

ПЕРЕСМОТР ПРЕДЕЛА БЕТЦА ДЛЯ ВЕТРЯНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

А.Э. АЛЛАХВЕРДЯН¹, Э.А. ХАЛАФЯН^{1,2*}

¹Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

*e-mail: khalafyan.ea@phystech.edu

(Поступила в редакцию 21 октября 2020 г.)

Энергия ветра – один из основных факторов будущего перехода человечества на возобновляемые источники энергии. Следовательно, важно понимать, сколько работы можно извлечь из кинетической энергии ветра. Понимание этих ограничений важно для постановки правильных целей в исследованиях и в индустрии ветроэнергетики. В настоящее время общепринятым мнением является то, что пределы эффективности извлечения работы обеспечиваются моделью Бетца (или, точнее, моделью Ланчестера-Бетца-Жуковского), которая утверждает, что максимальная эффективность ветряных двигателей – 59%. В данной работе модель Бетца исследуется из более общих соображений. Обнаружены несколько серьезных несоответствий, некоторые из них уже были отмечены в литературе, а некоторые являются новыми. В целом, получается, что модель Бетца не ограничивает сверху (или снизу) эффективность ветряных двигателей. Обосновывается предложение, что реальная максимальная эффективность ветряного двигателя не является универсальным числом, а зависит от параметров двигателя. Это открывает новые возможности для усовершенствования ветряных двигателей.

1. Введение

Энергия ветра веками использовалась на ветряных мельницах [1]. К началу 20-го века их использование повсеместно сократилось, но в конце этого же столетия преобразователи энергии ветра вернулись в виде ветряных двигателей и постепенно стали основным источником возобновляемой энергии. Ветроэнергетика обеспечила 15% электроэнергии, потребляемой в Европе в течение 2019 года [2]. Прогнозируется, что через 20–25 лет это число вырастет до 40–50% [2]. Но насколько эффективным может быть ветровой двигатель? Сколько работы (т.е. полезной энергии) он может извлечь из заданного потока воздуха [2–4]? Ответы на эти вопросы имеют важное значение для принятия решений о том, сколько ветряных двигателей будет построено на конкретной территории, сколько ресурсов будет инвестировано в ветроэнергетику и т.д. [2–4]. Для существующих ветряных двигателей на эти вопросы есть ответы на уровне

имеющихся технологий, но важно понять общие физические ограничения на эффективность извлеченной работы. Учитывая быстрое развитие ветроэнергетической индустрии (прирост на 25% ежегодно), эти ограничения определяют стратегические цели современных технологий, и в перспективе будут влиять на длительность развития этой формы использования возобновляемых источников энергии [2–4].

В начале 20-го века вопросы о физических пределах извлечения работы из потока жидкости (или газа) стали очень актуальными в контексте зарождающейся авиастроительной техники [5–7]; см. обзоры в [8–11]. К тому времени трое ведущих ученых в области механики жидкости ответили на вопрос о максимальной работе, извлеченной из потока жидкости (воздуха). Ланчестер (Великобритания), Бетц (Германия) и Жуковский (Россия) независимо друг от друга получили один и тот же ответ: максимальная эффективность извлечения работы (или полезной энергии) из потока воздуха – $16/27$ (или 59%). (Очевидно, что 100% кинетической энергии не может быть превращено в работу, поскольку в этом случае поток остановится.) Эта эффективность Ланчестера-Бетца-Жуковского (или просто Бетца) в 59% является удобным на практике, так как это просто число, не зависящее от специфических особенностей турбины ветряного двигателя. Несмотря на определенную критику [12,13] (которая, впрочем, не повлияла на широкую распространенность предела), предел Бетца оставался неизменным более 100 лет, в том числе и потому, что эффективность доступных коммерческих ветряных двигателей была и, до сих пор, как правило, составляет менее 59% [2–4]. Конкретные причины для пересмотра предела Бетца появились совсем недавно [14], но несмотря на это остается неясным каковы именно проблемы стандартного вывода Ланчестера-Бетца-Жуковского.

Основная цель данной работы – заново изучить вывод предела Бетца и понять его возможные проблемы. Мы также хотим привлечь внимание научной общественности к необходимости физического (а не чисто инженерного) изучения моделей ветроэнергетики.

Мы увидим, что значение Бетца $16/27$ не является верхним пределом для работы, извлекаемой из потока жидкости, потому что оно ограничивает *сверху* не фактическую физическую эффективность извлечения работы, а скорее количество, которое меньше этой эффективности. Кроме того, модель, изученная Ланчестером, Бетцом и Жуковским включает в себя необоснованные предположения о распределении давления вокруг турбины. Модель также предполагает сильную локализацию силы внутри турбины, которая противоречит предположению о несжимаемости жидкости. Эти необоснованные допущения отсутствуют в недавней работе [14], в которой предложено новое выражение для эффективности превращения кинетической энергии в работу. В отличие от эффективности Бетца, новое выражение зависит от входного и выходного сечений турбины. Эта эффективность может превышать предел Бетца, и может ограничивать

эффективность всех основных типов ветряных двигателей: вертикальных, горизонтальных, бортовых и безлопастных. Также есть определенное сходство с пределом Карно для эффективности тепловых двигателей, которая зависит от температуры горячих и холодных резервуаров, приводящих в движение тепловую машину [14]. Это устанавливает интересную аналогию между гидродинамическими и термальными машинами [15, 16, 17].

Работы организована следующим образом: в следующем разделе будет рассмотрена применимость сохранения импульса к моделям течения, которые являются более общими, чем модель Ланчестера-Бетца-Жуковского (или Бетца). Мы обращаем особое внимание на этот вопрос, поскольку сохранение импульса играет ключевую роль в выводе эффективности Бетца, а также потому, что следствия этого закона сохранения часто (и обманчиво) представляются как нечто очевидное. В разделе III подробно изучаются модель Бетца и вывод (как показывается необоснованный) значения эффективности в 59%. Некоторые вопросы вынесены в Приложение.

2. Сохранение импульса

2.1. Модель течения

Модель потока ветряного двигателя, рассмотренная ниже, обобщает модель Бетца. Мы предпочитаем начать с такой общей модели, поскольку это позволяет избежать распутывания различных предположений модели Бетца (что будет рассмотрено в следующем разделе).

1. Жидкость не имеет диссипации, т.е. не учитывается вязкость и теплопроводность. Это предположение оправдано для достаточно быстрого потока воздуха. Пренебрежение диссипацией также естественно для нашей основной цели (выяснения предельной эффективности извлечения работы), т.к. мы ожидаем что диссипативные процессы уменьшат эту эффективность.
2. Часть турбины, извлекающая работу, моделируется стационарной пространственно-зависимой силой $\mathbf{F}(\mathbf{x})$; см. Рис.1. Как необходимо для любой турбины, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ плавно меняется и пренебрежимо мала вне области Ω ; см. Рис.1. Нетривиальность этого предположения в том, что для реальных ветровых двигателей сила не является стационарной. Таковая стационарность, однако, может восстановиться после усреднения по времени [18,19,20], а именно такие величины и являются физически интересными.
3. Входной поток однороден: на входе $\mathbf{r}_1 \equiv (x_1, y, z)$, т.е. достаточно далеко от Ω (слева на Рис.1), давление p , скорость $\mathbf{v}$ и плотность ρ не зависят от (y, z) , а поперечные скорости отсутствуют:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_1) = (v_1, 0, 0), \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}_1) = p_1, \quad \rho(\mathbf{r}_1) = \rho_1. \quad (1)$$

Эти предположения естественны для набегающего потока воздуха.

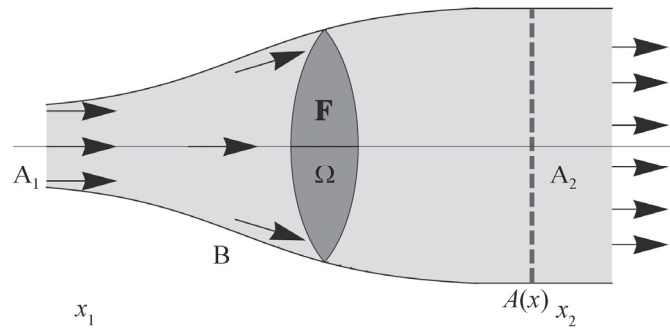


Рис.1. Модель. B – это контрольный объем, образованный линиями тока. Заполненная область показывает стационарный поток, течение направлено от x_1 (вход) к x_2 (выход). $\mathbf{F}$ – внешняя сила. $A(x)$ (пунктирная линия) – поперечное сечение. $A_1 = A(x_1)$ и $A_2 = A(x_2)$ это (соответственно) входная и выходная поверхности. Сила $\mathbf{F}$ локализована внутри области Ω и пренебрежимо мала вне нее. Стрелки означают скорости стационарного течения; см. (1), (4). Ω изображена условно, это может быть практически любая достаточно гладкая и хорошо обтекаемая об-

В нашем рассмотрении мы будем использовать интегральные законы сохранения, основанные на объеме B из Рис.1. B определяется вдоль линий потока через 2 дополнительных условия:

- i. B используется для расчета общей работы, выполненной $\mathbf{F}$. Так как эта работа совершается в области Ω , мы должны обеспечить:

$$\int_{\Omega} dV(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) = \int_B dV(-\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}). \quad (2)$$

- ii. Площадь $a(x_1)$ входной поверхности $A_1 = A(x_1)$ достаточно мала для обеспечения предположения 5 ниже, и для расчета эффективности. Следовательно, B облекает Ω ; см. Рис.1.
4. Поперечное сечение $A(x)$ растет с x от входа $A(x_1)$ к выходу $A(x_2)$. Это предположение необходимо для извлечения работы.
5. v_x постоянна вдоль выходной поверхности A_2 :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_2) = (v_x, v_y(\mathbf{r}_2), v_z(\mathbf{r}_2)), \quad \mathbf{r}_2 \equiv (x_2, y, z). \quad (3)$$

Уравнение (3) является слабой формой предположения о поршневом потоке, которое часто делается в гидравлике и в квазиодномерном движении [20,21]; с выводами и приложениями этого предположения можно ознакомиться в обзорах [22–25], которые также исследуют пределы применимости предположения о поршневых потоках.

На выходе $\mathbf{r}_2$ применяем следующие уравнения для давления и плотности, которые представляют эти величины в виде основного фактора и пространственной вариации:

$$p(x_2, y, z) = p_2 \bar{p}(y, z), \quad \rho(x_2, y, z) = \rho_2 \bar{\rho}(y, z), \quad (4)$$

где $\bar{p}(y, z)$ и $\bar{\rho}(y, z)$ определены следующим образом:

$$\langle \bar{p} \rangle \equiv \int_{A_2} \frac{dydz \bar{p}(y, z)}{a_2} = 1, \quad \langle \bar{\rho} \rangle = 1. \quad (5)$$

2.2. Последствия сохранения импульса

Сохранение импульса бездиссипативной жидкости сводится к [20,21]

$$\nabla \cdot (\rho v_l \mathbf{v}) + \partial_l p = F_l, \quad l = x, y, z, \quad (6)$$

где v_l и F_l компоненты (соответственно) $\mathbf{v}$ и $\mathbf{F}$. Уравнение (6) является комбинацией уравнения непрерывности и уравнения Эйлера.

В (6) рассмотрим случай $l = x$ и проинтегрируем $\vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \mathbf{v})$ по объёму B ; см. Рис.1. Воспользуемся теоремой Гаусса чтобы получить 3 интеграла по поверхности B :

$$\int_B dV \vec{\nabla} \cdot (\rho v_x \mathbf{v}) = \left(\int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{\partial B} \right) d\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rho v_x, \quad (7)$$

где нормаль $d\mathbf{n}$ указывает наружу. Для жидкости без диссипаций имеем $d\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial B} = 0$ [15]. Далее применяя (1)–(5) в $\left(\int_{A_1} + \int_{A_2} \right) d\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rho v_x$:

$$\rho_2 a_2 v_2^2 - \rho_1 a_1 v_1^2 + \int dV \partial_x p(x, y, z) = \int dV F_x. \quad (8)$$

Нам нужно взять интеграл по объёму $\int dV \partial_x p(x, y, z)$ из (8); см. Рис.2. Для заданного $(y, z) \in A(x_2)$ определим $h(y, z)$ как минимальное значение x такое что $(x, y, z) \in B$; см. Рис.2. Отметим что $h(y, z) = x_1$, если $(y, z) \in A_1 \subset A(x_2)$. Пусть также A_3 будет той частью $A_2 = A(x_2)$, которая не пересекается с A_1 ; см. Рис.2. Возьмём интеграл:

$$\begin{aligned} \int dV \partial_x p(x, y, z) &= \int_{A_2} dydz \int_{h(y, z)}^{x_2} dx \partial_x p(x, y, z) \\ &= \int_{A_2} dydz p(x_2, y, z) - \int_{A_1} dydz p(x_1, y, z) - \int_{A_3} dydz p(h(y, z), y, z), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int dV \partial_x p(x, y, z) = a_2 p_2 - a_1 p_1 - \zeta, \quad (10)$$

где в (10) мы применили (1)–(5) и обозначили

$$\zeta \equiv \int_{A_3} dydz p(h(y, z), y, z) > 0. \quad (11)$$

В (11) $\zeta > 0$ поскольку $p > 0$.

Следуя выводу (8), из закона сохранения массы для стационарного случая [20,21],

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (12)$$

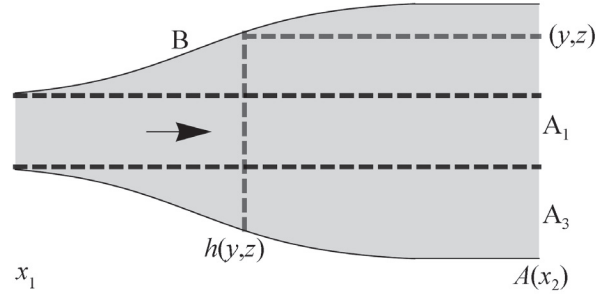


Рис.2. Схематическое изображение области интегрирования в (9). В – контрольный объем, определенный по линиям течения жидкости. Параллельные линии, которые идут с входной поверхности, делят выходную поверхность $A(x_2) = A_2$ на A_1 и A_3 : $A_2 = A_1 \cup A_3$. $h(y, z)$ относится к точке $(y, z) \in A_3$; см. (10).

можем получить (проинтегрировав по объёму и пользуясь теоремой Гаусса) следующее выражение:

$$\rho_1 v_1 a_1 = \rho_2 v_2 a_2. \quad (13)$$

Теперь из (8),(11),(13) получим:

$$v_1 + \frac{p_1}{\rho_1 v_1} + \frac{\zeta + \int dV F_x}{a_1 \rho_1 v_1} = v_2 + \frac{p_2}{\rho_2 v_2}. \quad (14)$$

Уравнение (14) включает в себе неизвестную величину ζ . Заметим, что даже знак эффективного параметра $\zeta + \int dV F_x$ не определен, так как $\zeta > 0$, в то время когда $\int dV F_x < 0$, что необходимо для извлечения работы.

Аналогично, в (6) можем взять $l = y$:

$$a_2 \rho_2 v_2 \langle \bar{\rho}(y, z) v_y(x_2, y, z) \rangle + \int dV \partial_y p(x, y, z) = \int dV F_y, \quad (15)$$

где $\bar{\rho}(y, z)$ и $\langle \dots \rangle$ определены согласно (4) и (5), соответственно. Тут также присутствует неизвестный фактор $dV \partial_y p(x, y, z)$.

3. Модель Бетца

Здесь мы подробно изучим модель Бетца, которая неоднократно рассматривалась в литературе [4, 9–13]. Подобные подходы были разработаны Ланчестером и Жуковским; подробности см. в [8]. Наш основной вывод будет заключаться в том, что модель делает не относящиеся к делу предположения и что в любом случае ее выводы не касаются эффективности извлечения работы из кинетической энергии. Модель Бетца также критиковалась в [12, 13]. Однако наш подход является более полным и включает новые соображения.

3.1. Предположения модели

Теперь мы подробно изложим предположения модели и поместим их в контекст законов сохранения.

Первое отличие от схемы, показанной на Рис.1, заключается в том, что сила действует только в пределах поперечного сечения $A(x_0)$, расположенного в x_0 ; см. (17). Второе отличие состоит в том, что условие (23) предполагается выполненным на $A(x_0)$, что существенно ограничивает форму B .

A0. Модель потока представлена на Рис.3.

A1. Течение бездиссипативное и несжимаемое

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho(x) = \text{const.} \quad (16)$$

Следовательно, из законов сохранения мы можем использовать только сохранение массы, энергии и импульса. Сохранение энергии будет рассмотрено ниже. Сохранение энтропии здесь неприменимо так как скорость звука предполагается бесконечно большой из-за условия (16) [15].

A2. Внешняя сила $\mathbf{F}$ имеет нулевые поперечные компоненты, $F_y = F_z = 0$, и локализована в тонкой области вокруг $x_0 \in [x_1, x_2]$ (см. Рис.3):

$$\mathbf{F} = (-f \delta(x - x_0), 0, 0), \quad (17)$$

A3. Давления однородно по входной поверхности $A_1 = A(x_1)$ и выходной поверхности $A_2 = A(x_2)$

$$p(x_1, y, z) = p_1, \quad (18)$$

$$p(x_2, y, z) = p_2. \quad (19)$$

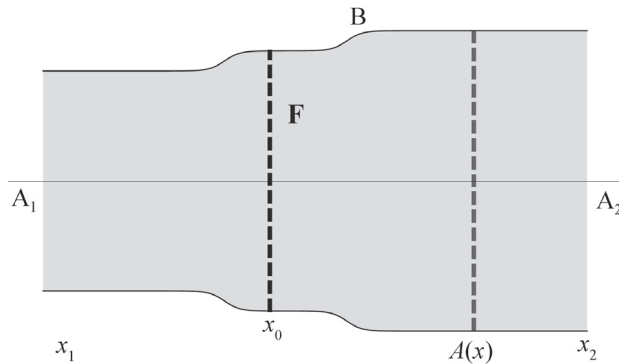


Рис.3. Схематическое изображение модели Бетца. B - контрольный объем, определенный по линиям течения жидкости. Поток (во внутренности B) идет от x_1 (вход) к x_2 (выход). $\mathbf{F} = (F_x, 0, 0)$ - внешняя сила, локализованная в окрестности x_0 . $A(x)$ (штриховая линия) - поперечное сечение поверхности B . $A_1 = A(x_1)$ и $A_2 = A(x_2)$ являются (соответственно) входным и выходным поверхностями. Площадь $A(x)$ обозначим как $\alpha(x)$.

Одним из следствий (16)–(19) является то, что выходные поперечные скорости пренебрежимо малы благодаря уравнению Бернулли (см. Приложение А)

$$v_y(x_2, y, z) = v_z(x_2, y, z) = 0. \quad (20)$$

В литературе [4,9–13] уравнение (20) принимается как дополнительное предположение.

A4. Входное и выходное давления равны (см. (18), (19)):

$$p_1 = p_2 = p. \quad (21)$$

Это условие обеспечит выделение работы только из кинетической энергии.

A5. Предположения (1), (3) об однородности аксиальной скорости v_x на входе и выходе принимаются также и для модели Бетца. Более того, предполагается, что аналог (3) выполняется и для $A(x_0)$, т.е. имеем (см. Рис.3)

$$v_x(x_1, y, z) = v_1, \quad v_x(x_2, y, z) = v_2, \quad (22)$$

$$v_x(x_0, y, z) = v(x_0). \quad (23)$$

Уравнения (16), (22) и (23) позволяют нам записать закон сохранения массы (13) как

$$a_1 v_1 = a(x_0) v(x_0) = a_2 v_2. \quad (24)$$

A.6 Воспользуемся (16), (19) и (21) в соотношении сохранения импульса (14) и дополнительно предположим, что следующее соотношение имеет место в (14):

$$\frac{p}{v_1} + \frac{\zeta}{a_1 v_1} = \frac{p}{v_2}, \quad (25)$$

что в силу сохранения массы $a_1 v_1 = a_2 v_2$ сводит к:

$$\zeta = p(a_2 - a_1). \quad (26)$$

Предположение (25) позволяет найти ζ .

Уравнение (26) можно получить из предположения, что давление постоянно на всей поверхности объема B между $A(x_1)$ и $A(x_2)$; см. (21). Предположение (26) обычно делается неявно [4,9–12], как показывается в [13].

3.2. Вывод предела Бетца

Напомним, что локальный закон сохранения энергии для несжимаемой идеальной жидкости имеет следующий вид [15]:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\rho v^2 \mathbf{v}}{2} + p \mathbf{v} \right] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (27)$$

Обратим внимание, что из-за предполагаемой несжимаемости (16), уравнение (27) не имеет вклада от внутренней энергии жидкости [15]. То есть поток

энергии жидкости определяется кинетической энергией и давлением [15].

Из (21), (24) и (27) аналогично выводу (8) получаем:

$$-\frac{\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{a_1 v_1 \rho} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}, \quad (28)$$

где вклад поперечной скорости в (28) уже пропущен в силу (20). Из уравнения (28) ясно, что работа извлекается только из кинетической энергии. Используя (17), (24) в (28), получаем:

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = \frac{a(x_0)v(x_0)f}{a_1 v_1 \rho} = \frac{f}{\rho}. \quad (29)$$

Аналогично, (14) вместе с (26), (17) и (16, 21) приводит:

$$v_1 - v_2 = \frac{a(x_0)f}{a_1 v_1 \rho}. \quad (30)$$

Из уравнений (24), (29) и (30) следует соотношение Друде для (23)

$$v(x_0) = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (31)$$

Соотношение Друде (31) можно строго вывести из классической механики для точечной частицы. Этот вывод никоим образом не означает, что это соотношение автоматически выполняется в гидродинамике (в (31) оно выведено через несколько дополнительных предположений). Обратите внимание, что «частицы» сжимаемой идеальной жидкости не являются независимыми механическими точками, скорее они представляют собой частицы жидкости, которые движутся, сохраняя свою массу (но не форму), и взаимодействуют через свои термически изолированные (адиабатические) границы, сохраняя локальное термальное равновесие [20].

Используя (17, 29, 31) для работы можно написать:

$$\begin{aligned} -\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} &= f v(x_0) a(x_0) = \rho a(x_0) \frac{(v_1 + v_2)(v_1^2 - v_2^2)}{4} \\ &= \frac{v_1^3}{4} \rho a(x_0) (1 + \bar{v}_2)(1 - \bar{v}_2^2), \end{aligned} \quad (32)$$

где $\bar{v}_2 \equiv v_2 / v_1$. Далее посчитаем отношение:

$$\frac{-\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{0.5 \rho a(x_0) v_1^3} = \frac{1}{2} (1 + \bar{v}_2)(1 - \bar{v}_2^2). \quad (33)$$

Правая часть (33) достигает своего максимума в точке

$$\bar{v}_2 = v_2 / v_1 = 1/3. \quad (34)$$

Таким образом получим, что максимум левой части (33) определяет верхний предел Бетца:

$$\frac{-\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{0.5 \rho a(x_0) v_1^3} \leq \frac{16}{27}. \quad (35)$$

3.3. Проблемы модели Бетца

Р1. В (35), фактор $16/27$ интерпретируется как верхний предел эффективности извлечения работы из кинетической энергии [4,9–12]. Это не так. Правильная эффективность извлечения работы из кинетической энергии определяется как работа, поделенная на входящий поток кинетической энергии:

$$\eta = \frac{-\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{0.5 a_1 \rho v_1^3}. \quad (36)$$

Напомним, что левая часть (35) не может быть эффективностью, в том числе потому, что она возникла в результате идеализации (17). Если бы сила не была искусственно локализована вокруг x_0 [как делает (17)], поверхность $A(x_0)$ не имела бы особого смысла [19]. Если использовать правильную величину (36), приведенный выше вывод становится бессмысленным. Действительно, вернемся к (32) и отметим, что при использовании (24, 31), $a(x_0) = 2a_1/(1 + \bar{v}v_2)$ также можно представить как функцию от $\bar{v}_2$. Следовательно, для правильной эффективности η из (32) получим: $\eta = 1 - \bar{v}_2^2$, верхний предел которого равен 1, что совершенно неинформативно для эффективности.

Можно попытаться применить (35) к предположению, что $a(x_1)$ примерно равен $a(x_0)$. Это предположение является негодным, поскольку тогда из закона сохранения массы (24) следует что $v(x_1)$ примерно равен $v(x_0)$, и тогда (31) приводит к тому что $v(x_1)$ примерно равен $v(x_2)$.

Р2. Мотивы для предположения (26) неясны. Обоснование (26) может быть связано с граничным условием $v = 0$ на поверхности ∂B объёма B (см. Рис.3), который из уравнения Эйлера приводит к $\nabla p|_{\partial B} = 0$ и, следовательно, к $p(\mathbf{r}) = \text{const}$ для $\mathbf{r} \in \partial B$. Однако B определяется с помощью линий потока, т.е. граничные условия $\mathbf{v}|_{\partial B} = 0$ не применимы. Более того, в обзорах модели Бетца можно заметить утверждение, что давление является немонотонным и зависит от x [9–13]. Следовательно, постоянное давление является плохим предположением.

Р3. Работа [14] обобщила модель Бетца и получила другое выражение для максимальной эффективности. В частности, было получено, что работа извлекается только из кинетической энергии при условии

$$v_2 = v_1 a_1 / a_2. \quad (37)$$

Тогда работа равна из (28)

$$-\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \frac{\rho a_1 v_1^3}{2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right). \quad (38)$$

Видно, что (37) и (38) отличаются от (34) и (35) соответственно. В частности, (38) – в отличие от (35) – относится к эффективности работы извлечения. Следовательно, предположения модели Бетца не согласуются друг с другом, поскольку работа [14] использовала некоторые из них в законах сохранения и получила другие результаты.

4. Заключение

Неприменимость предела Бетца будет иметь далеко идущие последствия, ведь характеристики будущих возможностей ветроэнергетики часто рассчитываются именно на ее основе [13]. Мы получили что верхний предел Бетца не имеет не имеет физического смысла и не ограничивает (сверху или снизу) эффективность ветряного двигателя. Основная причина данного заключения, это что в стандартном выводе извлеченная работа делится не на входной поток кинетической энергии, а на промежуточное значение этого потока. Модель Бетца имеет также внутренние проблемы, которые связаны с большим количеством несовместимых требований. Некоторые из этих требований искусственны и не имеют обоснования в рамках гидродинамики. В частности, модель Бетца подразумевает две сингулярности: локализованность силы и постоянную плотность. Последняя не является физической именно в области приложения локализованной силы. Само по себе предположение о локализованной силе сильно ограничивает применимость модели.

Отсутствие универсального ограничения Бетца открывает возможность для реального улучшения работы будущих ветровых двигателей. В частности, мы приходим к более четкому пониманию того, что максимальная эффективность не является фиксированным числом (наподобие 59 %), а зависит от особенностей ветрового двигателя [14].

Приложение: Следствия уравнения Бернулли в несжимаемом случае

Здесь мы разработаем некоторые следствия уравнения Бернулли для несжимаемой ситуации. Уравнение применимо к потоку, показанному на Рис.3 (возможно после устранения особенности (17) силы в x_0). Несжимаемость означает:

$$\rho = \text{const}. \quad (A1)$$

Любую потенциальную силу можно записать как

$$\mathbf{F} = -\rho \vec{\nabla} U(x, y, z) = -\vec{\nabla} [\rho U(x, y, z)], \quad (A2)$$

где $U(x, y, z)$ – потенциал. В частности, любую силу, которая зависит только от

x , можно записать как в (A2). Предположим, что на входе потенциал отсутствует, а на выходе не зависит от (y, z) :

$$U(x_1, y, z) = 0 \quad U(x_2, y, z) = U_2. \quad (A3)$$

Условия (A3) соответствуют локализованной силе внутри объема потока; см. Рис.3. Напомним, что при (A1) внутренняя энергия постоянна и, следовательно, выпадает из законов сохранения [15]. Потенциал $U(x, y, z)$ можно включить в уравнение Бернулли [15]:

$$\frac{v^2(x, y, z)}{2} + \frac{p(x, y, z)}{\rho} + U(x, y, z) = \text{const}. \quad (A4)$$

Предполагая, что линии потока непрерывны и что для любой точки на $A(x_2)$ существует единственная точка на $A(x_1)$, связанная с ней линией потока, мы получаем из (A4), (A3):

$$\frac{v^2(x_2, y, z)}{2} + p_2 \frac{\bar{p}(y, z)}{\rho} + U_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}, \quad (A5)$$

где мы вводим 2 определения:

$$p(x_1, y, z) = p_1, \quad p(x_2, y, z) = p_2 \bar{p}(y, z), \quad (A6)$$

$$\langle \bar{p} \rangle \equiv \int_{A_2} \frac{dydz}{a_2} \bar{p}(y, z) = 1. \quad (A7)$$

Закон сохранения энергии записывается как

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2 + \hat{v}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \frac{\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{a_1 v_1 \rho}, \quad (A8)$$

$$\hat{v}^2 \equiv \int_{A_2} \frac{dydz}{a_2} [v_y^2(x_2, y, z) + v_z^2(x_2, y, z)]. \quad (A9)$$

Обозначая

$$\mathbf{v}_r(y, z) \equiv (0, v_y(x_2, y, z), v_z(x_2, y, z)), \quad (A10)$$

из (A8) и (A5) заключаем:

$$\frac{v_r^2(y, z) - \hat{v}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} (\bar{p}(y, z) - 1) = -U_2 - \frac{\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{a_1 v_1 \rho}, \quad (A11)$$

благодаря $v_y(x_1, y, z) = v_z(x_1, y, z) = 0$ и (A6). Интегрируя (A11) по $\int_{A_2} \frac{dydz}{a_2}$ получаем что

$$U_2 + \frac{\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{a_1 v_1 \rho} = 0, \quad (A12)$$

$$\frac{v_r^2(y, z) - \hat{v}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} (\bar{p}(y, z) - 1) = 0. \quad (A13)$$

Уравнение (A13) показывает, что однородное давление $\bar{p}(y, z) = 1$ приводит к нулевым поперечным скоростям: $v_{tr}^2(y, z)$ не зависящий от (y, z) означает $v_{tr}^2(y, z) = 0$, поскольку $v_{tr}^2(y, z)$ должен обнуляться на границах $A(x_2)$. Обратите внимание, что (A12) автоматически выполняется в рамках квазиодномерного подхода, где

$$\frac{\int dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{a_1 v_1 \rho} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} dx a(x) v(x) F(x)}{a_1 v_1 \rho} = \frac{1}{\rho} \int_{x_1}^{x_2} dx F(x). \quad (\text{A14})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **R.E. Alley.** The Physics Teacher, **19**, 590 (1981).
2. **FUTURE OF WIND:** Deployment, investment, technology, grid integration and socio-economic aspects, A Global Energy Transformation.
3. **D.J.C. MacKay.** *Sustainable Energy – Without the Hot Air*, England, Cambridge: UIT Cambridge Ltd., 2009.
4. **T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins, E. Bossanyi.** *Wind Energy Handbook*, England, Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
5. **F.W. Lanchester.** *Transaction Institution of Naval Architects*, **27**, 330 (1915).
6. **A. Betz.** *Zeitschrift fur das Gesamte Turbinewesen*, **26**, 307 (1920);
A. Betz. *Introduction to the Theory of Flow Machines*, Oxford: Pergamon Press, 1966.
7. **N.E. Joukowski.** *Collected Papers*, vol. VI, pp. 405-409, Moscow: USTCP, 1937 [in Russian].
8. **V.L. Okulov, G.A. van Kuik.** *Wind Energy*, **15**, 335 (2012).
9. **D.G. Pelka, R.T. Park, R. Singh.** *Am. J. Phys.*, **46**, 495 (1978).
10. **D.R. Inglis.** *American Journal of Physics*, **47**, 416 (1979).
11. **J.N. Sorensen.** *Annual Review of Fluid Mechanics*, **43**, 427 (2011).
12. **R.J. Greet.** *Journal of Applied Physics*, **51**, 4680 (1980).
13. **A. Rauh, W. Seelert.** *Applied Energy Journal*, **17**, 15 (1984).
14. **A.E. Allahverdyan.** *Phys. Rev. Lett.*, **125**, 064503 (2020).
15. **A.E. Allahverdyan, K.V. Hovhannisyanyan, A.V. Melkikh, S.G. Gevorgian.** *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 050601 (2013).
16. **R.M. Abrahamian.** *J. Contemp. Phys.*, **45**, 137 (2010).
17. **F.V. Gasparyan.** *J. Contemp. Phys.*, **42**, 112 (2007).
18. **P. Milan, M. Wachter, J. Peinke.** *Phys. Rev. Lett.*, **110**, 138 (2013).
19. **M.M. Bandi.** *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 028301 (2017).
20. **М.Ф. Широков.** *Физические принципы газодинамики*, Москва: Физматгиз, 1958.
21. **L.D. Landau, E.M. Lifshitz.** *Course of Theoretical Physics, Fluid Mechanics*, Second Edition, vol. 6, Oxford, 1989.
22. **P. Luchini, F. Charru.** *J. Fluid Mech.*, **656**, 337 (2010).
23. **C. Ruyer-Quil, P. Manneville.** *Eur. Phys. J. B*, **6**, 277 (1998).
24. **V. Michel-Dansac, P. Noble, J.-P. Vila.** *Consistent section-averaged shallow water equations with bottom friction*, 2018. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01962186/document>.
25. **B.L. Hicks, D.J. Montgomery, R.H. Wasserman.** *Journal of Applied Physics*, **18**, 891 (1947).

ԲԵՏՑԻ ՍԱՀՄԱՆԻ ՎԵՐԱՆԱՅՈՒՄԸ ՔԱՄՈՒ ՇԱՐԺԻՉՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.Է. ԱԼԼԱՀՎԵՐԴՅԱՆ, Է.Ա. ԽԱԼԱՖՅԱՆ

Ապագա անցումը դեպի վերականգնվող էներգիաները օգտագործումը էականապես օգտագործելու է քամու էներգիան: Ուստի կարևոր է հասկանալ, թե որքան աշխատանք է կարելի քաղել քամու կինետիկ էներգիայից: Այս հարցի ըմբռնումը խիստ կարևոր է քամու շարժիչների հետազոտման և համապատասխան արդյունաբերության ոլորտում ճիշտ նպատակներ դնելու համար: Այժմ ընդունված է, որ աշխատանքի քաղման արդյունավետության սահմանը նկարագրվում է Բետցի (կամ ավելի ճիշտ Լանչեստր-Բետց-ժուկովսկու) տեսությամբ, որի պնդմամբ քամու շարժիչի առավելագույն արդյունավետությունը 59% է: Այս հոդվածում վերանայվում է Բետցի մոդելը ավելի ընդհանուր դրույթներից: Հայտնաբերվում են մի քանի լուրջ անհամապատասխանություններ, որոնց մի մասն արդեն նշվել է գրականության մեջ, իսկ որոշները նոր են: Ընդհանուր առմամբ պարզվում է, որ Բետցի մոդելը չի սահմանափակում վերնից (կամ ներքևից) շարժիչների արդյունավետությունը: Հիմնավորվում է այն պնդումը, որ քամու շարժիչի մաքսիմալ էֆեկտիվությունը ինչոր ունիվերսալ թիվ չէ, այլ կապված է շարժիչի կառուցվածքի հետ:

REEXAMINATION OF BETZ'S LIMIT FOR WIND ENGINES

A.E. ALLAHVERDYAN, E.A. KHALAFYAN

Wind energy is one of main factors in the future transition to renewable energies. Hence it is important to understand how much work can be extracted from the kinetic energy of wind. Understanding these constraints is important for setting correct strategic goals in wind power research and industry. The current standard opinion is that the limits on the efficiency of work-extraction is provided by Betz's (or more precisely Lanchester-Betz-Joukowski) model, which states that only 59% of the kinetic energy can be extracted. Here we reexamine the Betz model and scrutinize its main assumptions in detail. We detect several serious inconsistencies, some of which were already noted in literature, and some are new. Altogether, the Betz model does not bound from above (or from below) the efficiency of wind engines. These conclusions corroborate the point expressed recently that the maximal work-extraction efficiency of a wind engine is not a universal number, but it depends on parameters of the engine.