոյն, ուստի և ԱՄ, ՋՄ, ԲՄ, ԿՄ ուղիղ գիծքն ևս միմեանց հաւասար են (Հ. 214.) զորոյ զհետ գայ, եթէ ԱՋԲԷ գիծն հատանելոյ բոլորակ իցէ, որոյ միջոցն կայ ի Մ:

Ա. Եթէ հատանող երեսքն ընդ Կ կենդրոն բոլորակին անցանիցէ, յայնժամ կէս երկակտուր կտրուածոյն հաւասար է կէս երկակտրոյ գնդոյն, ուստի և կտրուածն այն իցէ մեծագոյն բոլորակ:

Ապա ուրեմն ամենայն մեծագոյն բոլորակք միմեանց հաւասար են։

Բ. Երկու մեծագոյն բոլորակք ցանգ հատարակեն զմիմեանս, քանզի գիծն հատմանելոյ նոցա զմիմեանս անցանէ ընդ կենդրոն գնդոյն, եւ կատարած նոցա կայ ի վերին երեսս գնդոյն, ուրեմն է երկակտուր։

Գ. Նշանակեսցուք զկէս երկակտուր գնդոյն ճ նշանագրով, զկէս երկակտուր հատանօղ բոլորակին ց նշանագրով, եւ զբացարձակութիւն երեսացն այնոցիկ ի կենդրոնէ գնդոյն դիցուք = +, յայտ է եթէ

$$ց = \sqrt{[ճ^2 - +^2]}$$ ։

Արդ որչափ մեծագոյն իցէ +, այնչափ փոքր լինիցի ց, քանզի ճ հաստատուն ինչ քանիօնութիւն է. ապա ուրեմն այնչափ փոքր են փոքրագոյն բոլորակքն, որչափ միանգամ մեծագոյն իցէ բացարձակութիւն նոցա ի կենդրոնէ գնդոյն։ Եթէ + = ճ լինիցի, յայնժամ ց = 0, այս ինքն եթէ երեսացն այնոցիկ ընդ վերին երեսաց գնդոյն մի եւեթ կէտ է հասարակաց, ուստի եւ լինիցի այն՝ երեսք շօշափման։

Դ. Յանձնէ իսկ յայտ է, եթէ ամենայն մեծագոյն բոլորակ յերկուս մասունս հաւասարս եւ զգունդն եւ զվերին երեսս գնդոյն բաժանիցէ։

304. Միջոց ԱՋԲԻ հատանօղ երեսաց ընդ Կ կենդրոնի գնդոյն կայ ի միում ուղիղ գծի, որ է ուղղորդ ի վերայ հատանօղ երեսաց (Ձեւ 200.)։

Դիցուք գրեսցուք եթէ Մ միջոց իցէ փոքր բոլորակին. արդ (Հ. 34.) երեքանկիւնքն ԿՄԱ եւ ԿՄԲ միմեանց պատշաճական են. ուստի եւ անկ. ԿՄԱ = անկ. ԿՄԲ = Ո, ուստի եւ ԿՄ ⊥ ԱԲ։ Ըստ այն օրինակի եւ ի պատշաճականութենէ ԿՄՋ եւ ԿՄԻ երեքանկեանց մարթի իմանալ, եթէ ԿՄ ⊥ ՋԻ.

15

ուսափ եւ ուղղորդ ի վերայ ԱԶԲԻ (Հ. 207.) երեսաց:

Ա. Արդ եթէ կենդրոնք բազում բոլորակաց փոքունց ի վերայ Նորին ԿԴ կէս երկակտրոյ գտանիցին, բոլորակքն այնուքիկ ի միմեանց հաւասար հեռաւոր են:

Բ. Ապա ուրեմն ուղղորդ գիծն որ ի կենդրոնէ գնդոյն ի վերայ փոքր բոլորակին անկանիցի, անցանէ ընդ միջոց նորին: Եւ խոտորնակի. Ուղղորդ գիծն կանգնեալ ի վերայ միջոցի բոլորակին, ընդ կենդրոն գնդոյն անցանէ: Ցուցումն դիւրաւ գտանի ի Հ. 214. Բ, Գ, Դ:

305. Եթէ երկու կէտք առցին ի վերին երեսս գնդոյն, որք ոչ ի միում ուղիղ գծի ընդ կենդրոնի գնդոյն գտանիցին, ի ձեռն նոցա սահմանի դիրք մեծագոյն բոլորակի:

Քանզի երեք կէտք, այս ինքն երկու յերեսս գնդոյն, եւ կենդրոն գնդոյն, զդիրս երեսաց բոլորակի սահմանեն:

306. Յամենայն գնդական երեքանկիւնս իւրաքանչիւր կողմն փոքրագոյն է քան զբովանդակութիւն այլոց երկուց կողմանց, իսկ երեք կողմանքն միանգամայն փոքր են քան զ360° կամ փոքրագոյն են քան զմեծագոյն բոլորակ գնդոյն.

Առաջին մասն: Իցէ ԴԶՊ (Ձեւ 199.) գնդական ինչ երեքանկիւն (Հ. 301.): Իբրեւ ձգիցին կէս երկակտուրքն ԶՄ, ՊՄ, եւ ԴՄ, երեքն ԶՊՄ, ՊԴՄ եւ ԶԴՄ ի Մ միջոցի գնդոյն յօրինեալ կազմիցեն երեքկողմեան անկիւն ինչ մարմնոյ. յորում ցանգ երկու հարթ անկիւնքն միանգամայն մեծագոյն են քան զերրորդն (Հ. 233.): Իսկ արդ ԶՊ, ՊԴ եւ ԶԴ կողմանք՝ են չափք ԶՄՊ, ՊՄԴ եւ ԶՄԴ հարթ անկեանց. զորին զհետ գայ, եթէ

ԶԴ < ԴՊ + ԶՊ.

Երկրորդ մասն: Դարձեալ որովհետեւ անկ. ԴՄՁ + ԴՄՊ + ՁՄՊ < 360° (Հ. 234.) է, եթէ փոխանակ անկեանցն զչափն դնիցեմք

աղ. ԴՁ + ԴՊ + ՁՊ < 360°

307. Անկիւնն, որ յերկուց կողմանց գնդական երեքանկեան, կամ յերեսաց աղեղանց նոցին յօրինիցի, անուանեալ կոչի Գնդական անկիւն (301.): Ապա ուրեմն գնդական անկիւնն ԼԱԳ հաւասար է ՇԱՀ անկեան միտութեան (Ձեւ 199.) ԼԱՄ եւ ԳԱՄ երեսաց:

Ա. Ապա ուրեմն գնդական անկիւնք զնոյն առանձինն ինչ հանգամանս զոր հարթ անկիւնքն ունիցին, ունին, այս ինքն

1) Գնդական անկիւնքն ԳԱԼ եւ ԼԱԴ, որոց հասարակաց է աղեղն ԱԼ, եւ որոց այլ երկու աղեղունքն ԱԳ եւ ԱԴ ի մի եւ ի նոյն երեսս գտանին միանգամայն են = 180°:

2) Եթէ մեծագոյն բոլորակք, որչափ եւ բազում իցեն թուով ի միոյ ԱԲ երկակորոյ վերայ զմիմեանս հատանիցեն, բովանդակութիւն ամենայն գնդական անկեանցն որ յԱ յօրինեալ կազմիցին, է = 360°:

3) Իբրեւ երկայնիցին ԼԱ եւ ԳԱ աղեղունքն արտաքոյ քան զԱ, գնդական անկիւնն որ յերկայնելոյ աստի յօրինեալ կազմիցի է = ԼԱԳ, այս ինքն անկիւնքն՝ որ ի հասարակաց հատուածի միմեանց հակառակ կան, հաւասար են:

Բ. Ապա ուրեմն երկու կողմանք գնդական երեքանկեան կան ուղղորդ ի վերայ միմեանց, եթէ երեսք նոցա ի միմեանս ուղղորդ իցեն, այս ինքն ԱԳ աղեղն ուղղորդ է ի ԳԼ՝ եթէ ԱԳՄ երեսքն ուղղորդ իցեն ի վերայ ԳԼԴ երեսաց, կամ եթէ անկիւնն միտութեան ուղիղ իցէ:

308. Եթէ ԱԼ եւ ԱԳ կողմանքն ԱԼԳ գնդական երեքանկեան 90°աց աղեղունք կամ չորրորդ

մասն բոլորակի իցեն, յայնժամ ԳԼԴ մեծագոյն բոլորակն գնդոյն որ ընդ ԳՄ կողմն հաստատեսցի կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԳԲ եւ ԱԼԲ բոլորակաց։

Զգեա զկէս երկակտուրսն ԼՄ եւ ԳՄ, յայնժամ ԱԼ եւ ԱԳ աղեղունքն իցեն չափք ԱՄԼ եւ ԱՄԳ հարթ անկեանց. իսկ արդ անկիւնքս այսոքիկ են ուղիղ, որով յայտ է եթէ ԱՄ կայ ուղղորդ ի վերայ ԼՄ եւ ԳՄ կէս երկակտրոց. զորս զհետ գայ, եթէ եւ ի վերայ ԳԼԴ (Հ. 207.) երեսաց ուղղորդ իցէ։ Իսկ արդ ԱԼ եւ ԱԳ աղեղունքն կամ ԱԼՄ եւ ԱԳՄ հարթ երեսքն ընդ ԱՄ անցանեն, ուրեմն կան ուղղորդ եւ ի վերայ ԳԼԴ (Հ. 229.) երեսաց, կամ ամէն հակառակ ԳԼԴ կայ ուղղորդ ի վերայ ԱԼՄ եւ ԱԳՄ երեսաց։

Ա. Ապա ուրեմն ԳԼԴ ուղղորդ կայ ի վերայ ամենայն մեծ բոլորակաց որ ընդ ԱԲ երկակտուրն հաստատել կարիցեն։

Բ. Որովհետեւ ԼՄ եւ ԳՄ միանգամայն ուղղորդ կան յԱՄ, աստատին յայտ է եթէ անկ. ԼՄԳ է անկիւն միութեան ԼԱՄ եւ ԳԱՄ երեսաց, ուստի եւ հաւասար ՇԱՀ անկեան յԱՇ եւ յԱՀ շօշափողաց յօրինելոյ. զորս զհետ գայ եթէ եւ հաւասար եւս իցէ ՄԱԳ գնդական անկեան (Հ. 307.)։ Իսկ արդ ԳԼ աղեղն է չափ ԼՄԳ հարթ անկեան, ուրեմն է եւ չափ ԼԱԳ գնդական անկեան. այս ինքն է, Չափն իրիք ԼԱԳ գնդական անկեան է ԳԼ աղեղն միոյ մեծագոյն բոլորակի, որ ի մէջ սրունից անկեան, կամ երկայնութեանց նորա 90° հեռաւորութեամբ ի գագաթանէ անկեանն կայ։

Գ. Ապա ուրեմն բեւեռք միոյ բոլորակի (Հ. 301.) յամենայն կիտից իւրոյ շրջանակին հաւասար հեռի կան, եւ բացարձակութիւն իրիք բեւեռի ի միոյ յայսց կիտից չափի 90°ի աղեղամբ կամ չորրորդաւ բոլորակի։

Նմին հակառակ․ Եթէ կէտ մի Ա երեսաց գընդոյ ի Լ, Դ, եւ Գ կիտից երեսաց գնդոյն 90°աւ հեռի գտանիցի, այսինքն եթէ ԱԼ=ԱԳ=90°, իցէ Ա բեւեռ բոլորակին, որ ընդ երկուս կէտս այսոսիկ անցանէ։

Դ․ Ապա ուրեմն եթէ ԳԺ մեծագոյն ինչ բոլորակ ուղղորդ կայցէ ի վերայ միոյ ԳԼԴ մեծագոյն բոլորակի, անցանէ նա եւ ընդ Ա եւ Բ բեւեռս այնր բոլորակի։

Ե․ Եթէ երկու ԳԺ եւ ԼՆ աղեղունք մեծագոյն բոլորակի ի վերայ այլոյ մեծագոյն բոլորակի միանգամայն ուղղորդ գտանիցին, Ա կէտն հատանելոյ աղեղանցն այնոցիկ կամ երկայնութեանց նոցին է բեւեռ յետին մեծագոյն բոլորակի։

309․ Եթէ մեծագոյն ինչ ԱԳԲ բոլորակ ուղղորդ իցէ ի վերայ ԳԼԴ մեծագոյն բոլորակի, սեպաձեւ բաժանածն ԳԱԴԼԳ է եւ չորրորդ մասն բովանդակ գնդոյն, եւ եթէ մեծագոյն բոլորակն ԱԼԲ ուղղորդ իցէ ի վերայ երկուց առաջնոցն, յայնժամ մարմինն որ յԱՄԼ, ԳՄԼ, ԱՄԳ հարթ երեսաց եւ ի գնդական ԱԼԳ երեքանկենէ ի միջի փակիցի, է կէս այնր սեպաձեւ բաժանածին, ուստի եւ ութերորդ մասն բովանդակ գնդոյն։ Սոյնգունակ եւ այն եւս յայտ է, եթէ կոր երեսք այնր սեպաձեւ բաժանածին է չորրորդ, իսկ գնդական երեքանկիւնն ԱԼԳ ութերորդ մասն բովանդակ երեսաց գնդոյն։

Զասացելոցս զհետ գայ եթէ ԱԼԳ գնդական երեքանկիւնն ի չորից չորրորդաց փակիցի, եւ են նորա երեք ուղիղ անկիւնք։

310․ Կոր վերին երեսք հատածի գնդոյ գտանի, եթէ զմի մեծ շրջապատն բարձրութեամբ հատածոյն բազմացուցանիցես։

Զմտաւ ած, եթէ բովանդակ գունդն ի շրջանակէ անտի ԱՄԲ կէս բոլորակի զԱԲ երկակտրով (Ձեւ 201․) ծագեալ իցէ․ ի շրջապատի ծնանելի բոլորակին առ որ

զինչ եւ իցէ կէտ Մ, ձգեա ընդ այն զշօշափօղն ԳԴ, եւ արա ՄԴ = ՄԳ, եւ յետ այնորիկ ի վերայ ԱԲ առանցիցն ձգեա զուղղորդ գիծսն ՄՊ, ԳՍ, եւ ԴՌ, յայտ է եթէ ուղիղ գիծն ԳԴ՝ ի ժամանակի անդ շրջանակելոյ ԱՄԲ երեսաց գրիցէ զերեսս կողմանց միոյ կրճատեալ ուղղորդ. կոնի, որոյ հաւասար հեռաւոր խարսխացն ճառագայթք են ԳՍ եւ ԴՌ: Ապա ըստ ասացելոցս

Ն = 2շ ((ԳՍ + ԴՌ) / 2) × ԳԴ = 2շ · ՄՊ · ԳԴ (Հ. 295.)

իցէ, եթէ Ն զերեսս կողմանց գլխատեալ կոնին նշանակիցէ:

Իբրեւ առ Մ կէտն շօշափման ձգիցի կէս երկակտուրն ԿՄ (= ճ), եւ ԴՆ ⊥ ԳՍ, լինիցի ΔՄԿՊ ∾ Δ ԳԴՆ (Հ. 98. 2.), ուստի

ԳԴ : ԴՆ = ՄԿ : ՄՊ.

զորոյ զհետ գայ

ԳԴ · ՄՊ = ԴՆ · ՄԿ = ՍՌ · ճ,

զորոյ զզօրութիւնն իբրեւ ի վերին հաւասարութեանն հաստատիցեմք, գտանիցի

Ն = 2շ · ՍՌ · ճ = 2շ · ճ · ՍՌ:

Արդ ածցուք զմտաւ, եթէ ՔՔ աղեղն որով երեւք կողմանց հատածոյ գնդոյն դրիցի, կարի իմն փոքր իցէ, յայնժամ ԳԴ շօշափօղն կարի իմն սակաւու ի ՔՔ աղեղանէ անտի այլակերպ լինիցի, ուստի եւ յայս դէպս երեւք կողմանց այնր գլխատեալ կոնին ընդ կոր վերին երեսաց հատածի գնդոյն ի միում վայրի գտանիցին: Ուրեմն ի գօտի ինչ գնդոյ, որոյ կարի իմն փոքր իցէ բարձրութիւնն, է Ե = 2շ ճ·ք, յորում ք ցուցանէ զբարձրութիւնն:

Եւ ի կատարած զմտաւ ածցուք զբովանդակելի (այս է որոյ կատարած գուցէ) աղեղն ՔՄՔ յանքաւ

յանթիւ մասունս կտորեալ, եւ յամենայն կիտից բաժանման ուղղորդ գիծս ի վերայ ԱԲ երկակտրոյն ձգեալ, ի շրջանակէն բովանդակ երեսաց, այս անհնարին փոքր աղեղունքս, զորս մարթ է իբրեւ գիծս ուղիղս համարել, գրեն զկոր վերին երեսս անհնարին փոքր գօտւոց գնդոյ, զորոց զբարձրութիւնս կարգաւ ֆ, ֆ′, ֆ″, ... նշանագրովք նշանակեսցուք, եւ որոց բովանդակութիւնն ֆ + ֆ′ + ֆ″ + ... = ՍԴ լինիցի, եւ մի մի ի վերին երեսացս յայտնէ լինիցի = 2շճ · ֆ: Իսկ արդ Ե բովանդակութիւնն ամենայն վերին երեսացս է կոր երեսքն, որ ի ՖՄՔ աղեղանէ գրիցի. ուրեմն

Ե = 2ճշ · (ֆ + ֆ′ + ֆ″ + ...) = 2ճշ · ՍՌ = 2ճշ · +, յորում + = ՍՌ:

Ա. Եթէ + = ճ, յայնժամ Ե = 2ճ^{2}շ, այս ինքն կոր վերին երեսք կիսագնդոյ հաւասար է երկուց երեսաց մեծագոյն բոլորակի:

Ապա ուրեմն բովանդակ վերին երեսք գնդոյ հաւասար է չորից երեսաց մեծագոյն բոլորակի, այս ինքն Վ = 4 · ճ^{2}շ:

Զնոյն արդասիս գտանիցեմք, եթէ զծնանելի կէս բոլորակն ԱԳԲ, որպէս կէս կարգաւոր ինչ բազմանկեան, որոյ անբաւ կողմունք իցեն, համարիցեմք, ուստի եւ զգունդն որպէս գնդակերպ համարիցիմք, քանզի յայս դէպս հաւասարութիւնն

Վ = 2ճշ · ԱԱ′ (Հ. 299) փոփոխի ի

Վ = 2ճշ · 2ճ = 4ճ^{2}շ, քանզի (Ձեւ 198.) ՆԱ կարի իմն փոքր է, ուրեմն ՆՄ — ԱՄ = 0, ուստի եւ ԱԱ′ = աա′ = 2ճ իցէ:

Բ. Որովհետեւ 4ճ^{2}շ = 2ճշ · 2ճ = 2ճշ · ԱԲ, աստատին յայտ է, եթէ վերին երեսք գնդոյն գտանի, եթէ ոք զմեծագոյն շրջապատն երկակտրով գնդոյն բազմացուցանիցէ:

Գ. Եթէ զվերին երեսս երկուց գնդոց Վ եւ Հ, զերկակտուրսն Ե եւ Է, եւ զճառագայթս նոցին ճ, եւ ծ նշանագրովք նշանակեսցուք լինիցի

$$\text{Վ} : \text{Հ} = 4\text{ճ}^2 \cdot \text{շ} : 4\text{ծ}^2 \cdot \text{շ} = \text{ճ}^2 : \text{ծ}^2 = \text{Ե}^2 : \text{Է}^2$$

այս ինքն Վերին երեսք երկուց գնդոց համեմատին ընդ միմեանս, որպէս երկրորդ կարողութիւնք ճառագայթից նոցա կամ երկակտրոց ընդ միմեանս համեմատիցին:

Դ. Դնիցուք գրեսցուք եթէ զԱՆԲ (Ձեւ 201) բոլորակաւ ԷԹ չորեքկուսին արտաքոյ ձգիցի, ուղեղ գիծն ՁԷ ($= \text{ԱԲ} = 2\text{ճ}$) ի ժամանակի անդ շրջանակելոյ ԱՆԲ երեսաց շուրջ զԱԲ առանցիւք, գրէ զերեսս կողմանց գլանի, որ արտաքոյ զգնդով ձգեալ է, որ եւ է

$$= 2\text{շ} \cdot \text{ԲՁ} \cdot \text{ՁԷ} = 2\text{շ} \cdot \text{ճ} \cdot 2\text{ճ} = 4\text{ճ}^2\text{շ}:$$

Ապա ուրեմն վերին երեսք գնդոյ հաւասար է երեսաց կողմանց հաւասարակող գլանին, որ զգնդովն արտաքոյ ձգիցի:

Բովանդակ վերին երեսք գլանին է

$$\text{Վ}' = 4\text{ճ}^2\text{շ} + 2\text{ճ}^2\text{շ} = 6\text{ճ}^2\text{շ}, \text{ յորմէ}$$

$$\text{Վ}' : \text{Վ} = 6\text{ճ}^2\text{շ} : 4\text{ճ}^2\text{շ} = 3 : 2, \text{ յորմէ } \text{Վ} = \tfrac{2}{3}\text{Վ}'$$

այս ինքն Վերին երեսք գնդոյ է $\frac{2}{3}$ մասն բովանդակ վերին երեսաց գլանին, որ զնովաւ արտաքոյ ձգիցի:

Ե. Իբրեւ կէս հատածոյ բոլորակի ԱՊԻԺ զԱՊ առանցիւքն շրջանակիցի, յայնժամ ԱԺԻ աղեղն ձգէ զՀ վերին երեսս (Խոյր) իրիք հատածի գնդոյ, որոյ բարձրութիւնն $= \text{ԱՊ}$: Ուրեմն է

$$\text{Հ} = 2\text{ճ}\text{շ} \cdot \text{ԱՊ} = \text{շ} \cdot \text{ԱԲ} \cdot \text{ԱՊ} \cdot$$

Արդ իբրեւ ձգիցի լարն ԱԻ, յայնժամ $\text{ԱՊ} : \text{ԱԻ} = \text{ԱԻ} : \text{ԱԲ}$, ուստի եւ $\text{ԱԲ} \cdot \text{ԱՊ} = \text{ԱԻ}^2$· որով է $\text{Հ} = \text{շ} \cdot \text{ԱԻ}^2$, այս ինքն Տարածութիւն մարմնոյ խուրի հաւասար է երեսաց բոլորակի որոյ կէս

երկակտուր է ԱԻ լարն որ զԱԺԻ աղեղամբ ի ներքոյ ձգիցի:

311. Խնդիր: Զգնդական վերին երեսս ԱԳԲԼԱ սեպաձեւ բաժնի (Ձեւ 199.) համարել, եթէ հան-դերձ կէս երկակտրով գնդոյն եւ գնդական ԼԱԳ անկիւնն, կամ նորին չափն այսինքն ԳԼ աղեղն ծանուցեալ իցէ:

Լուծումն: Համարեսցուք եթէ իցէ ԱՄ = ճ, եւ գնդական անկիւնն ԼԱԳ, ուստի եւ աղեղն ԼԳ = ս^0:

Վերադոյն ի Հ. 301, ասացեալ է մեր, եթէ գնդական վերին երեսքն ԱԳԲԼԱ = Ն համեմատի առ բոլորդակ վերին երեսս գնդոյն. որպէս անկ. ՇԱշ : 360⁰, ուստի եւ որպէս աղ. ԼԳ : $360^0 = \text{ս}^0 : 360^0$, այս ինքն է $\text{ս}^0 : 360^0 = \text{Ն} : 4\text{ճ}^2\text{շ}$. զորոյ զհետ գայ

$$\text{Ն} = \frac{\text{ս}^0}{360} \cdot 4\text{ճ}^2\text{շ} = \frac{\text{ս}}{180} \cdot 2\text{ճ}^2\text{շ} = \frac{\text{ս}}{90} \cdot \text{ճ}^2\text{շ},$$

312. Խնդիր: Զտարածութիւն երեսաց գըն-դական երեքանկեան հաշուել:

Լուծումն: Իցէ ԴՊՁ (Ձեւ 199.) երեքանկիւնն գնդական, զորոյ երեսացն անջրպետութիւն կամք են մեզ ա նշանագրաւ յանդիման կացուցանել. իսկ գըն-դական անկիւնն ԴՊՁ իցէ = ս^0, ՊԴՁ = ն^0, եւ ԴՁՊ = փ^0, ուստի եւ գնդական վերին երեսքն լի-նիցին

$$\text{ՆԲԴՊ} = \text{ՆԲՁՊՆ} - \Delta\text{ԴՊՁ},$$

$$= \frac{\text{փ}}{180} \cdot 2\text{ճ}^2\text{շ} - \text{ա} \ (\text{Հ}.\ 311.),$$

$$\text{ԳՊՁԱԳ} = \text{ԳՊԴՁԱԳ} - \Delta\text{ԴՊՁ}$$

$$= \frac{\text{ն}}{180} \cdot 2\text{ճ}^2\text{շ} - \text{ա},$$

$$\text{ԳՊԵ} = \text{ՏԳՊԵՏ} - \Delta\text{ԳԵՏ}$$
$$= \text{ՏԴՊՋՏ} - \Delta\text{ԴՊՋ}$$
$$= \frac{\text{մ}}{180} \cdot 2\text{ճ}^2\text{շ} - \text{ա}\,.$$

ուստի եւ յաւելլով զերիս հաւասարութիւնսն

$$\text{ԵԲԴՊ} + \text{ԳՊՋԱԳ} + \text{ԳՊԵ} = 2\text{ճ}^2\text{շ}\left(\frac{\text{փ}}{180} + \frac{\text{ն}}{180} + \frac{\text{մ}}{180}\right) - 3\text{ա}$$

այս ինքն կէս վերին երեւքն գնդոյն նուազ ա, կամ

$$2\text{ճ}^2\text{շ} - \text{ա} = 2\text{ճ}^2\text{շ}\left(\frac{\text{փ}+\text{ն}+\text{մ}}{180}\right) - 3\text{ա}, \text{ կամ}$$

$$2\text{ա} = 2\text{ճ}^2\text{շ}\left(\frac{\text{փ}+\text{ն}+\text{մ}}{180}\right) - 2\text{ճ}^2\text{շ}, \text{ կամ}$$

$$\text{ա} = \text{ճ}^2\text{շ}\left[\frac{(\text{փ}+\text{ն}+\text{մ})}{180} - 1\right] =$$
$$\text{ճ}\,[\text{փ}^0 + \text{ն}^0 + \text{մ}^0 - 180^0]\frac{\text{ճ}\text{շ}}{180^0}\text{:}$$

Իսկ արդ

$$\frac{(\text{փ}^0 + \text{ն}^0 + \text{մ}^0 - 180^0)\,\text{ճ}\text{շ}}{180^0}$$

է երկայնութիւն $(\text{փ}^0 + \text{ն}^0 + \text{մ}^0 - 180^0)$ աղեղան բոլորակի մասամբ կէս երկակորոյն չափեալ (Հ. 174. Խն. Բ.), ուրեմն Տարածութիւն երեսաց գնդական երեքանկեան գտանի, եթէ ոք զկէս երկակուրն գնդոյն բազմացուցանիցէ չափով երկայնութեան միոյ մեծագոյն աղեղան բոլորակի, որ այնչափ ինչ աստիճանս ունիցի, որչափ միանգամ յաստիճանս երից գնդական անկեանց միանգամայն աւելի կայցէ քան զ180⁰:

313. Տարածութիւն մարմնոյ գնդոյն գտանի, եթէ զվերին երեսս նորին երրորդ մասամբ կէս երկակորոյն բազմացուցանիցես (Զեւ 202.):

Զմտաւ ած, եթէ ընդ ԱԲ երկակուրն մեծագոյն բոլորակի անթիւ եւ անհամար հաւասար հե-

ռաւոր բոլորակք եղեալ հաստատոյն, նոյնպէս եւ անթիւ հաւասար հեռաւոր կտրուածք ԳԺ, ԳԹ, ԶԸ, ... ուղղորդ ի վերայ ԱԲ երկակտրոյն, տային վերին երեսք գնդոյն յանհամար փոքր ձեւս աբգդ, ադժ, ... Աան, ԱնԵ, ... կտորիցի, զորս վասն անյայտ եւ անհնարին փոքրիկ մեծութեանն մարթ է ուղղագիծ ձեւս համարել:

Ի կատարած իբրեւ ընդ աբ, բգ, ժ, ... կողմանս եւ ընդ Մ կենդրոնն հաստատոյն երեսքն աՄբ, բՄգ, դՄգ, եւ այլքն եւս մի ըստ միոջէ, ողջոյն իսկ գունդն բովանդակ ի փոքր բրգունս (տարերս) բաժանիցի, որոց խարիսխ կարի իմն փոքրագոյն մասունքն աբգդ, ադժ, ... վերին երեսաց գնդոյն է, եւ որոց գագաթունքն միանգամայն ի Մ միջոցին գտանին, որոց հասարակաց բարձրութիւնն կէս երկակտուրն է: Իսկ արդ տարածութիւն մարմնոյ միոյ ի տարերաց գնդոյն է $= \frac{1}{3}ճ \cdot Խ$, յորում ճ զճառագայթ գնդոյն, եւ Խ զխարիսխ տարերն ցուցանեն, զորին զհետ գայ, եթէ բովանդակութիւն ամենայն տարերցն, այս է տարածութիւն մարմնոյ ողջոյն գընդոյն իցէ հաւասար բովանդակութեան ամենայն խարսխացն, այս ինքն վերին երեսաց գնդոյն, որ երրորդ մասամբ կէս երկակտրոյ գնդոյն իցէ բազմապատկեալ:

Ա. Իսկ արդ վերին երեսք գնդոյն է $= 4ճ^2շ$, ուրեմն տարածութիւն մարմնոյ գնդոյն $Գ = \frac{1}{3} ճ \cdot 4ճ^2շ = \frac{4}{3} ճ^3շ$, կամ եթէ $ճ = \frac{1}{2}Ե$, վասն որոյ եւ $ճ^3 = \frac{1}{8}Ե^3$ գնիցեմք, լինիցի

$$Գ = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} Ե^3 \cdot շ = \frac{1}{6} Ե^3շ = \frac{շ}{6} Ե^3$$

այս ինքն. Տարածութիւն մարմնոյ գնդոյն գտանի, եթէ զք զերրորդ կարողութիւն երկակտրոյ գնդոյն վեցերորդ մասամբ շրջագծեան թուոյն բազմապատկիցէ:

Բ. Իբրեւ զտարածութիւնս մարմնոյ երկուց գնդոց Գ եւ գ, զճառագայթսն նոցա Ճ եւ ճ, զեր-կակտուրսն եւ Ե եւ ե, եւ զվերին երեսս նոցա Վ եւ վ նշանագրովք նշանակիցեմք, իցէ

$$Գ = \frac{1}{3} Ճ \cdot Վ = \frac{4}{3} Ճ^3 շ = \frac{1}{6} շ Ե^3, \text{ եւ}$$
$$գ = \frac{1}{3} ճ \cdot վ = \frac{4}{3} ճ^3 շ = \frac{1}{6} շ ե^3, \text{ ուրեմն}$$
$$Գ : գ = Ճ \cdot Վ : ճ \cdot վ = Ճ^3 : ճ^3 = Ե^3 : ե^3,$$

այս ինքն Երկու գունդք համեմատին ընդ միմեանս յօդուածոյ կշռութեամբ վերին երեսաց իւրեանց եւ կէս երկակտրոց, կամ երեքկնեալ կշռութեամբ ճառագայթից իւրեանց կամ երկակտրոց:

314. Խնդիր: Զտարածութիւն մարմնոյ 1) բաժանածի գնդոյ, եւ 2) հատածի գնդոյ գտանել:

Լուծումն Ա: Իցէ ԱԲԿ (Ձեւ 203.) բաժանած բոլորակի, որոյ շրջելովն զԲԿ $=$ Ճ կէս երկակտրով ելանիցէ Ա բաժանած գնդոյ, եւ ԲՊ բարձրութիւնն Ա՛ հատածի գնդոյ որ ի ԱՄԲՊ կէս բաժանածէ բոլորակի յօրինեալ է, իցէ $= +$: Ա բաժին գնդոյ է մարմին կոնաձեւ որոյ ԱՄԲԴԵ $=$ Խ խարիսխ է, եւ որոյ գագաթն կայ ի Կ, եւ որոյ բարձրութիւն է $=$ ԲԿ $=$ Ճ: Նովին պատճառօք, զոր ի Հ. 313 տեսցուք, գտանի $Ա = \frac{1}{3} Խ \cdot Ճ$, իսկ $Խ = 2Ճշ.+$ (Հ. 310.), զորին զհետ դայ փոխանակելով $Ա = \frac{1}{3} \cdot 2Ճշ.+ \cdot Ճ = \frac{2}{3} շՃ^2 .+$:

Բ. Երեքանկիւնն ԱԿՊ ի ժամանակի անդ-շարժելոյ բովանդակ երեսաց շուրջ զԲԿ առանցիւք, գրէ ուղղորդ կոն ինչ, զոր նշանակեսցուք Կ նշանագրաւ. ուրեմն տարածութիւն հատածոյ բոլորակի, որ ԱՄԲՊ ձեւոյ գրիցի է հաւասար Ա բաժանածի գնդոյ Կ կոնիւ չափ նուազ, այս է $Ա' = Ա - Կ$, եւ քանզի (ըստ Ա) $Ա = \frac{2}{3} Ճ^2 շ.+$, եւ $Կ = \frac{1}{3} ԱՊ^2 \cdot շ \cdot ՊԿ$ (Հ. 296.) $= \frac{1}{3} շ \cdot ԲՊ \cdot ՊԷ\,(ԲԿ - ԲՊ) = \frac{1}{3} շ \cdot +\,(ԲԷ - ԲՊ)(ԲԿ - ԲՊ) = \frac{1}{3} շ \cdot +\,(2Ճ - +)(Ճ - +) = \frac{1}{3} շ \cdot +\,(2Ճ^2 - 3Ճ+ + +^2)$ ուրեմն փոխանակելով $Ա = \frac{2}{3} Ճ^2 շ \cdot + -$

$\frac{1}{8}$ շխ $(2ճ^2 - 3ճխ + խ^2) = \frac{1}{3}$ շխ $[2ճ^2 - 2ճ^2 + 3ճխ - խ^2] = \frac{1}{3}$ շ$խ^2 (3ճ - խ)$:

Եթէ կամք իցեն զտարածութիւն գօտւոյ գնդոյն, որ ի մէջ ԱԵԴ եւ ՄԶՆ կայցէ, գտանել, յայնժամ լինիցի Գ = Ա′ — Ա″. եթէ զգօտին = Գ, եւ զտարածութիւն հատածոյ գնդոյն, որ ի ԲՄԴ երեսաց ծնանիցի = Ա″ դնիցեմք:

Համարեսցուք եթէ ԲԴ = ձ, յայտ է եթէ Ա″ $= \frac{2}{3}$ շ$ձ^2 (3ճ - ձ)$ ուստի եւ Գ $= \frac{2}{3} [խ^2 (3ճ - խ) - ձ^2 (3ճ - ձ)]$:

215. Զմտաւ ածցուք եթէ զհաւասարակող ինչ գլանաւ գունդ ինչ եւ կոն ինչ շուրջանակի ներքոյ ձգիցին. գլանն եւ կոնն ունիցին իւրեանց խարիսխ զմեծագոյն բոլորակ ինչ գնդոյն որ ներքոյ ձգեալն է, եւ բարձրութիւն նոցա իցէ երկակտուրն գնդոյն: Արդ իբրեւ զգլանն դնիցեմք = Գ, զկոնն = Կ, եւ զգունդն = Գ′, զկէս երկակտուր գնդոյն = ճ, իցէ

$$Գ = ճ^2 շ \cdot 2ճ = 2ճ^3 շ,\ Գ' = \frac{4}{3} ճ^3 շ,\ եւ$$
$$Կ = \frac{1}{3} ճ^2 շ \cdot 2ճ = \frac{2}{3} ճ^3 շ,$$

ուստի եւ

$$Գ : Գ' : Կ = 2ճ^3 շ : \frac{4}{3} ճ շ^3 \cdot \frac{2}{3} ճ^3 շ =$$
$$2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = 6 : 4 : 2 = 3 : 2 : 1 :$$

Դարձեալ զմտաւ ածցուք եթէ արտաքոյ զգնդաւ ձգիցի գլան մի հաւասարակող եւ կոն մի հաւասարակող, եւ եթէ զառաջին օրինակն նշանակելոյ հաստատուն պահիցեմք, յայնժամ, որովհետեւ խարիսխ գլանին է մեծագոյն երեւք բոլորակի, բարձրութիւն նորա է երկակտուրն գնդոյն, է Գ $= 2ճ^3 շ$, եւ Գ′ $= \frac{4}{3} ճ^3 շ$: Արդ եթէ բարձրութիւն արտաքոյ ձգեալ կոնին = բ, եւ կողմն նորին = խ դիցի, լինիցի ճառագայթ խարսխի այնր կոնի $= \frac{1}{2}$ խ, եւ (ըստ Հ. 171.)
$խ = 2ճ \sqrt{3}$,

$$բ = \sqrt{[խ^2 - \frac{1}{4} խ^2]} = \frac{խ}{2} \sqrt{3} = ճ \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3ճ$$

Եւ ըստ այսոցիկ

$$Կ = \frac{1}{3}\left(\frac{Ք}{2}\right)^2 շք = \frac{1}{3}\,\frac{Ք^2}{4} շք = \frac{1}{12} \cdot 12\,ճ^2 շ \cdot 3ճ = 3ճ^3 շ$$

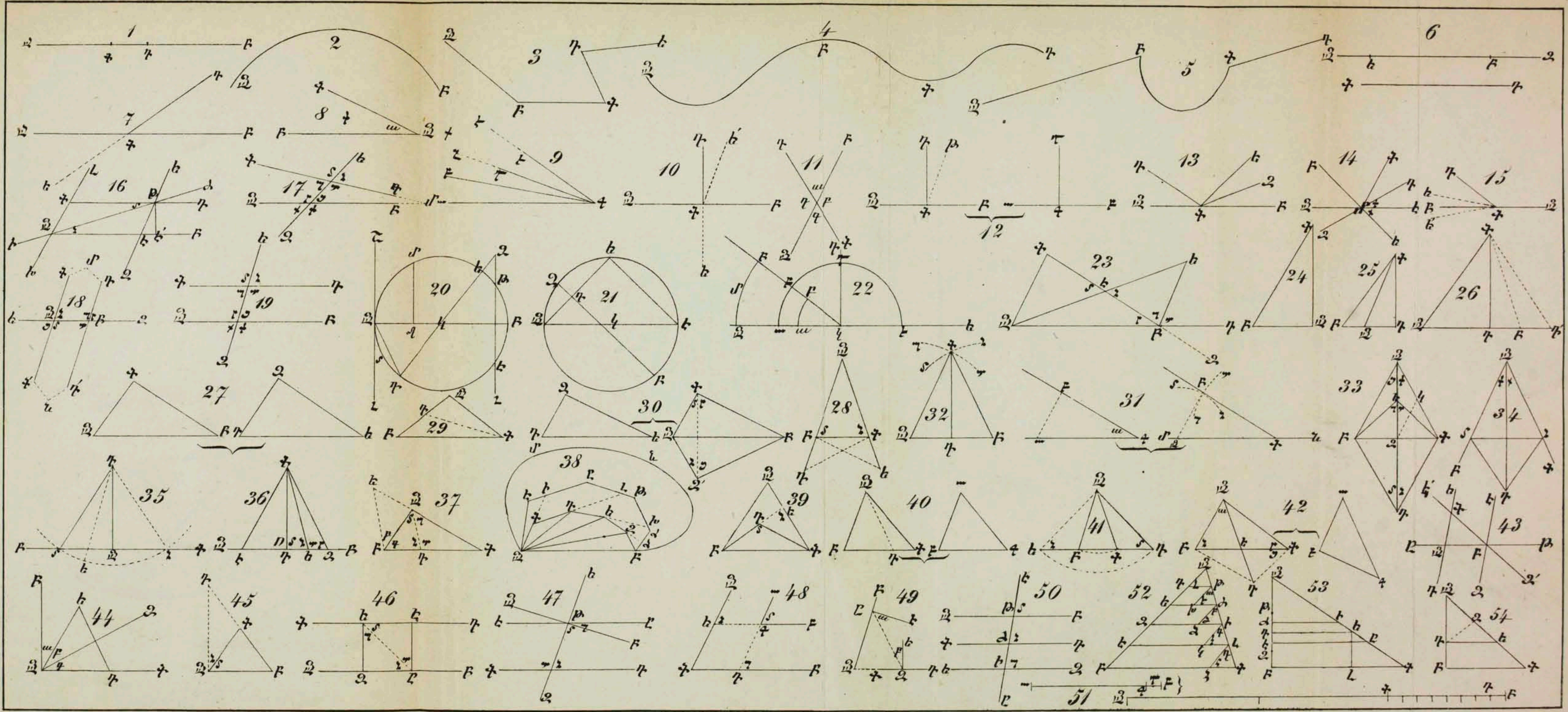
զորոյ զՀետ գայ

$$Գ' : Գ : Կ = \frac{4}{3}\,ճ^3 շ : 2ճ^3 շ : 3ճ^3 շ = 4 : 6 : 9$$

Նոյն կշռութիւն ունին առ միմեանս եւ բովանդակ վերին երեւք մարմնոցս այսոցիկ։

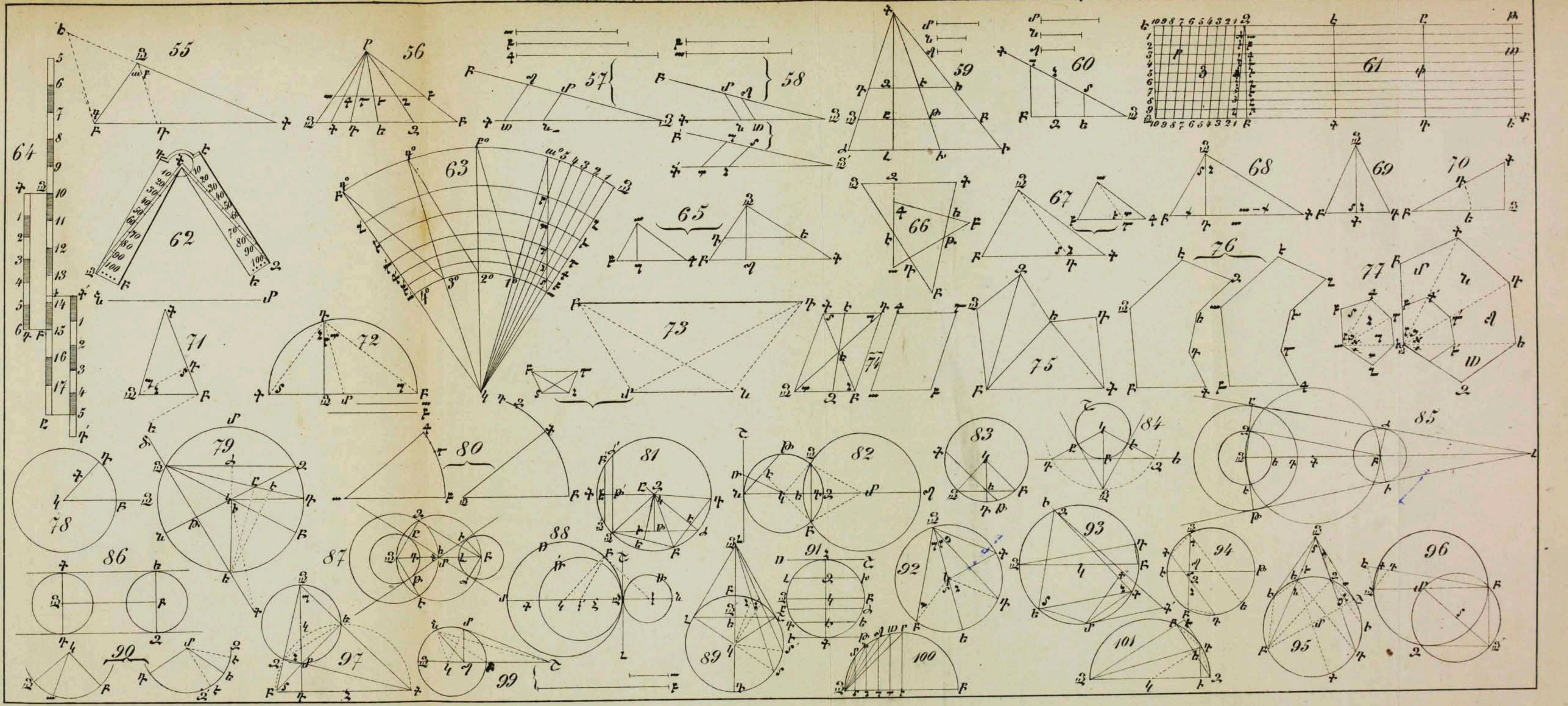
- 8 ИЮНЬ 1898
Центр. Библ. Арм. Благ. Общ.

ՀԱՅՈՑ ԲԱՐԵԳՈՐԾ. ԸՆԿ.
ԳՐԱԴԱՐԱՆ
ԹԻՖԼԻՍ ՀԻՄՆ. 1884 ՆՈՐՈԳ. 1909 Тифл.
основ. 1884 нов. пер. 1909
БИБЛIОТЕКА
Арм. Благотв. О-ва на Кавк.



Բ ՏՈՐՔԱՐ ՈՒՍՈՂ. ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ.

28 ИЮН 1900
ԹԻՖԼԻՍՈՒՄ



Բ. ԱՌԱՋԻՆ ՈՒՍՈՒՄՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԵԱՆ.