

УДК: 52:53

О ТЕПЛОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМ

А. Г. КРИЦУК

Поступила 23 июля 1987

Принята к печати 15 октября 1987

Устойчивость газодинамических систем с объемными источниками энергии исследована прямым методом Ляпунова. Построены семейства функционалов, удовлетворяющие условиям теорем метода. Найдены критерии неустойчивости межзвездного газа в нестационарных условиях. Получены гидродинамический и термодинамический критерии устойчивости гидростатического равновесия слоя межзвездного газа.

1. *Введение.* В космической газодинамике часто встречаются задачи, в которых важное влияние на энергетику течений оказывают объемные источники энергии. Появление в уравнении энергии члена, описывающего источник, эффективность работы которого зависит от локальных условий в газе, во многих случаях приводит к неустойчивости решений. Хорошо известные примеры таких неустойчивостей — тепловая неустойчивость межзвездного газа, обусловленная потерями энергии на излучение [1, 2], неустойчивость гелиевого слоевого источника, вызванная сильной температурной зависимостью выделения энергии в ядерных реакциях [3], и др. В простейших случаях однородных стационарных течений метод малых возмущений позволяет выделить неустойчивые моды. Однако чаще приходится иметь дело с нестационарными неоднородными задачами, в которых линейные уравнения для возмущений газодинамических переменных не имеют простых гармонических решений, и поиск критерия устойчивости затруднен. Для исследования устойчивости произвольных течений может оказаться полезным прямой метод Ляпунова, основанный на использовании однопараметрических семейств знакоопределенных функционалов, построенных на пространстве решений уравнений газодинамики [4]. Прямой метод позволяет получить достаточные условия устойчивости и неустойчивости и, вообще говоря, не требует нахождения решения линейной задачи. Основная проблема, возникающая при его применении, заключается в построении функционалов, удовлетворяющих условиям теорем об устойчивости. Термодинамическая теория устойчивости [5, 6] основана на

применении в качестве функционала типа Ляпунова производства обобщенной избыточной энтропии и позволила получить критерии устойчивости и неустойчивости относительно малых возмущений для сложных неравновесных газодинамических течений.

В настоящей работе подход к проблеме устойчивости, развитый в [5], обобщен на случай термодинамических систем с объемными источниками энергии. В качестве примеров получены условия тепловой неустойчивости для межзвездного газа в нестационарных условиях и критерий конвективно-тепловой неустойчивости для слоя газа в однородном поле тяготения.

2. *Термодинамика и устойчивость неравновесных систем с источниками энергии.* Рассмотрим сплошную среду, заполняющую объем V , ограниченный поверхностью Ω . Первое начало термодинамики

$$dE = -pdV + dQ^{(*)} + dQ^{(s)} \quad (1)$$

связывает изменение внутренней энергии системы dE с работой внешних макроскопических сил $-pdV$, притоком тепла извне через границу системы $dQ^{(*)}$ и притоком тепла $dQ^{(s)}$, обусловленным возможностью выделения или поглощения энергии в элементарном объеме среды в результате процессов обратимой или необратимой природы, затрагивающих внутреннее (по отношению к используемому уровню описания среды) степени свободы вещества. Величина $dQ^{(s)}$ может определяться выделением или поглощением энергии, сопровождающим химические или ядерные реакции, потерями энергии на излучение, свободно покидающее объем системы, нагревом среды в результате взаимодействия с частицами высоких энергий и т. д. Однако для применимости термодинамического описания необходимо, чтобы эти процессы не нарушали локального термодинамического равновесия (ЛТР) в системе. Формально это требование выражается двумя неравенствами (см. [7])

$$k_n \equiv l/d \ll 1, \quad k_n \ll t_s/t_H. \quad (2)$$

Здесь k_n —число Кнудсена, d —характерный линейный размер системы, l —длина свободного пробега частиц среды, t_H —характерное гидродинамическое время, t_s —время работы источника энергии. Первое неравенство (2) является условием существования ЛТР, а второе ограничивает мощность источника энергии.

Введем энтропию S как экстенсивную величину, являющуюся функцией состояния системы,

$$TdS = dQ^{(*)} + dQ^{(s)} + dQ^{(i)}. \quad (3)$$

Последний член в (3)—так называемое некомпенсируемое тепло [8]—

описывает выделение энергии в результате процессов необратимой природы (например, диссипации энергии в результате внутреннего трения), $dQ^{(n)} \geq 0$. Величина $dQ^{(s)}$ обращается в нуль при определенном выборе условий на границе системы (в случае изолированной системы). Знак $dQ^{(s)}$ в общем случае неопределен, а величина не зависит от граничных условий. Для изменения энтропии в системе имеем (ср. [5])

$$dS = d_e S + d_s S + d_i S, \quad (4)$$

где $d_e S$ — поток энтропии через границу системы, $d_s S$ — объемный источник энтропии, связанный с $dQ^{(s)}$, $d_i S \geq 0$ — производство энтропии при необратимых процессах.

Используя предположение об ЛТР, введем удельную энтропию как функцию локальных условий в системе. Для двухпараметрических сред удобно принять $s = s(e, 1/\rho)$, где e — удельная внутренняя энергия, $1/\rho$ — удельный объем среды. Формула Гиббса определяет полный дифференциал энтропии на единицу массы

$$T \delta s = \delta e + p \delta 1/\rho. \quad (5)$$

В (5) температура T и давление p имеют тот же смысл, что и в равновесной термодинамике.

Теория термодинамической устойчивости неравновесных систем [5] основана на использовании второго дифференциала энтропии

$$\delta^2 s = \delta T^{-1} \delta e + \delta(p T^{-1}) \delta \rho^{-1} = -\frac{1}{T} \left[\frac{c_v}{T} (\delta T)^2 + \frac{\rho}{\chi} (\delta \rho^{-1})^2 \right], \quad (6)$$

который в случае положительной теплоемкости при постоянном объеме c_v и изотермической сжимаемости χ (условия устойчивости ЛТР в системе [5], которые в дальнейшем всегда будут предполагаться выполненными) представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму приращений независимых переменных. Определение знака производной по времени, вычисленной при постоянных коэффициентах квадратичной формы (6), фиксированных при $t = t_0$,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 s = \delta T^{-1} \frac{\partial \delta e}{\partial t} + \delta(p T^{-1}) \frac{\partial}{\partial t} \delta 1/\rho \quad (7)$$

дает достаточное локальное условие устойчивости (неустойчивости) системы относительно малых флуктуаций термодинамических переменных [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta^2 s \geq 0 \quad (< 0), \text{ при } t \geq t_0. \quad (8)$$

Производные по времени в правой части (7) можно исключить, используя уравнения эволюции для возмущений. Чтобы учесть влияние граничных условий, проинтегрируем (6) и (7) по массе системы. Теперь достаточные условия термодинамической устойчивости (неустойчивости) системы как целого имеют вид

$$\delta^2 S \equiv \int_V \rho \delta^2 s dV < 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 S > 0 \quad (< 0), \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (9)$$

Первое из неравенств (9) автоматически выполняется, если $c_v, \chi > 0$. В невозмущенном состоянии $\delta^2 S = 0$. Второе неравенство (9) следует из теорем, обобщающих прямой метод Ляпунова на системы, описываемые уравнениями с частными производными ([4] теоремы 88, 90).

Производная по времени от $\delta^2 S$ в соответствии с (4) содержит вклады трех типов: производство избыточной энтропии в системе в единицу времени при необратимых процессах, мощность источника избыточной энтропии и полный поток избыточной энтропии, определяемый граничными условиями для возмущений. Устойчивость изолированных систем, близких к равновесным, полностью определяется свойствами источника избыточной энтропии, поскольку в окрестности равновесного состояния производство избыточной энтропии всегда положительно (по теореме Пригожина).

Чтобы учесть влияние конвективных эффектов ($v \neq 0$, $\delta v \neq 0$) на устойчивость системы, введем, следуя [5], квадратичную форму

$$\delta^2 \zeta \equiv \delta^2 \left(\tau^2 s - v^2 \frac{1}{2} T_0^{-1} v^2 \right), \quad (10)$$

где $T_0 = T(t = t_0)$, а τ^2, v^2 — положительные весовые функции переменных состояния, имеющие одинаковую размерность, $\delta \tau^2 = \delta v^2 = 0$. Достаточные условия устойчивости (неустойчивости), с учетом конвективных эффектов имеют вид

$$\delta^2 Z \equiv \int_V \rho \delta^2 \zeta dV < 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta^2 Z \geq 0 \quad (< 0) \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (11)$$

Семейство функционалов $\delta^2 Z$ аналогично обобщенным энергетическим функционалам, применяемым в теории гидродинамической устойчивости [9].

Проиллюстрируем применение условий (9), (11) на примере исследования тепловой неустойчивости межзвездного газа.

3. Устойчивость межзвездного газа в нестационарных условиях. Тепловая неустойчивость межзвездного газа обусловлена его способностью к

радиативному охлаждению и нагреванию при взаимодействии с частицами космических лучей, фотонами высоких энергий и т. д. Подробное физическое описание механизма неустойчивости приведено в [10]. Исследование устойчивости равновесия межзвездного газа, при котором потери энергии компенсируются ее поступлением в среду, проведено в [2] методом малых возмущений, где выделены моды, соответствующие неустойчивым изобарическим (конденсационная мода) и адиабатическим возмущениям (волновые моды). Здесь мы ограничимся рассмотрением неравновесных, но однородных по температуре и плотности состояний системы без учета крупномасштабных движений ($v = 0$)

Для описания межзвездной среды воспользуемся моделью идеального теплопроводящего газа с постоянными теплоемкостями, объемные источники и стоки энергии в котором описываются функцией теплопотери $Z(\rho, T)$:

$$dq^{(s)} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt, \quad dq^{(s)} = -Z dt, \quad dq^{(l)} = 0; \quad (12)$$

$$de = c_v dt, \quad p = R\rho T.$$

Здесь

$$dQ^{(s,*)}/T = \int_V \rho T^{-1} dq^{(s,*)} dV, \quad \vec{q} = -k(T) \nabla T, \quad (13)$$

где k — коэффициент теплопроводности, R — газовая постоянная. Для приращения энтропии, следуя (4), получим

$$d_* S = - \int_{\Sigma} T^{-1} q_n d\Omega, \quad d_* S = - \int_V \frac{\rho Z}{T} dV, \quad d_l S = \int_V \vec{q} \cdot \nabla (T^{-1}) dV. \quad (14)$$

При малых изобарических возмущениях ($\delta\rho/\rho = -\delta T/T$) конвективные эффекты не оказывают влияния на устойчивость [11] и можно применить термодинамическое условие устойчивости (9). Для $\delta^2 s$ имеем

$$\delta^2 s = -c_p T^{-2} (\delta T)^2 < 0. \quad (15)$$

Используя уравнение эволюции изобарических возмущений

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho}{p} \delta (\rho Z + \operatorname{div} \vec{q}), \quad (16)$$

после элементарных преобразований, при отсутствии возмущений температуры на границе системы ($\delta^2 d_* S = 0$), получим условие неустойчивости (9) в форме

$$\int_V [\Lambda_p (\delta T)^2 - k T (\nabla \delta T)^2] dV > 0, \quad t \geq t_0, \quad (17)$$

где

$$\Lambda_p = \rho \left[Z + \rho \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)_T - T \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_\rho \right]. \quad (18)$$

В случае малых адиабатических возмущений $\left(\delta \rho / \rho = \frac{1}{\gamma - 1} \delta T / T \right)$ удобно перейти в (6) к независимым переменным (s, ρ) . В новых переменных

$$-T \delta^2 \zeta = \delta^2 e \equiv \tau^2 [\delta T \delta s - \delta(p/\rho^2) \delta \rho] + v^2 (\delta v)^2 > 0 \quad (19)$$

($\delta^2 e = \delta^2 e$ при $\tau^2 = 1$, $v^2 = 0$), Уравнения эволюции для возмущений имеют вид

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \delta v, \quad \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\nabla \delta p / \rho, \quad \frac{\partial \delta s}{\partial t} = -\delta(Z/T - \operatorname{div} \vec{q} / \rho T). \quad (20)$$

Полагая $\delta T = 0$ на Ω , $\tau^2 = 1$, $v^2 = -(\gamma - 2)/\gamma$, используя (20), (12), (13), после элементарных преобразований получим критерий неустойчивости (11) в форме

$$\int_V [\Lambda_s (\delta T)^2 - k T (\nabla \delta T)^2] dV > 0, \quad t \geq t_0, \quad (21)$$

где

$$\Lambda_s = \rho \left[Z - T \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_\rho - \frac{1}{\gamma - 1} \rho \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)_T \right]. \quad (22)$$

Из (17), (21) следуют локальные условия неустойчивости

$$\rho \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)_T - T \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_\rho > 0, \quad \frac{1}{\gamma - 1} \rho \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)_T + T \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_\rho < 0 \quad (23)$$

для равновесных систем по отношению к изобарическим и адиабатическим возмущениям с длиной волны

$$\lambda \equiv \delta T / |\nabla \delta T| > \lambda_{cr}^{p,s} \equiv (k T \Lambda_{p,s}^{-1})^{1/2}. \quad (24)$$

Этот результат совпадает с результатом Филда [2], полученным методом малых возмущений. Если пренебречь влиянием теплопроводности, (17), (21) дают локальные условия неустойчивости в неравновесных системах $\Lambda_{p,s} > 0$, эквивалентные линейным критериям [12], [13].

При ненулевых граничных условиях для возмущений температуры на устойчивость системы будет оказывать влияние поток энтропии через границу $\delta^2 d_e S$. Положительный поток может стабилизировать неустойчивую систему. Дополнительная стабилизация адиабатических возмущений в случае $\delta T|_e \neq 0$ возможна за счет потока кинетической энергии, пронизывающего систему, $\sim \int \delta v_n \delta p d\Omega > 0$ при $\delta v_n \neq 0$ на границе.

4. Устойчивость слоя межзвездного газа в однородном поле тяготения. При исследовании устойчивости гидростатического равновесия, как и ранее, определим модель среды соотношениями (12), (13). Воспользуемся уравнениями эволюции для возмущений в приближении Буссинеска. Для описания сжимаемого газа это приближение применимо в случае, если [14]: а) толщина слоя h много меньше шкалы высот изменения термодинамических переменных.

$$h \ll \min \left| f_0^{-1} \frac{df_0}{dx} \right|^{-1}, \quad (25)$$

где

$$f(x, y, z; t) = f_m + f_0(z) + \delta f(x, y, z; t); \quad (26)$$

б) флуктуации термодинамических переменных не превосходят по порядку величины их гидростатических изменений

$$|\delta f/f_m| \lesssim \Delta f_0/f_m \ll 1. \quad (27)$$

Пусть в исходном состоянии система находится в тепловом и гидростатическом равновесии

$$Z_m = 0, \quad \frac{\partial q_0}{\partial z} = (\rho Z)_0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = -g(\rho_m + \rho_0), \quad (28)$$

g — ускорение свободного падения. Эволюция малых возмущений определяется системой уравнений [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta T}{\partial t} &= \Delta \Gamma T \delta w + \delta (\text{div} \vec{q} - \rho Z) / \rho_m c_p, \\ \partial \delta \vec{v} &= - \frac{1}{\rho_m} \nabla \delta p + \alpha_m \vec{g} \delta T, \\ \nabla \cdot \delta \vec{v} &= 0, \\ \delta \rho / \rho_m &= - \delta T / T_m \equiv - \alpha_m \delta T, \end{aligned} \quad (29)$$

где δw — возмущение вертикального компонента скорости, $\Delta_\gamma T \equiv -(g/c_p + dT_0/dz)$ — так называемый сверхадиабатический градиент, d_m — коэффициент теплового расширения. Задавая нулевые $\delta T = \delta w = 0$ условия на верхней и нижней границах слоя, используя (25)–(29), получим критерий неустойчивости (11) в виде

$$\int_V \{ \tau^2 [c_p \rho_m \Delta_\gamma T_0 \delta w - k_m (\nabla \delta T)^2 + \Lambda_p (\delta T)^2] + v^2 \rho_m g \delta T \delta w \} dV > 0. \quad (30)$$

Произвол в выборе весовых функций τ^2 и v^2 позволяет представить (30) в виде совокупности двух неравенств, выражающих термодинамическое и гидродинамическое условия неустойчивости:

$$\int_0^h [c_p \rho_m \Delta_\gamma T_0 \langle \delta T \delta w \rangle - k_m \langle (\nabla \delta T)^2 \rangle + \Lambda_p \langle (\delta T)^2 \rangle] dz > 0, \quad (31)$$

$$\int_0^h \langle \delta T \delta w \rangle dz > 0 \quad \text{при } t \geq t_0, \quad (32)$$

здесь скобки $\langle \rangle$ означают усреднение в плоскости слоя ($z = \text{const}$). Из (32) следует, что неустойчивость развивается в форме всплывания более горячих элементов газа и погружения холодных. Неравенство (31) выражает условие уменьшения избыточной энтропии в системе. Здесь помимо членов, уже обсуждавшихся в связи с (17), присутствует член, описывающий поток избыточной энтропии, обусловленный флуктуациями скорости.

В частном случае, когда диссипативные эффекты и источники энергии не играют существенной роли, из (31) и (32) следует интегральная формулировка критерия конвективной неустойчивости Шварцшильда. Эквивалентный локальный по z критерий получен при таких же предположениях в [15] методом малых возмущений.

Развитие тепловой или конвективной неустойчивости приводит к росту соответствующих членов под интегралом в (31). Всегда можно указать момент времени t_1 такой, что при $t \geq t_1$ выполняется неравенство (31), поэтому критерий Шварцшильда и условие $\Lambda_p > 0$ в совокупности с (24) являются достаточными для неустойчивости гидростатического равновесия слоя газа (см. [15]). Необходимое и достаточное условие неустойчивости можно получить, полагая в (30) $\tau^2 = v^2 = 1$ и применяя вариационную технику.

В заключение заметим, что использование приближения Буссинеска привело к потере эффектов, связанных с возможностью волновых движений в слое, которые могут оказывать существенное влияние на его устойчивость (см. [3]).

Ленинградский государственный
университет

ON THERMAL INSTABILITY OF NONEQUILIBRIUM SYSTEM

A. G. KRITSUK

Stability of gasdynamic systems with volume energy sources is investigated by means of Liapunov's direct method. The families of functionals are constructed which satisfy conditions of theorems of the method. Stability criteria for unstationary interstellar gas are derived. Hydrodynamic and thermodynamic stability criteria for gas layer in hydrostatic equilibrium are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. N. Parker, *Astrophys. J.*, 117, 431, 1953.
2. G. B. Field, *Astrophys. J.*, 142, 531, 1965.
3. M. Schwarzschild, R. Harm, *Astrophys. J.*, 142, 855, 1965.
4. В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд. ПГУ, Л., 1957.
5. П. Гленсдорф, И. Пригожин, Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций, Мир, М., 1973.
6. И. Пригожин, Успехи физ. наук, 131, 185, 1980.
7. М. В. Конюков, Препр. ФИАН СССР, № 144, 1985.
8. Л. И. Седов, Механика сплошной среды, т. 1, Наука, М., 1976.
9. Д. Джозеф, Устойчивость движений жидкости, Мир, М., 1981.
10. С. А. Каплан, С. Б. Пикельнер, Физика межзвездной среды, Наука, М., 1979.
11. А. Г. Крицук, Астрон. ж., 62, 66, 1985.
12. J. H. Hunter, Jr., *Astrophys. J.*, 161, 451, 1970.
13. J. H. Hunter, Jr., *Astrophys. J.*, 166, 453, 1971.
14. E. A. Spiegel, G. Veronis, *Astrophys. J.*, 131, 422, 1960.
15. R. J. Defouw, *Astrophys. J.*, 160, 659, 1970.