

5894.

Կայսերական Առաքելադատական խորհրդային Խանրապետություն

Մրուկեցարներ բռնություններ, ծիպեք.

Հ. Լժուշենկ



Սեդրակ-իմ յեռանկյունաչափություն
յեւ անկյունաչափական ծռնկցիւաների տեսութեան
գործերը

A ^{III} 3102

14748

Դարձուցեց յեւ խմբագրեց
Լրշակ Առնյան



Մեքական Դրամատրապիկություն - Վ. Վ.



Ֆետեման 1922

36

Եւթնօրյուն

I. Յաւանկան կողմերը համեմատական չեն անկանոններին:

1. Անարդական յերկրաչափության հարցերը, ըստ ծածի ծագի, լուծւում են կառուցման յեղանակով, կարկեր յեղ իմանք, Տրեոյով յեղ ծրայն ծի, իսկ ինքնորեն լուծւում են հաշվական եղանակով: Բնական ապա ծանրածան ապ տրեոյով պարզաբար:
2. Երկրաչափական անոն ծի հարց կարգը և պարզ ծի կամ Տրաներ յեղանակները լուծման հարցին, վորտէ յերկրաչափական պարզագույն պարկերներն են յեղ ռաւթաւորւած են անոն ծի ծանրածան, իսկ Տրաւ պարկերները: Եւթնօրյուն, որ անոն ծի, պարկեր ²⁾ անկանոն-ծի Տրեոյով վերածւում են յեղանակներին: Եւթնօրյուն հաշվումը հիմնւած են ծանրաների ծանրեղմութեան հաշվումը վրա, իսկ ծանրեղմութեան իրենց հարթն ներկայացնում են այս կամ այն պարկերը յեղ ալն: Դեպքում, յեղանակները լուծումը պէտք է դուր յերկրաչափական հարցերը լուծման հիմն:
3. Հարցեր և վոր յեղանակներն ունի 6 հիմնական պարկեր յերկանկան յեղ երեք կողմ. յեղանական չափերը (Եւթնօրյուն) յեղ յեղ վորտէլու համար բաժանան և իմանալ նրա պարկերից յերեք ³⁾ ծրայն թեւ ալանց թղում լինի կողմերից գոնեւ յեղ:
- Դիպ յեղանակներն ծրայն յերեք անկանոնները, ապա, ինչպէս հարցեր և, կարգով և ծան յեղանակները անոն բաժանում:

1) Կոտէ վորտէլում և այսպէս յեղ հեղադարձ հարաբերակցութեան:

2) Կորագրեւ պարկերները պէտք է գրել, վորտէ անոն ուղղագրեւ պարկեր

ներ: Ե. Բ. Եւթն յերեք պարկերը պէտք է լինեն ծրայանկան անկանոն

անկանոն յերեք անկանոններ ծրայանկան անկանոն, յորտէլու և ծրայ

Հարթաչափությունը էի ցույց տալու, ^{անկյան} հասարակականների թվի յեզ աղ-
անկյան հակադիր կողմի յերկարության միջեզ վորոշ կախում, ալաինքն
այնպիսի կախում, վորը կ'ըլի լինել թվերով արտայայտել: Պրա
համար հիշենք հետեզյալ թերեմները:

ա) Անեն մի յեռանկյան թեզ մեզ կողմի դիմաց գործում է մեզ ահ —
կյուն, յեզ ընդհակառակը:

բ) յերե մի յեռանկյան կողմերից յերկուսը համապատասխանաբար
հակասար են մյուս յեռանկյան կողմերից յերկուսն, ապա նրանցով
կազմված անկյուններից մեծի դիմաց գործում է մեզ կողմ, յեզ ընդ-
հակառակն:

Անենում ենք, վոր այս թերեմները ցույց են լոկ անհորոշ առը-
չություններ. այս է պարծառը, վոր կողմերի հաշվումն անկյուննե-
րի միջոցով յեզ անկյունների հաշվումը կողմերի միջոցով մար-
չելի է հարթաչափության. այս հանգամանքն է, վոր ազդել է
յերկրաչափական հարցերի լուծման մեթոդի ընտրության վրա՝
նախապարզությունը ցրվել է կառուցման մեթոդին:

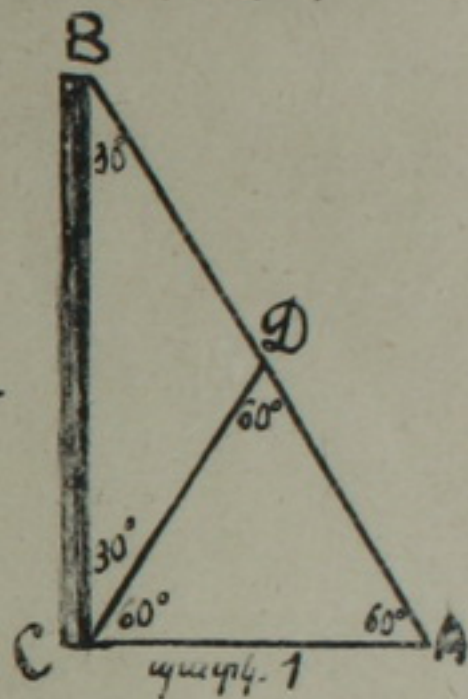
4. Յեռանկյան անկյունների յեզ կողմերի միջեզ պարզ յեզվորոշ
կախում հասարակելու գլխավոր խնդրնոր է հանդիսանում այն,
վոր նրանց միջեզ հաճեմարականություն գոյություն է ունի⁴⁾:

Հազարապահալու նպատակով քննության առնենք յերկու դեպք.

գումարը հասարակուն է հազարապահ 2d-ի: Յերեք անկյուն —
ները փաստորեն կազմում են միայն յերկու ցույց, ուստի
նրանք էն վորոշում յեռանկյունը: Տ. 78.

4) Կող միայն պարզ, ալ յեզ վոր յեզ է սարիմանի հաճեմար-
ականություն: Տ. 78.

I. Հերքենք ABC ուղղանկյուն յեռանկյունը (պատկ. 1), զորի
 ժող $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Իրականում ուղիղ անկյուն C գագաթը
 ներքնագծի D իջնակետի հետ: D կետը կը լինի ABC յե-
 ռանկյանն արտագծած շրջանի կենտրոնը (C անկյունն, իբրեւ
 ներգծյալ ուղիղ անկյուն, հենվում է արտագծի վրա): Այս
 պատճառով $DA = DC = DB$, իբրեւ
 ինքնուրույն շրջանի շառավիղներ: Այնու-
 հետեւ, $\triangle ACD$ -ն ունի յերկու անկյուն,
 յուրաքանչյուրը 60° -ի, հետեւապես, յեր-
 րորդ. $\angle ADC$ անկյունն էլ 60° -ի է, եւ
 $\triangle ACD$ -ն հավասարակողմ է: Այստե-
 ղից հետեւում է, զոր $AC = AD$ կամ



1) $AC = \frac{AB}{2}$, այսինքն 30° -ի անկյան շիջացի
 եզր հավասար է ներքնագծի կեսին:

Դրա եզր համար Մյուրադորթի թեորեմի համաձայն կը գտնենք

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{3}{4} AB^2; \text{ այստեղից}$$

$$2) BC = \frac{AB}{2} \sqrt{3}.$$

Այս յեռանկյան անկյունները հավասար են 30° , 60° եւ 90° -ի.

նրանց հարաբերություններն են

$$3) 30^\circ : 60^\circ : 90^\circ = 1 : 2 : 3$$

Նույն ճեղով կազմենք այս անկյունների հակադիր կողմերի
 հարաբերությունները:

1) Այս թեորեմը կարելի է ապացուցել ավելի պարզ հետեւյալ
 ճեղով. ABC յեռանկյան կցենք իր հավասար ինքնանկյուն այնպես,
 զոր BC կողմը ընդ-հանուր լինի. հարապի իր հավասարանկյուն,

$$AC : BC : AB = \frac{AB}{2} : \frac{AB}{2} \sqrt{3} : AB$$

հրժարելով AB -ով յեղ բազմապատկելով 2-ով հստակեցնելով

$$4) AC : BC : AB = 1 : \sqrt{3} : 2.$$

Այս յերկու հազամարյունները (3-րդը յեղ 4-րդը) ցույց են տալիս, զոր ցվյալ յեռանկյան անկյունները հասկանալի - կան շեկ հակադրի կողմերին, յեղ զոր կողմերն ածուծ են ալի - ի դանդաղ. Երեքերն անկյունը ծեծալով յերեկ անկյունը, հասնում են յայնչ, զոր յեղ հակադրի ծրայն յերկու անկյունը:

II. Էթ զրրկելի MAN հազամարյունն ուղղանկյուն անկյունը (ցույց. 2): Կոնստրուկցիոն $PM \perp PN$, ապա ըստ

Պյութագորասի թեորեմի, կունենանք

$$5) MN = PM\sqrt{2}$$

Եւ արեւոյսի նման կարանենք

$$6) 45^\circ : 90^\circ = 1 : 2 \text{ ելյուն հերեկ}$$

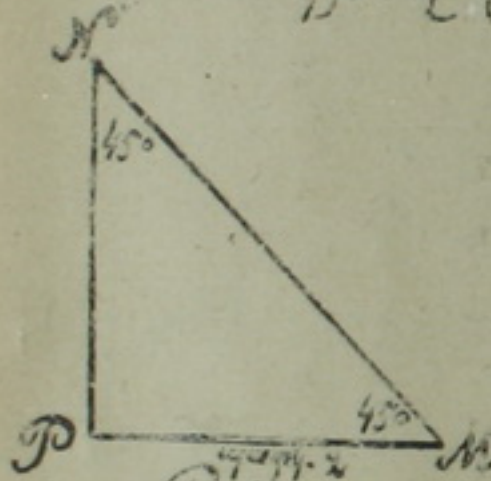
$$PM : MN = PM : PM\sqrt{2} \text{ կամ}$$

$$7) PM : MN = 1 : \sqrt{2}$$

Անունք եւթ, զոր այս դեպքում յեղս կողմերը հասկանալի - կան շեկ անկյուններին յեղ ածուծ են ալիերի դանդաղ, իսկ անկյունները ($\sqrt{2} = 1, 41 \dots$):

5) Արալան արդյունքներն ո ծրայն առանձնապէս պարզ ցույց են տալիս, զոր կողմերի փոփոխություններն ընդ հանդարտապէս հասկանալի կան անկյուններ փոփոխություններին:

Կոնստրուկցիոն նայել հազամարյունը. յեռանկյուն, զորի յեղ AC -ն հը կալծի AB կողմը, կեւր: Դնալան ըստ թեորեմի: $P.P.$



1000 աստեղ. այդ դեպքում ΓK կողմը նկարի վրա կունենա 16,34 ծալնաչափ յերկարություն: Այնուհետև Γ յեւ K կետերի մոտ կառուցանելով $29^{\circ}50'$ յեւ $39^{\circ}20'$ ճեմություններ, կը գտնենք յեռանկյան յերրորդ P գագաթը: Այժմ ծառերաբի ոգնությունը կը հափենք, որ PK կողմը. նրա յերկարությունը կը լինի 8,76 ծալնաչափ, զոր իրականում տրա-
յս է $1000 \text{ աստ} \times 8,76 = 8760 \text{ աստ.}$: Այսպես ուրեմն յեռան-
կյունը լուծված է գրաֆիկական մեթոդի օգնությամբ պարզ յեւ
դյուրին: Մնում է վորոշել լուծման ճշմանակ արած սխալնե-
րի ճեմությունը:

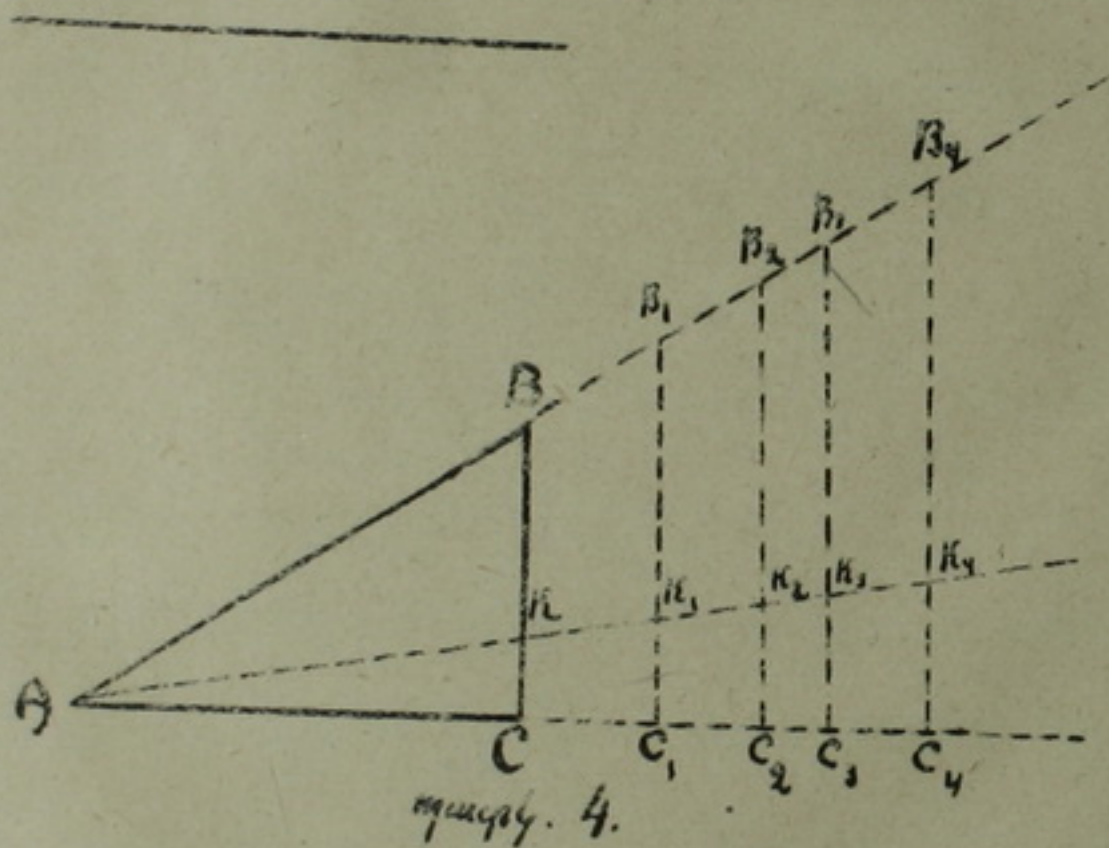
7. ΓK կողմը (ըստ ծառերաբի) 16,34391 ծալն. է, բայց
մենք հաշվադրված ենք առհասարակ զեւ տրանսպորտ-
կան յերկու նշաններով, զորովհետեւ արդեն 0,01 ծալ-
նաչափը դժվարությամբ է նշմարվում ծառերաբի վրա.
այս առաջին սխալն է, զորը բաժանական ճեմ է, զորով-
հետեւ դուրս գաւ $0,00391$ ծալնաչափ ճեմությունը
կազմում է իրականում 3,91 աստ.: Այնուհետեւ, խանութ
կողմը միշտ յեւս շատ թե քիչ կորուսած է լինում, յեւ
նրա միջոցով գտած ΓK , ΓP յեւ $K P$ ուղիղները միշտ
եւ մի փոքր շեղվում են իրենց իսկական ուղղությունից.
այս յերրորդ սխալն է: Հաճաքույն փոխադրելի միջո-
ցով անգամ մեկ ի վիճակի չենք նույն իսկ 0,1 աստի-
ծանի ճշրությամբ անկյուն կառուցանելու. ահա թե ինչու
ստիպված յեղանք առհասարակ զեւ տրանսպորտ, որ մեր յե-
ռանկյան մեջ կառուցվեք $\Gamma = 29^{\circ}50' = 29^{\circ}\frac{5}{6}$ յեւ $K =$
 $= 39^{\circ}20' = 39^{\circ}\frac{1}{3}$, այսպէս իսկ առաջին ^{անկյան} ճշմար ստացված է

4'30", 69 սխալ յեղ երկրորդ-անկյան հաճար 33", 82 սխալ.
այս՝ յերրորդ-սխալն է: Դասի դրանից, գծագրման ճշգրտ-
թյունը յենթակայանին (սուբյեկտիվ) յերեւոյթն, վոր կարգւած
է քոյակ անցի աչիից յեղ վարժութիւնից. յուրաքանչյուր վոյ
անուծ է վորոշ, իրեն ծիայն հասրուկ, սխալ. այս՝ չորրորդ-
սխալն է: Հերգապեւ, կարկինի անճշգրտութիւնը յեղ գծվող
աղեղների յեղ ուղիղների անգամ նվազագույն հասարակու-
նը քերիի է քաւիս ևոր անճշգրտութիւնների. այս՝ հինգերորդ-
սխալն է:

II Եփոփելով աստճերս՝ յեղ քակարկնուծ ենք, վոր PK կողմի
յերկարութիւն հաճար սրացած արժեքը զգալիորեն քար-
բերվում է իրականից. յեղ իրոք, իսկական արժեքն է
8714, 6 սաւ: Ախալն է 45, 4 սաւ: Եւման սխալ կը գուր-
նենք նայել TP կողմը հաշվելիս:

8. Յեղ այսպեւ, յեռանկյունների լուծման գրաճիկ^{ակն} յերրորդ-
անհարժար է յեղ անճիշտ. անհարժար է, վորոշ հետեւ սոր-
պված ենք, հասարակուն ճաւղարքի պարճառով, գծել հա-
ժարս իւրոր կամ շուր Եւման յեռանկյուններ. անճիշտ է,
վորոշ հետեւ անճիշտ են թե՛ գ-ր յծիքները յեղ թե՛ գ-ճա-
րման յեղ քանակները: Հեր-պեւ, այդ յերրորդ չի քա-
վարարում հաշվումների գլխավոր պահանջին, վորն է
ճարնանել լուծման ճշգրտութիւն կամ ճորագործութիւն
սահմանը, յեղ այս ալն պարճառով, վոր գործիքնե-
րի յեղ գ-ճագրողի սխալները վորոշ հաշվի չեն
յենթարկվում: Այս ասեմն աչիի առաջ ունենալով

դիտւո՞ւմ եւեթ թի ալ ծերոսի՝ յեռանկյան ցարրերէջ ծի քա-
 յուր ճոռակերի ծիջոցով հաշվելու յեղանակին. այս հաշված
 աւելի արար է յետ աւելի գեղեցիկ, քան կարուցումը, յետ
 վոր գլխաւորն է, երծեալն է ընդ հանութ յողանակի վրայ, յետ
 ցարիս է աշխարհ արդյունիներ, զորոնց ճշտության աստիճա-
 նը նախապէս ճարտուողն է: Դիտանկյան ցարրերէջ ծի քա-
 յարս հաշված: Դո. ների ծիջոցով կաշմծ է յեռանկյունաշա-
 րտութան առարկան:



Գլուխ I. Արևու յու հոսքու

1. Արևու յու հոսքու ծագումը: - Հարցենք ABC ողջան-
կուն յեռանկունը (պարզ. 4): Հարմարենք AB եւ AC հոսք-
ը յու (AB հոսքը վրայ հաճախաբար ընդրած $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$
կետերից բնական $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4, \dots$ ողջանայնե-
րը AC հոսքի հարմարաբար վրայ. հարմարենք իր շարք նման
յեռանկուններ, վարենք հաճախ ընդհանուր 6 A սուր անկունը:

II-րդ յեռանկուններ, նմանությունից հետևում է.

$$1) \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \frac{B_4C_4}{AB_4} = \dots = \text{Const.}$$

$$2) \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{AC_3}{AB_3} = \frac{AC_4}{AB_4} = \dots = \text{Const.}$$

Արևույնեք հաճախար հարաբերություններ յերկու շարք. վո-
րակերպի այդ շարքերը հարող ենք շարունակել անփակ, վո-
րակն ցանկանալ, ասում շարք է, վոր թե՛ անազուն յու թե՛
յարկուն, հարաբերություններից յուրաքանչյուրը հարաբերուն
խանակությունն է. այդ նշանակումն են կոչ. Const. ("La
grandeur constante") - հասարակուն ճեճությունն: Այժմ
ցույց ցուեք, վոր այդ հարաբերությունն երր նմանությունը հար-
կան է A անկուն ճեճությունից ծագել: Իբրև հաճախ A կետի
ճուր հաճախանալ ցուեք անկունից փոքր թի անկուն, այ-
սինքն ցուենեք AK_1 ողիշը, հարմարենք նման ողջանկուն
յեռանկուններ թի նոր շարք: Երանկն նմանությունից
բխում է, թեպետ յուլ անազ, հաճախար հարաբերությունն
ենք յերկու շարք.

$$1) \frac{KC}{AK} = \frac{K_1 C_1}{AK_1} = \frac{K_2 C_2}{AK_2} = \frac{K_3 C_3}{AK_3} = \frac{K_4 C_4}{AK_4} = \dots = \text{Const.}$$

$$2) \frac{AC}{AK} = \frac{AC_1}{AK_1} = \frac{AC_2}{AK_2} = \frac{AC_3}{AK_3} = \frac{AC_4}{AK_4} = \dots = \text{Const.}$$

Եւր յառանգյուններին ընդհանուր KAC անկյունը փոխ-
 ւ BAC անկյունից. քանակեմք ինչպէս փոխվեցին կողմերի
 հարաբերությունները: Առաջին $\frac{KC}{AK}$ հարաբերությունն
 ընդհանրապէս փոխվեց, չորովհետեւ $KC < BC$ յեւ $AK < AB$.
 յետ A -ն կենտրոն ընդունելով AB շառավիղով աշտշտեմք,
 ապա կը նկատուեմք, զոր AK -ի յեւ AB -ի հարաբերությունն անհա-
 ժամար ազելի փոխւեմք, իսկ KC -ի յեւ BC -ի հարաբերությունը.
 այս պարագայով $\frac{KC}{AK} < \frac{BC}{AB}$, առաջին հարաբերությունը փո-
 փրացաւ: ¹⁾ Եւ $\frac{AC}{AK}$ հարաբերության, ապա
 AC ծայր առանց փոփոխության, իսկ $AK < AB$, հետեւեալպէս
 $\frac{AC}{AK} > \frac{AC}{AB}$, յերկրորդ հարաբերությունը ժամացաւ: Այսպե-
 շից յեւ քակարկուծ եմք, զոր այս հարաբերություններին ժամ-
 անց:

1) Հեշիւակի ապացոյցը խաբարյալն դեմ է ժամանկուծ: Իրեր
 նպատակի համար բաժանալուն եւ ցույց տալ, զոր A անկյուն փո-
 փոխման հետ ծիւսին փոփոխվում եւ նայելով $\frac{BC}{AB}$ հարաբերությունը,
 այսինքն զոր $\frac{BC}{AB} \neq \frac{KC}{AK}$: Երրորդ, յետեւ այս հարաբերություններին
 իրար հաճաւար լինելին, ապա $\triangle ABC$ յեւ $\triangle AKC$ իրար նման պետք
 եւ լինելին, քորից կը բխեր $\angle BAC$ -ի յեւ $\angle KAC$ -ի հաճաւարությունը:
 Բայց այս յեւ քակարկուծութիւնը հակասում եւ ընդունում յայտնաբերւած հետեւեա-
 ւեւ $\frac{BC}{AB} \neq \frac{KC}{AK}$: Կույց տալու համար, զոր իրոր $\frac{KC}{AK} < \frac{BC}{AB}$, քանակեմք KD -ն
 AB -ին զուգահեռ. կարանաւմ $\triangle ABC$ նման $\triangle KCD$ -ին, քորից հետեւում եւ
 $\frac{BC}{AB} = \frac{KC}{DK}$. Չորովհետեւ $DK < AK$, ապա $\frac{KC}{DK} < \frac{KC}{AK}$, հետեւեալպէս $\frac{KC}{DK} < \frac{BC}{AB}$, զորն պետք եւ
 ապացոյցել: Ե.թ.

թուր կախուծ ունի *A* անկյան ճեմությունից ծիայն, զորովհետեւ
 րեւել կողմերի յերկարությունը զոր ծի դ-եր էր խառնուծ. յեւ իսկ
 զոր այդ-այդ-պէս է, յեւ իրարմէն ունիւնի այդ հարաբերու-
 թյուններն ընդունելու իբրեւ չափ *A* անկյան:

2. Հարծարության համար պայմանադրվելի անկյուններն նշանակելու
 նրանց ցանկաների ծնոր դրված ծեմ ցառերով, իսկ նախորդ կողմե-
 րը՝ նույնանուն փոքր ցառերով: Մասի դրանից, ուղիղ անկյունը,
 իբրեւ հասարակուն ճեմություն, ծիշը կը նշանակելի *C* ցառով
 (*Constante* բառի սկզբնապատը), իսկ սուր անկյունները՝ *A* յեւ *B*
 ցառերով. դրան հաճապարարան՝ ներթափանցիւր կը նշանա-
 կելի *C* ցառով, իսկ եզերը՝ *a* յեւ *b* ցառերով: Այս նշանա-
 կութեան առաջին անգամ առաջարկված են *L. Պլեթի* (*L. Euler*)
 կողմից^{*)} յեւ այն ժամանակից ի վեր ծնունդ են ընդ հանուր ցոր-
 ծաճության ծեղ:

Երբ անելով ծի նշանակումները՝ սրայած (*n* յեւ *m*) հարաբե-
 րություններին՝ րեւանուծ ենի, զոր առաջինը դառնուծ է $\frac{a}{c}$, իսկ
 յերկրորդը՝ $\frac{b}{c}$: Արանցից $\frac{a}{c}$ ցույց է ցալիս *A* անկյան դիմացի
 եզի յեւ ներթափանցի հարաբերությունը, $\frac{b}{c}$ -ը՝ *A* անկյան կից
 եզի յեւ ներթափանցի հարաբերությունը: Եթե կողմերը չափված
 են գ-ծային նույնանուն ճիւղություններով, ապա այդ հարաբերու-
 թյուններից յուրաքանչյուրի ճեմությունը կարգաւորվի վերա-
 ցական թվով: Այսպէս, յեթե եզերը հաճապարարանաբար հա-
 վասար են *3* արշիւնի յեւ *4* արշիւնի, իսկ ներթափանցի՝ *5* արշի-
 նի, ապա առաջին հարաբերությունը հաշուար է $\frac{3}{5}$ -ի, յերկրոր-

*) *Acta Petrop.* 1779, P. I

որ $\frac{4}{5}$ -ի: Իսկ յետև հոշմերը համեմատելով q -մասին գործարքեր ծրարություններով, որ $a = 9$ փորձ., իսկ $c = 2$ սառ., ապա $\frac{a}{c}$ հարաբերությունը համեմատելով է $\frac{9}{2}$. այդպիսի հարաբերություններ են իսկ իմաստը չունեն: Այդ պատճառով անհրաժեշտ է C -ն նախ արքա-հայրել ենդանդի փորձաչափերով, այսինքն $C = 14$ փորձ., այն ժամանակ $\frac{a}{c} = \frac{9}{14}$:

3. Սահմանափակ: $\frac{a}{c}$ իսկ $\frac{b}{c}$ արքա-հայրությունները հոշմով են յեռանկյունի ափսոսանք հարաբերություններ, կամ յեռանկյունի համեմատելով յեռանկյուններ: Առաջինը, այսինքն A անկյունը յիշար հարաբերություններին հոշմով է A անկյունը արևուստ յեղ նշանակում է $\sin A$, իսկ յերկրորդը, այսինքն A անկյունը հոշ եղև արքա-հայրություններին հոշմով է A անկյունը հոշմով է $\cos A$. այսպիսով

3) $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$.

" $\sin A$ ", " $\cos A$ " նշանակումները պետք է դիտել փորձեր ծրարության չափան նշան, ինչպես $\log x - c$, իսկ փոքր թե իբրև յերկու արքա-հայրություն " $\sin$ " իսկ " A ", " $\cos$ " իսկ " A ":

4. Յետև հիշելով ներառություն յեղ յեռանկյունի առանց յեռանկյունները, ապա նրանց համար կը գտնենք հետևյալ հարաբերությունները. $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. հետևյալով

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Այսպիսով սրանցով արևուստ յեղ հոշմունքներ ծրարություններ յերկրաչափական նշանակումով:

ար A ՝. Ենթի չեղող q -ընմծ եւեթ, զոր $\frac{b^2}{c^2} = (\frac{b}{c})^2 = \cos^2 A$
 յեղ վերջնականորեն

$$(5) \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Եյս հաշվարարման յեղ ծրնող յետքայուններն յեղ քան-
 նակն՝ դիւար շե q -ընել նայել յերկրորդը. զույգ քանի
 այդ յի քանի որինակաների վրա:

I. Դիւար $A = 30^\circ$ յեղ $\sin A = \frac{1}{2}$: Եյդ դեպքում
 $\cos^2 30^\circ = 1 - \sin^2 30^\circ$; $\cos^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;
 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

զոր յրանգանձայն հաճախ յեղմծ եւ $\cos 30^\circ$ -ի հաճախ վերջ
 գրան արտեքը

II. Արուդ եւեթ (5) բանաշեղ $A = 45^\circ$ անկյան հաճախ, իւրար
 $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$
 $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$; $\frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$; $1 = 1$

Արաջան նույնութունը զույգ ե քանիս, զոր բանաշեղ C
 յիւր ե:

7. Արնուար յեղ Կոսինուար փոխարարումները: Մեր -
 քեւեթ ABC ողշանկյուն յեռանկյունը (պարկ. 6) յեղ a
 եղ C անկոտրի թողնելով՝ յեճայնեւեթ յեղ
 փոխարարեւեթ B անկյունը, C ներքնացքը

քանի $BA_1, BA_2, BA_3, BA_4, \dots$ դր -

շեր: Դիւարեւեթ անաջաջան ~~պարկ. 6~~

~~A_1BC~~ , ~~A_2BC~~ , ~~A_3BC~~ , ~~A_4BC~~ , ~~A_5BC~~ , ~~A_6BC~~ , ~~A_7BC~~ , ~~A_8BC~~ , ~~A_9BC~~ , ~~$A_{10}BC$~~ , ~~$A_{11}BC$~~ , ~~$A_{12}BC$~~ , ~~$A_{13}BC$~~ , ~~$A_{14}BC$~~ , ~~$A_{15}BC$~~ , ~~$A_{16}BC$~~ , ~~$A_{17}BC$~~ , ~~$A_{18}BC$~~ , ~~$A_{19}BC$~~ , ~~$A_{20}BC$~~ , ~~$A_{21}BC$~~ , ~~$A_{22}BC$~~ , ~~$A_{23}BC$~~ , ~~$A_{24}BC$~~ , ~~$A_{25}BC$~~ , ~~$A_{26}BC$~~ , ~~$A_{27}BC$~~ , ~~$A_{28}BC$~~ , ~~$A_{29}BC$~~ , ~~$A_{30}BC$~~ , ~~$A_{31}BC$~~ , ~~$A_{32}BC$~~ , ~~$A_{33}BC$~~ , ~~$A_{34}BC$~~ , ~~$A_{35}BC$~~ , ~~$A_{36}BC$~~ , ~~$A_{37}BC$~~ , ~~$A_{38}BC$~~ , ~~$A_{39}BC$~~ , ~~$A_{40}BC$~~ , ~~$A_{41}BC$~~ , ~~$A_{42}BC$~~ , ~~$A_{43}BC$~~ , ~~$A_{44}BC$~~ , ~~$A_{45}BC$~~ , ~~$A_{46}BC$~~ , ~~$A_{47}BC$~~ , ~~$A_{48}BC$~~ , ~~$A_{49}BC$~~ , ~~$A_{50}BC$~~ , ~~$A_{51}BC$~~ , ~~$A_{52}BC$~~ , ~~$A_{53}BC$~~ , ~~$A_{54}BC$~~ , ~~$A_{55}BC$~~ , ~~$A_{56}BC$~~ , ~~$A_{57}BC$~~ , ~~$A_{58}BC$~~ , ~~$A_{59}BC$~~ , ~~$A_{60}BC$~~ , ~~$A_{61}BC$~~ , ~~$A_{62}BC$~~ , ~~$A_{63}BC$~~ , ~~$A_{64}BC$~~ , ~~$A_{65}BC$~~ , ~~$A_{66}BC$~~ , ~~$A_{67}BC$~~ , ~~$A_{68}BC$~~ , ~~$A_{69}BC$~~ , ~~$A_{70}BC$~~ , ~~$A_{71}BC$~~ , ~~$A_{72}BC$~~ , ~~$A_{73}BC$~~ , ~~$A_{74}BC$~~ , ~~$A_{75}BC$~~ , ~~$A_{76}BC$~~ , ~~$A_{77}BC$~~ , ~~$A_{78}BC$~~ , ~~$A_{79}BC$~~ , ~~$A_{80}BC$~~ , ~~$A_{81}BC$~~ , ~~$A_{82}BC$~~ , ~~$A_{83}BC$~~ , ~~$A_{84}BC$~~ , ~~$A_{85}BC$~~ , ~~$A_{86}BC$~~ , ~~$A_{87}BC$~~ , ~~$A_{88}BC$~~ , ~~$A_{89}BC$~~ , ~~$A_{90}BC$~~ , ~~$A_{91}BC$~~ , ~~$A_{92}BC$~~ , ~~$A_{93}BC$~~ , ~~$A_{94}BC$~~ , ~~$A_{95}BC$~~ , ~~$A_{96}BC$~~ , ~~$A_{97}BC$~~ , ~~$A_{98}BC$~~ , ~~$A_{99}BC$~~ , ~~$A_{100}BC$~~ , ~~$A_{101}BC$~~ , ~~$A_{102}BC$~~ , ~~$A_{103}BC$~~ , ~~$A_{104}BC$~~ , ~~$A_{105}BC$~~ , ~~$A_{106}BC$~~ , ~~$A_{107}BC$~~ , ~~$A_{108}BC$~~ , ~~$A_{109}BC$~~ , ~~$A_{110}BC$~~ , ~~$A_{111}BC$~~ , ~~$A_{112}BC$~~ , ~~$A_{113}BC$~~ , ~~$A_{114}BC$~~ , ~~$A_{115}BC$~~ , ~~$A_{116}BC$~~ , ~~$A_{117}BC$~~ , ~~$A_{118}BC$~~ , ~~$A_{119}BC$~~ , ~~$A_{120}BC$~~ , ~~$A_{121}BC$~~ , ~~$A_{122}BC$~~ , ~~$A_{123}BC$~~ , ~~$A_{124}BC$~~ , ~~$A_{125}BC$~~ , ~~$A_{126}BC$~~ , ~~$A_{127}BC$~~ , ~~$A_{128}BC$~~ , ~~$A_{129}BC$~~ , ~~$A_{130}BC$~~ , ~~$A_{131}BC$~~ , ~~$A_{132}BC$~~ , ~~$A_{133}BC$~~ , ~~$A_{134}BC$~~ , ~~$A_{135}BC$~~ , ~~$A_{136}BC$~~ , ~~$A_{137}BC$~~ , ~~$A_{138}BC$~~ , ~~$A_{139}BC$~~ , ~~$A_{140}BC$~~ , ~~$A_{141}BC$~~ , ~~$A_{142}BC$~~ , ~~$A_{143}BC$~~ , ~~$A_{144}BC$~~ , ~~$A_{145}BC$~~ , ~~$A_{146}BC$~~ , ~~$A_{147}BC$~~ , ~~$A_{148}BC$~~ , ~~$A_{149}BC$~~ , ~~$A_{150}BC$~~ , ~~$A_{151}BC$~~ , ~~$A_{152}BC$~~ , ~~$A_{153}BC$~~ , ~~$A_{154}BC$~~ , ~~$A_{155}BC$~~ , ~~$A_{156}BC$~~ , ~~$A_{157}BC$~~ , ~~$A_{158}BC$~~ , ~~$A_{159}BC$~~ , ~~$A_{160}BC$~~ , ~~$A_{161}BC$~~ , ~~$A_{162}BC$~~ , ~~$A_{163}BC$~~ , ~~$A_{164}BC$~~ , ~~$A_{165}BC$~~ , ~~$A_{166}BC$~~ , ~~$A_{167}BC$~~ , ~~$A_{168}BC$~~ , ~~$A_{169}BC$~~ , ~~$A_{170}BC$~~ , ~~$A_{171}BC$~~ , ~~$A_{172}BC$~~ , ~~$A_{173}BC$~~ , ~~$A_{174}BC$~~ , ~~$A_{175}BC$~~ , ~~$A_{176}BC$~~ , ~~$A_{177}BC$~~ , ~~$A_{178}BC$~~ , ~~$A_{179}BC$~~ , ~~$A_{180}BC$~~ , ~~$A_{181}BC$~~ , ~~$A_{182}BC$~~ , ~~$A_{183}BC$~~ , ~~$A_{184}BC$~~ , ~~$A_{185}BC$~~ , ~~$A_{186}BC$~~ , ~~$A_{187}BC$~~ , ~~$A_{188}BC$~~ , ~~$A_{189}BC$~~ , ~~$A_{190}BC$~~ , ~~$A_{191}BC$~~ , ~~$A_{192}BC$~~ , ~~$A_{193}BC$~~ , ~~$A_{194}BC$~~ , ~~$A_{195}BC$~~ , ~~$A_{196}BC$~~ , ~~$A_{197}BC$~~ , ~~$A_{198}BC$~~ , ~~$A_{199}BC$~~ , ~~$A_{200}BC$~~ , ~~$A_{201}BC$~~ , ~~$A_{202}BC$~~ , ~~$A_{203}BC$~~ , ~~$A_{204}BC$~~ , ~~$A_{205}BC$~~ , ~~$A_{206}BC$~~ , ~~$A_{207}BC$~~ , ~~$A_{208}BC$~~ , ~~$A_{209}BC$~~ , ~~$A_{210}BC$~~ , ~~$A_{211}BC$~~ , ~~$A_{212}BC$~~ , ~~$A_{213}BC$~~ , ~~$A_{214}BC$~~ , ~~$A_{215}BC$~~ , ~~$A_{216}BC$~~ , ~~$A_{217}BC$~~ , ~~$A_{218}BC$~~ , ~~$A_{219}BC$~~ , ~~$A_{220}BC$~~ , ~~$A_{221}BC$~~ , ~~$A_{222}BC$~~ , ~~$A_{223}BC$~~ , ~~$A_{224}BC$~~ , ~~$A_{225}BC$~~ , ~~$A_{226}BC$~~ , ~~$A_{227}BC$~~ , ~~$A_{228}BC$~~ , ~~$A_{229}BC$~~ , ~~$A_{230}BC$~~ , ~~$A_{231}BC$~~ , ~~$A_{232}BC$~~ , ~~$A_{233}BC$~~ , ~~$A_{234}BC$~~ , ~~$A_{235}BC$~~ , ~~$A_{236}BC$~~ , ~~$A_{237}BC$~~ , ~~$A_{238}BC$~~ , ~~$A_{239}BC$~~ , ~~$A_{240}BC$~~ , ~~$A_{241}BC$~~ , ~~$A_{242}BC$~~ , ~~$A_{243}BC$~~ , ~~$A_{244}BC$~~ , ~~$A_{245}BC$~~ , ~~$A_{246}BC$~~ , ~~$A_{247}BC$~~ , ~~$A_{248}BC$~~ , ~~$A_{249}BC$~~ , ~~$A_{250}BC$~~ , ~~$A_{251}BC$~~ , ~~$A_{252}BC$~~ , ~~$A_{253}BC$~~ , ~~$A_{254}BC$~~ , ~~$A_{255}BC$~~ , ~~$A_{256}BC$~~ , ~~$A_{257}BC$~~ , ~~$A_{258}BC$~~ , ~~$A_{259}BC$~~ , ~~$A_{260}BC$~~ , ~~$A_{261}BC$~~ , ~~$A_{262}BC$~~ , ~~$A_{263}BC$~~ , ~~$A_{264}BC$~~ , ~~$A_{265}BC$~~ , ~~$A_{266}BC$~~ , ~~$A_{267}BC$~~ , ~~$A_{268}BC$~~ , ~~$A_{269}BC$~~ , ~~$A_{270}BC$~~ , ~~$A_{271}BC$~~ , ~~$A_{272}BC$~~ , ~~$A_{273}BC$~~ , ~~$A_{274}BC$~~ , ~~$A_{275}BC$~~ , ~~$A_{276}BC$~~ , ~~$A_{277}BC$~~ , ~~$A_{278}BC$~~ , ~~$A_{279}BC$~~ , ~~$A_{280}BC$~~ , ~~$A_{281}BC$~~ , ~~$A_{282}BC$~~ , ~~$A_{283}BC$~~ , ~~$A_{284}BC$~~ , ~~$A_{285}BC$~~ , ~~$A_{286}BC$~~ , ~~$A_{287}BC$~~ , ~~$A_{288}BC$~~ , ~~$A_{289}BC$~~ , ~~$A_{290}BC$~~ , ~~$A_{291}BC$~~ , ~~$A_{292}BC$~~ , ~~$A_{293}BC$~~ , ~~$A_{294}BC$~~ , ~~$A_{295}BC$~~ , ~~$A_{296}BC$~~ , ~~$A_{297}BC$~~ , ~~$A_{298}BC$~~ , ~~$A_{299}BC$~~ , ~~$A_{300}BC$~~ , ~~$A_{301}BC$~~ , ~~$A_{302}BC$~~ , ~~$A_{303}BC$~~ , ~~$A_{304}BC$~~ , ~~$A_{305}BC$~~ , ~~$A_{306}BC$~~ , ~~$A_{307}BC$~~ , ~~$A_{308}BC$~~ , ~~$A_{309}BC$~~ , ~~$A_{310}BC$~~ , ~~$A_{311}BC$~~ , ~~$A_{312}BC$~~ , ~~$A_{313}BC$~~ , ~~$A_{314}BC$~~ , ~~$A_{315}BC$~~ , ~~$A_{316}BC$~~ , ~~$A_{317}BC$~~ , ~~$A_{318}BC$~~ , ~~$A_{319}BC$~~ , ~~$A_{320}BC$~~ , ~~$A_{321}BC$~~ , ~~$A_{322}BC$~~ , ~~$A_{323}BC$~~ , ~~$A_{324}BC$~~ , ~~$A_{325}BC$~~ , ~~$A_{326}BC$~~ , ~~$A_{327}BC$~~ , ~~$A_{328}BC$~~ , ~~$A_{329}BC$~~ , ~~$A_{330}BC$~~ , ~~$A_{331}BC$~~ , ~~$A_{332}BC$~~ , ~~$A_{333}BC$~~ , ~~$A_{334}BC$~~ , ~~$A_{335}BC$~~ , ~~$A_{336}BC$~~ , ~~$A_{337}BC$~~ , ~~$A_{338}BC$~~ , ~~$A_{339}BC$~~ , ~~$A_{340}BC$~~ , ~~$A_{341}BC$~~ , ~~$A_{342}BC$~~ , ~~$A_{343}BC$~~ , ~~$A_{344}BC$~~ , ~~$A_{345}BC$~~ , ~~$A_{346}BC$~~ , ~~$A_{347}BC$~~ , ~~$A_{348}BC$~~ , ~~$A_{349}BC$~~ , ~~$A_{350}BC$~~ , ~~$A_{351}BC$~~ , ~~$A_{352}BC$~~ , ~~$A_{353}BC$~~ , ~~$A_{354}BC$~~ , ~~$A_{355}BC$~~ , ~~$A_{356}BC$~~ , ~~$A_{357}BC$~~ , ~~$A_{358}BC$~~ , ~~$A_{359}BC$~~ , ~~$A_{360}BC$~~ , ~~$A_{361}BC$~~ , ~~$A_{362}BC$~~ , ~~$A_{363}BC$~~ , ~~$A_{364}BC$~~ , ~~$A_{365}BC$~~ , ~~$A_{366}BC$~~ , ~~$A_{367}BC$~~ , ~~$A_{368}BC$~~ , ~~$A_{369}BC$~~ , ~~$A_{370}BC$~~ , ~~$A_{371}BC$~~ , ~~$A_{372}BC$~~ , ~~$A_{373}BC$~~ , ~~$A_{374}BC$~~ , ~~$A_{375}BC$~~ , ~~$A_{376}BC$~~ , ~~$A_{377}BC$~~ , ~~$A_{378}BC$~~ , ~~$A_{379}BC$~~ , ~~$A_{380}BC$~~ , ~~$A_{381}BC$~~ , ~~$A_{382}BC$~~ , ~~$A_{383}BC$~~ , ~~$A_{384}BC$~~ , ~~$A_{385}BC$~~ , ~~$A_{386}BC$~~ , ~~$A_{387}BC$~~ , ~~$A_{388}BC$~~ , ~~$A_{389}BC$~~ , ~~$A_{390}BC$~~ , ~~$A_{391}BC$~~ , ~~$A_{392}BC$~~ , ~~$A_{393}BC$~~ , ~~$A_{394}BC$~~ , ~~$A_{395}BC$~~ , ~~$A_{396}BC$~~ , ~~$A_{397}BC$~~ , ~~$A_{398}BC$~~ , ~~$A_{399}BC$~~ , ~~$A_{400}BC$~~ , ~~$A_{401}BC$~~ , ~~$A_{402}BC$~~ , ~~$A_{403}BC$~~ , ~~$A_{404}BC$~~ , ~~$A_{405}BC$~~ , ~~$A_{406}BC$~~ , ~~$A_{407}BC$~~ , ~~$A_{408}BC$~~ , ~~$A_{409}BC$~~ , ~~$A_{410}BC$~~ , ~~$A_{411}BC$~~ , ~~$A_{412}BC$~~ , ~~$A_{413}BC$~~ , ~~$A_{414}BC$~~ , ~~$A_{415}BC$~~ , ~~$A_{416}BC$~~ , ~~$A_{417}BC$~~ , ~~$A_{418}BC$~~ , ~~$A_{419}BC$~~ , ~~$A_{420}BC$~~ , ~~$A_{421}BC$~~ , ~~$A_{422}BC$~~ , ~~$A_{423}BC$~~ , ~~$A_{424}BC$~~ , ~~$A_{425}BC$~~ , ~~$A_{426}BC$~~ , ~~$A_{427}BC$~~ , ~~$A_{428}BC$~~ , ~~$A_{429}BC$~~ , ~~$A_{430}BC$~~ , ~~$A_{431}BC$~~ , ~~$A_{432}BC$~~ , ~~$A_{433}BC$~~ , ~~$A_{434}BC$~~ , ~~$A_{435}BC$~~ , ~~$A_{436}BC$~~ , ~~$A_{437}BC$~~ , ~~$A_{438}BC$~~ , ~~$A_{439}BC$~~ , ~~$A_{440}BC$~~ , ~~$A_{441}BC$~~ , ~~$A_{442}BC$~~ , ~~$A_{443}BC$~~ , ~~$A_{444}BC$~~ , ~~$A_{445}BC$~~ , ~~$A_{446}BC$~~ , ~~$A_{447}BC$~~ , ~~$A_{448}BC$~~ , ~~$A_{449}BC$~~ , ~~$A_{450}BC$~~ , ~~$A_{451}BC$~~ , ~~$A_{452}BC$~~ , ~~$A_{453}BC$~~ , ~~$A_{454}BC$~~ , ~~$A_{455}BC$~~ , ~~$A_{456}BC$~~ , ~~$A_{457}BC$~~ , ~~$A_{458}BC$~~ , ~~$A_{459}BC$~~ , ~~$A_{460}BC$~~ , ~~$A_{461}BC$~~ , ~~$A_{462}BC$~~ , ~~$A_{463}BC$~~ , ~~$A_{464}BC$~~ , ~~$A_{465}BC$~~ , ~~$A_{466}BC$~~ , ~~$A_{467}BC$~~ , ~~$A_{468}BC$~~ , ~~$A_{469}BC$~~ , ~~$A_{470}BC$~~ , ~~$A_{471}BC$~~ , ~~$A_{472}BC$~~ , ~~$A_{473}BC$~~ , ~~$A_{474}BC$~~ , ~~$A_{475}BC$~~ , ~~$A_{476}BC$~~ , ~~$A_{477}BC$~~ , ~~$A_{478}BC$~~ , ~~$A_{479}BC$~~ , ~~$A_{480}BC$~~ , ~~$A_{481}BC$~~ , ~~$A_{482}BC$~~ , ~~$A_{483}BC$~~ , ~~$A_{484}BC$~~ , ~~$A_{485}BC$~~ , ~~$A_{486}BC$~~ , ~~$A_{487}BC$~~ , ~~$A_{488}BC$~~ , ~~$A_{489}BC$~~ , ~~$A_{490}BC$~~ , ~~$A_{491}BC$~~ , ~~$A_{492}BC$~~ , ~~$A_{493}BC$~~ , ~~$A_{494}BC$~~ , ~~$A_{495}BC$~~ , ~~$A_{496}BC$~~ , ~~$A_{497}BC$~~ , ~~$A_{498}BC$~~ , ~~$A_{499}BC$~~ , ~~$A_{500}BC$~~ , ~~$A_{501}BC$~~ , ~~$A_{502}BC$~~ , ~~$A_{503}BC$~~ , ~~$A_{504}BC$~~ , ~~$A_{505}BC$~~ , ~~$A_{506}BC$~~ , ~~$A_{507}BC$~~ , ~~$A_{508}BC$~~ , ~~$A_{509}BC$~~ , ~~$A_{510}BC$~~ , ~~$A_{511}BC$~~ , ~~$A_{512}BC$~~ , ~~$A_{513}BC$~~ , ~~$A_{514}BC$~~ , ~~$A_{515}BC$~~ , ~~$A_{516}BC$~~ , ~~$A_{517}BC$~~ , ~~$A_{518}BC$~~ , ~~$A_{519}BC$~~ , ~~$A_{520}BC$~~ , ~~$A_{521}BC$~~ , ~~$A_{522}BC$~~ , ~~$A_{523}BC$~~ , ~~$A_{524}BC$~~ , ~~$A_{525}BC$~~ , ~~$A_{526}BC$~~ , ~~$A_{527}BC$~~ , ~~$A_{528}BC$~~ , ~~$A_{529}BC$~~ , ~~$A_{530}BC$~~ , ~~$A_{531}BC$~~ , ~~$A_{532}BC$~~ , ~~$A_{533}BC$~~ , ~~$A_{534}BC$~~ , ~~$A_{535}BC$~~ , ~~$A_{536}BC$~~ , ~~$A_{537}BC$~~ , ~~$A_{538}BC$~~ , ~~$A_{539}BC$~~ , ~~$A_{540}BC$~~ , ~~$A_{541}BC$~~ , ~~$A_{542}BC$~~ , ~~$A_{543}BC$~~ , ~~$A_{544}BC$~~ , ~~$A_{545}BC$~~ , ~~$A_{546}BC$~~ , ~~$A_{547}BC$~~ , ~~$A_{548}BC$~~ , ~~$A_{549}BC$~~ , ~~$A_{550}BC$~~ , ~~$A_{551}BC$~~ , ~~$A_{552}BC$~~ , ~~$A_{553}BC$~~ , ~~$A_{554}BC$~~ , ~~$A_{555}BC$~~ , ~~$A_{556}BC$~~ , ~~$A_{557}BC$~~ , ~~$A_{558}BC$~~ , ~~$A_{559}BC$~~ , ~~$A_{560}BC$~~ , ~~$A_{561}BC$~~ , ~~$A_{562}BC$~~ , ~~$A_{563}BC$~~ , ~~$A_{564}BC$~~ , ~~$A_{565}BC$~~ , ~~$A_{566}BC$~~ , ~~$A_{567}BC$~~ , ~~$A_{568}BC$~~ , ~~$A_{569}BC$~~ , ~~$A_{570}BC$~~ , ~~$A_{571}BC$~~ , ~~$A_{572}BC$~~ , ~~$A_{573}BC$~~ , ~~$A_{574}BC$~~ , ~~$A_{575}BC$~~ , ~~$A_{576}BC$~~ , ~~$A_{577}BC$~~ , ~~$A_{578}BC$~~ , ~~$A_{579}BC$~~ , ~~$A_{580}BC$~~ , ~~$A_{581}BC$~~ , ~~$A_{582}BC$~~ , ~~$A_{583}BC$~~ , ~~$A_{584}BC$~~ , ~~$A_{585}BC$~~ , ~~$A_{586}BC$~~ , ~~$A_{587}BC$~~ , ~~$A_{588}BC$~~ , ~~$A_{589}BC$~~ , ~~$A_{590}BC$~~ , ~~$A_{591}BC$~~ , ~~$A_{592}BC$~~ , ~~$A_{593}BC$~~ , ~~$A_{594}BC$~~ , ~~$A_{595}BC$~~ , ~~$A_{596}BC$~~ , ~~$A_{597}BC$~~ , ~~$A_{598}BC$~~ , ~~$A_{599}BC$~~ , ~~$A_{600}BC$~~ , ~~$A_{601}BC$~~ , ~~$A_{602}BC$~~ , ~~$A_{603}BC$~~ , ~~$A_{604}BC$~~ , ~~$A_{605}BC$~~ , ~~$A_{606}BC$~~ , ~~$A_{607}BC$~~ , ~~$A_{608}BC$~~ , ~~$A_{609}BC$~~ , ~~$A_{610}BC$~~ , ~~$A_{611}BC$~~ , ~~$A_{612}BC$~~ , ~~$A_{613}BC$~~ , ~~$A_{614}BC$~~ , ~~$A_{615}BC$~~ , ~~$A_{616}BC$~~ , ~~$A_{617}BC$~~ , ~~$A_{618}BC$~~ , ~~$A_{619}BC$~~ , ~~$A_{620}BC$~~ , ~~$A_{621}BC$~~ , ~~$A_{622}BC$~~ , ~~$A_{623}BC$~~ , ~~$A_{624}BC$~~ , ~~$A_{625}BC$~~ , ~~$A_{626}BC$~~ , ~~$A_{627}BC$~~ , ~~$A_{628}BC$~~ , ~~$A_{629}BC$~~ , ~~$A_{630}BC$~~ , ~~$A_{631}BC$~~ , ~~$A_{632}BC$~~ , ~~$A_{633}BC$~~ , ~~$A_{634}BC$~~ , ~~$A_{635}BC$~~ , ~~$A_{636}BC$~~ , ~~$A_{637}BC$~~ , ~~$A_{638}BC$~~ , ~~$A_{639}BC$~~ , ~~$A_{640}BC$~~ , ~~$A_{641}BC$~~ , ~~$A_{642}BC$~~ , ~~$A_{643}BC$~~ , ~~$A_{644}BC$~~ , ~~$A_{645}BC$~~ , ~~$A_{646}BC$~~ , ~~$A_{647}BC$~~ , ~~$A_{648}BC$~~ , ~~$A_{649}BC$~~ , ~~$A_{650}BC$~~ , ~~$A_{651}BC$~~ , ~~$A_{652}BC$~~ , ~~$A_{653}BC$~~ , ~~$A_{654}BC$~~ , ~~$A_{655}BC$~~ , ~~$A_{656}BC$~~ , ~~$A_{657}BC$~~ , ~~$A_{658}BC$~~ , ~~$A_{659}BC$~~ , ~~$A_{660}BC$~~ , ~~$A_{661}BC$~~ , ~~$A_{662}BC$~~ , ~~$A_{663}BC$~~ , ~~$A_{664}BC$~~ , ~~$A_{665}BC$~~ , ~~$A_{666}BC$~~ , ~~$A_{667}BC$~~ , ~~$A_{668}BC$~~ , ~~$A_{669}BC$~~ , ~~$A_{670}BC$~~ , ~~$A_{671}BC$~~ , ~~$A_{672}BC$~~ , ~~$A_{673}BC$~~ , ~~$A_{674}BC$~~ , ~~$A_{675}BC$~~ , ~~$A_{676}BC$~~ , ~~$A_{677}BC$~~ , ~~$A_{678}BC$~~ , ~~$A_{679}BC$~~ , ~~$A_{680}BC$~~ , ~~$A_{681}BC$~~ , ~~$A_{682}BC$~~ , ~~$A_{683}BC$~~ , ~~$A_{684}BC$~~ , ~~$A_{685}BC$~~ , ~~$A_{686}BC$~~ , ~~$A_{687}BC$~~ , ~~$A_{688}BC$~~ , ~~$A_{689}BC$~~ , ~~$A_{690}BC$~~ , ~~$A_{691}BC$~~ , ~~$A_{692}BC$~~ , ~~$A_{693}BC$~~ , ~~$A_{694}BC$~~ , ~~$A_{695}BC$~~ , ~~$A_{696}BC$~~ , ~~$A_{697}BC$~~ , ~~$A_{698}BC$~~ , ~~$A_{699}BC$~~ , ~~$A_{700}BC$~~ , ~~$A_{701}BC$~~ , ~~A_{702~~

C-ն անկյունի մեծությունը $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է: Անկյունի մեծությունը C-ն հարաբերակցությունն է, հետևաբար $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունը համանուն է, ինչպես նաև A-ն անկյունի մեծությունն է 90° -ը, C-ն հարաբերակցությունն է a-ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունը բաժանում է 1: Այսպիսով, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից ինչպես 90° անկյունի հանր, ինչ A-ն անկյունի մեծությունն է 0° -ից ինչպես 1 անկյունի անկյունի հանր: Արդյունքում եկեք

(6) $\sin 0^\circ = 0$; $\sin 90^\circ = 1$.

Այսպիսով, $\sin$ անկյունի մեծությունը 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր:

$\cos A = \sin (90^\circ - A)$

Այսպիսով, $\cos$ անկյունի մեծությունը 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր:

Արդյունքում եկեք (7) $\cos 0^\circ = 1$; $\cos 90^\circ = 0$:

Այսպիսով, $\sin$ անկյունի մեծությունը 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր:

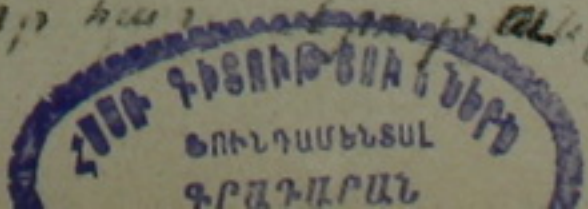
$\sin A$ -ն անկյունի մեծությունն է 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր:

$\cos A$ -ն անկյունի մեծությունն է 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր:

Այսպիսով, $\sin$ անկյունի մեծությունը 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր, ինչ $\frac{a}{c}$ հարաբերակցությունն է 0° -ից 90° -ը հանր:

A 310X

14741



Տիր աչելի թիւ է, իսկ եզերից յարաբերւոյնը:
Գլուխ II. Բնական սրժումները յեղ հոսիւնները առջեւ

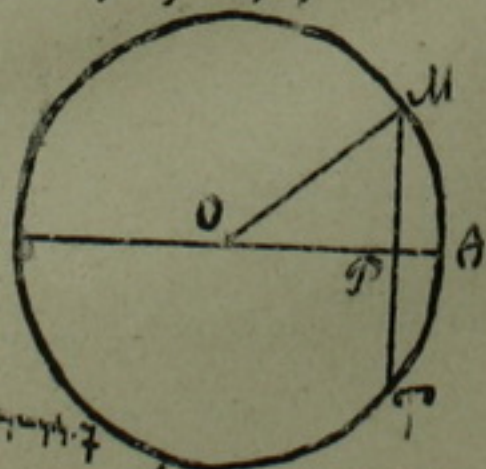
հասկեր

8. Ուղղանկյուն յեռանկյունը հաշվումը սրժացող լուծելու
 համար անհրաժեշտ է հարողանալ գրելել նրա անկյուն-
 ները սրժումները (կամ հոսիւնները) ծեփոթումները:
 Գրաքիւնակն յեղանակն, ի հարկէ, քաւրսն է հարցի դյու-
 յին լուծումը՝ հաշուցանելով քիւնակ ուղղանկյուն յեռան-
 կյունը յեղ ծաւլաբանող հարկելով եզը յեղ եւրթանցիւթը,
 պէտք է սրապաճ թելերից առաջինը բաժանել յերկրորդի
 վրայ. բաժանման արդ-յունէն հը քաւ վորտեւս սրժումս
 (կամ հոսիւնս) ծեփոթումը: Դասց ծեփ արդեւ գրելել,
 թէ որքան այդ յեղանակը հոսիւթէ յեղ անձրչոյ, այդ-
 դարձանող ծաթեծարթիւնակն հաշվումները ծաժանակ
 նրա ծաւրն թու, անգամ չի հարող լիւել: Կա ծր
 այլ ուղի, վորը գ-ոյութիւնը ծեփ պարթանակն եւժ հիւյ-
 պարտար, ասիւ նայել նրա հաշորդները հանձարին,
 այդ ուղիով ընթանալով յեղ ծեփ:

9. Արժուար յեղ լարի փոխադարձ կապը:

Պրցուի ՄԴ-ն ծր լար է (պարկ. 7), վորը հաշաւար է
 ներգ-ճալ կանոնաւոր n -անկյան կոշին, իսկ արքա-
 գ-ճալ շրջանի շառաւիղն է R .

այն ծաժանակն MO Դ կենտրոնակաւ
 անկյունը հաշաւար է $\frac{360^\circ}{n}$: Եղանա-
 կելեժ այդ բաւժանակն կոշը q_n յեղ
 դ-թիւեժ MO ուղղանկյուն յեռանկյունը: Կունենալ



$$\sin \angle MOP = \frac{MP}{OM}$$

Բայց $\angle MOP = \frac{1}{2} \angle MOT = \frac{180^\circ}{n}$, $MP = \frac{1}{2} MT = \frac{a_n}{2}$, $OM = R$,
 ուստի (8) $\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a_n}{2R}$, այսինքն նեք-ճյալ կանոնադր
բազմանկյան կողմի հարաբերությունը քրաճագ-ճին համար
և այդ-կողմին համապատասխանող կենտրոնական անկյան
կեսի սինուսին:

10. Ի՞նչ արագած բանաչելն ունի գործնական թե՛ նշանակու-
 թյուն. այն է՝ իմանալով մի քանի կանոնադր բազմանկյուն-
 ների կողմերի յեղ արտագ-ճյալ շրջանների շառավղների
 փոխադ-արջ կախումը՝ թե՛ մեկ առանց դժվարության կ՞հ գտն-
 անք մի քանի սուր անկյունների սինուսները. իսկ այդ-կա-
 խումը յայտնի է հարթաչափությունից:

11. Անցնենք արագած բանաչելի կիրառություններին.

I. $n=3$. Ունենք $\frac{180^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{3}$, $a_3 = R\sqrt{3}$, ուրե՛ք

$$\sin \frac{180^\circ}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2R}, \text{ և որից}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ մի արդյունք, զոր առանց պրա-}$$

պել ենք միանգամայն ալլ յեղանակով:

II. $n=4$. Ունենք $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$, $a_4 = R\sqrt{2}$ յեղ

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

III. $n=6$. Ունենք $\frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$, $a_6 = R$ յեղ

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

IV. $n=10$. Ունենք $\frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$, $a_{10} = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ յեղ

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Այս սինուսը թե՛ պարահոմ է առանձին աեգած:

V. $n=2$: Այս դեպքում բազմանկյունն էի առաջանում,

բայց դժուարին է նկարել, չոր a_2 -ը նշանակում է տրամագիծը, իսկ $\sin 90^\circ = 1$.

VI. $n = \infty$: Բազմանկյունը փոխարկվել է շրջանի, կենտրոնական անկյունը դարձել է 0° -ի, իսկ a_n -ը 0 - այս դեպքում յեր բանաձևովը տալիս է $\sin 0^\circ = 0$:

12. Բացի թվան դեպքեր: Կարելի է գտնել a_n -ը նաև $n = 5, 15, 8, 12, 20$ իսկ այլ արժեքների համար, ոգտվելով բազմանկյան կողմերի կրկնապարկման բանաձևերից:

Այնուհետև, ոգտվելով լրացուցիչ անկյունների, հասկացություններից, այլ իսկ սինուսն ու կոսինուսը կամ կցող առնչություններից, կարելի է գտնել նոր սինուսներ իսկ այլն:

Արարելով զեղծիշված աշխատակոծ թերվան են սինուսների իսկ կոսինուսների ծր խան արժեքներ, զորոնք հաշվան են խարնանշան ինշանակով:

Անկյուն	Արնուս	Կոսինուս	Անկյուն
0°	0	1	90°
15°	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$	75°
18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{4}$	72°
$22^\circ 30'$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$67^\circ 30'$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	60°
36°	$\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	54°
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	45°
Անկյուն	Կոսինուս	Արնուս	Անկյուն

Այս աղյուսակի կազմությունը շատ պարզ է: Կենտրոնը չորս սուր անկյան սրևումը հաջաաւոր է իր լրացուցիչ անկյան կոսինուսին, կը գտնենք, չորս

$$(9) \sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha):$$

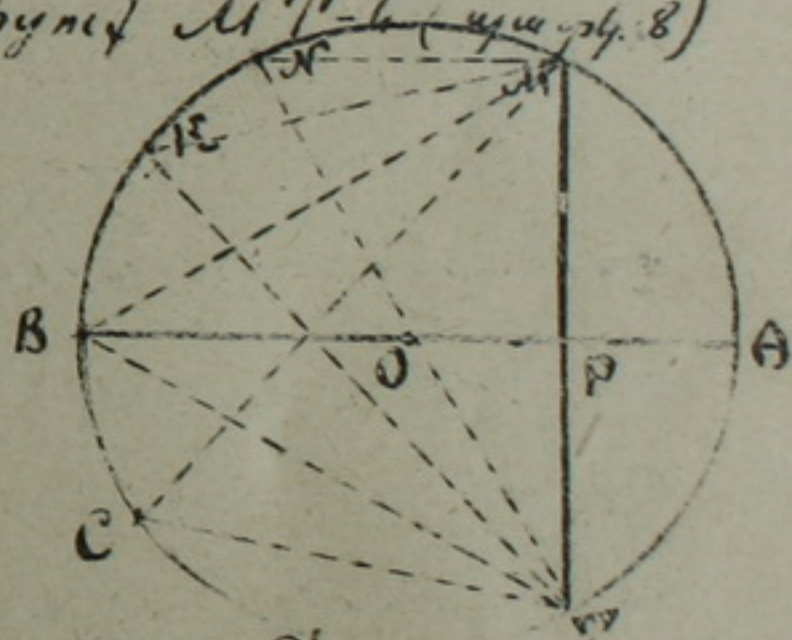
45°-ից մեծ բոլոր անկյունների սրևումները գտնւում են կոսինուսների սրևումում, յետք ընդհանրապես: Յէթե հարկաւոր է գտնել, որ 54°-ի սրևումը, ապա նաեւ մեծ ալի սրևումում, չորս ներքեւում գտնւում է սրևում (յաւ չեւ, չում կոսինուս). նմանապէս յետք անկյունները 0°-ից մինչեւ 45°-ը դասաւորւում են ջաւր սրևումում, իսկ 45°-ից մինչեւ 90°-ը ալում:

13. Ինչ որ ստացւած (8) յետքակցությունը կարելի է ընդհանրացնել հետեւեւալ կերպով: Դիցուք MT -ն (պատկ. 8)

չորսեւել է լաւ է. այդ դեպքում

$$\sin \frac{1}{2} \angle MOT = \frac{MT}{2R},$$

այնուհետք, MT լաւր վրա հեւեւող բոլոր ներգծաւ անկյունները, ինչպէս որ MAN , MKT , MBS , MCT , MDT , հապւում են MA^3T աղեւր կրկն, հետեւապէս իրար հաջաաւոր են, յետք յայտնաւոր: Կաւ ծած MOT կենցրոնակաւ անկյաւ կեւր. ուրի $\frac{MT}{2R} = \sin MOA = \sin N = \sin K = \sin B = \sin C = \sin D$, ալեւել է լաւր



ուրաւորությունը գրաւաւորել հաջաաւոր է ալ լաւր վրա հեւեւող ներգծաւ անկյաւ սրևումն:

Որինակ 1. Ներշնենք մի շրջանագիծ, չորս շառաւղի է

$R = 3$ Տեգր. վերցնենք մի լար 2 Տեգր յերկարությամբ.
այդ դեպքում այս լարի վրա հենվող X անկյունը կը ընդ-
նշի $\sin X = \frac{1}{3}$ հասկանալով: Վերը վերելում աշյուսա-
կի ոգնությամբ իմանում ենք, Վոր X -ը գտնվում է 18° -ի
յեղ $22^\circ 30'$ -ի միջեղ յեղ ավելի ծոց է առաջնին:

Որինակ 2. Քրզանի շառավիղն է $R = 5$ Տեգրի. այդ շրջանին
ներգծած է $67^\circ 30'$ -ի մի անկյուն. գտնել այն լարը, Վորի
վրա, հենվում է այդ անկյունը: Մենք՝ $\sin 67^\circ 30' = \frac{y}{2.5}$,
վորքերը y -ն անհայտ լարն է: Աշյուսակից իմանում ենք,
վոր $\sin 67^\circ 30' = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 0,92$ (Տոքավորապես), ուրեք $y =$
 $= 9,2$ Տեգրի (ծոց):

14. Բնական յեռանկյունաչափական թեժությունների աշյուսակներ:
Չեթե թենք վոր յեղ է յեղանակող հաշվենք այն լարերի յերկա-
րությունը, վորոնց վրա հենվում են զանազան ներգծյալ ան-
կյուններ, ապա կարող ենք կազմել վորող կարգով դասավոր-
ված սինուսների արժեքների աշյուսակ: Այդպիսի աշյուսակ-
ներ կազմել եր արդեն Դիպպարտուր, այնուհետքեղ նայել
ուրիշները. նրանք կոչվում են «բնական յեռանկյունաչափական
թեժությունների աշյուսակներ», վորպեսզի զանազանվեն նոցա
թեժությունների լոգարիթմերը պարունակող աշյուսակներից:
Հետագայում թենք կոգրվենք այդպիսի աշյուսակից, վոր
վերելում է Ա. Մ. Գլազենապի հրատարակած աշյուսակ-
ների Ժողովասուր 86-րդ յերեսում. նրա թեզ վերելում է
 0° -ից մինչև 90° անկյունների սինուսների յեղ կոսինուսների
արժեքները, ապրիթանից ապրիթան: Այդ արժեքները հաշված

են քառանորդական 4 նշաններով, յետ այսպիսով ձեռք
առաջույց գրելով, զոր հնարավոր սխալը ձեռք է ձեռք
քառանորդական : Աշխատելով դասավորությունը
ճիշդագույն նույն է, ինչ զոր վերը գրեցինք ձեր աշու-
սակներով :

Որինակ I. Գրելով $\sin 20^\circ$ յետ $\cos 20^\circ$: Գլուխդ արդար
ների 86-րդ յերեսում այն սյունակում, զորի վերելը գրված
է „ $\sin$ “, գրենու՞մ ենք $\sin 20^\circ = 0,3420$; $\cos 20^\circ = 0,9397$.

այս արժեքները դնելով (5) բանաձևի ձև, կստանանք
 $\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1,00000009$;

սխալը կազմում է $\frac{9}{10^8}$, այսինքն սխալը փոքր է ձեռք քառանոր-
դականի :

Որինակ II. Գրելով x -ը, յերես $\sin x = 0,8660$: Որքա՞ն
վերելը „ $\sin$ “ գրված սյունակում զորոնում ենք $0,8660$ թի-
վը : Էգրելով այդ սյունակում, անցնում ենք դեպի աջ
վերջին սյունակը, զորի ներքեղը գրված է նույնպես.

„ $\sin$ “. $0,8660$ թիվը գրենու՞մ ենք (աջ կողմում նշանակված)
 60° անկյան դիմաց : Արդյունքը դուրսին է ստացվել ձեր
աշխատանքով : Դրով, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3} = 1,732\dots$ յետ $\sin 60^\circ =$
 $0,866\dots$

Որինակ III. Գրենք $\sin 76^\circ 20'$: Կորովհետև թույլ ենք
համար սինուսները չեն նշանակված աշխատանքում, ապա
գրենու՞մ ենք $\sin 76^\circ = 0,9703$ յետ $\sin 77^\circ = 0,9744$. Կորովհետև
սինուսը գրված է այս արժեքների միջև : Այնուհետև գրենու՞մ
ենք $\sin 77^\circ - \sin 76^\circ$ փոքրերությունը, զոր հաշվառում է $\frac{1}{4}$
(քառանորդական) յետ կոչվում է սինուսների աշխա-

կային ցարքերությունը արված ծրույթի համար: Յեղթադրությունը.
 ընդ անկյան փոքր ցողունությունները որպես α -րդ ցողունու-
 թյունները ծորողությունը հաճախակի ան արևմուտքի ցողուն-
 ություններին (այդ- յեղթադրությունը β -րդ հիմնա որակի Π ծառ,
 IV գլխում), թեև կազմում են հետևյալ հաճախությունը՝
 $60' : 20' = 41 : x$, ընդ թեև X -ը նշանակում է արևմտի արև
 ամենը, ընդ հաճախությունը α -րդ անկյան $10'$ ամենը:

Սարքերից $x = 14$ (ծառ) յեղ Վերջնականներին
 $\sin 76^\circ 20' = 0,9717$

Որինակ IV . Արված է $\cos x = 0,6$; գործել x անկյունը: Գլխա-
 նակի արևմուտքները 86 -րդ յերևում գործում են՝
 $\cos 53^\circ = 0,6018$; $\cos 54^\circ = 0,5878$.

Կազմում են հաճախություն
 $140 : 18 = 60' : y'$,

Վերջերից $y = 7'43''$ (ծառ): Վերջնական անկյան թեև ան-
 լոյ կոսինուսը փոքրանում է, այս գործում ոչ ոք արհեստ
 անկյունը 53° -ին, որպես-

$x = 53^\circ 7'43''$ (ծառ):

Այսինքն 10 փայլանք:

Ելույթ III. Ուղղանկյուն յեղանկյունները լուծումը արևմտի
 յեղ կոսինուսի ծրույթ:

15. Յեղև ուղղանկյուն յեղանկյուն թեև, բայց ուղիղ անկյունից,
 արված լինին յեղև ցարք յեղև, Վերջնական անկյուն թեև
 կողմ արհեստ է լինի, այս յեղանկյունը յեղև արհեստ Վերջնական
 β -րդ լինի:

Արիւնակ I. Հնիճել յեռանկյունը, յետե ներքնացիւցը հաշւաւ
է 5 սւտ., իսկ A անկյունը $= 30^\circ$:

Հնիճում.

Մերի է գ-րնենի յերկու եզերը, յերկրորդ- սուր անկյունը
յեւ յեռանկյան F ծակերեւը:

Ըստ բանաճեղերի ունիւի.

$$1) a = c \cdot \sin A, \quad 3) B = 90^\circ - A,$$

$$2) b = c \cdot \cos A, \quad 4) F = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Ներշարեւելով արժաւները՝ էր գ-րնենի

$$a = 2,5 \text{ սւտ.}, \quad b = 4,33 \text{ սւտ.}, \quad B = 60^\circ, \quad F = 5,4125 \text{ քառ. սւտ.}.$$

Ըստ Մյուսագործի թեորեմի ստուգումը արւիտէ.

$$2,5^2 + 4,33^2 = 24,9989$$

այսինքն սխալը փոքր է թեկ հաշարորդից:

Արիւնակ II. Ներքնացիւցը $= 14$ Տարրի, a եւ $c = 7$ Տարրի:

Հնիճել յեռանկյունը:

Հնիճում.

$$\text{ունիւի} \quad 1) \sin A = \frac{a}{c}, \quad 2) B = 90^\circ - A,$$

$$3) b = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad 4) F = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Ներշարեւելով արժաւները՝ էր գ-րնենի

$$A = 30^\circ, \quad B = 60^\circ, \quad b = 7\sqrt{3} \text{ Տարր.}, \quad F = 24,5\sqrt{3} \text{ քառ. Տարր.}.$$

իսկ յետե b -ն հաշւենի $b = c \cos A$ բանաճեղով, այսինքն

թեկ հաշարորդի ճշրությամբ կունենանի.

$$b = 12,124 \text{ Տարր.}, \quad F = 42,434 \text{ քառ. Տարր.}.$$

Նկատուծ ենի, զոր հաշւումն աղյուսակների յիշոցով շատ արեւելի
սարկ է յեւ յիւսնածից արւիտէ արդ-յունիւ, յիւշ-եւ

Մյուսագործի թեորեմը գործադրելիս ստացված ենք հաշվարկային արժեքներ հանել:

Պրիմեր III. ABC հավասարասրուն յեռանկյան Տեղ (պատկ. 9)

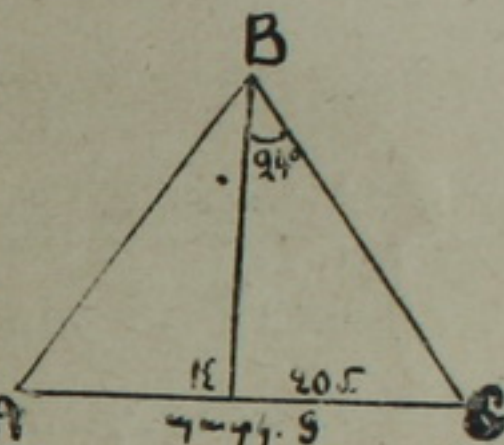
AC հիմքը $= 40$ Տիր, իսկ գագաթի B անկյունը $= 48^\circ$: Լուծել յեռանկյունը.

Լուծում.

Ըստ պայմանի $KC = 20$ Տիր, $\angle KBC = 24^\circ$: KBC ուղղանկյուն յեռանկյունից A

գտնում ենք - 1) $BC = \frac{20}{\sin 24^\circ}$, 2) $A = C = 90^\circ - 24^\circ$,
3) $BK = BC \cdot \cos 24^\circ$, 4) $F = \frac{AC \cdot BK}{2}$.

Ներդրելով $\sin 24^\circ = 0,4067$ և $\cos 24^\circ = 0,9135$, գտնում ենք - $BC = 49,1765$. $A = C = 66^\circ$, $F = 898,45$ քառ. Տիր.



Գլուխ IV. Ուղղանկյուն յեռանկյունների լուծումը քանդակների և կոսինուսների միջոցով.

18. Համարող- գլխի վերջին իրենական Տեղ առիթ ունեցանք հաշվելու $\frac{\cos x}{\sin x}$ արտահայտությունը. իսկպիսի արտահայտություններ միշտ պատահում են յեռանկյունների լուծման ժամանակ, և քանի լինում են հետեւյալ յերկու տեսակի

$$(1) \frac{\sin x}{\cos x}; \quad (2) \frac{\cos x}{\sin x};$$

Հորի Տեղ x -ը նշանակում է ստրանկյուն ուղղանկյուն յեռանկյան Տեղ: $\sin x$ -ի և $\cos x$ -ի նման թվերի իրար վրա բաժանելու հետ կապված անհարժարությունները պահանջ են առաջացրել կազմելու նոր աղյուսակ, զորի Տեղ պատրաստվել էր իմանալ են այդպիսի բաժանում-

Այսպիսով, եթե $\angle A = \frac{\pi}{6}$ և $\angle B = \frac{\pi}{6}$, ապա
 $\angle A = \angle B$; բայց A -ն և B -ն լրացուցիչ անկյուններ են
 $A = 90^\circ - B$, հետևապես —

$$\begin{aligned} (16) \quad \angle A : \angle B & \text{ և } \angle (90^\circ - B) = \angle B \\ \angle A & = \angle B \quad \angle (90^\circ - B) = \angle B \end{aligned}$$

Այսինքն ամբ անկյան ցանց-ենք հաճախ ելլալուց և լրացուցիչ անկյան հոսանք-ենք, յետևանքով, ամբ անկյան հոսանք-ենք հաճախ ելլալուց անկյան ցանց-ենք:

21. Անկյունների յեղ-հոսանք-ենքի հաշվումը:

Մենք ցույց տալու ենք ամբ անկյան սինուսը յեղ հոսանք-ենք յեղ հարող ենք (12) բանաձևերի յեղ հաշվումը ցանց-ենք ու հոսանք-ենք: Այսպես, որ 30° -ի անկյան հա-
 ճախ ունենք $\angle 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle 30^\circ = \sqrt{3}$; 60° -ի անկյան հա-
 ճախ $\angle 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle 60^\circ = \sqrt{3}$; իսկ յեղ անկյունը 45° -ի
 ե, ապա $a = b$ յեղ $\angle 45^\circ = \angle 45^\circ = 1$.

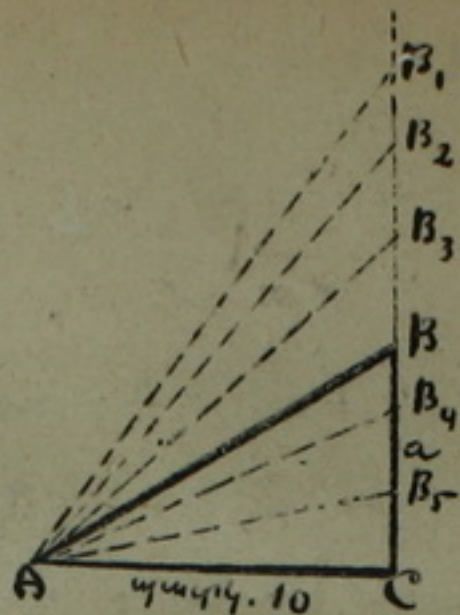
Կլանվելուց և ույն առաջադեպը ցույց տալուց ան-
 գ-ենք յեղ հոսանք-ենք արժեքները. օգտագործելով յեղ և ույն
 ե, ինչ յոր սինուսը յեղ հոսանք-ենք հաճախ:

22. Անկյունների յեղ հոսանք-ենքի փոփոխությունները:

Հարող ենք $\frac{a}{b}$ յեղ $\frac{b}{a}$ հարաբերությունները, ինչպես ելլալուց
 փանդ-ենք, հարող են անկյուն արժեք յեղ ույն, ապա
 ցանց-ենք ու հոսանք-ենք, հարող են արժեք-ենք
 ցույց տալուց յեղ հոսանք-ենք: Մենք ենք և ելլալուց
 փոփոխ յեղ a ելլալուց փոփոխություն: Մենք ենք
 հարող ե և ելլալուց, յոր A անկյուն փոփոխությունը և ույն

Դիմացի a եզր փոխանում է, յետ յերբ
 A -ն չգտնվում է շերտ սահմանին, a -ն յետ
 չգտնվում է նույն սահմանին, հետևաբար
 $\frac{a}{b}$ հարաբերությունը չգտնվում է շերտի, իսկ
 $\frac{b}{a}$ հարաբերությունը ∞ -ի: Ունենում ենք՝ $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 0^\circ = \infty$
 և յետ հետևել նկատում ենք, զոր A անկյուն յեղանակում
 a եզր յեղանակում է, $\frac{a}{b}$ հարաբերությունը նույնպես անում է,
 իսկ $\frac{b}{a}$ հարաբերությունը՝ նվազում, յինչեւ զոր A անկյունը
 հասնում է 90° -ի, a եզր դառնում է ∞ , հետևաբար
 $\frac{a}{b} = \infty$ յետ $\frac{b}{a} = 0$: և յայտ երևի

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty, \operatorname{ctg} 90^\circ = 0$$



և յայտում գտնում ենք, զոր $\operatorname{tg} A$ -ն անում է A -ի ան-
 ծան հեր յրանին, իսկ $\operatorname{ctg} A$ -ն նվազում է, յերբ A -ն
 անում է: Դիմացի դրանից, 0° յինչեւ 45° քանդեան անում
 է 0 -ից յերբ 1 , յետևել կանոնադոր կոորդինատ. կոորդին-
 ատ, ընդհանրապես, նվազում է 1 -ից յինչեւ 0 , յերբ
 անկյունն անում 45° -ից յինչեւ 90° , նույնպես յետևել
 կանոնադոր կոորդինատ:

Երբ անկյունն անընդհանր անում է 0° -ից յինչեւ 90° ,
 քանդեան անընդհանր անում է շերտից յինչեւ անընդ-
 իսկ կոորդինատ անընդհանր նվազում է անընդհանր

Երբ շերտ:

23. Բանաչափեր ուղղանկյուն յեռանկյան լուծման համար.

Ունեցեալ յեւ կոորդինատ սահման յերբ հետևում է.

$$(17) a = b \cdot \operatorname{tg} A, \quad a = b \cdot \operatorname{ctg} B$$

$$b = a \operatorname{tg} B, \quad b = a \cdot \operatorname{ctg} A$$

այսինքն եզր հաջաւոր ե իր դիմացի մէկուն ցանց-ծնաթ
յաւ Տյուս եզր արտադրաւին կաճ իրեն կից մէկուն կո-
պանգ-եւս յեւ Տյուս եզր արտադրաւին:

Որինակ I. Հմեկ ուղղանկյուն յեռանկյունը, յերբ ցիւած
ե եզր $a = 400$ սրշ. յեւ մէկուն $A = 63^\circ$

Հմեկն.

Ունիւնք 1) $b = a \operatorname{ctg} A$; 3) $c = \frac{a}{\sin A}$;
2) $B = 90^\circ - A$; 4) $F = \frac{a \cdot b}{2}$.

Անշարժելով a յեւ A ցիւածները (այսինքն վերջնելով աշոն
աւակից $\operatorname{ctg} 63^\circ = 0,5095$ յեւ $\sin 63^\circ = 0,8910$) յեւ կարա-
րելով հաշվումները, կը գ-րենք —

$b = 203,8$ սրշ., $B = 27^\circ$, $c = 448,93$ սրշ., $F = 40760$ քաւ. սրշ.

Արագ-ելով մյուսողորմաւ յեռորեւով՝ կը գ-րենք

$c = \sqrt{400^2 + 203,8^2} = \sqrt{201534,44}$; $c = 448,92$ սրշ.

Հոր ցաւիւ ե ծր հարյուրորդ. արշին սխալ:

Որինակ II. Հմեկ յեռանկյունը, յերե եզերն են՝

$a = 43$ սւս. յեւ $b = 15$ սւս.

Հմեկն.

Ունիւնք 1) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$; 3) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
2) $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$; 4) $F = \frac{a \cdot b}{2}$

Անշարժելով a -ի յեւ b -ի արժեքները՝ գ-րում ենք
 $\operatorname{tg} A = 2,8667$ (սր.), $\operatorname{tg} B = 0,3488$ (սր.)

Կայց ցանկ, թե ինչպիսի պէրք ե հաշվել A -ն յեւ B -ն:

Աւանգանւնի աշումակից արանւծ ենք —

$\operatorname{tg} 71^\circ = 2,9042$; $\operatorname{tg} 70^\circ = 2,7475$

այս պատճառով A -ն գրեմը է 71° -ի քան 70° -ի ցր-
զեղ: Կազմել հասկացություն

$$1567 : 1192 = 60' : x', \text{ փոքրից թիվ}$$

$x = 45'38'',47$: Ցրը նույն չեղում էլ գրեմը է B
անկյան ուղղությամբ, զոր կազմում է $13'42'',33$:

Հորոկներով անկյան ճեմանալով քանդակներն ածած են,
այս ուղղությամբ պետք է գումարել անկյուններին: Այդպես,

$$A = 70^\circ 45'38'',47:$$

$$B = 19^\circ 13'42'',33:$$

Այսպիսով քանի է $A + B = 89^\circ 59'20'',8$. քանի է
գրեմը $40''$, բայց կողմերի քվյալ յերկարությունների հա-
ճեմությամբ եսկան եղանակությամբ չունի:

Հերթապես $c = 45,54$ սառ. (ծոր), $F = 322,5$ քառ. սառ.

Գլուխ V. Դեռ անկյունաչափական ճեմությունները լո-
գարիթմերի աշխատանքով:

24. Բնական աշխատանքի թեթևություններ. բնական յեռան-
կյունաչափական ճեմությունները աշխատանքով, զորով կար-
ծությամբ համար անվանում են «բնական աշխատանք»,
բարձրագույն են այն ~~այն~~ դեպքերում, յերբ հաշվումները
ճեմ ժողովրդուն չեն պահանջում, այսինքն յերբ կողմերը
կարելի է արտահայտել քանոնորակ 2 կամ 3
նշան մեկից թվերով, իսկ անկյունները՝ 2-ի րոպեի
ծրությամբ: Բայց նույն իսկ այդ պայմաններում հաշվում-
ներն անհարձարությունները բազմական ճեմ են, զորով հեշտ:

Տիշր կարիք է լինում բազմապարկելու յեւ բաժանելու
 բազմանշան թվեր. բայց դրանից, զոր ամենի կարեւոր է,
 4-անշան բնական աշյուսակներում բոլոր տրամանորդ-ական նշան-
 ները 4-րդ-ից հետո դուրս են չգլում, այն ինչ, ինչպես այժմ
 կտեսնենք, դուրս չգլում թվանշանները կարող են խիստ
 ազդել արդյունքի վրա՝ աշյուսակներում նշանակված այդպի-
 սի յերկու փանակություններ բազմապարկելիս կամ բաժանելիս:
 Շուտաւարտութեան համար կը բերենք յերկու որինակ:

25. Պ-իցուք պետք է հաշվել α եզր

$$\alpha = c \sin A$$

Բանաչեւից, զորտեղ $c = 8632,6$ Տեպր, իսկ $\sin A = 0,0003$

Ըստ 4-անշան աշյուսակների:

՝յն ժամանակ-

(I) $\alpha = 2,58978 \dots$ Տեպր.

Հետեւող-թեւէ այժմ, զոր $\sin A$ ճշտութեան արժեքից դուրս են չգլում

(3-ից հետո) 294... թվանշանները, այս դեպքում

(I') $\alpha = 2,84357 \dots$ Տեպր.

Հերթին հազաւարությունը ցույց է տալիս, զոր (I) արդյունքն

անձիշդ է արդեն առաջին տրամանորդ-ական նշանից:

Պ-իցուք c ներխուժիցը որոշվում է

$$c = \frac{\alpha}{\cos B}$$

Բանաչեւից, զորտեղ $\alpha = 1,3$ Տ., իսկ $\cos B = 0,0006$ ըստ

աշյուսակների. այն դեպքում-

(II) $c = 3250$ Տեպր.

Բայց ի նկատի ունենալով $\cos B$ -ի արժեքի ճշգ (4-ից հետո)

դուրս է գալիս 418... թվանշանները՝ 40 գրենեթ

(II') $c = 2942,5$ Տեգր.

Այսպես (II) արդյունքն անձիշդ է նույն իսկ առաջին թվանշանից. սխալը կազմում է 307 Տեգրից ավելի:

26. Հոգարիթմական աշյուսակներ: Այսպես ուրեմն, 4-անշան բնական աշյուսակները չեն բազարարում հաշվումների ժշդության պահանջներին: Բազմանշան բնական աշյուսակներն են բազարարելով ժշդության պահանջներին՝ Տե՛ս ժամանակ են խլում հաշվումների ժամանակ: Այդ պատճառով նրանց փոխարեն գործածվում են այլ աշյուսակներ: Աշխարհում առկա են չորս տեսակի նշանաշարական թվանշաններ՝ զերայական թվեր են, չոր հեղեղական կարելի է այդ թվերը (հոգարիթմը, կազմել են այնպիսի աշյուսակներ, զորոնք 1-ից 1՝ պարունակում են 0° -ից մինչև 90° -ի անկյունների սինուսների, կոսինուսների, տանգենսների և կոտանգենսների (հոգարիթմները): Բայց դրանից, աշյուսակային փոխարինության միջոցով հեշտությամբ կարելի է լինում գրելել վայրկյաններին չե՛լ սրանց ծանրին վերաբերող ուղղումները, այնպես չոր հաշվումները կարելի է առանց բնական աշյուսակների հետ կապված դժվարությունների կարարել ցանկապես աստիճանի ժշդությամբ, հարկավոր է միայն հարժար կերպով ընտրել աշյուսակները:

Չեռանկյունաշարական թվանշանների բոլոր (հոգարիթմները հաշված են մեկնույն թվով ցրանորդական նշաններով, բայց ցարքեր աշյուսակներում ցրանորդական նշանների այդ թիվը ցարքեր է. այսպես կան 4-անշան, 5-անշան,

6-անշան, 7-անշան յետ նույն իսկ 10-անշան աշուսակներ:
 Այդ աշուսակներից ամենից ավելի հայտնիներն են. 7-անշան-
 ներից Callet յետ Vega-ի աշուսակները (Գրեծիկերի ծշակ-
 ծածր), զորոնց ձեզ հաշված են յեռանկյունաչափական ձեռն-
 թյունների լոգարիթմները $10''$ -ից $10''$. 5-անշաններից Lalande
 յետ Houël: Քուսաստանում ամենից ավելի հայտնի են
 Մրժեմալսկու յետ Գլազենապի աշուսակները. վերջինիս
 աշուսակները կազմած են Houël-ի աշուսակների որինա-
 կով յետ ձեռն առավելություններ ունին Մրժեմալսկու աշու-
 սակների բաղդատությամբ: Այս գրքում հաշվումները կատա-
 րած են ըստ Գլազենապի աշուսակների:

27. Լոգարիթմական հաշվումների դասավորումը:

Գլազենապի աշուսակների կազմությունն ու գործածությու-
 նը բացատրված է իր գրքի նախաբանում, այնպես զոր
 այդ ծառին այսպես չենք խոսիլ: Ի՞նչպես անհայտների հա-
 ծար կարելի է կարողանալ արժանաչները դասավորել
 լոգարիթմների միջոցով հաշվումներ կատարելու ժամանակ
 յետ պարզապես թանաչեմք ինքնին լոգարիթմելու
 համար: Դրանով եւ կբաղվենք:

Որինակ I

Լուսնի ուղղանկյուն յեռանկյունը, յետք արված են ներքեա-
 չիք $C = 232, 35$ սաժ. յետ անկյունը $B = 34^{\circ} 14' 32''$.

Լուսնի

ինչպես յետ առաջ, ունինք

1) $a = c \cdot \cos B$

3) $A = 90^{\circ} - B$

C-ի թեև B-ի փոխարեն դնելով իրենց արժեքները՝ A-ի հաճախ անժողովին հայտնաձև 55° 45' 28"։ Արագաճ առհասարակ, թե ձեռք կը հաշվենք աստիճանաբար։

Հաշվումները դասապարուծք

I) $a = 232,35 \times \cos 34^\circ 14' 32''$,

$$\lg a = \lg 232,35 + \lg \cos 34^\circ 14' 32''$$

$$\lg a = 2,28348;$$

$$a = 192,078 \text{ սմ.}$$

II) $b = 232,35 \times \sin 34^\circ 14' 32''$

$$\lg b = \lg 232,35 + \lg \sin 34^\circ 14' 32''$$

$$\lg b = 2,11642$$

$$b = 130,742 \text{ սմ.}$$

III) $F = \frac{ab}{2}, \lg F =$

$$= \lg a + \lg b - \lg 2;$$

$$\lg F = 4,09887;$$

$$F = 12556,6 \text{ թառ. սմ.}$$

I) $\lg \cos 34^\circ 14' = 9,91738 - 10$

$$30'' \dots \dots 4,5$$

$$2'' \dots \dots 0,3$$

$$\lg \cos 34^\circ 14' 32'' = 9,91733 - 10$$

$$+ \lg 232,35 = 2,36615$$

$$2,28348$$

$$N \lg 2,28330 = 192,0$$

$$16,1 \dots \dots 0,7$$

$$1,84 \dots \dots 0,8$$

$$N \lg 2,28348 = 192,078$$

II) $\lg \sin 34^\circ 14' = 9,75017 - 10$

$$30'' \dots \dots 9,5$$

$$2'' \dots \dots 0,63$$

$$\lg \sin 34^\circ 14' 32'' = 9,75027 - 10$$

$$+ \lg 232,35 = 2,36615$$

$$2,11642$$

III) $\lg a = 2,28348$

$$+ \lg b = 2,11642$$

$$4,39990$$

$$- \lg 2 = 0,30103$$

$$4,09887$$

Արագաճ

Արագաճելով ըստ Մյուսագորասի բանաձևի՝ հայտնաձև

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = 232,35 \text{ սմ.}$$

Դեթե առհասարակաճելով պատկերակաճ յերկու նշաններով։

Այսպիսով լոգարիթմների ոգնությունը հայտարար հաշվում

ներքե տալիս են շարք ազնուի ֆորմ-արդյունքներ, փափկան
կան աղյուսակների ոգնությանը կարարած հաշվութեանը:

Որիւնակ II

Ներքեայիցը $c = 50,6$ ծեր, եզը $b = 47,8126$ ծ:

Հետեւ յեռանկյունը:

Լուծում

Քնդհանուր բանաչեղերի հաճախյն ունիւի.

$$1) \cos A = \frac{b}{c}, \quad 3) a = c \cdot \sin A$$

$$2) \sin B = \frac{b}{c}, \quad 4) F = \frac{ab}{2}$$

Հաշվութեանի դասապորտը

I) $\cos A = \frac{478,126}{506}$,

$\lg \cos A = \lg 478,126 - \lg 506$;

$\lg \cos A = 9,97539 - 10$

$A = 19^\circ 6' 23''$

II) $\lg \sin B = 9,97539 - 10$

$B = 70^\circ 53' 36''$

III) $a = 50,6 \sin 19^\circ 6' 23''$,

$\lg a = \lg 50,6 + \lg \sin 19^\circ 6' 23''$,

$\lg a = 1,21913$

$a = 16,5627$ ծեր.

IV) $F = \frac{ab}{2}$, $\lg F = \lg a + \lg b - \lg 2$,

$\lg F = 2,59764$,

$F = 395,945$ փա. ծեր.

I) $\lg 478,126 = 2,67954$
 $\lg 506 = 2,70415$

 $9,97539 - 10$

$9,97541 \dots \dots \dots 19^\circ 6'$
 (գոպր)

$1,7 \dots \dots \dots 20''$
 $2,5 \dots \dots \dots 3''$

$9,97539 \dots \dots \dots 19^\circ 6' 23''$

II) $9,97536 \dots \dots \dots 70^\circ 53'$
 (սիմուի հաճախ)

$2,5 \dots \dots \dots 30''$
 $0,5 \dots \dots \dots 6''$

$9,97539 \dots \dots \dots 70^\circ 53' 36''$

III) $\lg 50,6 = 1,70415$
 $\lg \sin 19^\circ 6' 23'' = 9,51498 - 10$

 $1,21913$

$N 1,21906 \dots \dots \dots 16,56$

$5,2 \dots \dots \dots 0,2$

$1,82 \dots \dots \dots 0,07$

$N 1,21913 \dots \dots \dots 16,5627$

IV) $\lg a = 1,21913$
 $+ \lg b = 1,67954$

 $2,89867$
 $- \lg 2 = 0,30103$

 $2,59764$

Արագում.

Հախանկյունների հաճաք գ-րնմծ ենք

$$A + B = 19^\circ 6' 23'' + 70^\circ 53' 36'' = 89^\circ 59' 59'',$$

այսինքն սխալ յերկու անկյունների հաճաք ծխաին կազմած է 1 վայրկյան:

II յնուկեցեղ Կյութագ-որաւի թեորեծի հաճաջայն

$$a = \sqrt{c^2 - b^2},$$

$$a = 16,5624 \text{ Տեգր},$$

այսինքն սխալ զոտր է ձեկ հազարորդ-ից:

Որիւնակ III

Հազաաարաւուն յեռանկյան Տեգ հիծիւ $a = 18$ Տեգրի,

բարչրութունը $h = 10$ Տեգրի. շուժել յեռանկյունը:

Լուծում.

Անենելով AD բարչրութունը՝ կապանաւք ABD ուղղանկյուն յեռանկյունը (պարկ. 11), զորի Տեգ $AD = h$, $BD = \frac{a}{2}$, $AB = c$, $\angle BAD = \frac{A}{2}$: շուժելով այդ-

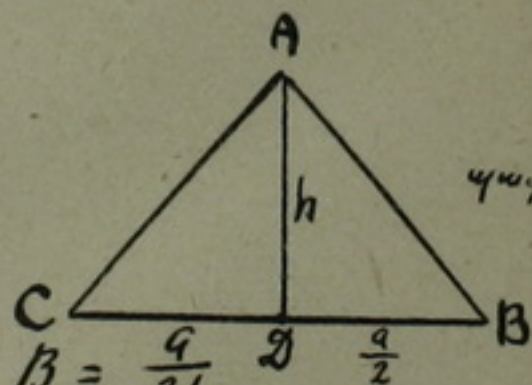
յեռանկյունը ընդհանուր բանաչեղեքով՝ կապանաւք

$$1) c = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a}{2h}$$

$$3) \operatorname{ctg} B = \frac{a}{2h}$$

$$4) F = \frac{ah}{2}$$



Անդադ-րելով արժաւները՝ անծիզորեն գ-րնմծ ենք.

$$c = 13,454 \text{ Տեգրի եղ } F = 90 \text{ Ժառ. Տեգրի: Դրնմծ է}$$

հաշվել անկյունները:

Հաշվումների դասաւորումը

(զրեւ հնգեղյակ յերեւ)

$$\text{I) } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{18}{20} = 0,9;$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \lg 0,9$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 9,95424 - 10$$

$$\frac{A}{2} = 41^{\circ} 59' 14''$$

$$A = 83^{\circ} 58' 28''$$

$$\text{II) } \operatorname{ctg} B = 0,9$$

$$\lg \operatorname{ctg} B = 9,95424 - 10$$

$$B = 48^{\circ} 0' 46''$$

$$\text{I) } 9,95418 \dots 41^{\circ} 59'$$

$$+ 4,3 \dots 10''$$

$$1,73 \dots 4''$$

$$(9,95418)$$

$$9,95424 \dots 41^{\circ} 59' 14''$$

$$\text{II) } 9,95444 \dots 48^{\circ} 0'$$

$$- 14,3 \dots 40''$$

$$2,6 \dots 6''$$

$$9,95424 \dots 48^{\circ} 0' 46''$$

Արագ-ուժ.

Արագ-ուժի նպատակով հաշվենք B անկյունը $\sin B = \frac{h}{c}$
բանաչափից: Անելիք

$$\sin B = \frac{1}{1,3454}$$

$$\lg \sin B = -\lg 1,3454;$$

$$\lg \sin B = 9,87115 - 10$$

$$B = 48^{\circ} 0' 40''$$

$$\lg 1,3454 = 0,12885$$

$$-\lg 1,3454 = 10 - 0,12885 - 10;$$

$$9,87107 \dots 48^{\circ} 0'$$

$$8 \dots 40''$$

$$9,87115 \dots 48^{\circ} 0' 40''$$

II խաչի որևէ, B անկյունը հաշվելիս սխալը յեղանակաբարձը
6". քայքայ այս սխալը բաժանվում է յերկու սխալի: Ասի՝
անկյուններն ավելի ծիշղ. որոշում են ցանգեւաներով փանաթ-
նուսներով (տ. II և III, IV գլուխ). յերկրորդ՝ ձեռք c ներքնաչափ-
հաշվեցիւնի ծիւղն ճորայնաբան, ի հաշարորդ. ձեւորի ճշդու-
թյամբ:

Որինակ IV

Հորոշել աշխարհի բարձրությունը, յերեւա ցեւանելի է

$\alpha = 30^\circ 40'$ անկյաձք դիտակետից, զոր գրեկմծ է $10\frac{1}{2}$ սաձ. հեռաձորություն զրա աշտարակի հիծխից:

Լուծուծ.

Վորոնեձի բարչությունը նշանակեմք h , իսկ $10\frac{1}{2}$ սաձ. հեռաձորությունը d . դձվար չե նկարեձ, որ h -ը գրեկեձու հաձար պեղիք է BC -ն զորոչեձ ABC յեռանկյունից (պարկ. 12) Ունիք

$$h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$h = 10,5 \operatorname{tg} 30^\circ 40'$$

$$\lg h = \lg 10,5 + \lg \operatorname{tg} 30^\circ 40'$$

Դադիւմ. ծեղիքի դաձաձորուծը

$$\lg h = \lg 10,5 + \lg \operatorname{tg} 30^\circ 40';$$

$$\lg h = 0,79422;$$

$$h = 6,226 \text{ սաձ. (ծոր.)}$$

$$\begin{array}{rcl} \lg 10,5 & = & 1,02119 \\ + \lg \operatorname{tg} 30^\circ 40' & = & 9,77303 \\ \hline & & 0,79422 \end{array}$$

Դունդիքներ.

1. Վորոչեձ ուշիղ կոնի հիծխի շառաձիշը, յեթե ծնիչն է (օձրաշարաձ) $32,4$ ծորր. իսկ գաղաթնանկյունը՝ $32^\circ 17'$:
2. Աշտարակը $2,73$ ծորր հեռաձորությունից պեռանեձիք է $78^\circ 34' 35''$ անկյաձք: Կրեձեձ աշտարակի բարչությունը:
3. Լարաձաթեւոյն ուղուծ. է պարանոձ բարչութեւաձ աշտարակի ծայրը, զորի բարչությունը $10,5$ ծորր է. նա կարոչ է պարանոձ գեւաձ ծրայն աչն խաձանակ, երբ պարանի թեփությունը հորիզոնի նկարձաձ 40° -ից աձց չե: Պարանի յերկարությունն է $18,6$ ծորր. կարոչ է արդյոձ լարաթաթաղաչը բարչութեւաձ աշտարակը:

4. Արեւը գտնվում է հորիզոնից $36^{\circ}40'$ բարձրության վրա: Դրան յետևանքային սրվեր է չգում 20 վայրկյանի յետևանքային չողը:

5. Գտնել արեւի բարձրությունը հորիզոնի նկատմամբ, յետեւ ծարդ-ու սրվերի յետևանքայինը յետեւ անգամ թիւ է իր հասանքից:

6. Առեւտրության ինչ անկյա՞ծ է երեւում 36 սանդիճեքի շառավիղ ունեցող գունդը այն դիրքով, զորը գտնվում է գնդի կենտրոնից 84 սմ. հեռավորության վրա:

7. Արեւի գունդը, զորի շառավիղն է 1 մետր A կետից տեսանելի է 70° անկյա՞ծ: Գտնել A -ի հեռավորությունը գնդի ծակերեւույթից:

8. Գտնել յետեւ գնում է դեպի լեռը յետ նրա թեփումն է 75% . Վորովեւ վերջելի անկյունը:

9. Կայարանից դուրս են գալիս ապրանքատար յետ ծարդա-տար գնացիները որոշ ուղևորության ուղղություններով:

Մի ժամից հետո ապրանքատար գնացի գտնվում է 40 ֆիլոմետրի վրա ծառի տարից յետ տեսնում է վերջին $66^{\circ}52'44''$ անկյունով: Դրան ապրանքատար են շարժվում գնացիները:

10. Մեկը զուգով, ծուռը հեռանալով շարժվում են դեպի հոր-թության վրա գտնվող ծուռը յետ հասնում են նրան միաժամանակ. նրանց ծանապարհները սակայն հանդիպում են իրար ուղիղ անկյա՞ծ: Դժանակով զոր նրանց միմեկ յետան սկզբնական հեռավորությունը կազմում էր 1 ֆիլոմետր յետ

Վոր հեծանվաժողի արագությունը Վորով գնացողի արագու-
թյունից $3\frac{1}{2}$ անգամ մեծ է, հաշվել, թե վորքան է անցել յու-
րաժամյուրը:

11. Ողակարիկը գյուղից յերեւել է 78° բարձր հորիզոնից,
իսկ անբառի Բալասարից, Վոր 3 վերստ հեռու է գյուղից,
յերեւելու է ուղղահիգ. ուղղութեամբ: Վորոշել ողակարիկի
վերջելիի բարձրությունը:

12. Ֆերկու շրջանագծերի պատճառ է ծի ընդհանուր արտա-
փին շոշափող: Ժի շրջանագծի շառավիղը 10 մետրով փոքր է
ճյուսից յեւ ի ներքինների գծի հետ կապուած է 100° :

Գտնել շոշափողի յերկարությունը:

13. Վորոշել այն գնդի շառավիղը, վորին կարելի է ներ-
գծել 2,06 մետր ճնիշ յեւ $118^\circ 17' 2''$ գագաթանկյուն ունե-
ցող կոն:

14. Գետի հոսանքի արագությունն է $1,65 \frac{\text{մետր}}{\text{վայրկ.}}$. Նաւին հա-
ղորդւած է ծի շարժում, վորի արագությունն է $110,45 \frac{\text{մետր}}{\text{վայրկ.}}$,
ինչպիսի ուղղություն պետք է պաւ նաւին, վորպէսզի նա
գնա գետի ուղիղ լայնիւղ:

15. Վորոշել Մարիշի որական պարծան արագությունը,
յերթ նրա լայնությունն է $48^\circ 50' 11''$ յեւ յերթ հայրնիւն,
Վոր յերկրի շառավիղը հաճաաւ է 6366 մետրի:

16. Ժայռի վրա կառուցւած է 10 սաժ. բարձրութեան ծի
աշտարակ: Թշնածու բանակից նրա գագաթը տեսնուած է
 $2^\circ 20'$ անկյամբ: Գտնել ժայռի բարձրությունը, յերթ բա-
նակը նրանից հեռու է 3 վերստ 225 սաժ.

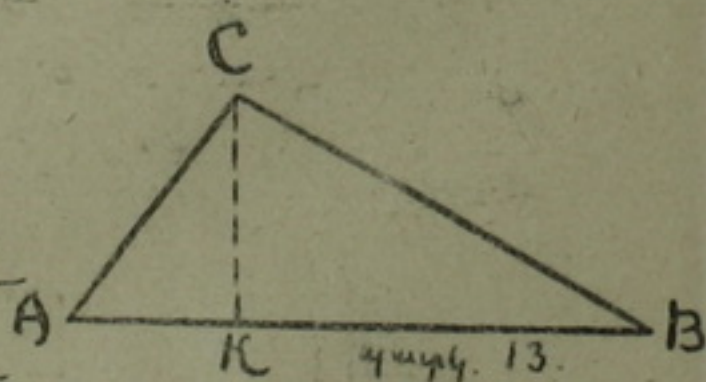
անկյան դիմացի եզր՝ ուղղահայաց, իսկ հիպ էզր՝ թեթի առաջաջգություն (պրոյեկցիա): Այն ժամանակ յեռանկյունաչափական ճեմությունների առհմանութերը կարանան հետեւյալ կերպարանքը.

- I Ուղղահայացի հարաբերությունը թեթին՝ է սինուսը.
- II Առաջաջգության հարաբերությունը թեթին՝ է կոսինուսը.
- III Ուղղահայացի հարաբերությունն առաջաջգության՝ է տանգենսը.
- IV Առաջաջգությունն հարաբերությունն ուղղահայացին՝ է կոպանգենսը.

30. Այժմ տեսնենք, թե ինչպես կարելի է գտնել շեղանկյուն յեռանկյան անկյունների յեռանկյունաչափական ճեմությունները ոգ-տելով նոր առհմանութերից:

Նախ դիտենք ABC յեռանկյունը, զորի բոլոր անկյունները սուր են (պատկ. 13): Դիցուք

AC յեւ BC կողմերը թեթերն են, AB կողմն էլ առաջաջգությունների հիմքն է. զորպեսզի գտնենք հիմքի անկյուններից յեկնու յեկի, որ A -ի յեռանկյունաչափական ճեմությունները, պետք է AC կողմն առաջաջգենք AB -ի վրա. կարանանք CH ուղղահայացը յեւ AH առաջաջգությունը: Առհմանութերի հաճախան այս դեպքում կարանանք.



$$\sin A = \frac{CH}{AC}, \quad \cos A = \frac{AH}{AC}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{CH}{AH}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{AH}{CH}:$$

Նման յեղանակով B անկյան հաճաք գտնեմք ենք.

$$\sin B = \frac{CH}{CB}, \quad \cos B = \frac{HB}{CB}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{CH}{HB}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{HB}{CH}:$$

Այսպիսով ամենամեծերի մեջ գործադրված են՝ անկյուն
կողմերից մեկը, նրա առաջաջգույններ ծնունդ կողմի վրա
յեւ առաջաջգույն ուղղահայացը:

31. Պեկարքի կանոնը. Վերցնենք այժմ $\triangle ABC$ -ն
(պատկ. 14), վրի հիմքի A անկյունը բութ է: Կապեն նախըն-
թաց հոդվածում, AC կողմը առաջա-

ջգնենք հիմքի վրա. այս դեպքում CK

ուղղահայացը կը հանդիպի ոչ թե

հիմքին, այլ նրա շարունակության-

նը. հետևելապես, AK առաջա-

ջգությունն. այս դեպքում գրված

ե AB կողմի շարունակության վրա (բութ անկյունից դուրս):

Մինչեւ այժմ մենք ուղղորոշյալն չենք առնուծ հար-
վածները ուղղությունները:

Այժմ պայծառաբարձենք, Պեկարքի արագարկի հաճախ (1637),
նախապես ընտրած ծի ուղղությամբ դրված հար-

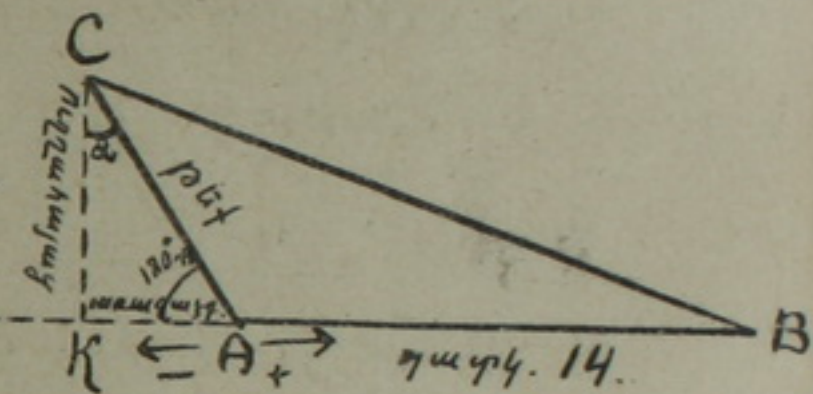
վածները հաճախու գրական, իսկ հակադիր ուղղությամբ
դրված հաղվածները՝ բացասական: Այս պայծառն ընդու-

նելով՝ մենք այսուհետեւ դրական կը հաճախենք անկյուն
կողմերի ուղղությունները յեւ բացասական՝ նրանց շարունա-

կությունները գաղափարից դուրս: Այն ժամանակ AC յեւ
 AB կողմերը կը լինեն դրական, AK առաջաջգությունն

այս դեպքում բացասական է: Ինչ վերաբերում է CK
ուղղահայացին, ապա նա թե սուր յեւ թե՛ բութ անկյուն-

ների հաճախ պահպանում է նույն ուղղությունը (վերելից ներքե),



հեղեղապետ, նշանը չի փոխվում:

Ո՛րով, առեմանեմերի հաճախյն գործում ենք

$$\sin A = \frac{CK}{AC}, \cos A = \frac{AK}{AC}, \operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}, \operatorname{ctg} A = \frac{AK}{CK}:$$

Պեղարքի կանոնի հաճախյն առաջին հարաբերությունը դրական է, իսկ ծյուս յերեքը բացասական են: Այսպես ուրեմն, բութ անկյան սինուսը դրական ճեճությունն է, իսկ կոսինուսը, տանգենսը յեւ կոտանգենսը բացասական ճեճություններ են:

Գրքի II ծաւած ձեւի կը տեսնենք, զոր այդ յեղրական-ցությունները հասարակում են նայել զերլուծորեն (անալիտիկ):

32. Բութ անկյան հաշվառողը: Վորովհետեւ A անկյունը բութ է, ապա ընդունենք $A = 90^\circ + \alpha$, զորի ձեզ α -ն յիսուր անկյունն է, α -ն անվանենք բութ անկյան հաշվառող ուղիղ անկյան նկարծածը: յիճանալով՝ զոր A -ն, իբրեւ AKC յեռանկյան արքաքին անկյուն, հաշաւար են երթին յերկու իրեն անկոյ անկյունների գուծարին, անծիզապետ գործում ենք.

$$\alpha = \angle ACK:$$

Պեղարքն գործել բութ անկյան յեւ նրա յաշվառողի յեռանկյունաշափական ճեճությունների փոխադարձ կախումը

$$\sin A = \frac{KC}{AC}, \cos \alpha = \frac{KC}{AC}.$$

այս հարաբերությունները ծրահաշաւար են ըստ ճեճության յեւ ըստ նշանի, հեղեղապետ—

$$\sin A = \cos \alpha.$$

Տրող նույն չեզոք գ-րանած եւեթ, զոր $\cos A = \frac{AK}{AC}$ թեւ $\sin \alpha = \frac{AK}{AC}$.
 Բայց AKC յեռանկյան թեւ AK կողմը դրական է, հետեւեալս
 պէս յերկրորդ հարաբերութեան նշանը հակադիր է առաջինին, ուստի

$$\cos A = -\sin \alpha.$$

Նման չեզոք գ-րանած եւեթ

$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} A = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Համախմբելով սրացած բանաչեզերք թեւ A -ի ցեղ դնելով նրա արժեքը $90^\circ + \alpha$, կստանանք -

$$\begin{aligned} 18) \quad & \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha, \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha, \\ & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha, \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha: \end{aligned}$$

Այս բանաչեզերք հնարաւորութեան եւ ցաւիս բութանկյան յեռանկյունաչափական թեթեւութեան հաշվածը վերաժել սուր անկյան յեռանկյունաչափական թեթեւութեան հաշվածին, այսինքն հնարաւորութեան եւ ցաւիս ոգ-րվել աշյուսակներէ:

33. Հաւելելի անկյուններ. Մայժանաւորվելով յերկու անկյուններ, զորոնց գ-մծարն է 180° , անվանել հաւելելի անկյուններ. այդպէս են, որ. կից անկյունները: Մարկ. 14-ից յերեւոյթ է, զոր

$$A + \angle KAC = 180^\circ, \angle KAC = 180^\circ - A.$$

Այնպէս հետեւ $\frac{KC}{AC} = \sin A$, $\frac{KC}{AC} = \sin \angle KAC$. յերկու

հարաբերութեան նշանները նույնն են, ուստի

$$\sin A = \sin \angle KAC:$$

Նույն չեզոք կը գրենք, զոր A թեւ KAC հաւելելի

անկյունների կոսինուսները, քանգետները թեև կոսինուսները հաճախաբար անարար հաշվար են ըստ թեժութան, բայց հակադիր են ըստ նշանների: Ելապես ուրեմն-

19) $\sin A = \sin(180^\circ - A), \quad \operatorname{tg} A = -\operatorname{tg}(180^\circ - A),$
 $\cos A = -\cos(180^\circ - A), \quad \operatorname{ctg} A = -\operatorname{ctg}(180^\circ - A):$

Էներգիան բանաչեղերը քալիս են բութ անկյան յեռանկյունաչափական թեժութունները հաշվելու յերկրորդ յեղանակը, հաշվելիս սուր անկյան թիզոցով:

Վերջ ընտրել հաշվելորդը թե հաշվելիս անկյունը - այդ-
 Լիովին կախված է թվերից կամ խնդրի պայճաններից:

31. 180°-ի անկյան յեռանկյունաչափական թեժութունները

ընդունելով $A = 180^\circ$, (19), (6), (7) բանաչեղերի թեև §22-ի ոգնութածը անթիզորեն գործած ենք.

$\sin 180^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1$
 $\operatorname{tg} 180^\circ = 0, \quad \operatorname{ctg} 180^\circ = -\infty.$

Որիւնակներ.

I Գործենք $108^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 162^\circ$ անկյունների յեռանկյունաչափական թեժութունները:

անկյուն	Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens	
108°	$\frac{10+2\sqrt{5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$-\frac{3\sqrt{5}-5}{20}$	$-(3\sqrt{5}+5)$	162°
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	150°
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	135°
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	120°
	Cosinus	Sinus	Cotangens	Tangens	անկյուն

II. Կույս ցանֆ, զոր

$$\operatorname{tg} 100^{\circ}20'7'' = -\operatorname{ctg} 10^{\circ}20'7'' = -\operatorname{tg} 79^{\circ}39'53''.$$

Ունիք՝

$$10^{\circ}27'7'' + 79^{\circ}39'53'' = 90^{\circ}, \text{ հետևաբար}$$

α յեւ $180^{\circ}-A$ անկյունները լրացուցիչ են:

Այդ պարագայում

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (180^{\circ}-A), \operatorname{ctg} 10^{\circ}20'7'' = \operatorname{tg} 79^{\circ}39'53''.$$

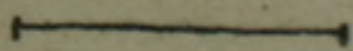
Իսկ զորովհետեւ բոլոր անկյան ցանֆները բացառական են, ապա յեւ հարանաֆ զերը նշանակած համասարայունները:

III. Աշակերտներին առաջարկեմ եմ ցույց տալ.

1. $\cos 148^{\circ} = -0,848$; $\operatorname{tg} 132^{\circ} = -1,1106$; $\sin 170^{\circ}20' = 0,9858$.

2. Յերե A -ն բոլոր անկյուն է ABC յեռանկյան թեզ, ապա

$$\cos A + \cos (B+C) = 0.$$



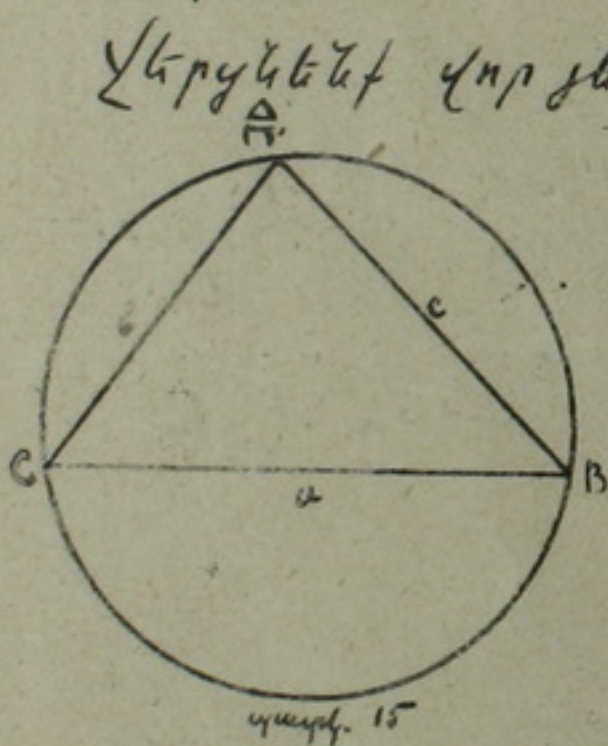
Գլուխ VII.

Տեորեմներ յեւ բանաձեւեր.

35. Առաջանում յեռանկյան լուծման համար պահանջատալ բանաձեւեր, զորով պարունակում են յեռանկյուններ.

կյան ժխայն հիմնական ցարրերը՝ նրա կողմերը յեւ մանկուն-
ները: Չեղանկյուն յեռանկյան հաճար նման որինակ բանաչե-
վեր ստանալ նրա մանկունների յեռանկյունաչափական յե-
ճութունների սահմանումներից չի կարելի, քորովհետեւ
այդ սահմանումները պարունակում են լրացուցիչ ցարրեր,
այն է՝ բարդությունը յեւ առաջագոյությունը: Այս գլխում
պետք է արտաճենք այն յեռերեւերը յեւ բանաչեւերը,
քորովհետեւ կարուճեն հաստատում շեղանկյուն յեռանկյան
ժխայն հիմնական ցարրերի ժիզեւ:

36. Արինուների յեռերեւը. շեռանկյան կողմի հարա-
բերությունը հակադիր մանկյան արինուին՝ հաստատուն
յեճութուն է, քոր հակառակ է արտագոյալ շրջանի ցրա-
ճագ-ժիւ:



Ներքեւեւ քոր յեւ ABC յեռանկյուն (պատկ. 15) յեւ
նրան արտագոյեւեւ շրջանագիւ: $a, b,$
 c կողմերը կարելի է նկարել, քորպէս
լարեր, քորովհետեւ վրա հեւեւում են $A,$
 B, C ներգոյալ մանկյունները. այս պար-
ճառով, § 13-ի հիման վրա, գրեւում
ենք $\frac{a}{2R} = \sin A, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2R} = \sin C,$

քորպէս R -ը ABC յեռանկյան արտագոյալ շրջանի շառա-
վրդն է: Կյեւեւեւեւ
 $\frac{a}{\sin A} = 2R, \frac{b}{\sin B} = 2R, \frac{c}{\sin C} = 2R.$

ժխայնեւեւ բոլոր յերեւ առնչությունները վերջեւաւորեն
ստանում ենք

$$21) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Արևուսների թեորեմն անազին անգամ գրել եմ Նշանդրոս
 Թորոնտոյում:

37. Դեպքականներ. I. Հետև նախորդ բանաչեղի ձևը
 դուրս է գալիս վերջին անգամը, այսինքն հասկանալի
 կոչված արևուսների բանաչեղերը

$$(22) \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Բանաչեղերն այս տեսակի կիրառում են յեռանկյուն-
 ների լուծման վրա:

II. Դեպքով $C = 90^\circ$, գրեմ ենք $\sin C = 1$, $B = 90^\circ - A$,
 $\sin B = \cos A$, այս դեպքում (22)-ի անազին բանաչե-
 լից պաշխու եմ

$$a = b \cdot \operatorname{tg} A, \quad a = b \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Հետևորդ յեղ յերրորդ բանաչեղերը պաշխու են -

$$a = c \cdot \sin A, \quad b = c \cdot \cos A.$$

Այս բանաչեղերն ուղղանկյուն յեռանկյան լուծման բանա-
 չեղերն են, զոր արդեն ձևը կայտնի են:

Դիպրոպություն. Արևուսների թեորեմն արքայաճեղիվ յեռան-
 կյան ամեն տեսակ (թե՛ ամբ, թե՛ ուղիղ յեղ թե՛ բութ) անկյուն-
 ների համար:

38. Անկյունների թեորեմը. Դիցուք յեռանկյան ձևը գտնա-
 են a յեղ b կողմերը յեղ նրանց ծիզեղ շեկամ (անկյունը.
 գրեմը ցվյալ պարբերի յեղ A յեղ B անյայտ անկյունների
 փոխադարձ կախումը:

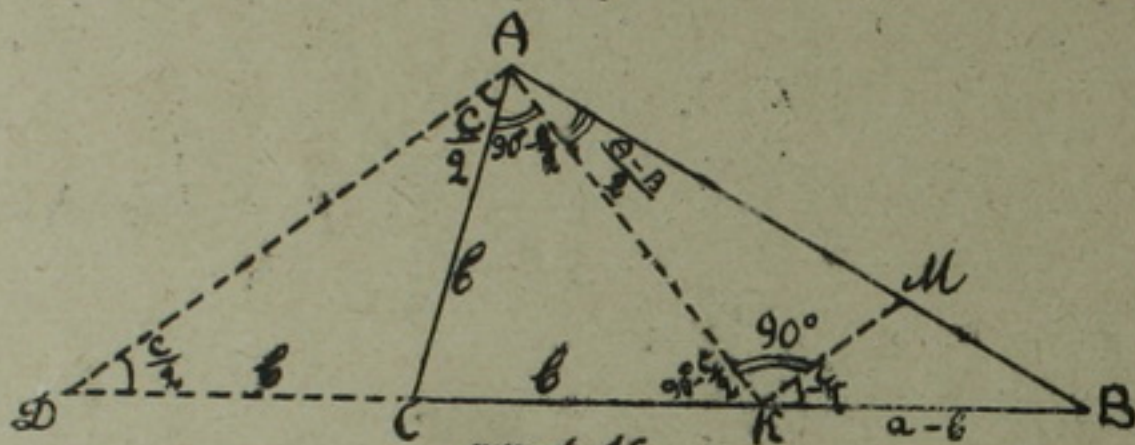
Դիցուք ABC յեռանկյան ձևը (պատկ. 16) a կողմը ձև b
 b կողմից: a -ի վրա դնենք CH հարվածը յեղ a -ի լա-

ընկերության զրա CD հաջաւոր, յերկուսն եւ հաջաւոր
 b -ին. այն ժամանակ

$$DB = a + b,$$

$$KB = a - b.$$

I նախ դիտենք նոր առաջադրած անկյունները.



1) C անկյունն արտաքինն է CAD հաջաւորաւորուն յեռան-
 կյան նկարծածը, ուստի

$$\angle ADC = \angle DAC = \frac{C}{2}$$

2) A յեւ K կէտերն ուղիղով ծիւցնելով կարանակ CAK
 հաջաւորաւորուն յեռանկյունը, զորի յեզ AK հիծքին կից
 հաջաւոր անկյունների գումարը կազմած է $180^\circ - C$,
 հետեւեալապէս

$$\angle CAK = \angle CKA = 90^\circ - \frac{C}{2} :$$

3) Սկսենք հետեւ, DAK անկյունն ուղիղ է (զորպէստեղ
 $DAK = \frac{C}{2} + (90^\circ - \frac{C}{2})$ ք. պարկերը)

$$\angle DAK = 90^\circ.$$

4) Մանենք այժմ KM -ը չուգահեռ DA -ին: $\angle MKB$ յեւ
 $\angle ADC$ հաջաւոր են, իբրեւ հաճապարարան անկյուն-
 ների չուգահեռների ծոք, $\angle MKA$ յեւ $\angle DAK$ հաջաւոր
 են, իբրեւ խաչադիր անկյուններ, ուստի

$$\angle MKB = \frac{C}{2},$$

$$\angle MKA = 90^\circ.$$

5) Վերջապես, $\angle BAK = A - (90^\circ - \frac{C}{2}) = A + \frac{C}{2} - 90^\circ$.
 քայլ $\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$, այնպես չոր
 $A + \frac{C}{2} - 90^\circ = A - \frac{A+B}{2}$ կամ
 $\angle BAK = \frac{A-B}{2}$.

II ABD յեղ AKB յեռանկյունները նման են, չորսկեպեղ
 ունին B շեղահանքանկյունը, չորի հակադիր AD յեղ
 AK կողմերը զուգահեռ են. ուստի

$$\frac{DB}{KB} = \frac{AD}{AK}$$

կամ $\frac{a+b}{a-b} = \frac{AD}{AK}$:

ADK ուղղանկյուն յեռանկյունից ունի
 $AD = AK \cdot \operatorname{tg} \angle AKD$.

AKM ուղղանկյուն յեռանկյունից ունի
 $AK = AK \cdot \operatorname{tg} \angle KAM$.

AKD յեղ KAM անկյունների տեղ դնելով իրենց արժեք -
 ներքև կստանանք

$$AD = AK \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - \frac{C}{2}),$$

$$AK = AK \cdot \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}.$$

Այնուհետև

$$\frac{AD}{AK} = \frac{AK \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}}{AK \cdot \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

արժեքները դնելով համաստեղային մեջ յեղ կրճատե
 լով կստանանք ռվերքը

$$(23) \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$$

կամ, զորով հետևելով $\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$ յետևելով $\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg}(90^\circ - \frac{A+B}{2}) = \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$, —

$$(23') \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} :$$

II յս է ցանցեանների թեորեմը, զոր առաջին անգամ արվել է Պանյայի գիտնական թոմաս Ֆիլեյը (1583)

39. Դերոնի բանաչեզերը դրոշմի χ -ը ABC կամայոր յեռանկյանը ներդրած շրջանի շառավիղն է (պատկ. 17): AO, BO, CO կիսողները Գվյալ յեռանկյունը բաշխում են յերեքի, զորոնց բարչրությունները հավասար են χ -ի:

II ծրոշը յեռանկյան F ծակերեւը հավասար է այդ յերեք յեռանկյունների ծակերեւների գումարին, այսինքն —

$$F = a \cdot \frac{\chi}{2} + b \cdot \frac{\chi}{2} + c \cdot \frac{\chi}{2} .$$

$\frac{\chi}{2}$ -ը փակագծից դուրս հանելով յետևելով նկատելով զոր $a+b+c = 2p$, գտնում ենք Դերոնի

առաջին բանաչեզը.

$$(24) \quad F = \chi \cdot p :$$

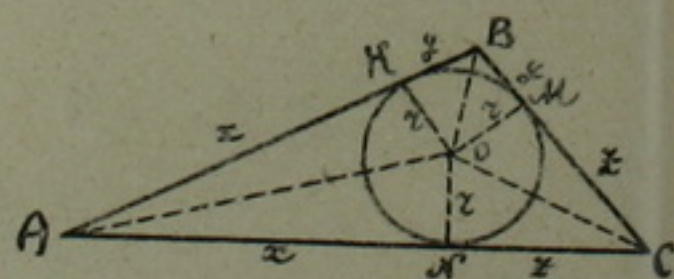
A, B, C կետերից ցարած շոշափողների հարվածները նշանակելով հա-

ճապարակաբանորեն x, y, z այն ժամանակ

$$x + y = c ,$$

$$x + z = b ,$$

$$y + z = a .$$



պատկ. 17

Անդամ առ անդամ գումարելով բոլոր յերեք հավասարությունները՝ գտնում ենք

$$x + y + z = p.$$

ուպր

(25) $x = p - a,$

$$y = p - b,$$

$$z = p - c.$$

Հետևելիս և պարզապես նայել յերրորդ կարգի բա-
նաչափը, զորն սովորաբար արտաձևում են յերկրաչափու-
թյան դասերից մեկը -

(26) $F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

40. Մաքագ-Տերի բանաչափերը. AN յեռանկյունից
(պար. 17) գտնում ենք -

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{z}{p-a}$$

Սակայն (24)-ից ունենք $z = \frac{F}{p}$; F -ի փոխ դնելով
իր արտահայտությունը ըստ (26)-ի, ստանում ենք

$$z = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p},$$

$$\frac{z}{p-a} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$

Ներքին հաճախությունն առ ծառ դյուրին է պարզել
հայտարարն արժանի փակ ձևով դնելով. հայտնաբեր -

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Նույն ձևով դյուրին է գտնել $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ և $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$. բայց ել
ազնի հեշտ և ճշգրիտ բանաչափերը կապել $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ -ի
հաճախականությանը, ոգտնելով շրջանային փոխանակու-
ների ձևերով: Ստացանք ուրեմն -

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

(27)

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

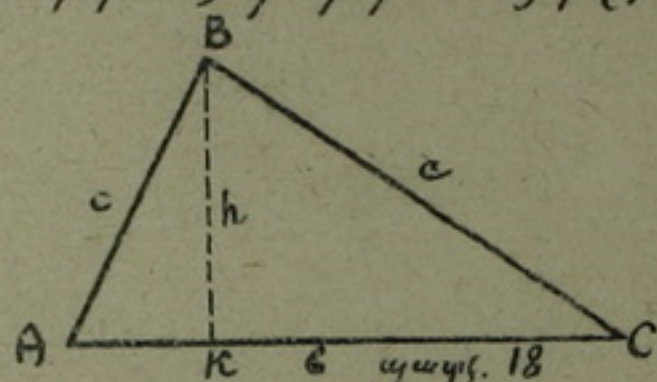
Պարագ-Տերի բանաչեղերն առաջին անգամ տպել է
Թեոփիլոսը (1568):

41. Քեզ. իոնիսիանուսի բանաչեղը (1463). Յեռանկյան
ծակերեւը հաճաւար է նրա յերկու կողմերի յեւ պանդոկ
կապճման անկյան սինուսի արտադրյալի կէսին:

Որ. ABC յեռանկյան ծակերեւը (պարզ. 18) կարգաւորւածի
աջապէս $F = \frac{b \cdot h}{2}$.

բայց $h = a \cdot \sin C$, հետեւեալաբար

$$(28) F = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$



յերթե $C = 90^\circ$, ապա $\sin C = 1$, յեւ յետեւեալեւեւ
$$F = \frac{a \cdot b}{2}$$

հայրնի բանաչեղը, զորի ձեզ a -ն յեւ b -ն եղերն են:

Գլուխ VIII. Չեղանկյուն յեռանկյունների լուծումը.

42. Կիսաւանդ եւայտեր. Չեղանկյուն յեռանկյունը
ժխանգաճայն զորոշման է, յերթե հայրնի են նրա կիսա-
կան արարերից յերեւել, որոնցից յեւ անպայճան
կողմ պէտք է լինի: Ընդ- ածին տվաւ յեւ յայտնեւերը
պէտք է (էրեւել) բազարաբնէ հետեւեալաւ պայճանեւերն.

1) յերկու անկյունների գումարը պէտք է փոքր լինի
 180° -ից, 2) յերկու կողմերի գումարը պէտք է յեւ լինի
յերրորդ կողմից:

Կիսաւանդ եւայտերն են հետեւեալաւ չորսը. Ամեն են

I կողմը յեւ յերկու անկյուն

II յերկու կողմեր յեւ նրանցով կապճման անկյունը

III. Յերեմի Կողմերը,

IV. Յերկու Կողմեր յեւ Նրանցից Տեկին հակադիր անկյունը:

II ռազին դեպքը լուծուած եւ սինուսների բանաձեւերի ոգնութեամբ, յերկրորդը՝ քանգենանների բանաձեւերի, յերրորդը՝ պարագ-Տերի բանաձեւերի յեւ չորրորդը, այսպէս կոչուած Կասկածեւոր, սինուսների բանաձեւերի յիշոցով:

Որինակ I

Առկա է $b = 16343,91$ սմ., $A = 29^{\circ}54'30'',69$ յեւ

$C = 39^{\circ}20'33'',82$ և մեծ յեռանկյունը

Լուծուած

Ասի գտնուած եւեմ յերրորդ-անկյունը B , այն եւ

$B = 110^{\circ}44'55'',49$. II, չեռանկեւ

$$1) a = \frac{b \sin A}{\sin B},$$

$$2) c = \frac{b \sin C}{\sin B},$$

$$3) F = \frac{ab \sin C}{2}.$$

Նաշ չու Տեկի դասաւորուածը.

$$I) a = \frac{16343,91 \cdot \sin 29^{\circ}54'30'',69}{\sin 110^{\circ}44'55'',49}$$

$$\lg a = 3,94025$$

$$a = 8714,6 \text{ սմ.}$$

I)

$$\alpha = 20^{\circ}44'55'',49$$

$$\begin{array}{rcl} \lg a & = & 4,21336 \\ + \lg \sin A & = & 9,69776 - 10 \\ \hline & = & 13,91112 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} - \lg a & = & 9,97087 - 10 \\ \hline & = & 3,94025 \end{array}$$

$$\text{II) } c = \frac{16343,91 \cdot \sin 39^\circ 20' 33'',82}{\cos 20^\circ 44' 55'',49}$$

$$\lg c = 4,04455$$

$$c = 11080,26 \text{ սւտ.}$$

$$\text{II) } \lg b = 4,21336$$

$$- \lg \cos \alpha = 9,97087 - 10$$

$$4,24249$$

$$+ \lg \sin C = 9,80206 - 10$$

$$4,04455$$

$$\text{III) } F = \frac{ab \sin C}{2}, \lg F = \lg a + \lg b + \lg \sin C - \lg 2$$

$$\lg F = 7,65464$$

$$F = 45148000 \text{ քառ. սւտ.}$$

$$\text{III) } \lg a = 3,94025$$

$$\lg b = 4,21336$$

$$+ \lg \sin C = 9,80206 - 10$$

$$7,95567$$

$$- \lg 2 = 0,30103$$

$$7,65464$$

Որոշակ II

Առկա է $a = 12,85$ սւտ. յետ $C = 7,9695$ սւտ. $B = 92^\circ 4' 58''$

Լուծել յետադիմ:

Լուծում.

Կարի հաշվել A յետ C անկյունները. դրա համար գրենք

հարկից հիսսարթերությունը՝ ոգրվելով քանդակներով բա-

նայելից: Վերադառնալ $a > c$, կունենանք

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-C}{2}}, \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} = \frac{(a-c) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{a+c}$$

Անհաղթելով արվալ յետադիմները՝ գրենք հետ

$$\text{I) } \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} = \frac{4,8805 \operatorname{ctg} 46^\circ 2' 29''}{20,8195}$$

$$20,8195$$

$$\begin{aligned} I) \lg \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} &= \lg 4,8805 + \lg \operatorname{ctg} 46^{\circ} 2' 29'' - \lg 20,8195 \\ \lg \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} &= 9,35421 - 10 \end{aligned}$$

$$\frac{A-C}{2} = 12^{\circ} 44' 16'', 3$$

$$\begin{aligned} II) \lg 4,8805 &= 0,68847 \\ + \lg \operatorname{ctg} 46^{\circ} 2' 29'' &= 9,98421 - 10 \\ \hline &10,67268 - 10 \\ - \lg 20,8195 &= 1,31847 \\ \hline &9,35421 - 10 \\ 9,35405 &\dots\dots 12^{\circ} 44' \\ 9,8 &\dots\dots\dots 10'' \\ 5,9 &\dots\dots\dots 6'' \\ 0,295 &\dots\dots\dots 0'', 3 \\ \hline 9,35420995 &\dots\dots 12^{\circ} 44' 16'', 3 \end{aligned}$$

Գրանիտ փորձելի անկյունների կիսալրացրեք ությունը. հեշտ
և գրանիտ նայել նրանց կիսադիմադր $A + C = 180^{\circ} - B$
պայծառից, որից $\frac{A+C}{2} = 90^{\circ} - \frac{B}{2} = 43^{\circ} 57' 31''$: Այսպիսով
սրահայտ էրկանիցայտ յերկու հազարաթուների ծրարան

$$\left. \begin{aligned} \frac{A+C}{2} &= 43^{\circ} 57' 31'' \\ \frac{A-C}{2} &= 12^{\circ} 44' 16'', 3 \end{aligned} \right\}$$

Այդպես առանց անհրաժեշտ գումարելով յեղ հանելով սրահանուկներ.
 $A = 56^{\circ} 41' 47'', 3$; $C = 31^{\circ} 13' 14'', 7$;

Խնայելով անկյունները կարող եմ գրանիտ յերրորդ և չոր-
հինգ յեղ F ծակերուր.

$$2) b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$3) f = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}.$$

$$2) \lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A$$

$$\lg b = 1,18652$$

$$b = 15,3647 \text{ մետ}$$

$$3) \lg F = \lg a + \lg c + \lg \sin B - \lg 2$$

$$\lg F = 1,70901,$$

$$F = 51,1689 \text{ փառ. մետ.}$$

$$2) \lg a = 1,10890$$

$$+ \lg \sin B = 9,99971 - 10$$

$$11,10861 - 10$$

$$- \lg \sin A = 9,92209 - 10$$

$$1,18652$$

$$3) \lg a = 1,10890$$

$$\lg \sin B = 9,99971 - 10$$

$$\lg c = 0,90143$$

$$2,01004$$

$$- \lg 2 = 0,30103$$

$$1,70901$$

II րիչանկ III

Համարել յեռանկյունը, զորի կողմերն են 42 ծ, 38 ծ, 26 ծ:

Լուծում.

Յեռանկյան բոլոր յերեք անկյունները կորոշվեն պարագագերի բանաձևովերից: Խնդրից առաջ գտնենք p , $p-a$, $p-b$, $p-c$ արտահայտությունները յեզ նրանից (ոգտրիքները).

Հնդ-ունելուզ $a = 42 \text{ ծ}$, $b = 38 \text{ ծ}$, $c = 26 \text{ ծ}$, և քանակա՝

$$p = 53, \quad p-a = 11, \quad p-b = 15, \quad p-c = 27,$$

$$\lg p = 1,72428; \quad \lg(p-a) = 1,04139; \quad \lg(p-b) = 1,17602$$

$$\lg(p-c) = 1,43136.$$

Հաշվելու համար

$$1) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ [\lg(p-b) + \lg(p-c)] - [\lg p + \lg(p-a)] \}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 9,92089 - 10$$

$$\frac{A}{2} = 39^\circ 48' 37'',$$

$$2) \lg p = 1,72428$$

$$+ \lg(p-a) = 1,04139$$

$$2,76567$$

$$\lg(p-b) = 1,17602$$

$$+ \lg(p-c) = 1,43136$$

$$2,60745$$

$$- 2,76567$$

$$(9,84178 - 10) : 2 =$$

$$= 9,92089 - 10$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \{ [\lg(p-a) + \lg(p-c)] - [\lg p + \lg(p-b)] \}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 9,78619 - 10$$

$$\frac{B}{2} = 31^{\circ} 26' 2'', 1$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \{ [\lg(p-a) + \lg(p-b)] - [\lg p + \lg(p-c)] \}$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 9,53092 - 10$$

$$\frac{C}{2} = 18^{\circ} 45' 20''$$

$$\lg p = 1,72428$$

$$\lg(p-b) = 1,17609$$

$$2,90037$$

$$\lg(p-a) = 1,04139$$

$$\lg(p-c) = 1,43136$$

$$2,47275$$

$$- 2,90037$$

$$(9,57238 - 10) : 2 =$$

$$= 9,78619 - 10$$

$$3) \lg p = 1,72428$$

$$\lg(p-c) = 1,43136$$

$$3,15564$$

$$\lg(p-a) = 1,04139$$

$$\lg(p-b) = 1,17609$$

$$2,27748$$

$$- 3,15564$$

$$(9,06184 - 10) : 2 =$$

$$= 9,53092 - 10$$

Այսպես որոշեցի, և քանզի

բնութի յերեւել անկյուններն

համար կապեցի շնորհակալ

0",9

Այսպես որոշեցի

$$\frac{A}{2} = 39^{\circ} 48' 34''$$

$$\frac{B}{2} = 31^{\circ} 26' 2'', 1$$

$$\frac{C}{2} = 18^{\circ} 45' 20''$$

$$89^{\circ} 59' 59'', 1$$

$$4) F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\lg F = \frac{1}{2} [\lg p + \lg(p-a) + \lg(p-b) + \lg(p-c)],$$

$$\lg F = 2,68656,$$

$$F = 485,91 \text{ քառ. ծ.}$$

4) $\lg p$	$= 1,72428$
$\lg(p-a)$	$= 1,04139$
$\lg(p-b)$	$= 1,17609$
$\lg(p-c)$	$= 1,43136$
	$5,37312 : 2 =$
	$= 2,68656.$

Այսպես, զերգծակալներեն հանգեցանք

$$A = 79^{\circ} 37' 14'' ;$$

$$B = 62^{\circ} 52' 4'', 2 ;$$

$$C = 37^{\circ} 30' 40'' ;$$

$$F = 485,91 \text{ քառ. ծ.}$$

IIրիշակ IV

Անգամ են a և b կողմերը թեև A անկյունը. լրիշը
լինանկյունը:

Լուծում.

Արևմտեքի թանրեծի համաչափ գրեմը ենք B անկյունը
թեև c կողմը -

$$1) \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a},$$

$$2) C = 180^{\circ} - (A + B),$$

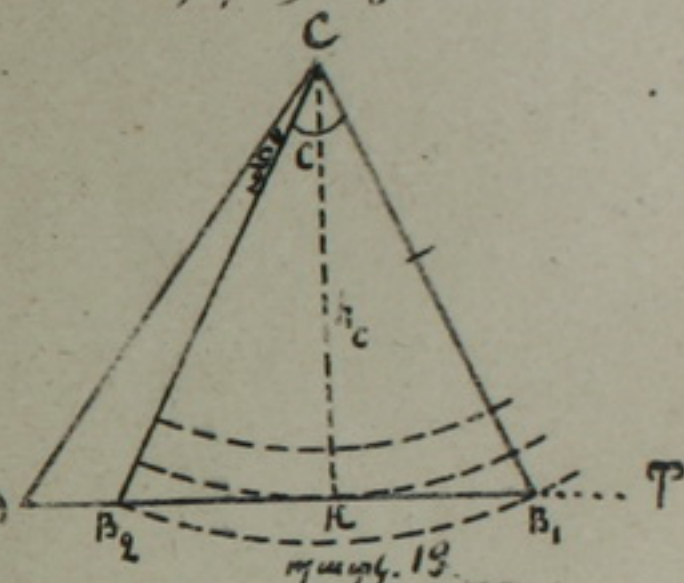
$$3) c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A},$$

$$4) F = \frac{a b \sin C}{2}.$$

Հեղափոխություն

43. Ենթադրաք յերեւոյց գեոմետրից յուրաքանչյուրն ունենա
ծրայն ձեկ յերկրաչափական կառուցում. Եւրկա գեոմետ
կառուցումներն թիվը կարող եւ լինել յերկու, ձեկ յեւ կամ
ուրիշ: Երրորդ, 7-րդուր AT ուղիղը (պատկ. 19) Եւրկաչափում եւ

C կողմն ուղղանկյունը: Ընդհանրապէս Եւրկա
չրա A կամ C կէտը, զորպէս յեռանկ
կան գագաթներից ձեկը, կառուցանում
ենք որպէս A անկյունը յեւ C կողմն զրա
դում եւնք C -ին հաջորդաբար AC հարկաւոր: A



II յնուկերեւոյց յեռանկյան յերկրորդ. C գագաթից իջեցնում
ենք AT -ի ուղղահայանը՝ h_c : Ապա u -ին հաջորդաբար շառաւի
ղով C կէտերներից գ-ժում եւնք աղեղ յեւ g -քնում եւնք Եւրկա
յեւ AT ուղիղն հարձան կէտը: II յարեւ հետաքաշաւոր եւ յերեւոյց
գեոմետրի:

I յերեւ $a > h_c$, ապա աղեղն AT ուղիղը կը հարի յերկու
կէտերում՝ B_1 յեւ B_2 , այսինքն կան յերկու յեռանկյուններ
 ACB_1 յեւ ACB_2 , զորոնք բազմաբարում եւ քվյալ պայծառնե
րին. Եւրկայից ձեկը սրանկյունն եւ յեւ C կողմն բթանկյունն:

II յերեւ $a = h_c$, ապա աղեղը ծրայն շառաւիղում եւ AT ուղի
ղը K կէտում, յեւ սրապէս եւ ձեկ յեռանկյունն. այդ
 ACK ուղղանկյունն յեռանկյունն եւ:

III յերեւ $a < h_c$, ապա աղեղն ընդհանուր կէտեր չունի
 AT ուղիղի հետ. յեւ յեռանկյունն անհնարին եւ:

Պ-իւրոնդություն. Կառուցումն իւրաքանչյուր յերկրաչափում

էր, զոր χ անկյունը սուր է. չէրէ A -ն բութ, ապա, ինչ-
պէս ակահարր u , յերկու շրջան հնարաւոր է:

44. Հարցը հետաւորութեի ալժ χ եւ χ որեւէ (անալիզի)...

$A = 90^\circ$ չէ $u = 6$ դեպքերը քննարկան չենք առնել, զորովհե-
տեղ նրանք համարադասութեան են ողջանկյունի չէ h ակա-
սարարուն յեռանկյուններին:

II Տեղից առաջ նկարում ենք, զոր ACH ողջանկյուն յեռան-
կյունից հետեւում է. $h_c = b \cdot \sin A$. իսկ Տեղի ունի

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$$

բանալի:

II յարեղ կորորակի հաճարիչը հաճաւար է h_c -ի, իսկ հա-
յարարը՝ a -ր. այդ պարագայում B անկյուն Տեճարունը
կախում է h_c յեղ A Տեճարուններից, ինչպէս յեղ առաջ
այդ հայտնի էր:

Քննենք $\frac{b \cdot \sin A}{a}$ կորորակը, ընդունելով $a < b$.

I Չէրէ կորորակի հաճարիչը Տեճ է հայարարից, ապա
կորորակը Տեճ 1-ից յեղ $\sin B > 1$, զոր, պարզապէս, անհնա-
րին է: II յս ենթադրումից բխում է իրրեղ հետեւումի-

$$I) a < b \cdot \sin A.$$

անհաւասարութեան ընդունում:

II) Չէրէ հաճարիչը հաճաւար է հայարարին, ապա
կորորակը հաճաւար է 1-ի յեղ $\sin B = 1$, այսինքն $B = 90^\circ$
այդ հաճարիչ է

$$II) a = b \sin A$$

ընդունում:

Այս դեպքում հնարավոր է լուծում, թեև յեռանկյունն ուղղանկյուն է:

III) Յեթե հաճարիչ C փոքր է հայրաքարից, ապա կոսոսուկը փոքր է 1-ից յեւ $\sin B < 1$. քայք Վորովհետեւ $\sin B = \sin (180^\circ - B)$, ապա կարելի է յենթադրել, Վոր B անկյունը կաճ սուր է, կաճ բութ: Այսպես ուրեմն, յեթե տեղի ունի

III) $a > b \cdot \sin A$.

անհայրաքարությունը, ապա հնարավոր է յերկու լուծում: Առանում եւեթ, Վոր կառուցման թեւ հետապնդման արդյունքները նույնն են:

IV) Յեթե $a > b$, ապա $A > B$, այս դեպքում յերկու լուծման ծաւրն խոստ անգամ էի կարող լինել: Կերպարեւ յեթե A -ն բութ անկյուն է, ապա B -ն անպայման պէտք է սուր լինի, Վոր պարզ անն թի հետապնդությունից անկար:

45. Աղյուսակ. Դիտելի դարձնելու նպատակով բոլոր արդյունքները բերենք թի աղյուսակում

$$A < 90^\circ \begin{cases} a < b; & \text{յեթե } a > b \cdot \sin A \text{ ունիք յերկու լուծում} \\ a < b, & " \quad a = b \cdot \sin A \quad " \quad \text{թի} \quad " \\ a < b; & " \quad a < b \cdot \sin A \quad " \quad 0 \quad " \\ a > b; & \text{Դիտր հնարավոր է} \quad 1 \quad " \end{cases}$$

$$A > 90^\circ \begin{cases} a > b; & " \quad " \quad " \quad " \\ a < b; & \text{ունիք } 0 \text{ լուծում} \end{cases}$$

Միջակային որոշում

Առկա է $a = 3,4$ սմ, $b = 4,5$ սմ, $A = 36^\circ 27' 20''$.

Հետևել յեռանկյունը:

Համեմատել յեռ հաշվումը.

I Տեսից առաջ նկատում ենք, զոր $a < b$ յեռ $A < 90^\circ$:

II յեռ նկատել $A < 45^\circ$, $\sin A < \frac{\sqrt{2}}{2}$, իսկ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ճորանգործայելու համարաւ $0,7$. այս պարագայում $b \cdot \sin A < 4,5 \cdot 0,7 = 3,15$, այսինքն $a > b \cdot \sin A$. Այսպէս յեռ յաւանդում ենք, զոր պէտք է հետաւորել յեռին $\angle$ համեմատել:

$$I) \lg \sin B = \lg b + \lg \sin A - \lg a$$

$$\lg \sin B = 9,89566 - 10;$$

$$B_1 = 51^\circ 51' 12''$$

$$B_2 = 128^\circ 8' 48''$$

$$I) \lg b$$

$$= 0,65321$$

$$+ \lg \sin A$$

$$= 9,77393 - 10$$

$$10,42714 - 10$$

$$- \lg \sin A$$

$$= 0,53148$$

$$9,89566 - 10$$

II) Պրան համարաւորաւորաւ յարաւանք

$$C_1 = 91^\circ 41' 28''$$

$$C_2 = 15^\circ 23' 52''$$

$$II) 180^\circ$$

$$- 51^\circ 51' 12''$$

$$+ 36^\circ 27' 20''$$

$$128^\circ 8' 48''$$

$$+ 51^\circ 51' 12''$$

$$180^\circ$$

$$88^\circ 18' 32''$$

$$- 88^\circ 18' 32''$$

$$36^\circ 27' 20''$$

$$91^\circ 41' 28''$$

$$+ 128^\circ 8' 48''$$

$$180^\circ$$

$$164^\circ 36' 8''$$

$$- 164^\circ 36' 8''$$

$$15^\circ 23' 52''$$

Հիմն b զորն էլ C -ն յեռ F ... պարզ է, զոր նրանց համար յեռն հարաւորաւ յարաւորաւ պրոնքներ:

Առաջին լուծում

$$3) \lg C_1 = \lg a + \lg \sin C_1 - \lg \sin A;$$

$$\lg C_1 = 0,53148 + (9,99981 - 10) - (9,77393 - 10);$$

$$\lg C_1 = 0,75736;$$

$$C_1 = 5,7195 \text{ սմ.}$$

$$4) \lg F_1 = \lg a + \lg b + \lg \sin C_1 - \lg 2;$$

$$\lg F_1 = 0,53148 + 0,65321 + (9,99981 - 10) - 0,30103$$

$$\lg F_1 = 0,88347;$$

$$F_1 = 7,64667 \text{ փառ. սմ.}$$

Դերկորոյ լուծում

$$3) \lg C_2 = \lg a + \lg \sin C_2 - \lg \sin A;$$

$$\lg C_2 = 0,53148 + (9,42410 - 10) - (9,77393 - 10);$$

$$\lg C_2 = 0,18165;$$

$$C_2 = 1,51932 \text{ սմ.}$$

$$4) \lg F_2 = \lg a + \lg b + \lg \sin C_2 - \lg 2;$$

$$\lg F_2 = 0,53148 + 0,65321 + (9,42480 - 10) - 0,30103;$$

$$\lg F_2 = 0,30776;$$

$$F_2 = 2,03124 \text{ փառ. սմ.}$$

Դնդ. խնդիր

I լուծել յեռանկյունը, յերբ տրւած են յիկոյն յեղու
անկյուններ.

$$1) b = 87,811; A = 40^\circ 56' 7''; B = 54^\circ 16'', 9.$$

$$2) c = 0,1; B = 70^\circ 43' 6''; C = 49^\circ 7' 4'', 5.$$

$$3) a = 2; B = 140^\circ 57' 16''; C = 19^\circ 4' 5'', 9.$$

$$4) c = 64,005; A = 102^\circ 56''; B = 7^\circ 35' 2'', 84.$$

II. Լուծել յեռանկյունը, յերբ տրված են յերկու կողմը
յեւ չորսանկյունը կազմված անկյունը:

5) $a = 1,85$; $c = 2,6$; $B = 43^\circ 56' 38''$.

6) $b = 0,66$; $c = 0,47569$; $A = 19^\circ 31' 42'', 17$.

7) $a = 23,56$; $b = 47,59$; $C = 103^\circ 18' 0'', 54$.

8) $b = 0,06756$; $c = 8,96$; $A = 67^\circ 18' 17'', 3$.

III. Լուծել յեռանկյունը, յերբ տրված են յերեք կողմերը:

9) $a = 450$; $b = 300$; $c = 310$;

10) $a = 3,472$; $b = 2,8$; $c = 3,084$.

11) $a = 356,5$; $b = 275,8$; $c = 111,6$.

12) $a = 51,69$; $b = 2,57$; $c = 50,17$.

IV. Լուծել յեռանկյունը, յերբ տրված են յերկու կողմ յեւ չորսանկյունը յեւ չորսանկյունը յեւ չորսանկյունը:

13) $b = 486$; $c = 812$; $B = 21^\circ 35' 48'', 4$. 16) $a = 0,28$; $c = 1,35$; $A = 16^\circ 18' 17''$.

14) $a = 13,5$; $c = 8,062$; $A = 58^\circ 48' 30'', 6$. 17) $a = 0,131$; $b = 0,1$; $A = 80^\circ 22' 7'', 59$.

15) $c = 40,658$; $b = 57$; $C = 45^\circ 48' 30'', 6$. 18) $a = 134,7$; $c = 157,15$; $A = 132^\circ 9' 4'', 6$.



Գլուխ IX. Զեռանկյունաչափության հիմնականները
յերկրաբանության վրա:

46. Զեռանկյունաչափության խնդիրը. Զեռանկյունաչափության
ընդհանուր խնդիրն է՝ գործել յերկրի մակե-

կազմի Օ կետի հորիզոնի հարթության հետ ծի վորոշ
անկյուն $\angle OAM = \alpha$. այդ անկյունն անվանենք M կետի
„անկյունային բարձրություն“: Բայց անկյունային բարձրու-
թյուն „ α “-ն վորոշում է այն կետերի ախիւղ բազմու-
թյունը, վորոնք գտնւում են OA -ն OZ -ի շուրջը պտե-
լուց առաջացած ուղիղ հոնի (ալեւի ճիշդ՝ կոնական ճակե-
րեւորթի) հիմքի շրջանագծի վրա: Այդ կետերից M -ն
ընտրելու համար պէտք է ծի քոյալ յեղս ունենալ:
Պրա համար MO -ով քանենք ուղղանիւղ հարթությունը,
վորը, դիցուք, HE -ն կտրի AK ուղիղի ուղղությամբ.
ստացւած $MOAB$ յերկանիւր անկյունը չափւում է BAK
գծային անկյամբ: Վերջինս նշանակենք „ α “ յեղ անվա-
նենք M կետի „ալիւմար“: Այժմ, իծանալով α -ն,
 α -ն յեղ α -ն, այլ յեղ դիպողի ալիւ O դիրք՝ կարող
ենք վորոշել նայել M կետի դիրքը քարաճութային յեղ:
48. Կո ենթադրեցի, վոր M կետը գտնւում է O -ից բարձր:
Եւս յերե M -ը գտնւում է O -ից ցած, ապա քտառողութային
ճառագայթը կը գնա դեպի ներքեղ յեղ „ α “ անկյունը
պէտք է հաշւել հակառակ ուղղությամբ: Որինակ՝ P
կետի համար ունինք $\alpha_1 = \angle T'OP$, $\alpha_2 = \angle BAK'$:
— վորպէսզի P կետի հարաբերական դիրքը յիւնցա-
յից հայտնի լինի, ասում են, վոր „ α “ անկյունը P կե-
տի „անկյունային բզուճ“ եկամ վոր P կետն ունի բացա-
ռական անկյունային բարձրություն:
49. Կաճախ ոգտակար է լինում իծանալ քտառողու-
թյան ճառագայթի յեղ AZ ուղղանիւղի կազմած ան-

կյունը, զոր նշանակված է „ $\angle$ “-ով յեղ կոչված է կերի
 „ $\angle$ “-ը կոչված է կերի կենտրոնը: Այսպես, M -ի համար
 կերի կենտրոնը կենտրոնը կոչված է $\angle = \angle ZOM$.
 ընդհանրապես, P -ի համար կերի կենտրոնը կոչված է
 $\angle_1 = \angle OP$: իսկ ընդհանրապես

$$\angle \pm u = 90^\circ$$

որպեսզի u -ի ծայր նշանը զերիցնում են/ ամեն անգամ u -ի
 ցող կերի դիրքի համեմատ:

50. d -ն, u -ն, $\angle$ -ն չափելու համար կան պատշաճ յեղա-
 նակներ յեղ բանեցնում են պատշաճ գործիքներ: Առանց
 ծանրաճանն նկարագրության յեղ յերեւելու, զոր զերա-
 բերում է յերկրաբաշխության հարույզ u -ն յեղ
 պիտի գիտնեն յիսկ հետեւյալը:

Եւրոպայի չափված է այսպես կոչված Եւրոպայի
գործիքներով. նրանք կազմված են յոճյանց հետ յիս-
 ցրած յեղադրա յի շարի հողերից, ունենալով այլ յեղ
 այլ ծանրաճանն հարձակումներ յեղ կոչված են հողաչա-
 փական շար: Այդպես են Արթուրի, Բեռնի յեղ
 այլոց գործիքները: Զարմանքի ամեն նշան յիսկ
 գիտնեն Եւրոպայի չափում են յեղ (Արթուրի յեղա-
 նակ) կան յեղադրա (նշաններ յեղ նշան): զերա-
 պես հասարակ հանույնների յաճանակ գործածում են նշա-
 նա հարույն յեղ չափից յապագան:

Անկյունների չափումը կարգված է Բուսսոնի, ասորո-
 յարի կան յեղ նշան յիսկ: Կորիզնական յեղ
 ուղղաչափ ուղղությունների զործան համար գործածում է

հիշելիք - թեոդուլիս, վարդապետ յով ողջապետ (նկեր) :

51. Դնդ-իրների գ-լիսազոր ցրաբեր : Եթե անկնեք գոր-

ծնակալ գ-լիսազոր խնդ-իրների լուծման :

Դնդ-իր I. Վերոշել հորիզոնական հարթության վրա

գրնվող ծառնելի առարկայի բարձրությունը :

Պ-իցուք $AM = x$ առարկայի վրունելի բարձրությունն է :

Վերադիտելով առ ծառնելի ե, ապա հարող եւեք A կեցին

ընդունել իբրեւ խառնիւթի սկիւբ

(պարկ. 21) : Երա ծյուս ծառնեք

B -ուք, քեղազորում եւեք անկյու-

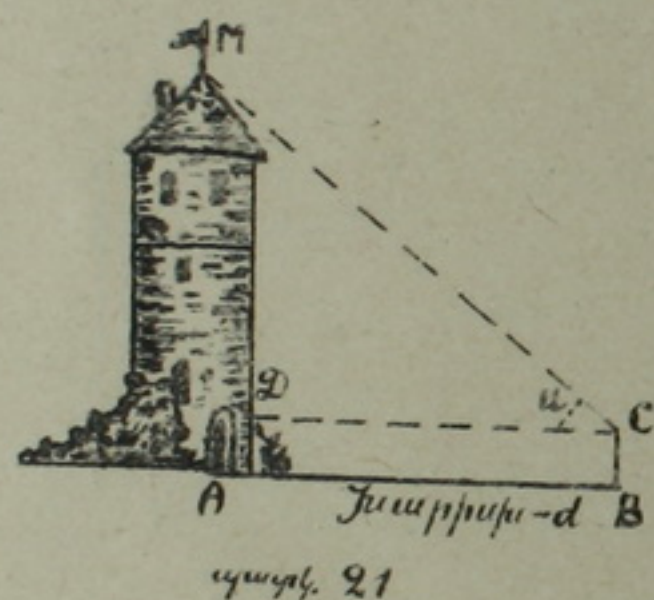
նաչաք գործիք, վորի BC բարձրու-

թյունը հազաւաք ե h -ի . այն ծա-

ծանակ M կեցին անկյունային բար-

ջրությունը կը ներկայաւա $DCM =$

$= \alpha$ անկյաք : MCD ողջանկյուն



յեռանկյունիք գրնում եւեք

$$DM = CD \cdot \tan \alpha$$

Վերադիտելով $CD = BA = d$ յեւ $x = DM + AD$, այսինքն

$$x = DM + h, \text{ ապա}$$

$$I) \quad x = d \cdot \tan \alpha + h.$$

Դնդ-իր II. Գրնել անծառնելի առարկայի բարձրությու-

նը, իբրեւ Երա հիծք գրնում ե դ-իցողի կանգնած քեղի

հեք ժյեզնայն հորիզոնական հարթության վրա :

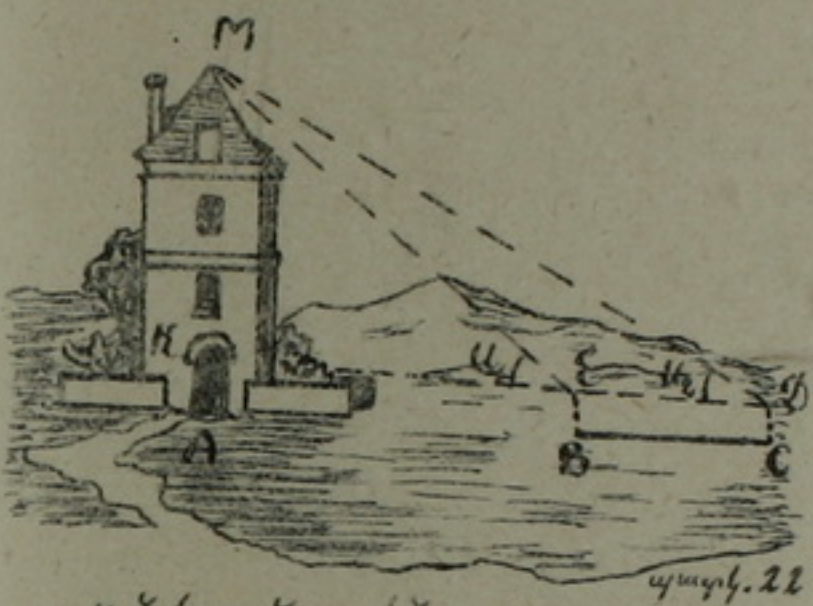
Պ-իցուք $AM = x$ ներկայաչնում ե, ինչպեք յեւ առաք,

անծառնելի առարկայի բարձրությունը (պարկ. 22) :

Ընդրում եւեք յերկու կեքեր՝ B յեւ C , առարկայի

Ա հիմքով անցնող ուղղանկյուն հարթություն,
 ներքի հարթունք ուղիղ լինի: Եթե

յեւ C -ի հեռավորությունը շա-
 փում էնի յեւ C -ի մեծագու-
 րագուստը: Այնպէս եւ
 Եթե C կենտրոնը գտնուի
 անկյունագծի գործիքները,
 Հարկւոյ բարձրությունն է h ,
 գտնւմ էնի M կենտրոնը



անկյունային բարձրությունները՝ $u_1 = \angle KEM$ յեւ $u_2 = \angle KED$:

Այժմ հարցը հանգեց KEM -ի հաշվումին, զորովհետեւ
 $x = KM + h$: Ունիւմ է յերկու յեռանկյուններ՝ ուղղանկյուն
 KME -ն յեւ EDB -ն, առաջին յեւ հայտնի
 է $ED = d$ կողմը յեւ բոլոր յերեք անկյունները: Ներքե-
 զապեմ, յերկրորդ յեռանկյունից հարող էնի զորովհետեւ
 EM -ը, այսինքն առաջինն ներթափանցիւ: Ունիւմ է

$$EM = \frac{d \cdot \sin u_2}{\sin(u_1 - u_2)},$$

$$KM = EM \cdot \sin u_1$$

Այսպէս տրեւում, զերգնականորեն գտնւմ էնի.

$$II) \quad x = \frac{d \sin u_1 \cdot \sin u_2}{\sin(u_1 - u_2)} + h$$

Դանդիւր III. Վորովհետեւ անծայրէջի լեռան բարձրու-
թյունը.

Կրկնիւմ $MP = x$ ներկայացնւմ է զորովհետեւ բարձրու-

թյունը (պատկ. 23). Շնորհիվ եւթ A յեւ B յերկու կէտերը
 M -ի կից ծորագործարարական եւ ուրիշ հարկաւորական հարթու-
 րան վրայ յեւ նրանց $AB = d$ հեռաւորութեան ընդու-
 նեմ եւթ վարկեր խառնուի:



պատկ. 23

A յեւ B կէտերում դնում եւթ
 անկյունաչափ գործիքներ, զոր-
 անց թափարկութեան h , յեւ
 չափում եւթ անկյունները՝
 $\angle T'DH = \alpha$, $\angle T'DC = \pi_1$ յեւ
 $\angle T'CD = \pi_2$: Այն ժամանակ

$T'DC$ յեռանկյունից գործում եւթ

$$T'D = \frac{d \cdot \sin \pi_2}{\sin(\pi_1 + \pi_2)},$$

իսկ $T'DH$ յեռանկյունից՝

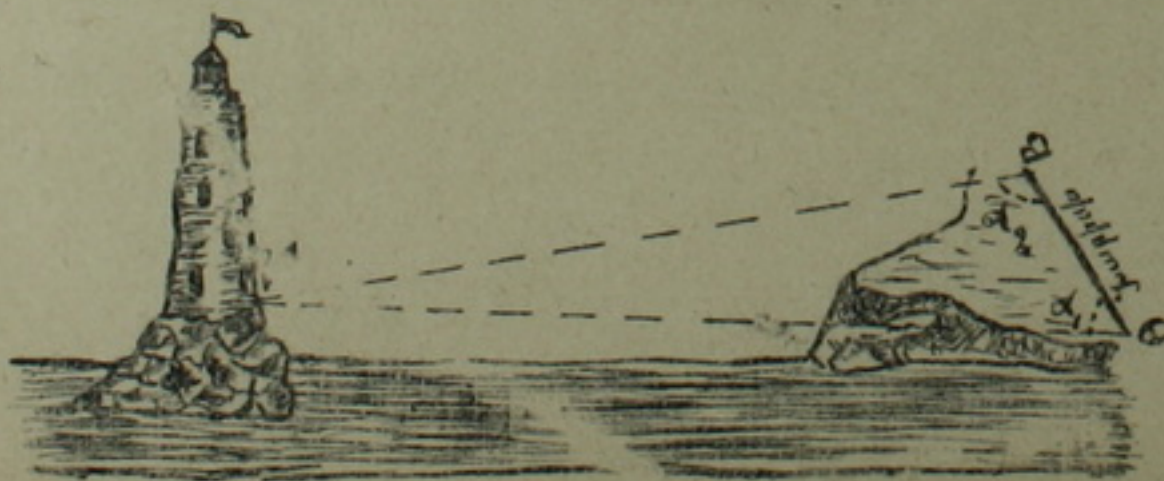
$$T'H = \frac{T'D \cdot \sin \alpha}{\sin \pi_1}.$$

Այսպէս ուրեք.

$$\text{III) } x = \frac{d \cdot \sin \alpha \cdot \sin \pi_2}{\sin(\pi_1 + \pi_2)} + h:$$

Դասիր IV. Վորովի յերկու կէտերի հեռաւորութեան
 նշ, վորովից յեւ անծայրէտի է:

Պրոցնի ցլման եւ յերկու կէտեր A յեւ M (պատկ. 24), վորովի թա-
 խանման եւ իրարից գեղում (կամ վոր յեւ եւ այլ արդեւիք):



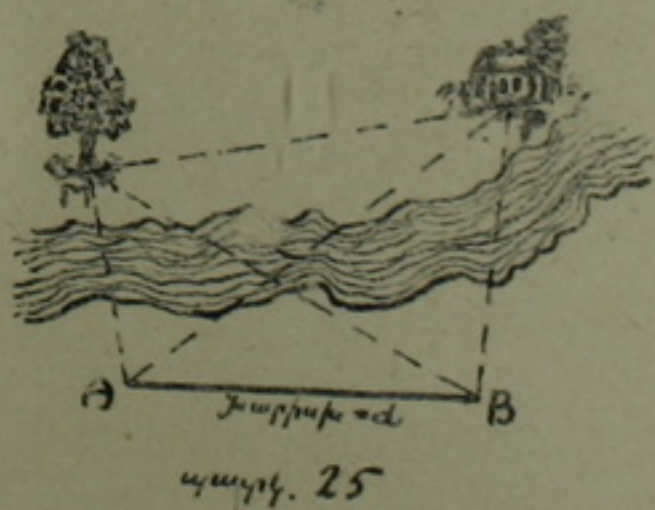
պատկ. 24

Վերստի $AM = x$ հեռավորությունը կարելի է վերադառնալ այսպես: Ընդրուծելով յերրորդ և երկրորդ, չորս Գ-ը, չորս Գ-ը և A -ին ծայր Գ-երի միջևն ինքնին կողմով: Այսպիսով ստացանք $AB = d$ խառնարան Գ-ագագներով տեղադրված երեք անկյունաքանակ Գ-ործիքներով, վերստի բարձրությունը կարելի է արհամարհել այս դեպքում, յեւ չափում եւ չափումները՝ $\alpha_1 = \angle MAB$ յեւ $\alpha_2 = \angle MBA$: Այնպես չեւ AMB յեւ անկյունների սրունների բաժանումով Գ-ը եւ

$$x = \frac{d \cdot \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} :$$

Դրոշմը V. Վերստի յերկու անհարկելի կետերի հեռավորությունը:

Յերե յերկու կետեր՝ M յեւ P (այսինքն 25) անհարկելի եւ դիտողի անհարկելի արդեւ (որ. Գ-ը, ծառեր, Գ-ը, յեւ այլն), բայց տեսանելի եւ դիտողի, այսինքն $MP = x$ հեռավորությունը կարելի է վերադառնալ այսպես: Ընդրելով $AB = d$ խառնարան յեւ չափում $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ յեւ α_4 Գ-ը Գ-ը



չափում եւ յեւ անկյունները: Ուրեւ

$$1) AM = \frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha_1 + \alpha_3)}, \quad 2) AP = \frac{d \cdot \sin \alpha_4}{\sin(\alpha_2 + \alpha_4)}$$

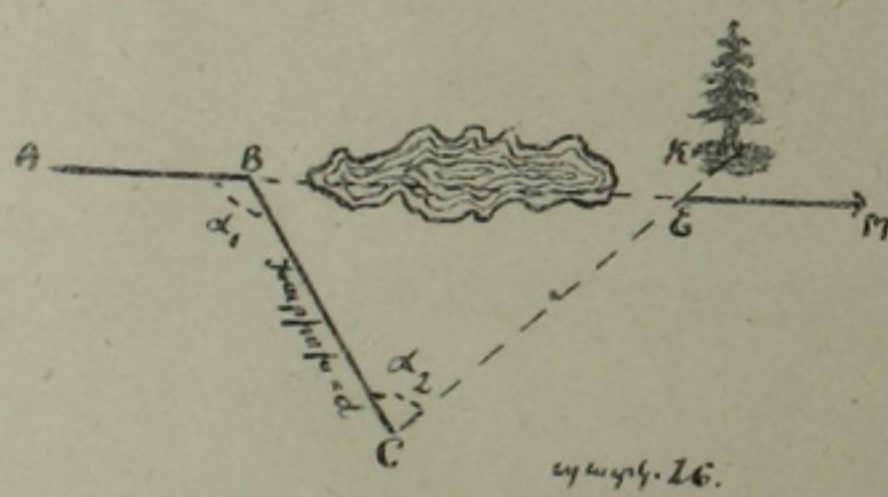
$$3) MAP = \alpha_1 - \alpha_2$$

Այս յերևի Տեսությունները ծրայագծային չորսանոց են AMP , եռանկյունը, զորից նույնպիսի կ'ը գտնվեի նաև յեղ MP չորսանկյունը հեռավորությունը:

Դնիք-ըր VI. Ուղիղը շարունակելի արգելիքով.

Պ-րպեսզի հարկազար եւ AB ուղիղը (պատկ. 26) շարունակելի P արգելիքով: Ընկրթուած ենք այնպիսի C կէտ, զորից յերեզմաւ արգելիքի յերկու կողմի վայրը. $BC = d$

հեռավորությունը ընդունած ենք զորպէս իւրիսի:



Այնպիսիպէզ C կէտից դիպում ենք զոր յեղ եւ աշիք ընկնող կէտ արգելիքի աջ կողմում, որ. Տառ յեղ հապակեալ-ճի վրա իւշում ենք CE ուղղությունը. այն

համեմալ յեղ հայտնի են ինքն d , յեղ α_1 յեղ α_2 : Շարունակում ենք կէտագծում AB ուղղությունը ծիւնել CE -ի հեղ հարկէլ E կէտում. յերե գտնել CE հեռավորությունը յեղ CEM անկյունը, ապա ինչ-որ C նման կ'ը լինի: BCE յեռանկյունիք պնդումների յեռարեծի համապային գտնում ենք

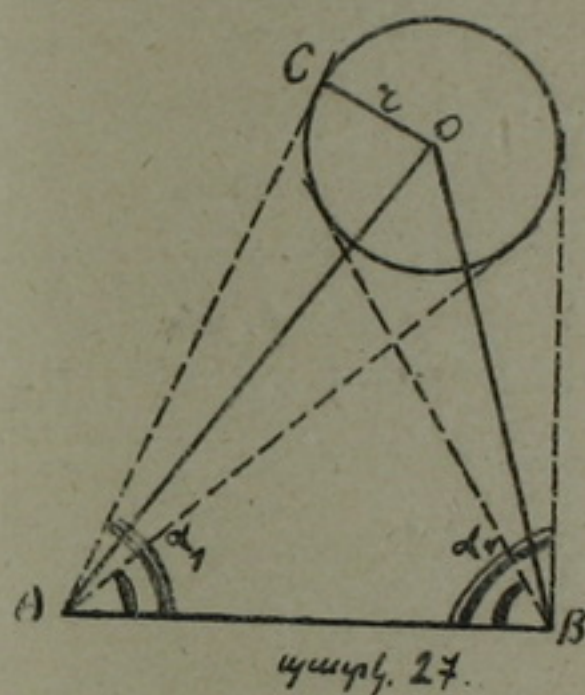
$$\frac{CE}{d} = \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle BEC} \text{ կամ } CE = \frac{d \sin(180^\circ - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Այնպիսիպէզ, $\angle CEM = \angle CBE + \angle BCE = 180^\circ - \alpha_1 + \alpha_2$:

Կառուցանելով $\angle CEM$ -ը EC գրենք EM վորոնելի
ուղղությունը:

Դիմում VII. Վորոշել անճարելի առարկայի հիմ-
քի շառավղի:

Դիցուք χ -ը վորոնելի շառավղն է (պատկ. 27): Ընտրենք
ևս $AB = d$ խորհրդանշան, զոր նրա գագաթներ-



րից տեսանելի լինի շրջանագծի
կենտրոնը՝ հասնած եւթ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
անկյունները. նրանք կազմում են
A-ից յեւ B-ից տարված չորս շո-
շափողներով յեւ խորհրդանշան:
Այնպիսով A յեւ B կենտրոնը տի-
ւացնելով O-ի հեթ՝ կազմենք

$\triangle AOB$, զորի յեւ

$$\angle OAB = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \quad \angle OBA = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2},$$

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}: \text{ այս յեւանկյունից}$$

գրենք եւթ OA -ն՝

$$OA = \frac{d \cdot \sin \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}}.$$

Այնպիսով ACO ուղղանկյուն յեւանկյունից գրենք եւթ

$$OC = OA \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2},$$

զոր տալիս է χ շառավղի հաճար վորոնելի արտահայտու-
թյունը

$$\chi = \frac{d \cdot \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \cdot \sin \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}}:$$

Դնդիրներ

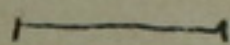
1. Կապառակորդի A բանակի հեռավորությանը K անոցից՝
վորոշելու համար չափեցին խարխուր $KC = 322,55$ սաժ. յեւ
 $\angle AKC = 60^\circ 34'$, $\angle ACK = 56^\circ 10'$: Կաշվել AK հեռավո-
րությունը:
2. Անտղության ինչ անկյաժք է ներկայանում 1 սաժ. յերկա-
րության առարկան այն դիրքորին, վորի աշխ հեռացած է ծի-
ժարից 5 վոքն., իսկ ծյուս ծարից՝ 8 վոքն.:
3. Հետեւ շրջաններ իրար շոշափում են դրսից. նրանց շա-
ռավիղներն են՝ 828, 885, 866, 165. յեւ 898, 85.: Վորոշել
կենտրոնների գ-ձերով կապձւած անկյունները:
4. A հանգուցային կայարանից դուրս են գալիս յերկու գնացի-
ծարդաւար յեւ մայրանխարար. առաջինը գնում է 6 անգամ
արագ-յերկրորդից, նրանց ուղիներն A կայարանից բաժան-
ւում են $51^\circ 42' 4''$ անկյաժք: Դնչ անկյաժք կերեւա ծի ծա-
ծից հետո ծարդաւար գնացիւ մայրանխարարի վրայից:
5. Մշարակից ծի վորոշ հեռավորության վրա գ-տնվող
դիրքոր գրաւ, վոր աշարարակի անկյուննային բարչրու-
թյունն է $22^\circ 20'$: Դսկ յերբ դիրքոր 162 վորնաշափում
ճորեցաւ աշարակին, ապա անկյուննային բարչրությու-
նը դարչաւ $48^\circ 10'$: Դերկու դեպքերում եւ դիրքոր
աշխ յերկրի ծակերեւոյթից հեռացած էր 5,625 վոքն.:
Վորոշել աշարակի բարչրությունը:
6. Ընձարչելի աշարակի SH բարչրությունը վորոշե-
լու համար չափում են նրա H հիժի հետ ծիւղնայն հո-
րիւննակաւ հարթության վրա AB ուղիւ $= 500$ վոքն.

(H-ի ուղղությամբ) յեզ $\angle SAH = 12^\circ 10' 30''$ յեզ $\angle SBH = 25^\circ 30'$: Գտնել աշտարակի բարձրությունը :

7. Ուղիղ գծի տեսքով ունեցող կայծակը տեսանելի էր Ա կետից $43^\circ 36' 10''$ անկյամբ . 17 վայրկյանից հետո լսվեց զորոտը , զորոտը տեղեց $2\frac{1}{3}$ վայրկյան : Վերոշել կայծակի յերկարությունը , յերե հնչյունի արագությունն է $333 \frac{\text{մետր}}{\text{վայրկյ.}}$:

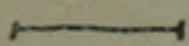
8. $ABCD$ քառանկյան ճեղ A անկյունն ուղիղ է , իսկ կողմերն են $AB = 28$ մ., $BC = 30$ մ., $CD = 32$ մ., $DA = 21$ մ. :

Գտնել անկյունները :

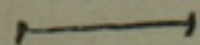


9. $AB = 283$ մ. : Այս ուղիղի ծայրերից հաջապահապահ շարժվում են դեպի C արագորեն կետեր յերկու ծայրերն , զորոնց արագություններն են $3, 4 \frac{\text{մետր}}{\text{վայրկյ.}}$ յեզ $2, 3 \frac{\text{մետր}}{\text{վայրկյ.}}$:

40 վայրկյանից հետո նրանք C կետը հասան : AB ուղիղի նկատմամբ ինչ անկյուններով են թեթևած նրանց ծախսարարները :



10. $41^\circ 7'$ -ի անկյան գագաթից նրա կողմերով հաջապահապահ շարժվում են յերկու կետեր . ճեղն անցնում է 1 վայրկյանում 69 մետրնաչափ , ծյունը 73 մետրնաչափ : Վերոշել , թե ինչ հեռավորություն կունենան իրարից այդ կետերը շարժման սկզբից չորս վայրկյան անց :



11. ABC ուղղանկյուն յեռանկյան տեսքով ունեցող ծի հորաքանի տերը գնեց հարեման հողաբաժինը , զորը նույնպես յեռանկյան յեզ ունի : AC կողմն ընդհանուր է , իսկ AB կողմը կազմում է AB ներքնաչիզի շարունակությունը : Դիտեալով զոր $D = 10^\circ 43' 0'' 9$; $BC = 100$ մետր ,

$CD = 200$ սւտ., գ-րնել ածքող հողաբաժնի ծակերեւը:

12. $ABCD$ քառակուսու անկյունագիծը հասցունծեալ AN ծրարի
գիծը O կէտում. իսկ MD ուղիղը հասցունծեալ AC -ն P կէտում:
Գ-րնել անկյունագիծի OP հասկումը, յետե քառակուսու
կողմն է 100 Տեղր.:

13. ABC յեռանկյան Տեղ քարված է AN ուղիղը՝ զուգա-
հեռ c հիծիին, զորի յերկարությունն է $53,4$ մ. այնուհետեւ
 $A = 50^\circ 25' 25''$ յեւ $B = 62^\circ 40' 50''$: Դժանաւ ղգ՝ զոր ANB
սեղանը կազմում է MCN յեռանկյան $\frac{2}{3}$ ծաւը՝ զորի եւ
սի կէտի դիրքը:

14. Դ-ի քողը. զորը գրնվում է յի քիլոմետր բարձրություն
ունեցող սարի վրա, սարի ստորոտում գ-րնվող յերկու
աշտարակների հեռավորությունը տեսնում է 60° անկյաւ:
Բայր դրաւից, յերկու աշտարակների անկյունային իջում-
ներն են $14^\circ 30'$ յեւ $27^\circ 20'$: Վորողել աշտարակների
ժղի հեռավորությունը:

15. $41\frac{2}{3}$ Տեղր բարձրության աշտարակի վրա պցւմ է յի
չող. աշտարակի հիծի հեղ յիւզնայն հորիզոնական հար-
թությունն վրա գ-րնվող յի կէտից, զորն այդ հիծից $66\frac{2}{3}$ Տե-
ղրի վրա է, չողը յերեւում է 50° տեսողության անկյաւ:
Վորողել չողի բարձրությունը:

16. Երկու դիպողներ տեղ գրավւցին իրարից 100 Տեղր հեռա-
վորության վրա այնպես, զոր Տեղից Տյուսին հասնող տեսողու-
թյան շառագաթը շողափում էր նրանց յիջել գ-րնվող կէտի
աշտարակի հիծի: Առաջին դ-ի քողը տեսնում է աշտարակի

հիմք $10^{\circ}25'$ անկյաճ, յերկրորդը՝ $7^{\circ}30'$ անկյաճ: Գտնել
աշխարհակի հիմքի շառավիղը:

17. $\angle B$ ի ափսյ, վորի բարչրությունն է 150 ֆեդր, յերեւոճ է
աճալը յեւ նրա y ուլէ զրի ճեղ, առաջնի անկյունային բարչրու
թյունն է 15° , իսկ յերկրորդի անկյունային իզուճէ 45° : Դնել
բարչրության վրա է գ-տնելուճ աճալը:

18. Գտնել վրա դեպի հյուսիս ընթացող շոգեւաւի վրայից
յերկու զանգակաւորների կարարները յերեւոճ են ծի ուղիղ
գ-տնել արեւմտյան ուղղությամբ: Թի Ժամից հետո հեռաւոր
զանգակաւորները յերեւոճ է հարաւ-արեւմտյան ուղղությամբ,
իսկ ճերջաւորը՝ հարաւային հարաւ-արեւմտյան ուղղու
թյամբ: Գտնել շոգեւաւի արագությունը, յետեւ զանգակա
ւորների հեռաւորությունն իրարից 8 փիլոճեւոր է:

19. $\angle B$ ի AB յերկարությունը հաշվելու հաճար նրա
ափին չափեցին $AC = 100$ սաւ., $CB = 110$ սաւ., այլ յեւ
 $\angle ACB = 48^{\circ}$: Գտնել AB -ն:

20. Մանկանաւով գտնել A կեդրի յեւ B կեդրի ծրել յեղաճ
հեռաւորությունը՝ դիտողն ընտրեց իբրեւ խարիսի $AB =$
 $= 200$ ֆեդր, AE քն ուղղահայաց ուղղությամբ, ապա չափեց
ծի այլ խարիսի $AC = 178$ ֆեդր, վորը կազմոճ է $27^{\circ}50'$
անկյուն առ ազին խարիսիի հետ: Դճանաւով՝ վոր C -ն
գտնելուճ է BE -ի վրա՝ գտնել AE -ն:

21. AB պալի յերկարությունը վորոշելու հաճար դիտող
ըլ տեղաւորվեց նրա ծի Ժայրից դեպի հարաւ, ապա
Ելու Ժայրից դեպի արեւմտայի, յեւ պալը յերկու դեպ.
քմոճ էլ նրան ներկայացաւ 30° -ի անկյաճ. հեռաւորու

թյունը դիտողության կետերի միջև 100 մետր է: Վորտեն և
պարի յերկարությունը:

22. Պիլայի թե՛ աշտարակի ծոց հրապարակած կառու-
յանում են ծի ածթիոն աշտարակը նկարել ցանկացող
ծի գեղարվեստագետի համար: Եթե ծի թափությունն է
2 մետր, իսկ նրա հիմքի յե՛ գեղե՛ ծառ հեն աճությունն
նեթն աշտարակի ծայրից՝ համապատասխանաբար հաճախար
են 15 մետրի յե՛ 14 մետրի: Է՛րտեղ դե՛ և կառույա-
նել ածթիոնը, որպեսզի նրանից աշտարակը յերե՛
45° անկյա՛ծ:

23. Վորտել A յե՛ B անձարչելի կետերի հեն աճությունն
իրարից, յեթե իսարիսը՝ $CD = 2000$ մետր., $\angle ACD = 96^\circ 40'$,
 $\angle BCD = 52^\circ 40'$, $\angle ADC = 57^\circ 1'$ յե՛ $\angle BDC = 87^\circ 15'$:

24. Յերկու սարերի գագաթները գտնվում են դիտողի
հե՛ր մասին ծի ուղղա՛ց, հարթության վրա. նրանց անկյու-
նային թափություններն են $9^\circ 30'$ յե՛ $18^\circ 10'$: Յեթե դի-
տողը, ծառն ընդ նույն ուղղա՛ց հարթության մե՛ ծոցենա
հորիզոնական ուղղությամբ 6365 մետր, ապա յերկու սա-
րերի անկյունային թափությունները կը հաճախարեն՝
 $\alpha = 37^\circ$: Վորտել յուրա՛խն յոր սարի թափությունն է:

25. Յերե՛ հե՛յալ զորածասեր րեղա՛րկն ածրոյի
շորը A, B, C կետերում, զորոնք չեն գտնվում ծի ուղիղի վրա:
Ենազին զորածասը գտնվում է յերրորդից 4343 սա՛. հե-
ն աճության վրա յե՛ րենում է ածրոյը $\alpha = 15^\circ 22' 12''$.
անկյա՛ծ AB ուղղության հե՛: Յերրորդը հենա՛ և
յերկրորդից 5616 սա՛. յե՛ րենում է ածրոյը $\beta = 58^\circ 6' 30''$

անկյան կիսողի ուղղությամբ: Քանի որ պետք է կարող եմ
առաջին զորածառը հասնել ամբողջի 7-ներին, յետևաբար,
վր $v = 204,8 \frac{\text{մարտ.}}{\text{վայրկ.}}$ արագությամբ.



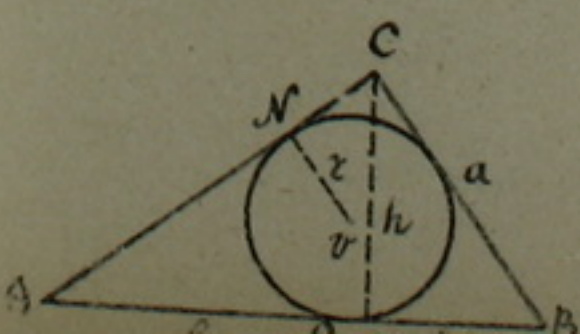
Գլուխ X. Ուղղանկյուն յեռանկյունների լուծման առանցիկա-
հայրույթ գծապետք:

52. „Առանցիկահայրույթ գծապետք“ ասելով՝ հասկացվում են այն
դիագրամներ, զորոնց սրվածների մեջ կան վրայից ծրայից գլխավոր
սրածներ, այլ յեղ ռեանդ-ակներ, ինչպես որինակ՝ բարչրու-
թյուններ, կիսողներ, ծիզնագ-ներ, կողմերի առաջագոյություն-
ներն իրար վրա, ներգ-ճյալ յեղ արագ-ճյալ շրջանների շառա-
վիղներ յեղ այլն: Բայցի դրանից առանցիկահայրույթ գծապետքն
են վերաբերում նայել այն դիագրամներ, զորոնց սրվածները
թեպետ յեղ յեռանկյան գլխավոր սրածներն են ծրայից, ակապի
յեղ այնպես վրայ առանցին առանցին, այլ իրար հետք զու-
գորդ-ված:

53. Ընտելի հետքեղյալ նշանակու ծառեր. „հ“ - ուղիղ ան-
կյան գագաթից ներքեացի վրա իզեցրած բարչրություն.
„K“ յեղ „Ը“ — „a“ յեղ „b“ կողմերի առաջագոյությունները
ներքեացի վրա (ներքեացի հարվածներ, զորոնք առաջա-
նում են սրանեղ „հ“ բարչրությունը). „R“ յեղ „Է“ — արագ-
գ-ճյալ յեղ ներգ-ճյալ շրջանների շառավիղներ:

Մասերի վրա գեղած են՝ $h = CA$, $K = AB$, $C = AC$,

$AO = OB = R$ յեղ $ON = r$:



54. „Առանցիկահայրույթ գծապետք“ շար-
քը լուծվում են յեղ արդեն հայրենի առեր-

Հոսթյունների ծրագրով: Առաջին հերթին պետք է նշանակել այդպիսի
դեպքերով:

Աղյուսակների առաջին խումբը.

- | | |
|----------------|-------------------------|
| 1. a, h | 13. $a+b, a+c$ |
| 2. b, h | 14. $c, A-B$ |
| 3. h, h | 15. $a, A-B$ |
| 4. c, h | 16. $b, A-B$ |
| 5. $a+h, a-h$ | 17. $A \text{ և } B, R$ |
| 6. $b+h, b-h$ | 18. $A \text{ և } B, F$ |
| 7. $a+h, a-h$ | 19. $2p, z$ |
| 8. $b+c, b-c$ | 20. $2p, F$ |
| 9. $c+a, c-a$ | 21. $A \text{ և } B, z$ |
| 10. $h+h, h-h$ | 22. $p-a, z$ |
| 11. $c+h, c-h$ | 23. $p-b, z$ |
| 12. $a+b, a-b$ | 24. $a+b, F$. յեղ ալի. |

Աղյուսակների յերկրորդ խումբը.

- | | |
|-----------|--------------|
| 1. h, c | 6. h, z |
| 2. c, h | 7. $h, 2p$ |
| 3. c, F | 8. F, z |
| 4. h, F | 9. $F, p-c$ |
| 5. h, R | 10. $F, c+h$ |
- յեղ ալի

Յեղրորդ. խճուճ նշանակման բոլոր դեպքերը կարելի է
լինի մեկ առաջինին, զորի լուծումը հետեւյալն է:

Արիւակ 1

"a" յեւ "b" եզերի առաջագոյությունները հաճախարարաւ
նախար հաճախար են 10 սմ. յեւ 5 սմ.: լուծել յեռանկյունը:

Լուծում.

Մարկերից դեղար չէ նկատել, զոր

$$1) k + l = c,$$

$$2) k \cdot l = h^2:$$

Անշար-րելով "k"-ի յեւ "l"-ի քովալ նշանակությունները
գտնուծ ենք

$$c = 25 \text{ սմ.}, h = 10 \text{ սմ.} \text{ ապա}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{l}{h}, \operatorname{ctg} B = \frac{k}{h},$$

$$a = \sqrt{h^2 + k^2}, b = \sqrt{h^2 + l^2}.$$

Կարարելով հաշուութիւրը գտնուծ ենք

$$A = 63^\circ 26' 6'', B = 26^\circ 33' 54'', a = 10\sqrt{5} \text{ սմ.}$$

$$b = 5\sqrt{5} \text{ սմ.}$$

55. Այժմ արարաժենք յերկու բանաչեղեր, զորոնց կիրառու
թյան շրջանը բաժանուծ ընդարչակն է:

56. Եզերի բանաչեղը. յերեւ $a > b$, ապա

$$a \pm b = c\sqrt{2} \sin(A \pm 45^\circ):$$

"յա բանաչեղն արանալու հաճար ոգրդենք 16-րդ պար-
կերից (յերեւ) : ABD յեռանկյունից արեւանների բա-
նաչեղի հաճաչայն ունինք

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle ADB};$$

Եւ այն չեղով AKB յեռանկյունից գտնուեալ

$$\frac{KB}{AB} = \frac{\sin \angle KAB}{\sin \angle AKB}$$

Ըստ նույն ժամանակ անկյուններ յեղ կողմերի տեղ փոխելով
իրենց արժեքները, զոր գտնուեալ անցյալներու, կար-
նաւոր յերկու կարեւոր բանաձեւեր.

$$I) \frac{a+b}{c} = \frac{\sin(A + \frac{C}{2})}{\sin \frac{C}{2}},$$

$$II) \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}:$$

Եւ բանաձեւերն արտաբերուեալ են շեղանկյուն յեռանկյան
համար: Այժմ յենթադրենք, զոր $C = 90^\circ$, այն ժամանակ
 $A + \frac{C}{2} = A + 45^\circ$, $\frac{A-B}{2} = A - 45^\circ$, $\sin \frac{C}{2} = \cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

այս արժեքները դնելով (I) եւ (II) բանաձեւերի յետո՛ւ կար-
նաւոր

$$\frac{a+b}{c} = \sqrt{2} \sin(A + 45^\circ), \quad \frac{a-b}{c} = \sqrt{2} \sin(A - 45^\circ)$$

յեղ կամ, յետո՛ւ ծրարեն գրենք,

$$29) a \pm b = c \sqrt{2} \sin(A \pm 45^\circ):$$

57. Եղերի բանաձեւը կիրառուած է հետեւյալ տիպիաների
դեպքում.

1. $a+b, c$

2. $a-b, c$

3. $a+b, A$ կամ B

4. $a-b, A$ կամ B

5. a^2-b^2, c

6. a^2-b^2, A կամ B

7. $k+h, A$ կամ B

8. $k-h, A$ կամ B

9. $c+h, A$ կամ B

10. $c-h, A$ կամ B

11. $k+h, a$

12. $k-h, a$

13. $c+h, b$

14. $c-h, b$

15. $2p, c$

16. $2p, R$

17. $2p, A$ կամ B

18. R, r յեղ այլն.

Արիւնակ II

II քաղաք-ճյալ յեւ ներք-ճյալ շրջանների շառավիղները հա-
մասար են 105. յեւ 45. : Լուծել ուշանկյուն յեռանկյունը :

Լուծում.

Ենթ-ուեւելով $R = 10$, $r = 4$, անթղապես գտնուծ ենք

$$c = 2R, \quad p - c = r, \quad \text{զորտեւից}$$

$$p = 2R + r, \quad 2p = 4R + 2r,$$

$$2p - c = 2R + 2r, \quad 2p - c = a + b :$$

II յստիւով գտնւեք „ $a + b$ “-ն յեւ „ c “-ն : Կիրառենք Իզերի
բանաչեւը՝

$$2(R + r) = 2R \sqrt{2} \sin(A + 45^\circ),$$

յեւ Ի Վերքո

$$\sin(A + 45^\circ) = \frac{R + r}{R \sqrt{2}} :$$

Անդադ-րեւելով արժեւելեք՝ Կստանաւեք .

$$\sin(A + 45^\circ) = 0,7 \sqrt{2}.$$

Հաշուելով՝ գտնուծ ենք

$$A + 45^\circ = 81^\circ 52' 15''$$

$$A = 36^\circ 52' 15'' \quad *)$$

Ի հանաւելով „ $a + b$ “-ն յեւ c -ն, դժուար չէ գտնել a -ն յեւ b -ն :

*) Եթե A -ն պէտք է նշանակի ձեռնանկյունը, ապա $A + 45^\circ > 90^\circ$ յեւ
ձեռն պէտք է վերջնէն վոչ թե $A + 45^\circ = 81^\circ 52' 15''$ լուծուծ, այլ
հաւելելու $A + 45^\circ = 98^\circ 7' 45''$. այն ժամանակ $A = 53^\circ 7' 45''$:

Դրո՛ւ

$$a+b=28, (a+b)^2=28^2,$$

$$2ab=28^2-c^2, ab=192. \quad \text{Հանելով}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b=28 \\ ab=192 \end{array} \right\}, \quad \text{գործում ենք}$$

$$a=12, b=16:$$

58. Գտնուսի բանաչեղերը.

$$30) \quad \frac{c+a}{b} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2}, \quad \frac{c-a}{b} = \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

§ 56-ի I և II բանաչեղերը, ինչպես կարելի է նկատել, համապատասխանում են a -ի, b -ի և c -ի նկարագրի. այդ պատճառով նրանք կարող են այսպես գրվել.

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\sin(C+\frac{B}{2})}{\sin \frac{B}{2}}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{B}{2}}:$$

Ընդհանելով այժմ $C=90^\circ$, գործում ենք

$$\sin(C+\frac{B}{2}) = \cos \frac{B}{2}, \quad \sin \frac{C-A}{2} = \sin \frac{B}{2}$$

$$\text{և՛} \quad \frac{c+a}{b} = \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}},$$

Վերոնկարի անժողովայն կադանանք վերոնելի բանաչեղերը:

59. Գտնուսի բանաչեղերը կիրառվում են հետևյալ տրվածների դեպքում.

1. $c+a$, A կամ B

5. $a+h$, A կամ B

9. $b+h$, A կամ B

2. $c-a$, A կամ B

6. $a-h$, A կամ B

10. $b-h$, A կամ B

3. $c+a$, b

7. $a+h$, K

11. $b+h$, C

4. $c-a$, b

8. $a-h$, K

12. $b-h$, C

13. $a + \kappa$, A կամ B

17. $a + \kappa$, h

21. $2p$, a

14. $a - \kappa$, A կամ B

18. $a - \kappa$, h

22. $2p$, b

15. $b + c$, A կամ B

19. $b + c$, h

23. $p - a$, a

16. $b - c$, A կամ B

20. $b - c$, h

յեղ ալի.

Որի նախ III

Հիմնել ուղղանկյուն յեռանկյունը, յեթե եզերից ձևն է 85° ,
իսկ կրկանաբազ-ը յեղ նույն եզր պարբերությունն է 85° :

Հեռմ.

դնելով $a = 8$, $p - a = 4$, գրեմք եւթ

$$p = 12, 2p = 24, c + b = 2p - a = 16.$$

Դժանանով „ $c + a$ “-ն յեղ „ a “-ն կարելի է կրկնել q -ա-
մասի բանաչեղ: Ունիւթ

$$\frac{c + b}{a} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2}, \quad \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 2$$

$$A = 53^\circ 7' 46'' 26:$$

Հիմնել շարունակությունը չորս իր դժգոհությունն չի ներ-
կայանում: Ունիւթ.

$$\frac{a}{c} = \sin A, \quad \lg c = \lg a - \lg \sin A, \quad \lg c = 1, \quad c = 105,$$

այնուհետեւ

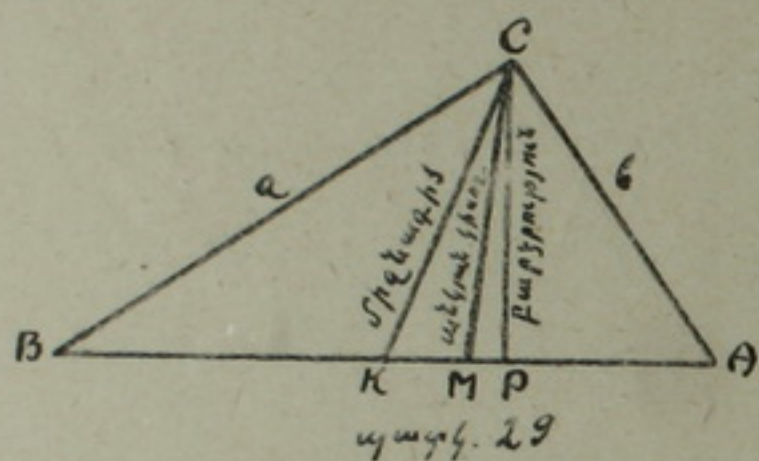
$$b = 2p - a - c, \quad b = 65:$$

Գլուխ XI. Պրեդանկյուն յեռանկյուն հիմնական առանցքա-
կայուն դեպքեր.

60. Բացի նախկին նշանակումներից՝ ճշգրիտ նայել հե-
տեւյալները.

h_a, h_b, h_c - բարձրությունները, m_a, m_b, m_c - կոշտերի

տարած ժրգագները. $\beta_A, \beta_B, \beta_C$ - անկյունների կիսողները.
 τ_a, τ_b, τ_c - կողմերին շոշափող առգծյալ շրջանների շա-
 րավորները. R, r - ասիւն 6 կողմե-
 րի առաջագործությունները C -ի վրա.



և յեւ v - C անկյան կիսողով C կող-
 մի վրա առաջացած հարկածները:
 Պարզեցրի վրա նշանակեմք եւ
 $AP = \ell, PB = \kappa, AM = v, MB = u$.

61. Քեղանկյուն յեռանկյան դեպքերից շարքերը կարելի է
 վերաձել հիմնական դեպքերին: Կարգեա եւ հետեւյալ յե-
 րեք խմբերը:

I. Դեպքեր, զորոնց մէջ կիրառւում է սիւնաների թե-
 ւրեման.

1. A, B, R

2. a, b, R

3. c, R, A

4. c, R, a

5. $a \pm b, A, R$

6. $c, R, A - B$

7. $a^2 \pm b^2, A, R$

8. R, A, h_c

9. R, a, h_c

10. R, κ, A կամ B

11. R, ℓ, A կամ B

12. R, κ, a կամ b

13. R, κ, h_c

14. R, ℓ, a կամ b

15. $R, a, A - B$

16. R, ab, A

17. A, B, ab

18. ab, A, h_c

II. Պետք է ցույց տալ, որ հետևյալ հարաբերակարգերը լուծելի են:

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| 1. a, b, h_c | 12. a, h_c, β_c |
| 2. $C, m_c, a \text{ կամ } b$ | 13. κ, h_c, β_c |
| 3. a, u, β_c | 14. A, h_c, β_c |
| 4. b, v, A | 15. C, h_c, β_c |
| 5. A, B, β_c | 16. κ, u, B |
| 6. a, B, β_c | 17. $h_c, u, A-B$ |
| 7. u, B, β_c | 18. $a, \beta_c, A-B$ |
| 8. $a, \kappa, \angle(a, m_c)$ | 19. $\beta_c, u, A-B$ |
| 9. a, h_a, h_c | 20. $\kappa, \beta_c, A-B$ |
| 10. m_c, κ, B | 21. $a, u, A-B$ |
| 11. C, m_c, F | |

յեղ ալ ունի

Պարզաբանություն. h_c բարձրությունը լինի β_c կիսադիագրի կազմում
անկյունը որը հանդիսանում է $\frac{A-B}{2}$.

Երևի (պատկ. 29)

$$\angle MCP = \angle BCP - \angle BCM,$$

$$\angle(h_c, \beta_c) = (90^\circ - B) - \frac{C}{2};$$

$$\text{Վերադառնալով } \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}, \text{ ապա } 90^\circ - B - \frac{C}{2} =$$

$$= 90^\circ - B - 90^\circ + \frac{A+B}{2} = \frac{A+B}{2} - B \text{ յեղ}$$

$$31) \angle(h_c, \beta_c) = \frac{A-B}{2}:$$

Այսինպես առընթերցան իրողով հեշտ է լուծել
և 12 - 21 դեպքերը:

III. Դնւոյքեր, զորոնք հրճւած են ACE ունեցաւ յեռան

կյան լուծանք վրա

62. ABC յեռանկյան ձգ (պարզ. 30) ցանկեւթ իջնագիծ՝

$m_c = CK$ յեւ շարունակեւթ $KE =$

$= CK$ հեռաւորութեամբ, այն ժամանակ

նաւ AB յեւ CE յերկու ուղիղներ

էն կիսւելն, զորո պարագայում էր յիշ

կարող են ընդունել զորոյն ACE

չուր-ահեռաց-ի անկյունագիծը: -

II յիշ ACE յեռանկյան ձգ ունիք:

$AC = b$, $AE = a$, $CE = 2m_c$, $\angle CAE = A + B$,

$CT = h_a$, $EL = h_c$:

1. C, m_c, a և b

2. a, h_c, m_c

3. C, m_c, h_a

4. a, m_c, h_a

5. $a, h_a, \angle(a, m_c)$

6. a, b, m_c

7. $a, b, \angle(a, m_c)$

8. $a, m_c, \angle(b, m_c)$

9. $a, \angle(a, m_c), \angle(b, m_c)$

10. $m_c, \angle(a, m_c), \angle(b, m_c)$

11. $b, h_a, \angle(a, m_c)$

12. $h_a, \angle(a, m_c), \angle(b, m_c)$

13. $h_a, \angle(a, m_c), \angle(C, m_c)$

14. $h_a, m_c, \angle(b, m_c)$

15. h_a, h_c, m_c

յէն այն.

63. II յն դնւոյքերում, յորք յեռանկյունների լուծումը հրճուան

բանաչեւթի (սինուսների, ցանգեւնների, պարագծերի բանաչեւթի)

ոգնութեամբ դիւար կամ շար յերկար ե ինում, ոգնակար ե

իմանալ յեւ կիրառել այն առընթերցուններ յեռանկյան զն-

նաւան ցարրերի իջեւ: II յն առընթերցուններից կարեւոր

անկներն արտաւելն արծ:

64. Իրականության բանաձևերը. Այս բանաձևերը արդեն
արքայաճան էն § 56-ում, այսինքն ինքն իր ցույց էրաւոր
անալիզին իր ցարքեր կերպարանք:

Անալ ռեւերիք

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin(A+\frac{C}{2})}{\sin \frac{C}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Այսինքն ինքն իր $\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$, ուրիշ

$$A + \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{A-B}{2}, \text{ ինքն իր ցույց էրաւորանք}$$

$$32) \begin{cases} \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \\ \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \end{cases}$$

Այս բանաձևերը գտնու են գերման ճարտարագիտական
արքայաճան Իրականության (1808):

Այսինքն իր ցույց էրաւորանք և արքայաճան էրաւորանք, Գաւառ, արքայաճան
էրաւորանք բանաձևերը:

65. Բարձրագույնների բանաձևերը. Գրեւոր են h_c -ի, R -ի
և A -ի, B -ի, C -ի իրական յաղակ կարգերը:

BCM յաղակ յաղակ (արքայ. 31)

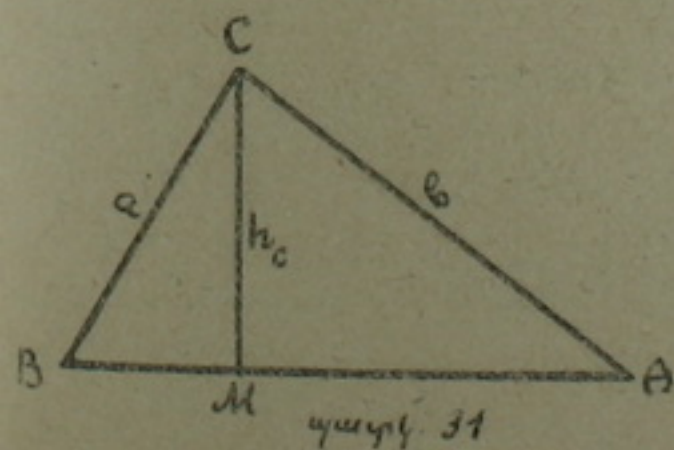
Գրեւոր ենք

$$h_c = a \sin B$$

Բայց իրական էրաւորանք $a = 2R \sin A$, այսինքն

$$h_c = 2R \sin A \cdot \sin B.$$

Այսինքն ինքն իր ցույց էրաւորանք և արքայաճան էրաւորանք
էրաւորանք —



$$33) \quad \begin{cases} h_a = 2R \sin B \sin C, \\ h_b = 2R \sin A \sin C, \\ h_c = 2R \sin A \sin B. \end{cases}$$

66. Բարձրությունների թեորեմը. Անկյունի յեռանկյան
ձեռք կողմերը հակադարձ համեմատական են համապատ-
ասխան բարձրություններին:

Ոգտվելով յեռանկյան ծակերտի արտահայտությամբ՝
կարանանք

$$a h_a = b h_b, \quad \text{կորկերից}$$

$$a : b = h_b : h_a \quad \text{կամ}$$

$$a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}.$$

Անլնպես յեռ

$$b : c = \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Երանքն գրելով յերկու համեմատությունները՝ կարանանք

$$34) \quad a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} :$$

67. Հերոնի բանաձեռը. Երի պարզ կախմծ յեռ պեռի
ունի h_c, a, b, R ձևությունների ծրղեռ: Ունիք

$\frac{a}{\sin A} = 2R$. քայք ACM յեռանկյունից (պարկ. 31) գտնմծ
ելեք $\sin A = \frac{h_c}{b}$, ուպի

$$\frac{ab}{h_c} = 2R.$$

Բարձրառ կողքերնեք շրղանալին փոխանակություններն ձե-

թողով, յետ ԿԸ նկատելով, զոր $\frac{ab}{h_c}$, $\frac{bc}{h_a}$, $\frac{ac}{h_b}$ համարե-
րությունները յուրաքանչյուրը հասարակուն թեթևություն
է, հազաւար $2R$ -ի: Այսպէս ուրեմն

$$35) \frac{a \cdot b}{h_c} = \frac{a \cdot c}{h_b} = \frac{b \cdot c}{h_a} = 2R$$

68. Կերտնի բաժանելից գտնուծ եւի

$$h_c = \frac{ab}{2R}$$

Այս հազաւարություն յերկու ծաւերը բաշխաւարելով
C-ով յետ նկատելով զոր $CH_c = 2F$, ծակերեւի հաճար
գտնուծ եւի հերեւյալ զոր բաժանելիք.

$$F = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

69. Կորանգեւաների թեորեմը. Դարագետի բաժա-
նելերն արտաձելիս ունեւի

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \text{ և } r = (p-a) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$$

Այս հազաւարությունը կարելի է գրել այսպէս.

$$r = \frac{p-a}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}$$

Ոգրվելով շրջանային փոխանակության թեորեմի
կարանաւի

$$\frac{p-a}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = \frac{p-b}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}} = \frac{p-c}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = r$$

70. Զաւրեթացից ԿԸ գտնելի

$$\frac{p-a}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = r, \quad \frac{p-b}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}} = r, \quad \frac{p-c}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = r.$$

Անդամ առ անդամ բազմապատկելով բոլոր յերևի համասարու-
թյունները.

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = r^3.$$

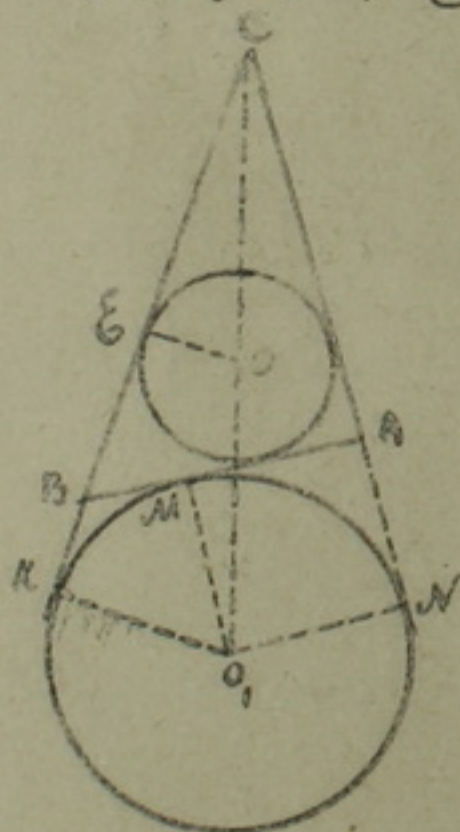
Կամ, իմանալով՝ զոր $F = pr$ յեւ հեղինակայեա, $F^3 = r^3 r^3$

$$\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = F^3:$$

Բայց $p(p-a)(p-b)(p-c) = F^2$, ուստի անհրաժեշտ արտադա-
րութիւնը կարելի է կրճատել F^2 -ով յեւ այն ժամանակ

$$38) F = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}:$$

11. Քանակները թէոքեմ. Պրոյեկտիւ O_1 -ը նշանակուած
է C կողմը շոշափող առգծյալ շրջանի կենտրոնը (պատկ. 32):



պատկ. 32

Այն ժամանակ $OE = r$, $O_1K = r_c$:

OEC յեւ O_1KC նման յեռանկյուններ
բոլոր գտնուած են

$$\frac{O_1K}{OE} = \frac{CK}{CE} \quad \text{կամ} \quad \frac{r_c}{r} = \frac{CK}{p-c}:$$

Գտնելով CK շոշափողի թեթեւութիւնը:
Ունիմք

$$CK = CN \quad \text{յեւ}$$

$$CK = a + BM, \quad CN = b + MA.$$

Անդամ առ անդամ գումարելով յեւ նկատելով՝ զոր
 $BM + MA = c$, գտնուած են

$$2CK = a + b + c$$

$$39) \quad CK = p.$$

ՍՅԺՏ $\frac{\chi_c}{\tau} = \frac{p}{p-c}$, Վերջերի

$\chi_c(p-c) = p\tau$ ևս

$\chi_c(p-c) = F$.

Ճիշդ նույնպես

$\chi_a(p-a) = F$, $\chi_c(p-b) = F$ յեղի վերջո

40) $\chi_a(p-a) = \chi_c(p-b) = \chi_c(p-c) = F$:

72. Սրբազան բանաչեղերը կարող են լսնայել յեռանկ
կյան լուծման համար հեղեղյալ ցվալներին դայքմծ.

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| 1. $a \pm b, A, B$ | 18. $p-c, \tau, A-C$ |
| 2. $a \pm b, A, C$ | 19. τ, A, B |
| 3. $a \pm b, c, C$ | 20. c, τ, A |
| 4. $a \pm b, c, A-B$ | 21. c, τ, C |
| 5. $c, C, A-B$ | 22. $a+b, \tau, C$ |
| 6. c, C, a^2-b^2 | 23. C, τ, F |
| 7. A, B, a^2-b^2 | 24. c, R, τ |
| 8. $p-a, p-b, C$ | 25. c, τ, F |
| 9. $p-b, p-c, R$ | 26. $2p, A, B$ |
| 10. A, h_a, h_b | 27. $2p, \tau, a$ |
| 11. h_a, h_b, h_c | 28. $2p, \tau, C$ |
| 12. $p-a, A, B$ | 29. $2p, A, B$ |
| 13. $p-a, p-b, A$ | 30. $2p, a, F$ |
| 14. $p, p-a, \tau$ | 31. τ, τ_a, A |
| 15. $p, p-a, A$ | 32. τ_a, τ_c, A |
| 16. $p-a, B, \tau$ | 33. c, τ_c, F |
| 17. $p-a, \tau, F$ | |

յեղ ալն.

Մաթեմատիկայի լուծույթներ

I Տասն խնդիրներ

V գլխին վերաբերող (յերես 40)

- 1) 9,0076 Տեպր. 2) 13,5716 Տեպր. 3) վոլ. 4) 26,864 վոլ. 5) $26^{\circ}32'54''$ 3. 6) $50^{\circ}45'10''$
 7) 74,314 սմ. 8) $48^{\circ}38'25''$. 9) $V = 36,7875 \frac{\text{մլ}}{\text{ժամ}}$ 7 $V = 15,7072 \frac{\text{մլ}}{\text{ժամ}}$
 10) հեմոգլոբին 961,525 Տեպր., վոլյում - 274,72 Տեպր.; 11) 14,114 մլ.
 12) 56,7127 Տեպր. 16) 304,727 Տեպր. 13) 2 Տեպր. 14) 132° անկյա՞ծ արի հեպ
 15) 60,2914 սմ. 17) 8207,5 մլ. 18) $73^{\circ}39'21''$. 19) 10րոպե 45 վոլ.
 20) յերես B-ն գագաթի անկյունն է, ապա $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{n-1}$; $B = 60^{\circ}$; յերբ
 $n = 3$, յեւ $B = 38^{\circ}56'33''$, 4, յերբ $n = 4$:

IX գլխին վերաբերող (յերես 78)

- 1) 300 սմ. 2) 60° . 3) 56° ; 60° ; 64° . 4) 120° 5) 110,88 վոլ.
 6) 196,57 վոլ. 7) 455,09 վոլ. 8) $C = 68^{\circ}39'2''$. 9) խնդիրն
 անհնարին է. 10) 200 Տեպր.աչափ. 11) 23,57 Տեպր. 12) 5380,37 ֆառ. սմ.
 13) $MC = \frac{c \sin B}{\sin C} \sqrt{0,6} = 47,678$. 14) 3463,7 Տեպր. 15) 1,361 Տեպր. 16) 3,8128 Տեպր.
 17) $150\sqrt{3}$ Տեպր. 18) 13 մլ. 657,5 Տեպր. 19) 85,902 սմ. 20) 390,25 Տեպր.
 21) ABCD-ն հարկաւորակող՝ սեղան է. ձախ AC և BD կողմերի շարունակութիւնն -
 ներք հարկում էն E կետում ուղիղ անկյա՞ծ. $AB = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57,735$ սմ.
 22) 5,9826 Տեպր. 23) 2656 վոլ. 24) 1369,2 Տեպր յեւ 3699,6 Տեպր.
 25) 28 րոպե.

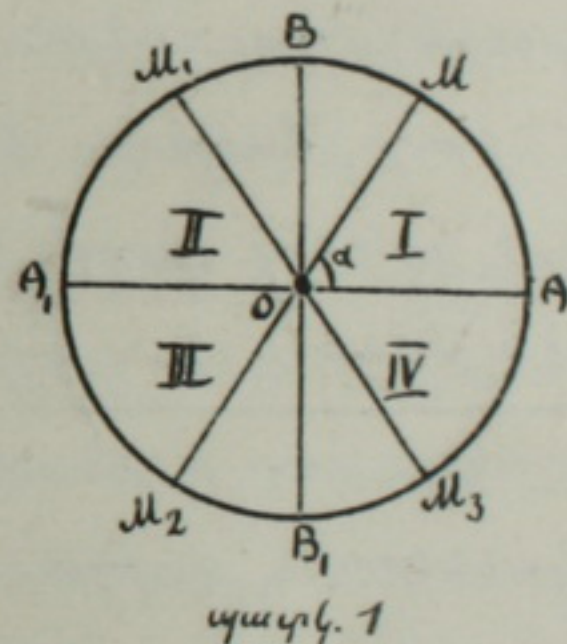


Հասան յերկրորդ

Գլուխ I. Անկյունների յեղ գծերի չափումը.

1. Անկյունների փոփոխման սահմանները. „Ուղղագիծ յեռանկյունաչափության“ ձեղ ձևեր գործ ունենի 180° -ը չանցնող անկյունների հետ, բայց փոփոխման յերկրաչափությունը յերբեմն դիպում է 180° -ից յեղ նույնիսկ 360° -ից ձեռ անկյուններ: Այսպես, որինակ, կանոնադոր ունկյան ներքին անկյունների գումարի բանաձևը՝ $2d(n-2)$ ցույց է 360° -ից ձեռ անկյուններ, յերե n -ը բազմականաչափ ձեռ է: Այդ դեպքում, սակայն, չի առնում, յե ինչպես պետք է ձեղ պարկերայնեղ աշխարհանկյուններ: Մյուս կողմից, յերե անկյունները չափեղ աղեղներով, հիմնելով այն յեորեղի վրա, վոր „կենտրոնական անկյունը համեմարակա է իրեն համապարասրանող աղեղին“, ապա անկյան առժանը չի կարելի սահման դնել: Երոք, դիցուք α -ն

ՈՕԱ կենտրոնական անկյունն է, վորը չափում է ՈՕԱ աղեղով (պարկ. 1): Դիցուք ՕԱ կողմն անշարք է յեղ ճյուղ կողմն ՕԱ, պարկում է Օ կետի շուրջը Գեպի վեր, ընդունելով հետեղյալ հաշորդական դիրքերը՝ ՕԲ, ՕԱ, ՕԱ, ՕԱ, ՕԲ, ՕԱ,



ՕԱ, ՕԱ յեղ այլն: ՕԱ շարժական կողմի դիրքի փոփոխմամբ կը փոփոխվի նայել α անկյան ձեռությունը. այսպես, $\angle \text{ՈՕԱ} = \alpha$, $\angle \text{ՈՕԲ} = 90^\circ$, $\angle \text{ՈՕԱ}_1 = 180^\circ - \alpha$, $\angle \text{ՈՕԱ}_2 = 180^\circ$, $\angle \text{ՈՕԱ}_3 = 180^\circ + \alpha$, $\angle \text{ՈՕԲ}_1 = 270^\circ$, $\angle \text{ՈՕԱ}_3 = 360^\circ - \alpha$, $\angle \text{ՈՕԱ} = 360^\circ$, $\angle \text{ՈՕԱ} = 360^\circ + \alpha$ յեղ այլն. յերե շարունակեղ ՕԱ կողմն պարկել, անկյունները պարկերի վրա կը հաճընկեն առաղ գրամ անկյունների հետ, յինկ ըստ ձեռության, նրանցից ձեռ կը լինեն 360° -ով:

Հետագա պարզման ընթացքում ՕԱ կողմ կարող է գնել 2, 3, ... ու
լրիվ շրջանագծեր, իսկ ինչ n -ը կաճաճոր թեթևության ամբողջ
թիվ է. այդ ժամանակ աշեղները կաճեն, հետեւապես կաճեն նայել
ներանցող չափերի անկյունները: Այսպես ուրեմն, անկյունները կա-
րող են փոփոխվել զերոյից մինչեւ անվերջություն:

2. Դրաք ուղղահայան յերկու պրամագծեր ընդունված է կոչել
լճորթ: Առկորարար իբրեւ լճորդ պրամագծեր ընդունում են
հորիզոնականը՝ AA_1 , յեւ ուղղաձիգը՝ BB_1 (պարհ. 1): Այս պրամա-
գծերը շրջանագծից յեւ շրջանը բաժանում են 4 համասար ծաւե-
րի, զորում է կոչվում են փառորդներ: ՕԱ շարժական կողմի դիր-
քի համեմատ առնւում են, իսկ անկյունը գործում է այս կամ այն
փառորդում: Փառորդների հաջորդական կարգը ցույց է տրված
պարհերի վրայ: Այն անկյունները, զորում կողմերը նայեն են,
կամ իրար համասար են կամ իրարից տարբերվում են շրջանա-
գծերի ամբողջ թվով:

3. Անկյունների շառավղային չափումը. Բայցի սովորական յե-
ղանակից, ըստ զորի անկյունները չափում ենք աշեղնային մի-
ություններով, այսինքն արտահայտում ենք ապրիթաններով, րո-
պեններով, վայրկյաններով յեւ սրանց ծաւերով, կա մի այլ
յեղանակ յեւ, զորը հնարաւորություն է տալիս անկյունները
չափելու ուղիղ գծերով յեւ, ծանաւորապես, արտահայտել
ներանց թեթևությունները շառավղի ծաւերով: Զարման իսկ յեղա-
նակի խոշոր առավելությունը նրանում է, զոր կողմերը յեւ
անկյուններն արտահայտվում են, այս յեղանակի գործադրման
դեպքում, համաստեղ միաւորներով: Այս չափումը կոչվում
է շառավղային:

4. Նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը :

Դեորեմ. Չառաձիթին համասար աղեղի վրա հենվող կենտրո-

նակալն անկյունը հասարակուն թեևությունն է: Դիցուք $OA =$

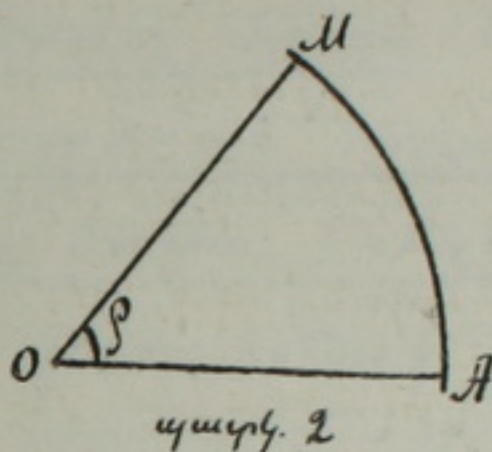
$= OM = R$ յեւ $\sphericalangle A' = R$ (պատկ. 2):

Վարձենք անկյունը կոչելով ρ , կարա-

նանք .

$$\frac{\rho}{360^\circ} = \frac{AM}{2\pi R} \quad , \quad \text{վորդերից}$$

$$\frac{\rho}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi} \quad \text{յեւ}$$



$$\rho = \frac{180^\circ}{\pi} :$$

Հորմեկտեղ 180° -ը յեւ π -ն հասարակուն թեևություններ

են, ապա նրանց հարաբերությունն յեւ հասարակուն է.

հետևաբար ρ -ն հասարակուն թեևություն լինելով՝ կարած չու-

նի շառաձիթից, Վոր յեւ պետք էր ապացուցել:

5. Չառաձիթի (ռադիան). թանկյունը կոչվում է շառաձիթի-

յեւ ընդունված է իբրեւ ծիւղան չափ անկյունների հաճար:

Այսպիսով թեև ունենում ենք անկյունների շառաձիթային չա-

փոմը: Աշխարհին չափումով շառաձիթից համասար է

$57^\circ 17' 44''$, 806-ի 0,001 վայրկյան ճշգրտությամբ:

6. Անկյունների շրջանային չափը: Այժմ ցույց տանք, թե

ինչպես պետք է անկյունները չափել շառաձիթի ծիւղանով:

Դրա հաճար վերջնենք Վոր յեւ է կենտրոնակալն անկյուն,

Վորի աղեղի յերկարությունը նշանակենք ℓ , իսկ անկյունը՝

x : Այն համանակ-

$$x : \rho = \ell : R$$

համեմատությունից 40 գտնենք $x = \rho \frac{l}{R}$: Բայց ρ -ն շառա-
վառքի է, և որն ընդունելով իրենց շառառվառքի հե-
տևանքները՝

$$2) \quad x = \frac{l}{R},$$

այսինքն աղեղի յերկարության հարաբերությունը շառառվառքի
յերկարության՝ համապատասխան կենդրոնական անկյան չափն է
յեզ կոչված և անկյան շրջանային չափ :

7. Այժմ գտնենք 360° -ի, 180° -ի, 90° -ի անկյունների շրջանա-
յին չափը : Համապատասխան աղեղների յերկարությունները՝
համաար են $2\pi R$, πR , $\frac{1}{2}\pi R$, ուստի (2) բանաձևով գտնենք
 $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$: Հետեւյալ աղյուսակում բեր-
ված են թիվների համար գործաւորող անկյունների շրջանա-
յին չափերը .

$360^\circ \dots\dots 2\pi$	$120^\circ \dots\dots \frac{2\pi}{3}$	$45^\circ \dots\dots \frac{\pi}{4}$
$270^\circ \dots\dots \frac{3\pi}{2}$	$108^\circ \dots\dots \frac{3\pi}{5}$	$36^\circ \dots\dots \frac{\pi}{5}$
$180^\circ \dots\dots \pi$	$90^\circ \dots\dots \frac{\pi}{2}$	$30^\circ \dots\dots \frac{\pi}{6}$
$150^\circ \dots\dots \frac{5\pi}{6}$	$72^\circ \dots\dots \frac{2\pi}{5}$	$18^\circ \dots\dots \frac{\pi}{10}$
$144^\circ \dots\dots \frac{4\pi}{5}$	$60^\circ \dots\dots \frac{\pi}{3}$	$15^\circ \dots\dots \frac{\pi}{12}$
$135^\circ \dots\dots \frac{3\pi}{4}$	$54^\circ \dots\dots \frac{3\pi}{10}$	յեզ այլն

8. Անցման բանաձևեր . Անկյունների աղեղնային չափու-
թյոց շառառվայինն անցնելը յեզ ընդհանրապէս կարե-
ւի է կատարել հետեւյալ պարզ բանաձևերով, զորոնք
բնութւն են (1) յեզ (2) համաարություններէրց .

$$3) \quad \alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x,$$

$$4) \quad x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha.$$

Այսինքն α -ն նշանակում է անկյան թեթեւությունն աշխարհին չափումով, χ -ը՝ շառավղային չափումով:

Որինակ 1. Արբախայրել աստիճաններով, թույլենքով յեղջայրկյաններով այն անկյունը, զորի շրջանային չափն է $\frac{2}{5}$:

(3) Բանաչեմք հաճախյն գրեմք ենք:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2}{5} = \frac{72^\circ}{3,141593},$$

Հորիզոնից յեղ

$$\alpha = 22^\circ 55' 6'':$$

Որինակ 2. Գրենք 32° -ի անկյան շրջանային չափը:

(4) Բանաչեմք գրեմք ենք

$$\chi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 32^\circ = \frac{8\pi}{45} = \frac{8 \cdot 3,141593}{45},$$

Հորից յեղ

$$\chi = 0,558505:$$

9. Անցան աշյուսակներ. Երևանում ենք, զոր (3) յեղ (4) բա-

նաչեմքի կիրառածը յարաբանելուր ծանափար դեպքում կապ-

ված է քաղաքական հոգեւոյնից գործաւթությունների հետ:

այդ բանից խոսափելու նպատակով կազմված է աշյուսակ,

զորի շրջափարակն պարզում է այդ գործողությունները:

Գլխաւորապի գրեմք այդ պիսի աշյուսակ չեղեղված է 107-րդ

յերեսում. չերեագիրն է՝ շրջանի աշեղի յերկարությունը

շառավղի ծաւերով, յերբ չերգինս հաճաւար է 1-ի:

Երա յեղ ցված են աստիճաններով, թույլենքով յեղ վայր-

կյաններով արբախայրած անկյունների շառավղային թեթե-

թյունները և այս թեթեւությունները հաշված են 7 ցրաւորդա-

կան նշաններով, աշխարհն յեղ ցրաւորդայինորդ-ակաւի

Ճշգ-ությամբ : Ֆերկու որինակով ցույց տալով , թե ինչպէս
պետք է ոգ-տել աշդ-աշխատակով :

Որինակ 3. Գ-տել $7^{\circ}15'42''$ անկան շրջանային չափը :

Գ-լապենապի Ը-րէի 107-րդ- յերեսում գ-տնում ենք ապրիճան
ների , թույեների յեղ վայրկյանների սյունակներում

7° հաճապարարականում է	0,1221730
15'	0,0043633
42"	0,0002036
$7^{\circ}15'42''$	0,1267399

Սերեճա X-ը հաճապարե 0,1267399.

Որինակ 4. $x = 2,5000000$. այս թիւը վորոնում ենք աշխ-
տակում , իհա . գ-տնում ենք յերջ աւարագ-ույն փոխը՝

2,4958208, վորին հաճապարարականում է 143° : Այնուհե-
տեղ գ-տնում ենք X-ի յեղ նրա հաճար վերցրած յերջա-
վոր արժեքի տարբերութունը՝ 0,0041792, յեղ վորոնում
ենք այս տարբերութունը թույեների աշխատակում : Սերեճա
վարագ-ույն փոխը հաճապարե 0,0040724, վոր հաճապարար-
ականում է 14° -ի : Ահապի յեղ յերկրորդ- յերջաւորության
տարբերութունը՝ 0,0001067, վորոնում ենք վայրկյանների
սյունակում յեղ գտնում ենք գ-րեթե ճիշդ- թիւը՝ 22" :

Այսպէս սերեճա -

$$x = 143^{\circ}14'22'' :$$

Ապրենանշած գ-արձագությունները դասավորւած են հետեւիյալ
ձեւով

2,5000000	
2,4958208	143°
0,0041792	
0,0040724	$14'$
0,0001067	22"

Որինակներ

Գործել x-ը, յերե

1. $\alpha = 17^{\circ} 19' 4''$;

2. $\alpha = 39^{\circ} 5' 7''$;

3. $\alpha = 156^{\circ} 53' 0'' 45$;

4. $\alpha = 200^{\circ}$;

5. $\alpha = 515^{\circ} 39' 43'' 2$;

Գործել α -ն, յերե

6. $x = 0,35$;

7. $x = \frac{2}{9}$;

8. $x = 1,44683$

9. $x = 5\frac{1}{3}$

10. $x = \frac{75}{4}$.

10. Գաղափար Վեկորների մասին. Ջերկրաչափության յեզ գեոր
ուղղությունները Վոչ յի դեր չեն խաղում. նոյնը Վերաբերում
նայել աղեղներին: Այս պարագայում այն յեանությունները, Վորոնչ
հեր գործ ունի յերկրաչափությունը, բացարձակ յեանություններ են,
բնութանական յեանությունների նման, նրանց հաշվարկում և անգլիա-
կան "սկալար" ցերծրներ: Բնության յեզ պարագայ յեանություն-
ների խոշոր մասը, սակայն, ունի Վոչ յիայն Վորոչ չափ (յեանություն),
այլ յեզ Վորոչ ուղղություն, որինակ՝ ժամանակը (անցյալ յեզ ապա-
գ-ա), շարժող մարմնի անցած տարածությունը, շերծության ապրի-
ժանը (շերտից բարձր յեզ ցած) յեզ այլն: Այդպես են նայել Վերա-
մական (անալիտիկ) շար յեանություններ, ինչպես որինակ՝ ույժերը,
այրագությունը յեզ այրագացումը (յեֆենաբանության յեզ) յեզ այլն:
Այդ բոլոր յեանությունները կոչվում են "Վեկոր": Վեկորների
բնն են պարկանում նայել անկյունաչափական ֆունկցիոները.
յեանակյունաչափության յեզ արդեն յի դեպ ունեցանք, յերբ
բոք անկյան կոշի շարունակության Վրա գործող հաշվանչ
յենք ընդ-ունեցինք Վորպես բացասական յեանություն, Վորի հերե-
վանքով բոք անկյան կոսինուսը, ցանց ենք յեզ կոսանգ են-

նույնպէս յեւ BB_1 ուղղանկյունիքը պրածաւարէն գտնուած ուղղահայաց հա-
մարեւեմ գրական, յերբ նա գտնուած է BB_1 -ից դեպի աջ, յեւ բացա-
ռական, յերբ գտնուած է BB_1 -ից դեպի ձախ:

II յայտն, որ. OA, OB, OC, MC հարկածները գրական համարեւեմ,
այն ժամանակ նրանց հարկածար, բայց հակադիր OA_1, OB_1, OC_1, MC_1
հարկածները կը լինեն բացառական: II յենեմք եւ, աշեղները չա-
փելու նպատակով սկզբնական ընդունելով A -ն՝ OA հարկածական
շառաւիղի վերջակները. պայծառաւորութեմէն այդ կերպից շրջանագծի
վրայով դեպի վեր, այսինքն ժամացույցի սլաքի շարժման հակա-
ռակ ուղղութեամբ շարժման աշեղները համարել դրական. այն
ժամանակ շրջանագծի վրայով դեպի ներքեւ, ժամացույցի
սլաքի շարժման ուղղութեամբ շարժման աշեղները կը լինեն
բացառական. որ, յերթ $AB_1, AB_2, AB_3, \dots$ աշեղները համա-
րեւեմ գրական, ապա $AB_1, AB_2, AB_3, \dots$ աշեղները կը լինեն
բացառական: Վերջապէս, պայծառաւորութեմէն գրական համարե-
ւեմ գրական աշեղներով չափւող անկյունները յեւ բացառա-
կան բացառական աշեղներով չափւողները: Անկյան կողմերի
ուղղութիւնները կը համարեւեմ գրական, այն ժամանակ նրանց
շարունակութիւնները գագաթից դուրս կունենան բացառական
ուղղութիւն: II յայտն որ. AO անկյան համար OA յեւ OM կողմե-
րը գրական են, իսկ OA յեւ OM կողմերը բացառական,
վարդապետել սրանք կաւճած են առաջինների շարունակու-
թիւնները O գագաթից դուրս, այսինքն ունին OA -ին յեւ OM -ին
հակադիր ուղղութիւններ. իսկ յերթ վերջնէն AB_1 , աշե-
ղով չափւող AO , անկյունը, ապա նրա կողմերը OA յեւ OM ,

ԿԸ Շինին դրական, ժնչդեռ ՕԱ, կողմի շարունակությունը,
այսինքն ՕԱ հարվածը, այժմ կԸ Շինի բացասական:

13. Ուղղությունների այս սխալե՞ծը կոչվում է կոորդինատների
դեկարյան սխալե՞ծ: Այս հնարավորություն է գալիս ընդհա-
նրացնելու յերկրաչափական բազմաթիվ հարցեր, յեղ Վոր
գլխավորն է զգալի կերպով դյուրացնում է անկյունաչա-
փական ֆունկցիաների ուսումնասիրումը¹⁾, Վորովհետեղ հնարավոր-
ություն է ընչե՞նձ նրանց յեժուրյունները ներկայացնելու
գրաֆիկորեն, դիտելի:

14. Անկյունները յեղ նրանց ֆունկցիաները. Այսպիսով դի-
սկուսությունները յեղ բերում են այն յեղբակացության, Վոր
անկյունն անընդհանր փոփոխվելի²⁾ ժի յեժուրյուն է, Վորը կա-
րող է $-\infty$ -ից ժինչեղ $+\infty$ ամեն ժի արժեքի ընդունել:

Անկյան շարժական կողմն անվանելե՛ք թե՛ք, արա առաջա-
ջգությունն անկյան անշարժ կողմի հիմքի վրա պարզապէս
անվանելե՛ք առաջաջգություն, իսկ թե՛քի վերջակեցից հիմքի
վրա իզեցրած ուղղահայացը՝ պարզապէս ուղղահայաց: Դե՛ք,
առաջաջգությունը յեղ ուղղահայացը կոչելե՛ք անկյան փակող
կողմեր: Այսպիսով դիսկուսություններից պարզ է, Վոր անկյան
փակող կողմերի հարաբերություններն անկյունների ֆունկցիո-
ններն են: — 15. ֆունկցիաները կոչվում են անկյունաչափական
(Գրաւր բառով «գոնիոմետրական»)³⁾. նրանե՛ք պարբերական են:
Յեռանկյան անկյունների յեռանկյունաչափական յեժուրյուն-
ներն անկյունաչափական ֆունկցիաների յաանախոր գեպիներեն,⁴⁾

¹⁾ Յեռադրվում է, Վոր ֆունկցիայի գաւաւթային աշակերտներին հայտնի է հանրա-
հաղից: Անկյունաչափական ֆունկցիաների աւանդական դրված է հաջորդ-
հոգւածում: Ը.թ.

Վերադառնալով յեռանկյան անկյունները փոփոխուած են ծիւղի 0° -ից 180° սահմաններում յեւ ծիւղի դրական են:

15. Անկյունաչափական ֆունկցիաները նայած անկախ փոփոխականի ընդրութեան, լինում են շրջանային յեւ հակադարձ շրջանային: Յետեւ իբրեւ անկախ փոփոխական ընդունենք անկյունը (կամ համապատասխան աղեղը), ապա փակող կոշտերի հարաբերութեանները կը լինեն անկյան ֆունկցիաները, այսպէս կոչված շրջանային ֆունկցիաներ։ Ընդհակառակն, յետեւ այդ հարաբերութեաններէրց Վորյեւե յեւ յեւ ընդունենք իբրեւ անկախ փոփոխական, ապա անկյունը կը լինի նրա ֆունկցիան, այսպէս կոչված հակադարձ շրջանային ֆունկցիան։ այսպիսով յետեւ տեսնում ենք, Վոր անկյունաչափական ֆունկցիաները հակադարձելի ֆունկցիաներ են:

Գլուխ II. Շրջանային ֆունկցիաների ընդհանուր հատկութեանները.

16. Աստիճաններ. Վերցնենք x կամայոր անկյունը յեւ կայծենք հնարաւոր բոլոր հարաբերութեանները նրա փակող կոշտերի միջեւ: Ընդամենը 6 այդպիսի հարաբերութեաններ կան, Վորտնք են.

$$(5) \quad \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{\tan x}{\sec x}, \quad \frac{\csc x}{\cot x}, \\ \frac{\sec x}{\tan x}, \quad \frac{\cot x}{\csc x}, \quad \frac{\cos x}{\sin x}$$

Առաջին չորս հարաբերութեանները յեւ հայտնի են յեռանկյունաչափութեան դասընթացից՝ դրանք x անկյան սինուսը,

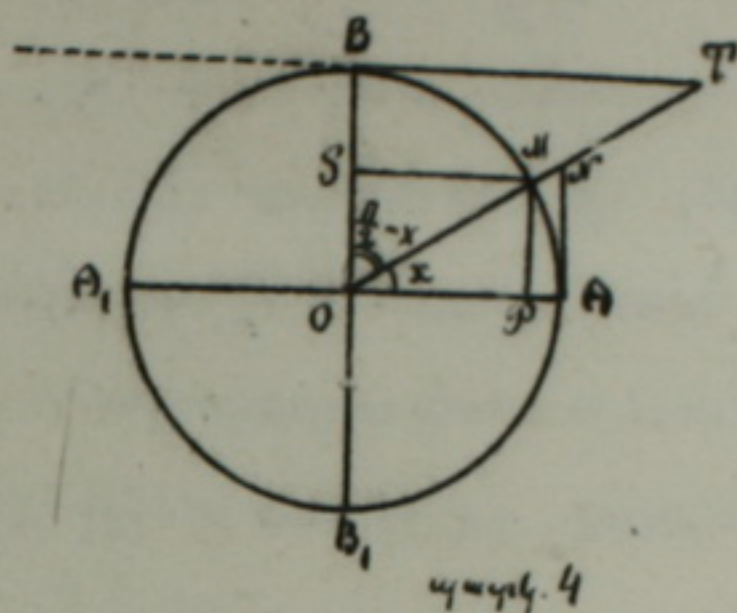
կոսիմուս, ցանգեմուս յեւ կոսիմուսեան եւ: Կիւզեմուս- հարաբե-
րությունը կոչում է Խանկյան սեկանս (secans, կրեար. sec.) յեւ
վեցերորդ-ը կոսեկանս (cosecans, կրեար. cosec.): Այսպիսով
յեւ ի մենեմոն եւ շրջանային վեց ֆունկցիաների հերթական
սահմանումները:

1. Ուղղահայացի հարաբերությունը թեթիւ՝ կոչում է սինուս,
2. Առաջաջգործյան " " թեթիւ՝ կոչում է կոսիմուս,
3. Ուղղահայացի " " առաջաջգործյան կոչում է ցանգեմուս
4. Առաջաջգործյան " " ուղղահայացին՝ կոչում է կոսեկանս
5. թեթի " " առաջաջգործյան՝ կոչում է սեկանս
6. թեթի " " ուղղահայացին՝ կոչում է կոսեկանս:

17. Շրջանային ֆունկցիաների կառուցումը. Եւ զի կոչում ցե-
սանի, զոր շրջանային ֆունկցիաները վեցերորդեան: Երբ,
անկյունների ցարբեր յեւ յարաբերությունների հաճար փակող կողմե-
րի ուղղությունները կարող են լինել յեւ որակաւ յեւ բա-
յաւասկան, զոր, ի հարկե աչդ-ում է նայել ֆունկցիաների
նշանների վրա: Նշանների հարկը բաշխակողմաներուն վեւե-
լու հաճար ոգրվենի շրջանային ֆունկցիաների գրաֆիկա-
կան պարկերայութիւն ախպես կոչում է անկյունաչափական
գծերի ժրոհում:

Այսուհետեւ յեւ թուր անկյունները կարողաւորեմ շառա-
վաղային ժրոհությունով: Վերցնենի առաջին ֆառերում
գրնվող Խ անկյունը (պարկ. 4): Դնենի նրա կողմերի վրա
 $OA = OM$ կաճաւոր ժրահաւասար հարկածները յեւ
 $R = OA = OM$ շառաւղով գծենի շրջանագիծ:

Այնուհետև, ՕՄ-ն առաջադրելով ՕԲ-ի վրա՝ կապում ենք
ՄՔ ուղղահայացը յեղ ՕՔ առաջ-



ջգ-ությունը, ինչպես յեղ առաջ:
Զրգանային ֆունկցիաների առա-
ժանժան հաճախյուն կոմենտներ.

$$\sin x = \frac{MP}{R}, \cos x = \frac{OP}{R}:$$

Հորոգիտելով R-ը փոխանշումը -
նր համար հասցումներն յեղ յեղում
ն, ապա կարելի է նրա յեղումը -

թյունն իբրեւ յիշումն ընդունել յեղ ՄՔ ու ՕՔ հարկածնե-
րն առաջադրել նրա ծանրող. այն ժամանակ $\sin x$ -ը յեղ
 $\cos x$ -ը ներկայացնող յերկու հարաբերությունները գրաքիտ-
րեն կարելի է պարկերացնել ՄՔ յեղ ՕՔ հարկածներով:

Այս ուղիղները պահան են, զորոգիտելով առաջինն ուղղում
ն հարկումնալան պրաճագ-ից դեպի վեր, իսկ յերկրորդը
ուղղաճից- պրաճագ-ից դեպի աջ: Նրանք կոչված են սինու-
սի յեղ կոսինուսի անկյունաչափական գծեր:

Դիտելով ծայրած չորս հարաբերությունները՝ $\frac{MP}{OP}$, $\frac{OP}{OM}$,

$\frac{OM}{OP}$, $\frac{OM}{MP}$, փաստում ենք, զոր R-ն այսպես հայտարարում

հանդես էր գալիս, մայր նրանց համարիչները չի կարելի

անժգորեն առաջադրել շառաւղի ծանրող: Այսպիսով

այս հարաբերությունների փոխարեն գնել նրա՝ $\frac{MP}{R}$ և $\frac{OP}{R}$

ներերը, զորոնց հայտարարները լինեն R, այն ժամանակ

նր համարիչները կը ներկայացնեն ծայրած չորս ֆունկցի-

ների անկյունաչափական գծերը: Դրա համար A կենտ

կառուցանենք շրջանագ-ի շրջանորոգ, զորը յեղ շարու-

նակեւնք սինչեւ յերկարացում ՕՄ թէի հեր Ն հերմոս հարկե-
 լԸ : Ինչպէս ՕՄՄ ուղղանկյուն յեռանկյունը նման է
 ՕՄՓ յեռանկյունը , հետեւեալապէս $\frac{ՄՓ}{ՕՓ} = \frac{ՏՄ}{ՕՏ}$ յեւ $\frac{ՕՄ}{ՕՓ} = \frac{ՕՆ}{ՕՏ}$,
 այսինքն $\text{ctg } x = \frac{ՏՄ}{Ք}$, $\text{sec} = \frac{ՕՆ}{Ք}$: Այսպէս յերկարաց-
 ւում ենք , զոր ՏՄ-ը յեւ ՕՏ-ը պահպանի յեւ սեկանսի աւ-
 կյունաւորական գ-ձերն են . նրանք յերկումն եւ դրական են ,
 զորովհետեւ առաջինն ուղղումն է ՏՏ , հարկանական ցրա-
 ծագ-ից դեպի վեր , իսկ յերկորդ-ը վերջումն է անկյան կողմի
 վրա : Հերկապէս , Ս հերից պահենք ՍՏ ուղիղ ՕՏ-ին
 զուգահեռ յեւ Բ հերմոս կառուցանենք շրջանագծի ԲՊ
 շոշափողը . այս շոշափողի յեւ յերկարացում թէի հարման
 կեպը թող լինի Պ-ն : Կարապի թի նոր ուղղանկյուն յեռան-
 կյուն ՕԲՊ : Հորովհետեւ ՕՄՓ յեւ ՕՏՄ յեռանկյունները
 հաւասար են , ապա $\frac{ՕՓ}{ՄՓ} = \frac{ՕՏ}{ՏՄ}$ հարաբերությունները կարող
 ենք փոխարինել $\frac{ՏՄ}{ՕՏ}$ յեւ $\frac{ՕՄ}{ՕՏ}$ հարաբերություններով .

իսկ ՕՏՄ յեւ ՕՏՊ յեռանկյունների նմանությունից գրնւծ ենք

$$\frac{ՏՄ}{ՕՏ} = \frac{ԲՊ}{ՕԲ} \quad \text{յեւ} \quad \frac{ՕՄ}{ՕՏ} = \frac{ՕՊ}{ՕԲ} ;$$

այսպէս յերկարացում ենք , զոր $\text{ctg } x = \frac{ԲՊ}{Ք}$, $\text{cos } x = \frac{ՕՊ}{Ք}$,
 այսինքն ԲՊ-ն յեւ ՕՊ-ն կորանգենի յեւ կուսեկանի անկյուն-
 աւաքական գ-ձերն են . նրանք յերկումն եւ դրական են ,
 զորովհետեւ առաջինը գ-գրնումն ուղղանկ- ցրածագ-ից
 դեպի աջ , իսկ յերկորդ-ն անկյան կողմի հարկումն են :
 Իսկպիսով յենք գրանք Ը անկյունաւորական
 գ-ձեր , զորունի գ-րաֆիկորեն ներկայացնում են Ը
 շրջանագծի ֆունկցիաների յեւստությունները :

12. Համալսարանի անփառանք հարելի է արքայազն այն հանձնարար-
 թեզ ցուցմունքները, վերոնի համալսարանություն են լինելու ցուցմունք
 անկյուն համար հառաչանքը բոլոր անկյունաչափական գծերը:
 Համար նկարներ, վորը թեթ (շարժական կողմ) օրը, յեզ անա-
 զաչգ-ում են համ ԵԱ անշարժ կողմի վրա, համ արա ԵԱ, շա-
 բունակության վրա. այս համարում է թեթի դիրքից. այն շոշա-
 փողները, վորոնց արա դ-րվում են ցանցներ յեզ հարանգե-
 սի ծեփությունները. օրը յեզ հառաչվում են A յեզ B կերտ-
 րում. առաջին շոշափողը հարող է շարունակվել A կերտից
 դեպի վեր յեզ դեպի վար, իսկ յերկրորդը՝ B կերտից դեպի
 աջ յեզ դեպի ջար (պարզ. 4). այդ շոշափողները կողմն
 առաջին յեզ յերկրորդ շոշափողներ: Այս դիրքություննե-
 րից հիմա հարելի է անկյունաչափական գծերն այսպես առ-
 ծանել

1. Առաջադասար յերկարությունը կողմում է սինուսի անկյունաչա-
 փական գիծ.
2. Առաջաչգ-ության յերկարությունը կողմում է կոսինուսի ան-
 կյունաչափական գիծ.
3. Առաջին շոշափողի այն հարվածը, վորը գտնվում է շո-
 շափման կերտի յեզ յերկարաչգ-ած թեթի միջեզ, կողմում է ցան-
 ցներ անկյունաչափական գիծ.
4. յերկրորդ շոշափողի այն հարվածը, վորը գտնվում է շո-
 շափման կերտի յեզ թեթի միջեզ, կողմում է կոսինուսի ան-
 կյունաչափական գիծ.
5. յերկարաչգ-ած թեթի այն հարվածը, վորը գտնվում է անկյուն
 գագաթի յեզ առաջին շոշափողի միջեզ, կողմում է սինուսի ան-
 կյունաչափական գիծ.

6. Յերկարաչգամ թեթի այն հարվածը, Վորը գործում է անկյան գագաթի յեւ յերկրորդ- շոշափողի ծիզեւ, կոչւում է կուտ- կանսի անկյունաչափական գ-իճ:

19. Արեւու-վերսուս յեւ կոսինուս-վերսուս. Դիտելով 4-րդ- պատկերում գ-եւս հարվածները՝ տեսնում ենք, Վոր սրանք բոլորն ունին իրենց անունները, բացի յերկուսը՝ PA -ից յեւ SB -ից: Դժվար է նկա- րել, Վոր այս յերկու հարվածներն էլ միանգամայն վորոշվում են $\times$ անկյան մեծությունը, յերբ տված է R շառավղը. որ. յեթե հայտնի է PA -ն, կարելի է P կետից հիծի վրա կանգնեցնել PM ուղղահայացը յեւ այսպիսով գ-տնել արեւուսի գ-իճը. նույնպէս յեւ SB -ն իճանալու դեպքում կարելի է S կետից տանել SM ուղիղը՝ հիծիին զուգահեռ յեւ այդպիսով գ-տնել կոսինուսի գ-իճը (վորովհետեւ SM -ը մեծությամբ յեւ ուղղությամբ հավասար է OP -ին): Այս յերկու հարվածներն ընդունվում են վորպէս անկյունաչափական գ-եր յերկու նոր շրջանային ֆունկցիաների, այնպէս Վոր

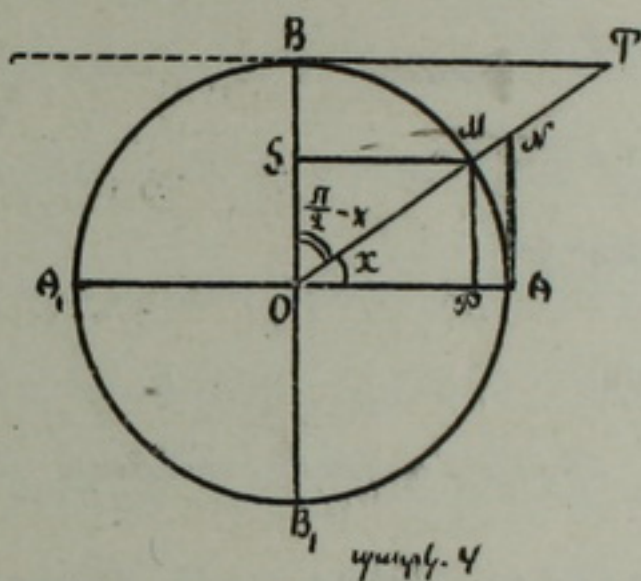
$$6) \frac{PA}{R} = \sin v, \quad \frac{SM}{R} = \cos v:$$

Այս ֆունկցիաներից առաջինը, Վորը ճանաչում է արեւուսի գ-տնելու համար, կոչւում է արեւուս-վերսուս (*Sinus-versus*, կրճար. *Sin v*), ծյուսը, Վորը ճանաչում է կոսինուսի գ-տնելու համար, կոչւում է կոսինուս-վերսուս (*Cosinus-versus*, կրճար. *Cos v*):

Այս ֆունկցիաները հաճախ բանեցնում են սրաք յեւ հնդիկ մաթեմատիկոսները. ներկայումս նրանք ունին միայն պարզա- կան հետաքրքրություն յեւ շատ սակաւ են գործածվում հա- շտատելի մեզ (գլխավորապէս գործածվում են անգլիական ցեղանախններում):

Պ-ի ստորադասություն. Չորս չեռնասրկների մեջ շրջանային ֆունկցի-
աների անունները համարակցված են նայել նրանց անկյունաչափա-
կան գծերին, այնպես զոր „սինուս“, „քոսինուս“... ասելով՝ համար-
ված է յերբեմն հարաբերություն, յերբեմն գ-իժ, նայած հանգաման-
քին: Այսպիսի յերկուսությունից պակասի է խոսափել շփոթու-
թյան տեղի՝ չփախ հաճար:

20. Շրայուցիչ անկյան ֆունկցիաները. Վերադառնալով 4-րդ պար-
կերին: $\triangle OAB$ անկյունը շրայուցիչ է x անկյան հաճար, հեղեղա-



պես հաճաարե $\frac{\pi}{2} - x$: Վորովհե-
տեղ BB_1 քրածագ-իժը հասարարուն
ուղղություն ունի (ուղղահայթ), ապա
կարող ենք OM շարժական թե՛ն
առաջադի OB հիժի զրա. այն
խանակ, առանձնությունի հաճաայն,

կը գտնենք, զոր MS ուղղահայթը $(\frac{\pi}{2} - x)$ անկյան սինուսի
անկյունաչափական գ-իժն է, OS -ը նույն անկյան կոսինուսի
անկյունաչափական գ-իժն է: Մյուս կողմից ունենք հեղեղյալ
հաճաարությունները. $MS = OP$, $OS = MP$: Մերեմ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) =$
 $= \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$: Այնուհետեղ, BT շոշափողը
 $(\frac{\pi}{2} - x)$ անկյան քոսինուսի անկյունաչափական գ-իժն է, յերկա-
րաչգ-աժ OT թե՛ը՝ նույն անկյան սեկանսի անկյունաչափական
գիժը. բայց թե՛նույն խանակ այդ- ուղիղները x անկյան
կոքանգենար յեղ կոսեկանսի անկյունաչափական գ-իժն են,
ուստի $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$ յեղ $\sec(\frac{\pi}{2} - x) = \csc x$: Վերգապեա,
 AN յեղ ON ուղիղները հաճաարաբախանարապ հանդիսանում
են թի կողմից $(\frac{\pi}{2} - x)$ անկյան կոքանգենար յեղ կոսեկանսի

անկյունաչափական գծերը, իսկ կողմից x անկյան քանակությամբ
յեղ անկյունի անկյունաչափական գծերը. այնպես զոր $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-x) =$
 $= \operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2}-x) = \sec x$. Այսպիսով սրանում ենք հեղուկ
յալ հաճախությունները, զորոնք զորում են լրացուցիչ
անկյունների փոխադարձ կապը (այսպես քանության առած
բոլոր անկյունաչափական գծերի դրական ուղղության ծանր
արդեն զերը հիշարականություն յեղում):

$$(7) \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x, & \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x) = \operatorname{ctg} x, \\ \sec(\frac{\pi}{2}-x) = \operatorname{cosec} x \\ \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x, & \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-x) = \operatorname{tg} x \\ \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2}-x) = \sec x: \end{cases}$$

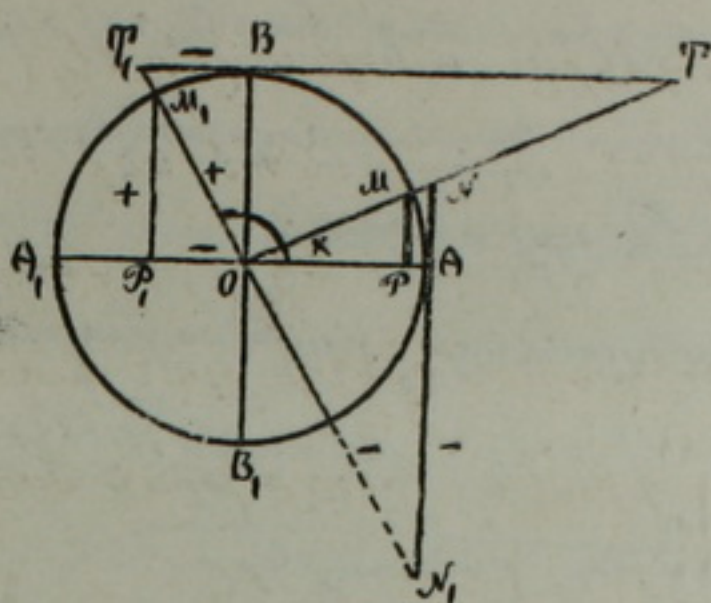
21. (7) բանաձևերի ի ծառ ծրանգածայն անկախ յեղանա-
կով սրապիսի են յեռանկյան անկյունների համար գրի 1-ծառ (885, 20).
Ի դեպ նկատենք, զոր (7) բանաձևերը կարելի են սրանալ հիմնական
սահմանումներից, յեռանկյունաչափության բանաձևերի նման:

Ջերե պայծառափորվենք լրացուցիչ անկյունների այն ֆունկցիաները,
զորոնք իրար հաճախար են, կողել լրացուցիչ ֆունկցիաներ (նրանք
իրարից փոքրերիցմ են իրայն CO նախածան քով), ապա (7) բա
նաձևերը կարելի են արքահայտել այսպես

Լրացուցիչ անկյունների լրացուցիչ ֆունկցիաներն իրար հաճախար են:

22. II քառորդի անկյունների ֆունկցիաները. յերկրորդ
փառորդում գործող անկյունը կարելի են յերկու կերպ կապել,
իմպես այդ քանակի յեռանկյունաչափության թիզ. կամ ի
սոր անկյուն արելայնելով $\frac{\pi}{2}$ անկյունին, կամ π անկյունից
հանելով ի սոր անկյուն: Դիտենք այդ անկյուններից յուրա-
փանյունն առանձին:

դիպուք $\angle AOM_1 = \frac{\pi}{2} + x$, Վորի ձեզ $x = \angle AOM$ (պատկ. 5). OM_1 -ը



պատկ. 5

առաջացվելով OA_1 -ի վրա գտնված
կետ M_1P_1 ուղղահայացը յեւ OP_1 առա-
ջացությունը: Այս գծերից առաջ-
նը դրական է, իսկ յերկրորդը՝ բացա-
ռական. այդ պատճառով բոլոր առ-
կյալն սինուսը դրական ճեփություն
է, իսկ կոսինուսը՝ բացասական:

Այնուհետեւ, ցանկեւի AM_1 յեւ BP_1 շոշափողները գտնուծ ենք
ներաւի հասցան կետերը OM_1 թէի հետ, Վորի հաճար OM_1 -ը
շարունակուծ ենք՝ անկյալ կողմի ուղղությամբ յեւ հակադիր
ուղղությամբ. AM_1 շոշափողը $(\frac{\pi}{2} + x)$ անկյալ ցանցենսի ան-
կյունաչափական գիծն է, իսկ BP_1 շոշափողը նույն անկյալ կո-
ցանցենսի անկյունաչափական գիծն է. նրանք յերկուսն էլ բա-
ցասական են, Վորովհետեւ առաջինն ուղղված է հորիզոնա-
կան ցրածագծից դեպի ներքեւ, իսկ յերկրորդը ուղղաձիգ-
ցրածագծից դեպի չափ: Հետեւեալս բոլոր անկյալ ցանցեն-
սը յեւ կոցանցենսը բացասական ճեփություններ են: Վերջա-
պէս, ON_1 հաջողն ունի անկյալ կողմի հակադիր ուղղություն,
հետեւեալս բացասական է. OT_1 հաջողն ունի անկյալ կող-
մի ուղղություն, այսինքն դրական է: Այսպէս ուրեմն,
բոլոր անկյալ սեկանսը բացասական ճեփությունն է, իսկ կո-
սեկանսը՝ դրական: Այսպիսով յենք Վորողցիւնք $(\frac{\pi}{2} + x)$
բոլոր անկյալ բոլոր Վեց ֆունկցիաների նշանները:

23. Այժմ գտնենք $(\frac{\pi}{2} + x)$ յեւ x անկյունների ֆունկցիաների
փոխադարձ կախուծը: Դրա հաճար դիպուք OM_1P_1 , OMP_1

ON, A, OBT, OT, B, ONA յեռանկյունները: Առաջինի յեղ
յերկրորդի հաճաաթությունը հերեւցեմե՝ եւի $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$,
 $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x$ 3-րդի յեղ 4-րդի հաճաաթությունը քա-
լիւ եւ. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+x) = -\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{sec}(\frac{\pi}{2}+x) = \operatorname{cosec} x$.

Վերջապէս չերբին յերկու յեռանկյունների հաճաաթությու-
նից յեղրակացեմե՝ եւի $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+x) = -\operatorname{tg} x$ յեղ $\operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2}+x) = +\sec x$:

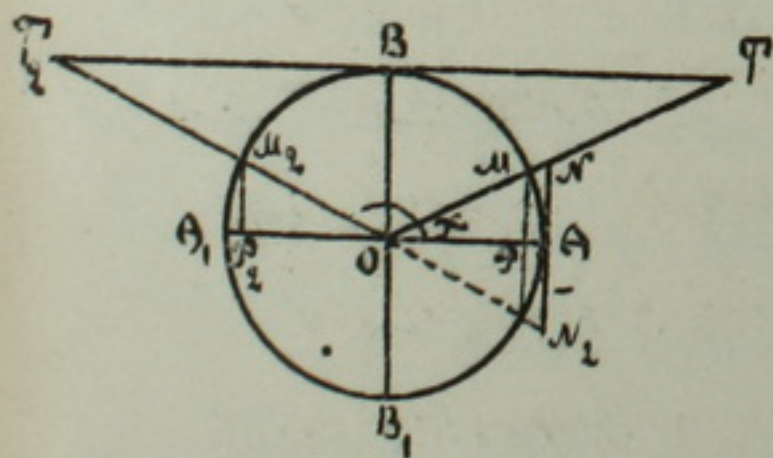
Այսպիսով սրացեմե՝ եւ հերեւցալ բանաչեւերը.

$$(8) \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x, & \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+x) = -\operatorname{ctg} x, \\ \sec(\frac{\pi}{2}+x) = -\operatorname{cosec} x, \\ \cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x, & \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+x) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2}+x) = +\sec x. \end{cases}$$

24. Բոլոր անկյան յերկրորդ. արտահայտությունն է $\pi-x$,
չորի յեղ x -ը սուր անկյուն եւ. այս անկյան քունկցիանե-
րը կարելի եւ կառուցանել նույն դարողությունների ողնու-
թյամբ, չորունց դիմացինի նախընթաց դեպքում. այդ քուն-
կցիաների նշանների հարցն արդեւ քննել եւի, այժմ ձեւեմ
եւ գտնել նրանց յեղ x անկյան քունկցիաների փոխադարձ
կախումը: Այդ նպատակով դիմեմ 6-րդ. պատկերին յեղ

դիմեմ իջուց հաճաաթ յեռան-
կյուններ՝ OM_2P_2 յեղ OMP , ON_2
յեղ ON , OB_2T_2 յեղ OBT . սրանեմ
եւի.

$$(9) \begin{cases} \sin(\pi-x) = \sin x, & \operatorname{tg}(\pi-x) = -\operatorname{tg} x \\ \sec(\pi-x) = -\sec x \\ \cos(\pi-x) = -\cos x, & \operatorname{ctg}(\pi-x) = -\operatorname{ctg} x \\ \operatorname{cosec}(\pi-x) = \operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

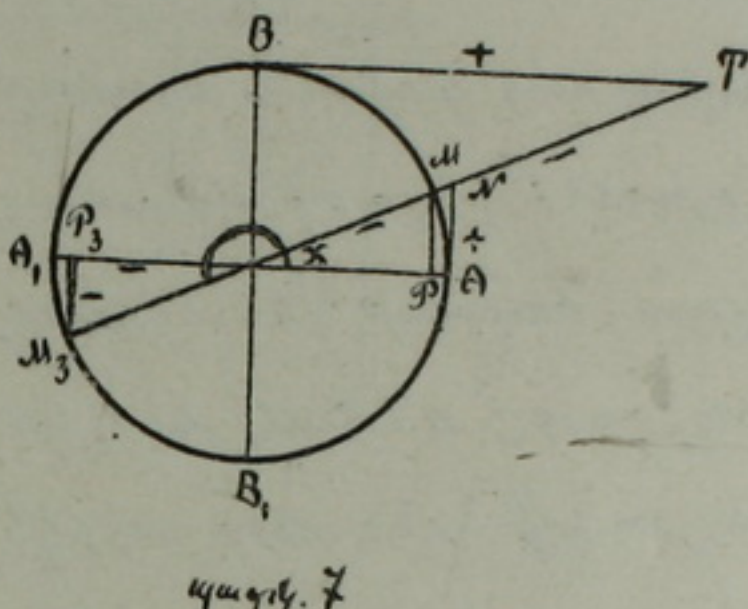


պատկ. 6

(8) յեւ (9) բանաձևերի հաճապարարման ծաւր յոյ արդ. 4 և հայ. քեր և յեւանկյունաչափութեանից:

25. III փառորդի անկյունների ֆունկցիաները.

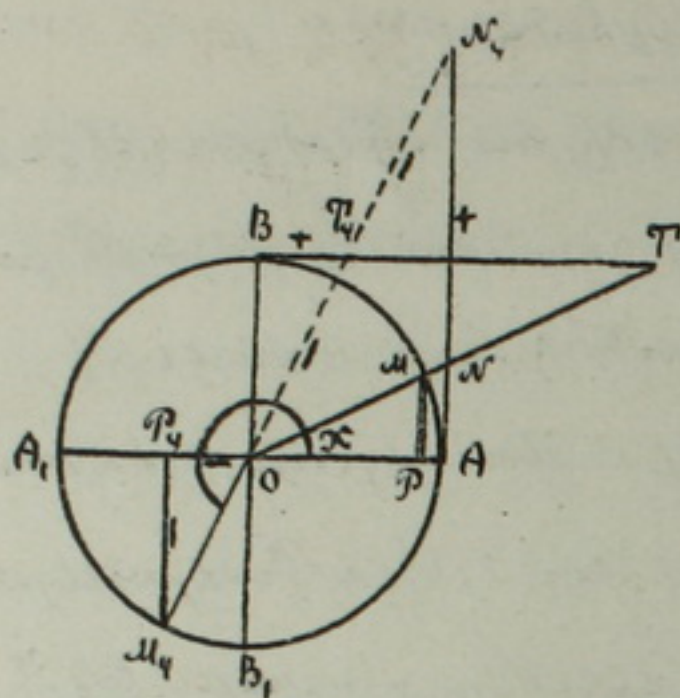
Աւարժեթացին նման դիպեւեմ յերկու անկյուն՝ $(\pi+x)$ յեւ $(3\pi/2-x)$, չորսնէ գ. քննման են յերրորդ-փառորդ-ում: Դիցուք $\angle AOM = x$, $\angle AOM_3 = \pi+x$ (պարկ 7): Կառուցանելով այդ յերկու անկյունների բոլոր անկյունաչափական գծերը՝ նկատում ենք, չոր նրանց քանակ ենք սի կոպանդեւոր գծերը հաճապարարարար հաճելեւում են ըստ յետեւյալ յեւ ըստ ուղղութեանիս սեկանտի յեւ կոսեկանտի գծերը հաճապարարարարար հաճաւար են ըստ բացարձակ յետեւյալ յեւ հակադրի ըստ ուղղութեան: Յնչ չերաբերում են ճշու յերկու ֆունկցիաներին, ապա գ. փառորդի անկյան սիւնու յեւ կոսիւնու բացաւան են. OP_3M_3 յեւ OAM_3 յեւանկյունների հաճաւարութեանից գ. քննման ենք, չոր $\sin(\pi+x) = -\sin x$ յեւ $\cos(\pi+x) = -\cos x$. Այսպես: րեւ, գ. փառորդի անկյունների սիւնու, կոսիւնու: սեկանտ և յեւ կոսեկանտ բացաւան են, իսկ քանդեւոր յեւ կոպանդեւոր՝ դրական:



Այս արդ-յունեւերին աւելաւորելով OP_3M_3 յեւ OAM_3 յեւանկյուններից բխող հերթեւանները՝ գ. քննման ենք $(\pi+x)$ յեւ x անկյունների ֆունկցիաների փոխադարձ կախումը.

$$10) \begin{cases} \sin(\pi+x) = -\sin x, & \operatorname{tg}(\pi+x) = \operatorname{tg} x, \\ \sec(\pi+x) = -\sec x \\ \cos(\pi+x) = -\cos x; & \operatorname{ctg}(\pi+x) = \operatorname{ctg} x, \\ \operatorname{cosec}(\pi+x) = -\operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

26. III փառորդի անկյան ճյուղը տասնվեց է $(\frac{3\pi}{2} - x)$ կամ $\angle AOM_4$ (պատկ. 8): Իրենի արդեն գիտենք, թե ինչպես պետք է կառուցանել



պատկ. 8

այդ անկյան անկյունների արտաքին ճանկերները յեղ ինչպիսի նշան-
ներ ունեն նրանք. այս պարագայում,
 $(\frac{3\pi}{2} - x)$ յեղ x անկյունների ճանկեր-
ների փոխադարձ կախումն արտահայտ-
հանար դիտելով, ինչպես յեղ առաջ,
յեղևի զույգ- հանգամար յեղ անկյուններ:

Առաջին զույգը $\triangle O P_4 M_4$ յեղ $\triangle O M P$,

որակիս է $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$, $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) =$

$= -\sin x$. յեղ րորդ- զույգը $\triangle O N_4 A$ յեղ $\triangle O B T$, որակիս է $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x) =$

$= \operatorname{ctg} x$, $\sec(\frac{3\pi}{2} - x) = -\operatorname{cosec} x$. Վերջապես, յեղ րորդ- զույգը

$\triangle O B T_4$ յեղ $\triangle O N A$, որակիս է $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec}(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sec x$:

II) յապիտով արտահայտելով վերոնշանակ հարաբերությունները

$$11) \begin{cases} \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x, & \operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x \\ \sec(\frac{3\pi}{2} - x) = -\operatorname{cosec} x, \\ \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x, & \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x \\ \operatorname{cosec}(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sec x. \end{cases}$$

27. IV փառորդի անկյունների ճանկերները. դիտել

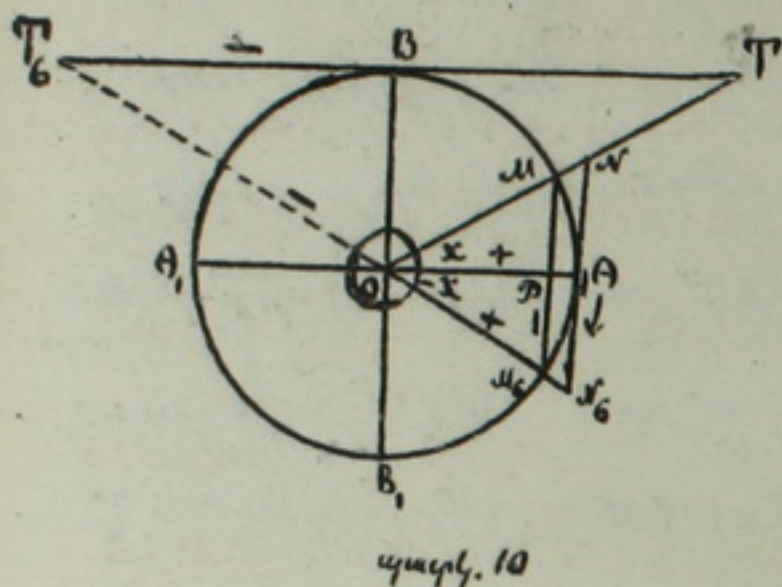
$\angle AOM_2 = \frac{3\pi}{2} + x$, $\angle AOM = x$ (պատկ. 9): Կառուցանելով

այդ յեղև անկյունների անկյունների արտաքին ճանկեր-
ները՝ արտահայտելով, վեր $(\frac{3\pi}{2} + x)$ անկյան կոսինուսի յեղ սե-

կանի գծերը դրական են, յիսկ ինչպես ճանկերների գծե-

րը՝ բացասական: Դիտելով, այդ, IV փառորդի անկյունների

29. Բացասական ածականների ֆունկցիաները. Միևեզեմ աշտ



$$14) \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x, & \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \\ \sec(-x) = \sec x, \\ \cos(-x) = \cos x, & \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x, \\ \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

Այսպիսով (14) բանաչեւերը պահպանում են իրենց ուղիղ նայել այն դեպքում, յերբ x անկյունը սուր է, այսինքն մեծ է $\frac{\pi}{2}$ -ից։
 իրոք, x յեւ $-x$ աղեղների վերջակէտերը ծիլք եւ համաչափ (սիմետրիկ) կը լինեն հորիզոնական գործագծի նկատմամբ, հետեւապէս նրանց սինուսների անկյունաչափական գծերը բացարձակ մեծութեամբ համասար են, բայց հակադիր, իսկ կոսինուսների անկյունաչափական գծերը համընկնում են թե՛ ըստ մեծութեան յեւ թե՛ ըստ ուղղութեան։ Նման դարձութեամբ կարելի է հաստատել նաեւ ծիլք ծիլքի բանաչեւերի ընդհանրութիւնը։

(14) բանաչեւերը կարելի է բառերով այսպէս արտահայտել։
 Համասարահակադիր երկու կոսինուսներն ու սինուսները համասար են, իսկ սինուսները, քանդեւները, կորանդեւները, կոսեկանտները՝ համասարահակադիր, կամ երկու նշանը փոխելուց կոսինուսը յեւ սինուսը մեծ են անփոփոխ, իսկ ծիլք քանդեւները փոխւում են ծիլքայն նշանը։

30. Վերածան բանաչեւերի կանոնները։ Ամբողջապէս հետազոտութիւնները ընդհանում են մեզ ծիլք ծիլքի կարեւոր յայտնաբացութիւններ, զորոնք վերաբերում են շրջանային քանդեւների հաշիւին։ այն է՝ ինչպիսի մեծութեան անկյուն

եւ ունենալու լիւթիւն, յետոյ ի վիճակի եւեթ նրա ֆունկցի-
աները փոխարինելու սուր անկյան ֆունկցիաներով ըստ
(7-13) բանաչեւերի յետոյ η -բաժանե անկյան ֆունկցիանե-
րով (14) բանաչեւերի հաճախայն: Հետեւ այդ անկյունը
2 π -ից յետոյ, ապա նախ վերաճեմ եւեթ առաջին շրջա-
նագ-իւր անկյան, ապա շարունակեմ եւեթ ըստ առաջնայն:
Այսպիսով ասենք իր անկյան ֆունկցիաները հաշվելու
(հաճախ) հարցը վերաճեմ եւ սուր անկյունների, այսինքն.
ա. ֆառորդեմ ընկած անկյունների ֆունկցիաները հաշվե-
լու հարցին. այս պարագայով (7-14) բանաչեւերը պո-
յել եւն "ա. ֆառորդ-ին վերաճելու բանաչեւեր "անունը:
Հետեւ այս բանաչեւերի շարունակութեւն, η -յուրին եւ նրանց հի-
շուր, Վորովհետեւ նրանք յենթաբաժանեմ եւ յերկու կանոնի,
առաջին կանոնը վերաբերեմ եւ ֆունկցիաների յենթաբաժանը,
յերկրորդ-ը՝ նրանց նշաններին:

1. Վերաճելի ֆունկցիայի անունը վերաճեմից չի փոխւում,
յեթե նրա հիմքն արտահայտւած է չույց-թիւ անգամ $\frac{\pi}{2}$ -ի
յետոյ սուր անկյան գումարով կամ քարքերութեամբ:

Վերաճելի ֆունկցիայի անունը վերաճեմից փոխւում է
լրացուցիչ ֆունկցիայի անվան, յեթե նրա հիմքն արտա-
հայտւած է անչույց-թիւ անգամ $\frac{\pi}{2}$ -ի յետոյ սուր ան-
կյան գումարով կամ քարքերութեամբ:

2. Վերաճելի ֆունկցիայի նշանը դրւում է սուր անկյան
ֆունկցիայի առաջ:

Արեւուր յեւ կոստեղանուր դրակաւ եւ I յեւ II խոռոչում
 կոսիւնուր յեւ սեկանուր " " I յեւ IV "
 կուսգեւուր յեւ կոսանգեւուր " " I յեւ III "
 ԻՐանացի հաճախաբար խոռոչներում քանկցիւններ
 կողմ զույգերը բացատրուին եւ:

31. Հերկու կանոնն եւ անդրադարձն բխում եւ զերաճում
 բանաչեւերից, իբրեւ նրանց ընդ-հանդիման արդ-յունք:
 Պէտք է նկատել, զոր զերաճումն բանաչեւերը պատկա-
 նում եւ իրենց ուշեւ նայեւ այն դեպքում, յետք սուր
 անկյան փոխարեւն դրվում եւ զոր յետք եւ այլ անկյուն
 $-\infty$ -ից մինչեւ $+\infty$: Անպայման չենք տեսնու, զոր
 ընդհանրեւ այս ընդ-հանդիմանը միայն տեսնուին հերա-
 ժրոքային եւ ներկայացնում: Հերկեւյալ որինակները
 կը պարզեն, թե ինչպէս պէտք է ուղղել անհունում կո-
 նուններից յուրաքանչյուր անանջին դեպքում:

Որինակ 1. Գտնել $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ անկյան քանկցիւնները (զերաճել
 սուր անկյան քանկցիւններ):

Վերադառնալ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ -ը չորրորդ- խոռոչի անկյունն է, ապա
 կարելի է արտահայտել կամ $\frac{5\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ յեւ կամ
 $\frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$: Առաջին դեպքում քանկցիւններն անուն-
 ները չեն փոխվել, զորոքներեւ $2\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, այսինքն
 զույգ թիւ անգամ $\frac{\pi}{2}$ -ից եւ հաճած $\frac{\pi}{3}$ սուր անկյունը:

Իսկ յերկրորդ դեպքում քանկցիւններն անունները կը
 փոխվին, զորոքներեւ $\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, այսինքն անզույգ թիւ
 անգամ $\frac{\pi}{2}$ -ին եւ գումարված $\frac{\sqrt{3}}{6}$ սուր անկյունը:

Դասի դասեր, $\overline{IV}$ խոնորդում դասերն են ծայր հասնում
ալ յեղ աեկանալ, իսկ ծայրած չորս ֆունկցիաները բացա-
ռակն են: Այս բոլորից պարունակ ենք.

$$\sin \frac{5\pi}{3} = \sin (2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg} (2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3};$$

$$\sec \frac{5\pi}{3} = \sec (2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sec \frac{\pi}{3};$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos (2\pi - \frac{\pi}{3}) = +\cos \frac{\pi}{3} = +\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{ctg} (2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{cosec} (2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3};$$

Կամ

$$\sin \frac{5\pi}{3} = \sin (\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{tg} (\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3};$$

.

.

$$\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{cosec} (\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\sec \frac{\pi}{6};$$

$\sec \frac{\pi}{3}$ -ի, $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$ -ի, $\sec \frac{\pi}{6}$ յեղ $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6}$ յեղոթյունները

դեռ յեղ հայտնի չեն, վորովհետեւ այդ ֆունկցիանե-

րի յեղ ծրու չորս ֆունկցիաների փոխադարձ կախու-

ճը դեռ չենք վորոշել:

Արիւնակ 2. Վորոշել չե 295°-ը 45°-ից չանցնող անկյուն
ֆունկցիայի ծիգոյով:

Պէնիւք $295^\circ = 360^\circ - 65^\circ = 270^\circ + 25^\circ$. Մաեանգ վաճ անկյունն

ե 25°-ը: Վորովհետեւ $270^\circ = 3 \cdot 90^\circ$ (անգույց թիւ անգամ 90°),

յեղ վորովհետեւ 295°-ը չորրորդ-խոնորդի անկյունն է (այդ-
անկյունն աեկանալ դասերն է), ապա

$$\sec 295^\circ = \sec (270^\circ + 25^\circ) = \operatorname{cosec} 25^\circ.$$

11րիւնակ 3. Վերադառնալ $925^\circ 14' 37", 04$ անկյան կոսինուսը:

$$\text{Անիմի } 925^\circ 14' 37", 04 = 2.360^\circ + (180^\circ + 25^\circ 14' 37", 04),$$

$$\text{ուստի } \cos 925^\circ 14' 37", 04 = \cos (\pi + 25^\circ 14' 37", 04).$$

Վերադառնալ այս անկյունը III ֆառորդի է, ապա նրա կոսինուսը բացասական է, յետև Վերադառնալ այդ անկյունը ներկայացնում է չորս-րորդ անգամ $\frac{\pi}{2}$, յետև առաջ անկյան գ-մասը, ապա ֆունկցիայի անունը վերաճման ժամանակ պետք է անփոփոխ ձևա. կունենանք:

$$\cos 925^\circ 14' 37", 04 = -\cos 25^\circ 14' 37", 04.$$

32. ընդհանուր յեղբայրացություն.

I. Այն թիւ անկյան շրջանային ֆունկցիան կարելի է փոխարինել 0-ի յետև $\frac{\pi}{2}$ -ի թիւով գ-րեւոր անկյան նույն անուն ֆունկցիայով:

II. Այն թիւ անկյան շրջանային ֆունկցիան կարելի է փոխարինել 0-ի յետև $\frac{\pi}{4}$ -ի թիւով գ-րեւոր անկյան (նույն անուն կամ (բացառիկ) ֆունկցիայով:

Այս յերկու փոխարինումների հնարավորությունը բխում է անժգոքուն այն հանգամանքից, Վոր բոլոր ֆառորդների անկյունները կարելի է ներկայացնել յերկու ձեւով, այն է

I ֆառորդ: $x, \frac{\pi}{2} - x.$

II " $\frac{\pi}{2} + x, \pi - x.$

III " $\pi + x, \frac{3\pi}{2} - x$

IV " $\frac{3\pi}{2} + x, 2\pi - x.$

Այս ձեւերից յեկը վերաճման ժամանակ թիւը ցուցնում է նույնանուն ֆունկցիա, Վորը հասցրաւուցում է

առաջին յեզրակացությունը . իսկ յերեւ աջայած սուր անկյունը $\pi/4$ -ից ձեռք լինի, ապա ծրար եւ հարեւի եւ այդ-անկյունը փոխարինելը լրացուցիչ անկյա՞ծ, զորն արդեւ $\pi/4$ -ից փոքր եւ լինի, այդ դեպքում քանկցիւայի անունը եւ փոխ-վի լրացուցիչ քանկցիւայի անվան. այս եւ հասկացում եւ յեր-կրորդ յեզրակացությունը:

Վարժուքներ .

1. Գտնել հետեւյալ քանկցիւանքը շրջանային անկյունների .

$$215^\circ 20' 7''; 773^\circ 44' 23''; -1490^\circ 28' 6'' 04; \frac{8\pi}{5}; -7\frac{2}{3}\pi; 25\pi.$$

Գտնել $\sin 22$, $\cos 11$, $\operatorname{tg} 44$.

Պարզել հետեւյալ արտահայտությունները

$$2. \frac{\operatorname{ctg} 157^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ}{\operatorname{tg} 49^\circ \sin 131^\circ}; \frac{\cos 117^\circ \operatorname{tg} 283^\circ}{\sec 118^\circ \sin 340^\circ}; \frac{\operatorname{cosec} 300^\circ \sin 120^\circ}{\cos(-750^\circ)}.$$

$$3. \sin\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) \cdot \cos(\pi - a) + \cos(a + 90^\circ) \cdot \sin(\pi - a);$$

$$4. \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{\sin\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}(-a)} - \frac{\sin\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(a - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)}.$$

$$5. \frac{\sin(270^\circ - a) \cdot \operatorname{tg}(\pi - b)}{\operatorname{tg}(\pi + b) \cdot \cos(\pi - a)} - \frac{\operatorname{ctg}\left(a - \frac{1}{2}\pi\right) \cdot \sin(b - 90^\circ)}{\cos(\pi - b) \cdot \operatorname{tg}(-a)}.$$

Հաշվել հետեւյալ արտահայտությունները .

$$6. \frac{a \cdot \cos 0^\circ - b \cdot \sec \pi}{\cos 90^\circ + b \cdot \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}} + \frac{a \cdot \sec 2\pi - b \cdot \cos 2\pi}{(a + b) \cdot \cos 4\pi - 2a \cdot \sin \pi}.$$

$$7. a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \cos \pi + b^2 \cdot \sec 4\pi \dots \text{ յերբ } a=3, b=2$$

$$8. \frac{a^3 + b^3}{a + b} \sin x - (a - b)^2 \cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) \dots \text{ յերբ } x = \frac{\pi}{2}$$

9. $2 \sin(x - 90^\circ) + \cos(x - \pi) - \sin(x - 2\pi) \dots$ յետև $x = \frac{\pi}{4}$

10. $4 \cos(2x - \frac{3\pi}{2}) - 3 \operatorname{ctg}(-x + 60^\circ) \dots$ յետև $x = -\frac{4}{5}\pi$

11. $\frac{\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg}(x + 270^\circ)}{8 \sin(75^\circ + x)} \dots$ յետև $x = 225^\circ$

12. $\left\{ \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi + 3x\right) + \sec(x + 225^\circ) \right\}^{-2} \dots$ յետև $x = \frac{3}{4}\pi$

Կայինք որով հետևելով լավ բանաչափերի իրաչափություններ

13. $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) \cos(\pi - a) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) \sin(\pi + a) = 0.$

14. $(a+b)^2 \sec(2\pi - m) + 4ab \cdot \operatorname{cosec}(270^\circ - m) = (a-b)^2 \operatorname{cosec}\left(m + \frac{1}{2}\pi\right).$

15. $\sin^2(\pi - a) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) = \sec^2(2\pi - a) - \operatorname{ctg}^2\left(a - \frac{3}{2}\pi\right).$

33. Քաղաքային ֆունկցիաների փոփոխությունները.

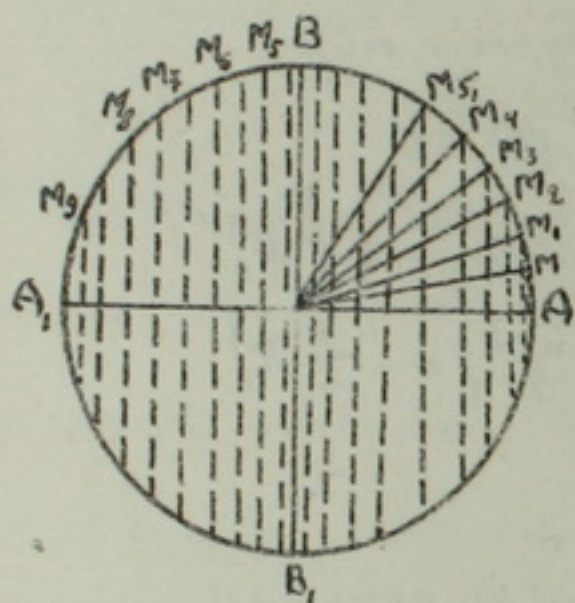
Ինչպե՞ս պետք է համարել, զոր անկյուն կողմերի ցարքեր գործերի ծանուցանակներն են ֆունկցիաների անկյունաչափական գծերը նույնպես ցարքեր են. բայց ինչպե՞ս անկյուն փոփոխումն է համարվում ուղղանկյուն, որ. ածում է 0-ից մինչև $+\infty$, յետևանքաբան գծերը, հետևելով ապես նայելով քաղաքային ֆունկցիաները, փոփոխումն են իրանգամայն յուրահարույն չելով:

Ստ. պարզապես ինչպե՞ս են առնվում այդ ֆունկցիաների փոփոխությունները:

34. Արևուսի փոփոխությունները Առհասարակ ֆունկցիաներ

Արևուսի անկյունաչափական գծերը շարժական թեքի (շառավիղի) զերգակերից անշարժ հրծրի (շառավիղի) վրա թեք-ցրած ուղղահայացի յերկարությունն է. զորով հետևելով այդ թեքի զերգակերը առհասարակ է R շառավիղ ունեցող շրջանագծի

գծի վրա (պատկ. 11), իսկ եթե θ դիրքն անփոփոխել, ապա անըն-
հայտ է, թե որ ուղղահայացի յերկարությունը, հեղեղապետ նայել
սինուսը, վերջավոր թիվ է: Անցնենք ծանրաճան լինություն:
Պրակտիկ անկյան փոփոխությունը արժեքն է $+0$. այս դեպքում
անկյան յերկու կողմերը համընկնում են, ուղղահայացի յեր-
կարությունը դառնում է $+0$, իսկ $\sin 0 = +0$: Յերբ անկյունը



պատկ. 11

աճում է, Օվ շարժական թեքը գրա-
վում է թի շարժ դիրքեր՝ ՕՄ1, ՕՄ2,
ՕՄ3, ՕՄ4 իսկ, վերջապետ, ՕԲ:

Իրիշխանյն ծանաճակ ուղղահայացի յեր-
կարությունը ծեծանում է ավելի ու ավել-
ի յերկար, փոքրիկ հեղեղ ուղղահայացն
անեն անգամ թի փոքր շարժ լեւնե,

իսկ շարժ կենտրոնին ծորենալով ծեծանում է: $\frac{\pi}{2}$ անկյան հա-
ճար Օվ թեքն ընդունում է ՕԲ դիրքը, այսինքն չուղիւմ է
ուղղաձիգ- շառավղի հետ, հեղեղապետ, հաճախարում է
Ք-ի. այն ծանաճակ սինուսը հաճախար է $\frac{R}{R} = 1$: Այսպես
ուրեմ, սինուսն I փառորդ-ում աճող, դրական, վերջավոր
Ֆունկցիա է իսկ հազորդ-արար ընդունում է $+0$ -ից թիւնել $+1$
արժեքները:

II փառորդ-ում անկյունը շարունակում է աճել $\frac{\pi}{2}$ -ից թիւնել
II. Պրա հետ թիւնել Օվ շարժական թեքն ընդունում է թի
շարժ նոր դիրքեր՝ ՕՄ5, ՕՄ6, ՕՄ7, ՕՄ8, ՕՄ9 իսկ ՕԲ.
ուղղահայացը հեղեղապետ հեռանում է կենտրոնից իսկ, հե-
ղեղապետ, նվազում է, ծաւալով դրական: II անկյան հա-

Եւր 0 միջին չունիւմ եւ 0 թիւը հարկւնաւոր շառաւիղի հետ,
 ուղղահայացի յերկարութիւնը դառնում եւ $+0$: Եւստիս ուրեմ,
 սինուսը II փառորդում նվազող, դրական, վերջապէս թու-
 կցիւս եւ յեղ հազորդ-արար ընդունում եւ $+1$ -ից թիւնել $+0$
 արժեքները:

Զարուակելով դիտողութիւնը այս չեղով՝ տեսնում ենք,
 վոր III փառորդում սինուսը դառնում եւ բացասական, յեղ
 թիւնելու անկյունն ածում եւ π -ից թիւնել $\frac{3\pi}{2}$, սինուսը
 նվազում եւ -0 -ից թիւնել -1 : IV փառորդում սինուսը շա-
 րունակում եւ ծաւ (ծաւ) բացասական, յեղ թիւնելու անկյունն
 ածում եւ $\frac{3\pi}{2}$ -ից թիւնել 2π , սինուսն ածում եւ -1 -ից թիւնել
 -0 :

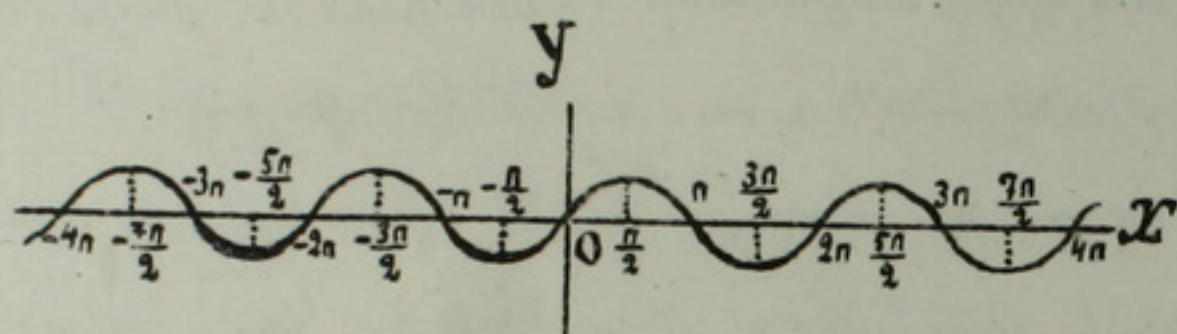
Յերբ անկյունն շարունակում եւ ածել յերկրորդ շրջանա-
 գծի սահմաններում, այսինքն 2π -ից թիւնել 4π , ապա սին-
 ուսը հազորդ-արար ընդունում եւ նույն արժեքները, ինչ
 վոր առաջին շրջանագծի սահմաններում: Նույնը տեղի
 ունի նայել հազորդ շրջանագծերի սահմաններում: Ուրիշ
 խոսքով, սինուսը չի փոփոխւում, յերբ աղէղը (անկյունը)
 թեւանում եւ թեկ կամ թիւանի շրջանագծերով (լրիւ անկյուն-
 ներով):

" յայտնով տեսնում ենք, վոր սինուսի փոփոխւման սահ-
 մաններն են -1 -ը յեղ $+1$. այսինքն, յերե անկյունը
 փոփոխւի 0 -ից թիւնել $+\infty$, սինուսն անվերջ անգամներ
 կընդունի -1 -ի յեղ $+1$ -ի թիւնել ընկած բոլոր արժեքները:

" անկյունը կարող եւ փոփոխուել նայել 0 -ից թիւնել $-\infty$,

յեւ դարձյալ սինուսի փոփոխման առճանները եւոյնը հը
ճան, զորովհետեւ անկյան նշանը ֆունկցիայի բացարձակ
ձեւորթյան վրա ազդեցութիւն չունի:

35. Արեւուսի գրաֆիկը. Պիտեւի կայունացնելու նպատա-
կով գրաֆիկորեն պարզեցանէնք սինուսի փոփոխման
որեւիշը: Վերցնենք կորդինատների ծր ուղղանկյուն
սիսթեմ (պարզ. 12) յեւ Ox առանցքի վրա դնենք x



պարզ. 12

անկյախ փոփոխականի արժեքներից ծր փախար, որ $0, \pm \frac{\pi}{2},$
 $\pm \pi, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm 3\pi, \pm \frac{7\pi}{2}, \dots$ Այդ դեպքում

Oy առանցքի վրա հը դրվեն $y = \sin x$ ֆունկցիայի հաճապա-
րաւարան արժեքները $\pm 0, \pm 1, \pm 0, \mp 1, \mp 0, \pm 1, \dots$

x -երի առանցքի հաճապաւարաւան կերերում կառուցանե-
լով որդ-ինատների քվյալ արժեքները՝ կարանաւք ծրանկերը
անընդհաւ կոր գիծ, զորն արտահայտում է սինուսի
փոփոխման որեւիշը: Այս կորը կոչվում է սինուսոյիդ:

36. 15) անգեւանների փոփոխութիւնները: I փառ որդ.

Յերբ անկյունն ածում է O -ից ծրնկել $\frac{\pi}{2}$ (0° -ից 90°), անգեւ-

ար դրակաւ է յեւ ածում է: Յերբ անկյունը հաճապաւք O -ի,

անգեւանի անկյունաւոր: փախան գիծը դառնում է O -ի: Յերբ

անկյունը դառնում է $\frac{\pi}{2}$, ապա անկյան շարժական կողմը

(թիւը) դառնում է քաղաքան առաջին շաւախորին յեւ վրա

հեղք հաւրվել չի կարող: Այս դեպքում աւում են, զոր նրանց

հայրժամ կերպ գրեմք է 0-ից անվերջ հետադարձության վրա
որեն ցանց-ենար անկյունաչափական գիծը $= \infty$ յեւ $\text{tg } \frac{\pi}{2} = \infty$,
այսինքն ցանց-ենար անվերջ ծնծ է յեւ դրական:

II ֆառորդ. Յերբ անկյունն ածուծ է $\frac{\pi}{2}$ -ից յինչեւ π (90° -ից
յինչեւ 180°), ցանց-ենար բացասական է յեւ բացարձակ արժե-
քով նվազում է: Յերբ անկյան շարժական կողմը յերկրորդ-
ֆառորդի կողմից անընդհար ծորենում է $\frac{\pi}{2}$ անկյանը, նրա
շարունակությունն աճելի ու աճելի հետու կերպում է հասնում
առաջին շոշափողի բացասական ուղղությունը, վորով ցան-
ց-ենար անկյունաչափական գիծը, ճաշով բացասական՝ արանում
է բնական աճելի ու աճելի ծնծ արժեքներ. յերբ անկյու-
նը յերկրորդ ֆառորդի կողմից նվազելով՝ հասնում է $\frac{\pi}{2}$ սահ-
մանին, այն ժամանակ ցանց-ենար անկյունաչափական գիծը,
հետեւեալապես նայել ցանց-ենար, արանում է $-\infty$: Յերբ
անկյունը դառնում է π , ցանց-ենար անկյունաչափական
գիծը դառնում է կեր, հետեւեալապես, ցանց-ենար՝ -0 :

II յսպիսով, յերկրորդ ֆառորդի սահմաններում ցանց-են-
ար փոփոխվում է $-\infty$ -ից յինչեւ -0 :

Երեւի ցեւենում ենի, վոր $\frac{\pi}{2}$ անկյան հաճար ցանց-ենար
յերկու արժեք ունի. $+\infty$ յեւ $-\infty$. առաջին արժեքը
հաճապարարանում է այն դեպքին, յերբ $\frac{\pi}{2}$ անկյունն առա-
ջացել է սոր անկյունը ծնծացնելուց, իսկ յերկրորդը՝ այն
դեպքին, յերբ $\frac{\pi}{2}$ անկյունն առաջացել է բութ անկյունը
փոփոխելուց: Այս յորտէ ծաթեճարկայի յեւ արդաւոր-
արում է այսպես

$$\text{սահ. } \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) = +\infty$$

$$\text{սահ. } \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) = -\infty$$

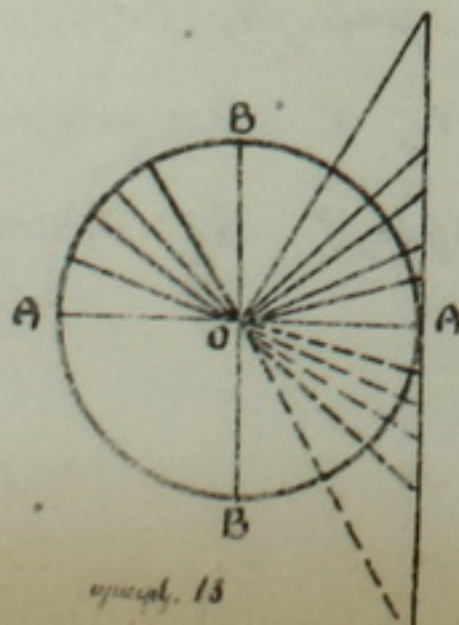
III յեւ IV խոնորդ. յերթ անկյունն առնուծ եւ π -ից յինչեւ $\frac{3\pi}{2}$,
 քանդեանց հազորդ-աբար սրանուծ եւ նույն արժեքները, ինչ
 վոր առաջին խոնորդուծ՝ $\left(\operatorname{tg} \pi + \varepsilon\right)_{\text{սահ. } \varepsilon=0} = +0$, $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right)_{\text{սահ. } \varepsilon=0} = +\infty$;
 յերթ անկյունն առնուծ եւ $\frac{3\pi}{2}$ -ից յինչեւ 2π , քանդեանց հազոր-
 դ-աբար սրանուծ եւ նույն արժեքները, ինչ վոր յերկրորդ- խոնոր-
 դ-ուծ՝ $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right)_{\text{սահ. } \varepsilon=0} = -\infty$, $\operatorname{tg} (2\pi - \varepsilon)_{\text{սահ. } \varepsilon=0} = -0$:

Առանգեանի դեպքում արեւնուծ են, վոր ֆունկցիայի արժեքները
 սկսուծ են նույն հազորդ-ականությամբ կրկնվել յի կիսաշրջա-
 նագծից հետո: Մարդ եւ, վոր աշեղն ավելացնելով կամ պա-
 կասեցնելով յի խանի-լրիւ շրջանագ-ներ՝ փոխան չենք լինել
 քանդեանի արժեքը:

Նույն յեղրակացութիւնները վերաբերուծ են նաեւ բացասական
 անկյուններին:

Մարդ վեց, վոր քանդեանի ծանոթութիւնը սահմանափակման
 յենթակա չեւ. նա կարող եւ փոփոխվել $-\infty$ -ից յինչեւ $+\infty$:

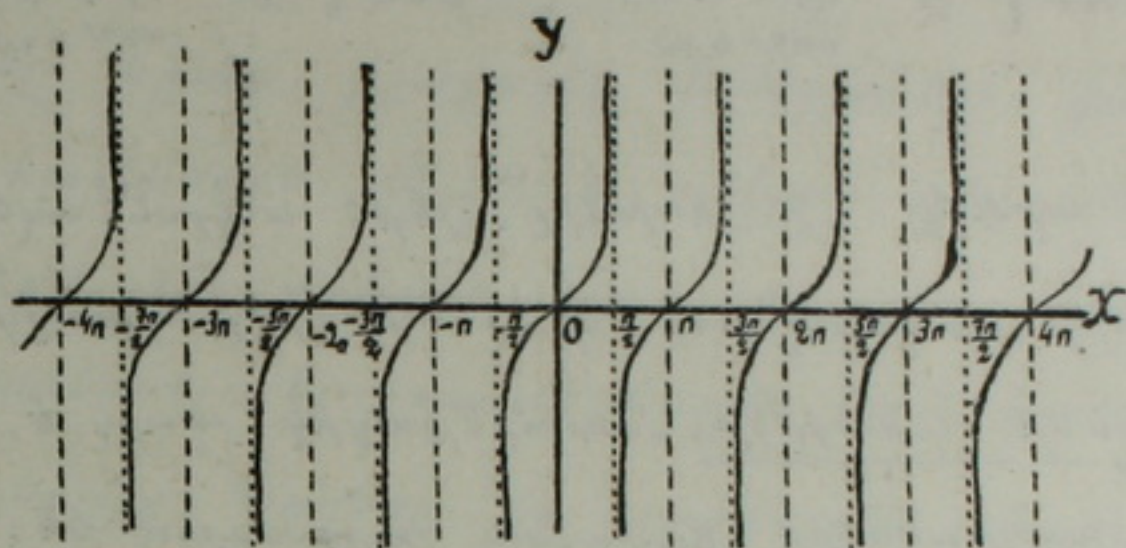
37. Առանգեանի գրաֆիկը. Առանգեանի փոփոխութիւնները
 կարելի եւ պատկերացնել յի գրաֆիկով, վորը կուզուծեւ
 քանդեանի (պատկ. 14): Նրա կառուցման համար X -երի
 առանցքի վրա դնուծ ենք կորդի-նատներէ սկզբից դե-
 պի առ յեւ յեւ դեպի ջուր յի շարք հարվածներ, որ $\frac{\pi}{2}$,
 π , $\frac{3\pi}{2}$, 2π , ... եւ, խաճանակ քանդեանի հազորդ-ական



պատկ. 13

արժեքները կազմուծ են անվերջ
 թվով կոր գ-ներ (ֆուկտեր), վորում
 x -երի առանցքը կտրուծ են 0 ,
 π , 2π , $-\pi$, -2π , ... կե-
 րտուծ յեւ անվերջ ծորեւում

ևն y -ներն առանցքին զուգահեռ այն ուղիղներին, զորոնք
անցնում են $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2} \dots$ կետերով



պատկ. 14

38. Աեկանաթ փոփոխությունները. Աեկանաթ անկյունաչա-

փական q -ի՞՞՞ հասրողի այն հասրվածն է, զորը գտնվում
է սկզբնականի յեղ առաջին շոշափողի ծիզեղ:

Յերբ x -անկյունը հավասար է 0 -ի, այդ հասրվածը հավա-
սար է R -ի, ուստի յեղ $\sec 0 = 1$: Ենուհեղեղ x -ի աճման
հեղ ծիաթն (պատկ. 13) աճում է նայեղ աեկանաթ, ճաւղ
դրական առաջին խառորդի աաեծաններում, ինչպես այդ-
րեանում եւեթ նկարից: Յերբ $x = \frac{\pi}{2}$, աեկանաթ q -ի՞՞՞ դառ-
նում է րանգեւսի զուգահեռ, այդ պարծառող ծիանց
հասրման կեղը հեռանում է ծիւղեղ աեաաեծանություն:

Խերեծա $\sec \frac{\pi}{2} = +\infty$: Ծայց յերե x -ը ծորեցնեթ $\frac{\pi}{2}$ -ի
յերկրորդ խառորդի կողծից, ապա $\sec \frac{\pi}{2} = -\infty$, զորովե-
րեղ յերկրորդ խառորդում աեկանաթ քայաաաեթ է:

Յերբ $x = \pi$, աեկանաթ q -ի՞՞՞ դառնում է $-R$, հեղեղա-
պես $\sec \pi = -1$:

III խառորդում աեկանաթ նվազած է -1 -ից ծիւղեղ $-\infty$, իսկ

IV խառորդում նվազում է $+\infty$ ից ծիւղեղ $+1$: Եյաթեղ յեղ

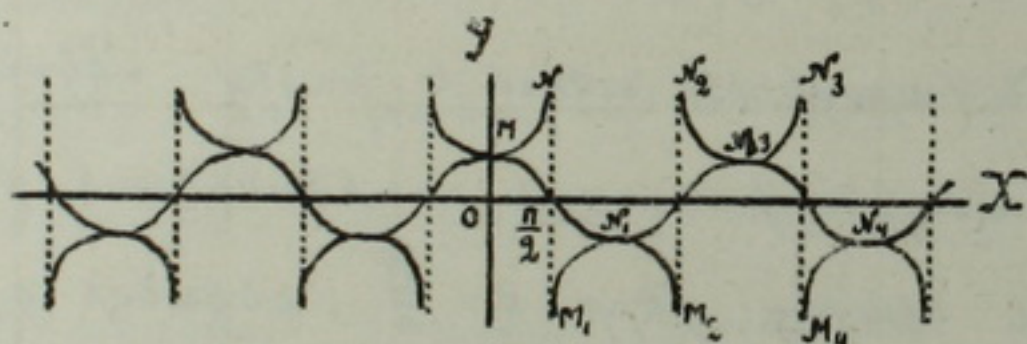
կարելի է գրեղ, յերե ε դրական ա. Երառող խառորդում:

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \underset{\text{սահ. } \varepsilon=0}{=} +\infty, \quad \sec\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \underset{\text{սահ. } \varepsilon=0}{=} -\infty.$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) \underset{\text{սահ. } \varepsilon=0}{=} -\infty, \quad \sec\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) \underset{\text{սահ. } \varepsilon=0}{=} +\infty.$$

Անկանաթ արժեքը չի փոխվիլ, յետե անկյանն ավելացնենք կամ նրանից պակասեցնենք մի քանի լրիվ պտույտներ:

39. Անկանաթ գ-րաֆիկը. նախընթացից պարզ է, Վոր անկանաթի փոփոխությունները բաղաձայն յուրահանրուկ են: Այսպես, նա սրանում է անվերջ մեծ դրական յեղ բացասական արժեքներ, բայց միջեզնայն խաճանակ չի անցնում զերոյով, այլ թվապես փոխանում է միայն մինչեզ մեկը: Անկանաթի գ-րաֆիկը կամ անկանաթիդ-ը մեզ պարզում է այդ (պարկ. 15)



պարկ. 15

Յեթի x -ը փոփոխվում է 0-ից մինչեզ $\pi/2$, անկանաթ փոփոխվում է $+1$ -ից մինչեզ $+\infty$ յեղ պարկերացվում է M, N հյուղով. այնուհետեզ, յեթի x -ը փոփոխվում է $\pi/2$ -ից մինչեզ $3\pi/2$, անկանաթ փոփոխվում է $-\infty$ -ից մինչեզ -1 յեղ -1 -ից մինչեզ $-\infty$ (M_1, M_2, M_3 հյուղ). զերզապես, յեթի x -ը փոփոխվում է $3\pi/2$ -ից մինչեզ 2π , անկանաթ փոփոխվում է $+\infty$ -ից մինչեզ $+1$ (M_2, M_3 հյուղ): Անկանաթի հերազա փոփոխությունները պարկերացվում են կորի նույն հյուղերով. նույնը զերաբերում է անկանաթի փոփոխություններին այն դեպքում, յեթի x -ը բացասական արժեքներ ունի:

Պ-փոփոխություն. Կոսինուսի, կոսանգ-ենսի յեւ կոսեկանսի փոփոխություններն առանցիկ փննության առարկա չեն դարձնուծ, վորովհետեւ այդ փոփոխությունները դյուրությամբ կարելի է վերածել նրանց լրացուցիչ ֆունկցիաների փոփոխություններին. հարկավոր է ծիայն x անկյան ցեղ վերցնել $x + \frac{\pi}{2}$ անկյունը: Այն ժամանակ այդ լրացուցիչ ֆունկցիաների գ-րաֆիկներն եւ կը պարկերացվեն նույն կորերով. նրանց հաճարեղվող ճյուղերը կը ցարքերվեն ծիայն 0 -ից ունեցած հեռավորությամբ: Գ-րաֆիկների կառուցումը թողնվուծն աշակերտներին:

40. Անկյունաչափական ֆունկցիաների վերաձայն թանաչե-վերը յեւ փոփոխությունները կարելի է պարկերացնել հետեւյալ աղյուսակով.

Անկյուն	Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens	Secans	Cosecans
0	0	1	0	$\pm \infty$	1	$\pm \infty$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cosec} x$	$\sec x$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{cosec} x$	$\sec x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
π	0	-1	0	$\mp \infty$	-1	$\pm \infty$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\sec x$	$-\operatorname{cosec} x$
$\frac{3\pi}{2} - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{cosec} x$	$-\sec x$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm \infty$	0	$\mp \infty$	-1
$\frac{3\pi}{2} + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cosec} x$	$-\sec x$
$2\pi - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$-\operatorname{cosec} x$
2π	0	1	0	$\mp \infty$	1	$\mp \infty$
$2\pi + x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$-\operatorname{cosec} x$

41.*

42. Չրգանային ֆունկցիաների պարբերականությունը. Ուշա-
դ-րությամբ դիտելով չրգանային ֆունկցիաների գ-րաֆիկե-
րը՝ հանգում ենք պարզ յեւ կարելիոր յեւրակացությունների:
Այսպես, որ. այդ բոլոր գ-րաֆիկները բաշկացած են անթիվ
բազմությամբ ճյուղերից, բայց նրանցից յուրաքանչյուրի
ճյուղերի կրկնվում են վորոշ կարգով, պարբերական
փանտրդական կորորակի թվանշանների նման: Ուշի դարչ
նելով անկախ փոփոխական x աղելի (անկյանը) փեսնում
ենք, վոր այդ կրկնությունները փեղի ունին ամեն անգամ,
յերբ x -ը ծեծանում է 2π -ով, այսինքն ծի ամբողջ չրգա-
նագ-նով: Առ հասարակ, յերե անկախ փոփոխականին վո-
րոշ փանակություն աղելացնելուց այդ փոփոխականի ֆունկ-
ցիան իր արժեքը չի փոխում, ապա այդպիսի ֆունկ-
ցիան կոչվում է պարբերական, իսկ փոփոխականին աղե-
լացրած փանակությունը՝ ֆունկցիայի պարբերություն:

Այդպիսի ֆունկցիաներ են բոլոր չրգանային ֆունկցի-
աները. նրանցից 4-ը սինուսը, կոսինուսը, սեկանսը յեւ
կոսեկանսն ունին 2π պարբերությունը, իսկ ծյուս 2-ը
փանկեւսը յեւ կոփանեգեւսն ունին π պարբերությունը:

43. Չրգանային ֆունկցիաների անընդհատությունը.

Արդեն գիտենք, վոր x անկախ փոփոխականը փոփոխ-
վում է անընդհատ, բայց նրա ֆունկցիաների ծաւիւն
նույնը չենք կարող պեղել առանց այլ յեւայլության:

Փոփոխությունները ցույց փղող համապատասխան նկարներից

* 41-ի նյութը թարգմանության ձգ առաջ է չգ.ւած: Ճ.թ.

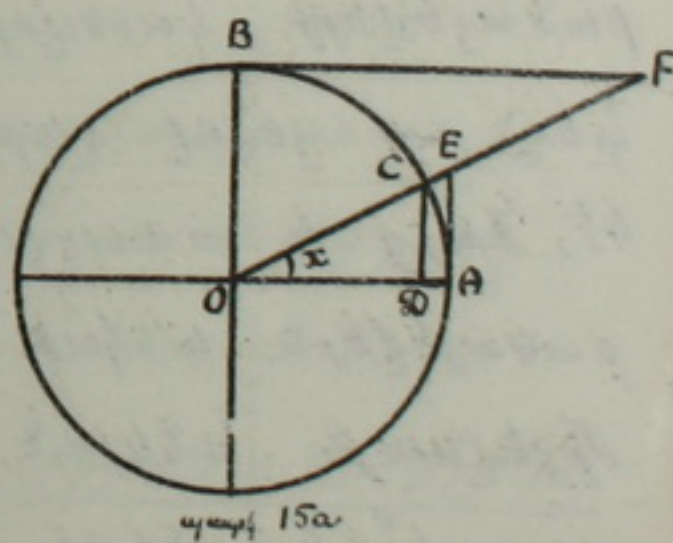
պարզ կարելի է տեսնել, զոր ծրագրային փառորդի առհասարակ
ներքո՞ւն անկյունաչափական ֆունկցիաներն անընդհանր են, այս-
պիսին նրանց թե առհասարակ յեւ թե նվազած կարարվածե-
ն թե զհարյուններով, այլ յերբ անկյունը շար փոքր
առնու է պահած, ֆունկցիան եւ շար փոքր փոփոխություն
է կրած: Դերբ անկյունը չի ծած ծրագրային փառորդի
առհասարակութեամբ, այն ժամանակ պիտուր յեւ կոսինուսը շա-
րունակած են ծաւ աճեալութի անընդհանր, բայց քան-
գէնը, կոսինուսը, սինուսը յեւ կոսինուսն ունենում
են ընդհանրման կերպեր: Այդ պարզ կերպով յերեւում է
նայեւ իւրաքանչեւ զ-քաթիկներու. Դիւղեա պիտու-
աի (յեւ կոսինուսի) զ-քաթիկը ծր անընդհանր գիծ է ներ-
կայացնում, ծրա. ֆունկցիաների զ-քաթիկները ընդհանր չյու-
ղերից են բաղկացած:

Գլուխ III

Գլխավոր առընչությունները ծրագրային անկյան
շրջանային ֆունկցիաների ծրագր:

Ա. Իրմանակա՞ն առընչությունների պարտէ՞ք.

44. Վերցնենք R կաճաւոր շառաւիղն ունեցող ծր
շրջանագիծ յեւ իննենք քված
զոր յեւ $\angle AOC = x$ անկյունաչա-
փական ֆունկցիաների փոխա-
դարձ կախումը. թող առայժմ
 x անկյունը լինի առաջին փա-
ռորդի անկյուն. կառուցանենք
 x անկյան բոլոր անկյունաչափական գծերը.



1) $\triangle ODB$ յեռանկյունիք կարանուիք
 $OB^2 + OD^2 = OC^2$.

Բոլոր անդամները բաժանելով R^2 -ու վրա կը գտնենք
 $\frac{OB^2}{R^2} + \frac{OD^2}{R^2} = \frac{OC^2}{R^2}$ կամ $\left(\frac{OB}{R}\right)^2 + \left(\frac{OD}{R}\right)^2 = \left(\frac{OC}{R}\right)^2$;

յեւ կամ (1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\triangle AEO$ յեւ $\triangle ECO$ յեռանկյունիքի նմանությունից գտնուծ ենք

$$\frac{AE}{AO} = \frac{CO}{OD} = \frac{CO:R}{OD:R},$$

վերջերից յեւ

$$(2) \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{OE}{AO} = \frac{OC}{OD} = \frac{OC:R}{OD:R}$$

վերջերից յեւ

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (3).$$

$\triangle BOF$ յեւ $\triangle CDO$ յեռանկյունիքի նմանությունից ունենք

$$\frac{BF}{OB} = \frac{OD}{CO} = \frac{OD:R}{CO:R},$$

վերջից յեւ

$$(4) \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{OF}{OB} = \frac{OC}{CO} = \frac{OC:R}{CO:R}$$

վերջից յեւ

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad (5).$$

Առաջին յերեք բանաձևերն արդեն յեռանկյունաչափությունից հայտնի են, իսկ 4-րդը յեւ 5-րդը բխուծ են սեկանսի յեւ կոսեկանսի սահմանուծից անմիջապէս, սակայն բանաձևերի կարեւորությունը ի նկատի ունենալով այսօրեղ այլ չեւով զարգացրինք նրանց առաջացուծը:

45. Հարց եւ առաջանուծ. նախորդ հոդումուծ սրաչափ բանաձևերն անկախ են ծրծյանցից յեւ, առհասարակ, թիւեւունյն անկյան θ շրջանային ֆունկցիաների թիւեւ քանի անկախ առընչություններ կարող են լինել: Այդ հարցին պատասխանուծ եւ հետեւյալ յեւորեւծ:

ԼՔիյեզնայն անկյան վեց շրջանային ֆունկցիաների
ծրգեվ գոյությունն ունի՞ն հիւնգ. յեվ ծրայն հիւնգ. ծր-
ծյանցից անկախ առընչություններ:

Դիրտ, յերե անկախ առընչությունների թիվը շատ էրներ
հիւնգից, որ. վեցը, այն ժամանակ կունենային 6 անկախ
հաճախություններ վեց անհայտներով, վորոնցից անհայտ-
ները կորոշվեն իբրեւ հասարակուն ֆանկցիություններ,
այսինքն անկյունաչափական ֆունկցիաները չեն լինիլ
անկյան հետ փոփոխվող թեսություններ, այլ յուրաքանչյու-
րը ըստ անկյունների հաճար կը պահպանեն նույն հաս-
արակուն արժեքը. պարզ է, վոր այդ անհնարին է:

Դսկ յերե անկախ առընչությունների թիվը փոքր էրներ
հիւնգից, որ. չորսը, ապա իմանալով ֆունկցիաներից
յեկի թվային արժեքը, կարանայինք, 4 հաճախություն
5 անհայտով, այսինքն ծր անորոշ սխալեմ. այն ինչ
յեզ հայտնի է, վոր յերբ քված է ֆունկցիաներից յե-
կի թվային արժեքը, կարող ենք նրա ծրոցով վորո-
շել թե անկյունը յեվ թե ծյուս ֆունկցիաները:

Սուպիսով պարզ է, վոր ծրծյանցից անկախ առընչու-
թյունները ծրայն հիւնգն են:

Վոր նախորդ հոդ-վածի (1-5) առընչություններն իրա-
րից անկախ են, բխում է այն հանգամանքից, վոր
յուրաքանչյուր նույնության յեզ ծր նոր ֆունկցիա է

առաջ գալիս: 417- հիւնգ. առընչությունները կոշ-
վում են նիմասից:

46. Հիմնական առնչությունների ընդհանրացում
ապացույց

Քեր ապացույց հիմնական առնչությունները ճիշդ են
վաղ ծրայն դրական սուր անկյունների, այլ յեւ մեծ
զեւակ անկյունների համար:

Երո՛ւ $\cos$, $\sin$ յեւ $\tan$ ուղղանկյուն յեռանկյունների
նմանությունը $\triangle ABC$ պահպանելի վաղ ծրայն առաջին քա-
ռորդում, այլ նայել բարձր քառորդներում. այդ պայ-
ծանով ապացույց առնչություններն ըստ բացարձակ
արժեքի իրենց ուժի յեւ $\triangle ABC$ ծրայն նայել այժմ:

Ինչ վերաբերում է նշաններին, ապա կարելի է ասել
հետեւեւալով. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ հաճախությունը կարծ
չունի $\sin x$ -ի յեւ $\cos x$ -ի նշաններից, վերաբերելով $\sin^2 x$ -ը
յեւ $\cos^2 x$ -ը ճիշտ դրական են, իբրեւ իրական քանակ-
ությունների չափ- աստիճաններ:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ յեւ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ հաճախությունները նոյն-
պես ճիշդ են ասել x -ի համար. իրո՛ւ, $\tan x$ -ը յեւ $\cot x$ -ը
դրական են I յեւ III քառորդում, վերաբերելով $\sin x$ -ը
յեւ $\cos x$ -ը նոյն նշանն ունեն (հետեւեւալով նրանց հա-
րաբերությունը դրական է). $\tan x$ -ը յեւ $\cot x$ -ը բացասա-
կան են II յեւ IV քառորդում, վերաբերելով $\sin x$ -ը
յեւ $\cos x$ -ը քառեր նշաններ ունեն (հետեւեւալով նրանց
քանակ- բացասական է):

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ յեւ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ հաճախությունները
ճիշդ են ասել x -ի համար, վերաբերելով $\sec x$ -ը

յեւ $\cos x$ -ը բոլոր ֆունկցիոններն են, որոնք ունենան
յննչպէս յեւ $\operatorname{cosec} x$ -ը յեւ $\tan x$ -ը:

Կի ծանօթ անընդունօթները ճիշդ են նաեւ այն
դեպքերի համար, յերբ x -ը դառնում է $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ,$
 270° յեւ 360° . այդ կարելի է պարզել բանաչեւերի
ձեզ արեղարեւով քանկոյրաների համապատասխան արժեք-
ները:

47. Դառախ հի ծանօթ բանաչեւերից զարգ-ործա-
ւած են յի ֆանի որիշներն յեւ, զորոնք կարող են
հի ծանօթից որպէս իւրեւաններ պաշտել:

II 17. 1 րայուցիչ բանաչեւերից կարելի արագ-ուշներն են
հետեւեւ 1 երեւր.

1) Բաշտապարկելով $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ յեւ $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ հաշւաւորու-
թյունների համապատասխան ծանրը՝ կարանաւք

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 \quad (6)$$

2) Բաժանելով (1) հաշւաւորութիւնը $\cos^2 x$ -ի վրա յեւ
կի բաժանելով (2) յեւ (3) բանաչեւերը՝ կը գ-րենեւք

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad (7)$$

3) Բաժանելով (1) հաշւաւորութիւնը $\sin^2 x$ -ի վրա յեւ
կի բաժանելով (2) յեւ (3) բանաչեւերը՝ կը գ-րենեւք

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x \quad (8)$$

II 18. 1 րայուցիչ բանաչեւերը կարելի էր պաւնաւ
նաեւ յերկրաչափորեւ (պարկ. 15a) յեւ անկոյնների
նճանքութիւնից. Բայց վերլուծակաւ (անալիտիկ) ձեւո-
րը գերադասելի է յերկու պարծառով. նախ՝ արդա-
ձեւով այդ բանաչեւերն ընդհանուր բանաչեւերից,

վարած էնի. վոր նրանի ընդհանուր են. յերկրորդ՝
արարածությունն ինքնին զույգ և փափա, վոր այդ-բանա-
չեւերը հիմնական բանաչեւերի հետեւանիւններ են յեւ վոր
թե անկախ. նոր առընչություններ:

Բ. Գ-ուժարժան թեորեմը յեւ նրա հետեւանիւնները
48. Թեորեմի եութունն ու նշանակությունը. յեթե Տեւ հայրնի
են վորչեւ յերկու անկյունների սիւռուներն ու կոսինուս-
ները, չի՞ կարելի արդյոք նրանց ծրոյցով գտնել այդ-
անկյունների գ-ուժարի սինուսը յեւ կոսինուսը: Մյապիսի
խնդրով առաջին անգամ զբաղեց ի. Մպրոշնեուսը յեւ
փայլուն կերպով լուծեց: Նրա գ-տած բանաչեւը վե-
րաբերուծ էր յերկու սուր անկյունների գ-ուժարի սինու-
սին ծրայն. այնուհետեւ այդ-բանաչեւն ընդ-արչակե-
լով՝ փարատեցին ածեն անկյունների յեւ բոլոր ֆունկ-
ցիաների վրա: Ներկայուծա այդ-բանաչեւը հայրնի և
„Գ-ուժարժան թեորեմ“ անունով:

Լազար Կառնո-ն (1753 - 1823) իր „*Géométrie de*
position“ (1803) գ-րքով զույգ փոխ, վոր Մպրոշնե-
ուի փոխած բանաչեւից կարելի և ստանալ անկյունա-
չափության յեւ յեռանկյունաչափության բոլոր բանա-
չեւերը. նրա յեղանակը ծաւաճ բանեցւած և ներկա
գ-լխուծ:

„Գ-ուժարժան թեորեմի“ կարեւոր նշանակությունը շարերին
և դրդել զբաղվել այդ-թեորեմի ապացույցներով: Կան
ծի շարք ապացույցներ, վորոնցից պարզագույնը յեւ հա-

ճարձու եմ ստորեւ զեքեղածը. քայքայեալ քան քան եյու-
թին անցնելը՝ անհրաժեշտ է ապացուցել թի ոտանդակ թե-
որեմ:

49. 1. առաջագործութիւններ թերեւ. շեռանկյան յերկու կող-
ծեր առաջագործութիւններ յերրորդ կողծի վրա՝ հանրահաշ-
վորեն գումարելով ստանում ենք յերրորդ կողծը.
Թերեւեմ ապացուցենք 1) սրանկյուն, 2) բթանկյուն յեռան-
կյունների համար:

1. Դիցուք $\triangle ABC$ -ի թեզ (պատկ. 16) a յեւ b կողծերն առա-
ջագործ են C -ի վրա. այն ժամանակ

$$BK = \text{առաջագործութիւն } a\text{-ի}$$

$$KA = \text{ " } b\text{-ի}$$

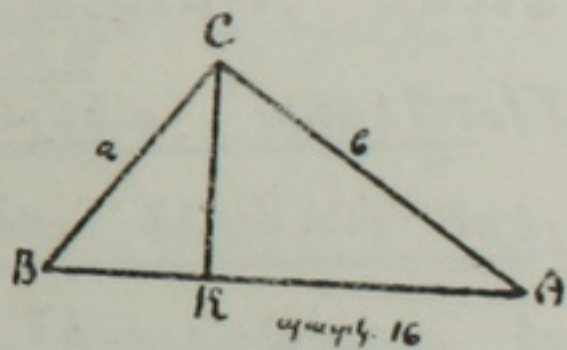
$$c = \text{առաջագործութիւն } a + \text{առաջագործութիւն } b.$$

Հորովհետեւ BCK յեւ CAK ուղղանկյուն յեռանկյուններից
գոյնում ենք, զոր

$$BK = a \cdot \cos B, \quad KA = b \cdot \cos A,$$

ապա զերգումակաւորեն

$$(9) \quad c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A.$$



2. Դիցուք $\triangle ABC$ յեռանկյան թեզ (պատկ. 17) A անկյունը
բութ է, այդ դեպքում

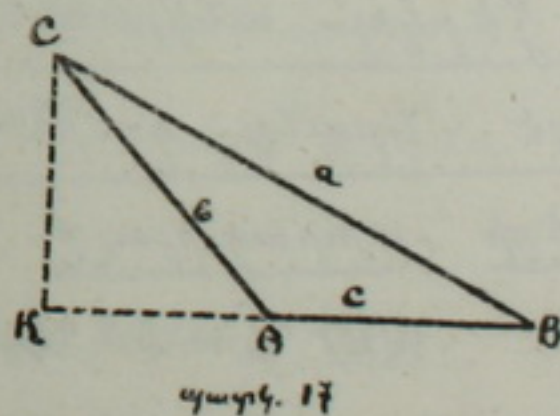
$$KB = \text{առաջագործ. } a$$

$$KA = \text{ " } b$$

$$c = \text{առաջագործ. } a - \text{առաջագործ. } b.$$

Դիմու կողծից

$$KB = a \cos B, \quad KA = -b \cos A,$$



Վերադառնալով $\cos A$ -ն բացասական թվերումն է, յետև A անկյունը բութ է ($K.A$ -ն վերջնական էն էր բացասական թվերում)։ ուստի յետ

$$\text{առաջագ. } a - \text{առաջագ. } b = a \cos B - (-b \cos A)$$

կամ

$$c = a \cos B + b \cos A,$$

այսինքն ստացվեց նույն արդյունքը ինչ Վոր սուր անկյան դեպքում։

50. Հետևեցանք. կապեմք բանաձևեր a յետ b կողմերի համար.

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = a \cos C + c \cos A$$

Յերբ $C = \frac{\pi}{2}$, կունենանք $\cos C = 0$ յետ

$$a = c \cos B, \quad b = c \cos A.$$

Արանք I ծաւր (II) բանաձևերն են, Վոր ստացել էինք անկախ յեղանակով ուղղանկյուն յեռանկյան համար։

51. I շերկու անկյունների գումարը սինուս կարացի,
յետև առաջին անկյան սինուս յետ յերկրորդի կոսինու-
սի արտադրյալին գումարենք առաջին կոսինուսի յետ
յերկրորդի սինուսի արտադրյալը.

II. շերկու անկյունների գումարի կոսինուսը կարացի, յե-
թև նրանց կոսինուսների արտադրյալից հանենք սինու-
սների արտադրյալը:

$$(10) \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$(11) \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

— պայման . Առաջագործությունների թեորեմի համաչափ
ունիք

$$*) c = a \cos B + b \cos A$$

— յնուկեպեղ , սինուսների թեորեմի համաչափ

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$$

*)-ի թեզ դնելով a -ի, b -ի յեղ C -ի պեղ իրենց արժեքներ
ընդհանրապես

$$2R \sin C = 2R \sin A \cos B + 2R \sin B \cos A :$$

Բոլոր անդամները կրճատելով $2R$ -ով՝ կը գտնենք

$$\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Բայց $C = \pi - (A+B)$, $\sin C = \sin (A+B)$ յեղ , վերջնականա-
րեն ,

$$(10') \sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

— յս եւ ահա Պրոպոզիցիոնի բանաչեղ :

— յս պեղ A -ն յեղ B -ն , իբրեղ յեռանկյան անկյուններ յենթա-
կված են $A+B < 180^\circ$ պայմանին , սրանցից թեկն անպայման
սուր պեղքեւ լինի , իսկ ճյուղը կարող եւ լինել կամ սուր
կամ ուղիղ յեղ կամ բութ : — ռանց սահմանափակման կա-
րող ենք ընդունել , վոր $A > B$:

Պիցուք $A > 90^\circ$ յեղ $A_1 < 90^\circ$ անկյունը A անկյան հաղելորդն
եւ 90° -ը նկատածք , այսինքն $A = 90^\circ + A_1$: — յդ դեպքում
(10')-ը կարող ենք գրել այսպեւ .

$$\sin [(90^\circ + A_1) + B] = \sin (90^\circ + A_1) \cos B + \cos (90^\circ + A_1) \sin B.$$

$$\text{Կամ, վորովհետեղ } \sin [(90^\circ + A_1) + B] = \sin [90^\circ + (A_1 + B)] = \\ = \cos (A_1 + B), \sin (90^\circ + A_1) = \cos A_1, \cos (90^\circ + A_1) = -\sin A_1,$$

կստանանք

$$(11') \cos (A_1 + B) = \cos A_1 \cos B - \sin A_1 \sin B.$$

II յստեղ $A_1 < 90^\circ$, $B < 90^\circ$, $A_1 + B < 90^\circ$.

II-իցով վերջնումս եւնի այնպիսի յեռանկյուն, Վորի մէջ $A < 90^\circ$, $B < 90^\circ$, բայց $A + B > 90^\circ$. այս դեպքում ընդ-
նելով $A = 90^\circ - A_1$, $B = 90^\circ - B_1$, հունենաւի
 $\cos(A + B) = \cos[(90^\circ - A_1) + (90^\circ - B_1)] = \cos[180^\circ - (A_1 + B_1)] =$
 $= -\cos(A_1 + B_1)$. քանի Վոր $A_1 + B_1 < 90^\circ$, ապա հարող էնի
ըստ (II')-ի գրել.

$$\cos(A + B) = -\cos(A_1 + B_1) = -\cos A_1 \cos B_1 + \sin A_1 \sin B_1$$

ոգտելով լրացուցիչ անկյունների հարկություններով հունենաւի
 $\cos(A + B) = -\sin A \cdot \sin B + \cos A \cos B$:

II յժճ վերջնեւի այնպիսի յեռանկյուն, Վորի անկյուններից
մէկը բութ է. դիցուի $A > 90^\circ$. ընդունելով $A = 90^\circ + A_1$,
հունենաւի $\cos(A + B) = \cos[90^\circ + (A_1 + B)] = -\sin(A_1 + B) =$
 $= -\sin A_1 \cos B - \cos A_1 \sin B$.

A_1 -ից անցնելով A -ի. հունենաւի $A_1 = A - 90^\circ = -(90^\circ - A)$,
այստեղից

$$\sin A_1 = \sin[-(90^\circ - A)] = -\sin(90^\circ - A) = -\cos A$$

$$\cos A_1 = \cos[-(90^\circ - A)] = \cos(90^\circ - A) = \sin A$$

այս արժեքները դնելով իրենց տեղը՝ հունենաւի.

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

II յստիսով ցույց տրիւի, Վոր ինչպիսի յեռանկյուն էլ
ունենաւի, տեղի ունիւ հետեւիսալ առընչությունները

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

II յս բանաձեւերի մէջ A -ի յով B -ի տեղ ընդփոխելով X յով Y
անկյունները, Վորով յեռաբերված են հետեւիսալ պայմաններ.

2) (10) յեւ (11) բանաչեւերը ձրշղ- են x -ի յեւ y -անկյուն-
ների բոլոր դրական արժեքների համար:

Դնւալիս յետեւում եւ ունենան x յեւ y անկյունները, ծրար
կարող ենք ընդունել $x = 90^\circ \cdot m + x_1$, յեւ $y = 90^\circ \cdot n + y_1$,
վերջերի m -ը յեւ n -ը ամբողջ դրական թվեր են, իսկ x_1 -ը
յեւ y_1 -ը զար զար փոքր են 90° -ից: Հետեւ x_1 անկյանը
 m անգամ ավելացնելով 90° , ապա նախընթացի համաչափ,
առնչությունը էի փոփոխվել. ձրշղ- նույնպէս, յետեւ n
անգամ 90° ավելացնելով y_1 -ին, առնչությունն ամեն անգամ
կը պահի իր ուժը: Այսպիսով բանաչեւերը ձրշղ են
բոլոր դրական անկյունների համար:

3) (10) յեւ (11) բանաչեւերը ձրշղ- են բոլոր բացասական x յեւ
 y անկյունների համար.

Մեն յի բացասական անկյուն կարող եւ ստացվել դրական
անկյանն ապրիմանաբար ավելացնելով $-2\pi (-360)^\circ$. Բայց այդ-
հաշվածը էի փոփոխում վաղ առանցին անկյունների յեւ վաղ
ել նրանց գումարի սինուսն ու կոսինուսը. յեւ վորովհետեւ
բանաչեւերը դրական անկյունների համար ապացուցված են,
ապա նրանք իրենց ուժը պահպանում են նայել այն դեպքում,
յերբ անկյուններից մէկը, կամ յերկուսն եւ, բացասական են:

Այսպիսով մեր բանաչեւերի ընդհանրությունը ծրանգամայն ապա-
ցուցված է:

52 (10) յեւ (11) բանաչեւերի ձեզ y -ի քեր դնելով $-y$,
կարանանք

$$\sin [x + (-y)] = \sin x \cos (-y) + \cos x \sin (-y),$$

$$\cos [x + (-y)] = \cos x \cos (-y) - \sin x \sin (-y).$$

կամ

$$(12) \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$(13) \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

այս ժամանակ $\operatorname{tg} x$ -ի և $\operatorname{tg} y$ -ի ծրագրով արտահայտելու նպատակով համարիչն ու հայրարարը անդամ առ անդամ բաժանելով $\cos x \cos y$ -ի վրա . կստանանք

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}}$$

կամ, վերջնականորեն,

$$(14) \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Նույն ձևով կգրենք

$$(14') \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

$$(15) \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \pm 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

(12-15) բանաձևերը ձևով են բռնար x և y անկյունների համար, վերոգրվելով նրանք սրաջված են (10) և (11) ընդհանուր բանաձևերից:

53. Մի քանի անկյունների գումարի ֆունկցիաները: Այսպես ընդհանուր յեղանակները հնարավորություն են տալիս հաշվելու ցանկացած թվով անկյունների հանրահաշվական գումարի անկյունաչափական ֆունկցիաները, ինչ-պես յերեք ան-

կյունների հանրահաշվական գումարի ֆունկցիաները գրելու համար կը գրենք

$$x + y - z = (x + y) - z$$

յեւ ասիւ յերկու անգամ կը կիրառենք գումարման թեորեմը, նախ $(x + y) - z$ ցարքերուքյան, ասիւ $(x + y)$ գումարի վրա:

Շ. Կրկնակի յեւ կէս անկյունների բանաչեւերը

54. (10) յեւ (11), (14) յեւ (15) բանաչեւերի ձեզ ընդունելով $y = x$, կստանանք

$$(16) \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

$$(17) \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$(18) \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$(19) \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}.$$

Այս բանաչեւերը ֆորմուլան անուն ցուած անկյունների համար, վորոշուելով նրանք ընդհանուր բանաչեւերի հետեւանքներ են:

Ընդունելով $x = \frac{\alpha}{2}$, (16 - 19) բանաչեւերը կարելի է գրել.

$$(16') \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$(17') \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(18') \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$(19') \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}.$$

(16-19) յեւ (16'-19') բանաչեւերը հաճապարարական անջն են. յերկու դեպքում եւ չափ կողծի անկյունը ազ կողծի անկյան կրկնակին է:

55. Յեռակի յեւ բազմակի անկյունների քունկտաները կարելի է վերոշել, ընդունելով.

$$3x = 2x + x$$

$$4x = 3x + x \text{ կամ } 2 \cdot 2x$$

$$5x = 3x + 2x \text{ կամ } 4x + x$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$nx = (n-1)x + x \text{ յեւ այլն:}$$

IV գլխում կարգաձեռնեմ Արմասունի բանաչեւերը, վերոնի հետ քաղաքություն են պալիս ծրանգածից գրնելու $\sin nx$ յեւ $\cos nx$, յերե հայտնի են $(n-1)x$ յեւ $(n-2)x$ անկյունների սինուսներն ու կոսինուսները:

Իսկանանշաճ յեղանակով կարելի է գրնել, վեր

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad \sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3}$$

$$\cos 3x = 3 \cos^3 x - 4 \cos x \quad \text{կամ} \quad \cos x = 3 \cos^3 \frac{x}{3} - 4 \cos \frac{x}{3}.$$

« Եւ բանաչեւերի արգասաճը քողնւում է աշակերպներին:

56. Կես-անկյուններ. Այժմ լուծենք հակադարձ խնդիրը.

հայտնի են $\sin x$ -ը յեւ $\cos x$ -ը, պետք է գրնել $\sin \frac{x}{2}$ -ը

յեւ $\cos \frac{x}{2}$ -ը: Ըստ (17') բանաչեւի կարող ենք գրել.

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

ի նկարի ունենալով, վեր $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$, կունենանք

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$(20) \quad \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Այսին չեղով կարող ենք $\sin^2 \frac{x}{2}$ -ը փոխարինել $1 - \cos^2 \frac{x}{2}$ -ով,
կարգադրել

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - (1 - \cos^2 \frac{x}{2}) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

$$(21) \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

(20) բանաչեղն առաջին անգամ պարտադիր է կապող-իս
Պարզոճենուր գործերում:

57. 19-րդ. յեղ 20-րդ. բանաչեղերից նկատում ենք, զոր կես-
անկյան սինուսն ու կոսինուսն արգասիայրված են ածբողջ
անկյան թիայն կոսինուսի թիզոցով. նրանք թիշր ունին
իրական արժեքներ, զորովհետեղ $1 + \cos x$ յեղ $1 - \cos x$ թիշր
դրական են ($\cos x$ -ը բացարչակ արժեքով փոքր է 1-ից) յեղ,
բացի դրանից, բանաչեղերից սրացվող բացարչակ
արժեքները գործում են 0-ի յեղ 1-ի թեղ յեղ, հետեղա-
պես, կարող են ընդունեղ զորպես ածեն րեսակի անկյան
սինուսի յեղ կոսինուսի հաճապարապիան արժեքներ:

Դնչ զերաբերում է այդ բանաչեղերի թեղ առաջ յեղող
կրկնակի նշաններին, պերտ է ասեղ հետեղյալը. յերե-
x անկյունը հայրնի չե, արժապն անհրաժեշտ է զերյնեղ
յերկու նշանով, զորովհետեղ $\frac{x}{2}$ անկյունը կարող է լի-
նեղ ածեն խռորդի անկյուն, հետեղապես նրա թունկիա-
ներն էլ կուտենան յեղ դրական յեղ բացասական արժեքներ:
Յերե x անկյան արժեքը զորողակի րված է, այսինքն հայրնի է,

թե $\frac{x}{2}$ -ը զոր փառքի ածյունն է, ապա արժանիքն անկախ է
 և վերջինից ծրայն թի նշանով, այսինքն այն նշանով:

զոր ունի $\frac{x}{2}$ ածյունն ֆունկցիան այդ փառքում:

58. Բանաչեղեր $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ -ի յեւ $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ -ի համար. 20-րդ յեւ

21-րդ բանաչեղերից՝ արձանոճ եւնք.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}.$$

Յերկու արտահայտութիւնն եւ հարեւի ե պարզել՝ արժանա-
 րակ հարորակների համարիչներն ու հայրարարները
 բազմապարկելով համ $1 + \cos x$ -ով համ $1 - \cos x$ -ով: Այն
 խաճանակ հարանաճի յերկու խոճք բանաչեղեր, զորոնք
 քարքերվում են ծրայն քրեւիով:

$$(22) \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x},$$

$$(23) \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

Այս բանաչեղերում վերջինի եւնք ծրայն դրական, նշաննե-
րը. պարտաւր հեւրեղյալն է. ինչպես ասացինք վերը,
 $1 + \cos x$ յեւ $1 - \cos x$ թիւը դրական են. հը նշանակի
 $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ -ի (յեւ $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ -ի) նշանը համաճում է բացառապես
 $\sin x$ -ի նշանից, բայց

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}},$$

այսպէս թիւում է, զոր $\sin x$ յեւ $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ֆունկցիաները
 թիւը թիւնկնայն նշանը հունենան, զորով հեւրեղ թիւնկնայն

խանակութիւնների խանորդի յեղ արտադրյալի նշանները նոյնն են: Տրչդ-նոյնը վերաբերում է նայեղ հոսանքներն:

60. $\frac{x}{n}$ անկյան ֆունկցիաները. Զկան ընդ-հանուր բանաշե-
վեր, վորոնց ծիզոցով կարելի լիներ $\frac{x}{n}$ անկյան ֆունկցիա-
ներն արտահայտել x անկյան ֆունկցիաներով, յերբ n -ը
վորյեղէ դ-րական ածրող թիւէ: Դարցի լուծան ընդ-հա-
նուր յեղանակը հետեղյալն է: Վերցնում ենք յերկու հաղա-
սարութիւններ, յեղը, վոր արտահայտում է ին x -ը յեղ
 $\cos x$ -ը $\sin \frac{x}{n}$ -ի յեղ $\cos \frac{x}{n}$ -ի ծիզոցով (տ. § 70, գլ. 10),
յեղ ծիւսը՝ $\sin^2 \frac{x}{n} + \cos^2 \frac{x}{n} = 1$. այս յեղանակով սրա-
նում ենք n -րդ աստիճանի ծիւնհայր հաղասարում,
վորը ներկա դասընթացում չի կարող լինել:

Դասնավոր դեպքերում, յերբ n -ը 2-ի աստիճան է ներկա-
յացնում, հարցը վերածվում է ծի շարի խառակուսի
հաղասարումների լուծան, վորի հաճար հազորդ-արար
կիրառվում են կեռ-անկյունների ֆունկցիաների բանաշեղերը:

D. Դիյեղնայն անկյան ֆունկցիաների արտահայտումը
նրանցից յեղի ծիզոցով:

61. Բաղճարիղ հարցերի լուծան խաճանակ անհրաժեղը
է լինում վորյեղէ անկյան բոլոր ֆունկցիաներն ար-
տահայտել նրանցից յեղի ծիզոցով: Էյդ-պիսի յե-
ղափոխութիւններ անհրաժեղը են որ. անկյունաչափա-
կան հաղասարումների լուծան խաճանակ: Զբաղվենք
այդ յեղափոխութիւններից ծի խանրում:

62. Այորեղ զերեղղամ աղյուսակը տալիս է x անկյան

Բոլոր ֆունկցիաների արտահայտությունը նրանցից յեկի ծիզոցով. այդ արտահայտությունները դասավորված են ըստ սյունակների:

$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} x}$
$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$	$\pm \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$	$\frac{1}{\sec x}$	$\pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec} x}$
$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$	$\pm \sqrt{\sec^2 x - 1}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}$
$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{ctg} x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$	$\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}$
$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$	$\sec x$	$\pm \frac{\operatorname{cosec} x}{\sqrt{\cos^2 x - 1}}$
$\frac{1}{\sin x}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$	$\pm \frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$	$\operatorname{cosec} x$

Յուրաքանչյուր տողը տալիս է ծիզվեցյալ ֆունկցիաների տարրեր արտահայտությունը:

Արաջած վեց սխալեմները պարունակում են գ-րերե բացառապես արծարաժոր արտահայտություններ յեզ կրկնակի նշաններ, այդ պարծառով պետք է ըստ հնարին խուսափել այդ սխալեմների կիրառությունից: Գործնականում ըստ ոգ-տակար է հերեժյալ սխալեմը:

63. Թեորեմ. Ք անկյան բոլոր շրջանային ֆունկցիաներն արտահայտվում են ռադիոնալ յեզ Դիաթեթ

$\frac{x}{2}$ անկյուն գումարեւոյ .

թեորեմ արաբոյսը բաղկացած է յետևե ճանաչ .

I (18') յեւ (19') բանաձեւերը ցույց են տալիս, զոր
 $\operatorname{tg} x$ յեւ $\operatorname{ctg} x$ արտահայտւած են $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ -ի յիշոցով ուս-
 ցիւնաւ, այն է

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} .$$

Կարգ է, զոր $\sec x$ -ի յեւ $\operatorname{cosec} x$ -ի արտահայտւորումն-
 ւերը աւցիւնաւ էւ լինեն, յետեւ $\cos x$ -ի յեւ $\sin x$ -ի
 արտահայտւորումները աւցիւնաւ լինեն. ուստի չբաղ-
 զենք զերգիւնէրոյս .

Ունիւնք

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

Բաժանելով այս յետևե համասարութիւններն ի իւր
 ճանաչը $(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2})$ -ի վրա, զորից նրանք չեն փոխւիւ.
 Կարանաւք

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

Այժմ բաժանելով այս կոտորակներէր յորանաւ-
 չիւրն անդամ առ անդամ $\cos^2 \frac{x}{2}$ -ի վրա,

Հայտնակ

$$(24) \quad \left. \begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \\ \cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \end{aligned} \right\} \text{Lambert, 1765}$$

Հայտնա միտք, x -ի բոլոր $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ քանակները
 $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ -ի փոփոխության համապատասխանում են x -ին.

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \sec x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

II. Քանի որ յերկրորդ ծանոթացությունները
 ընդունելով, զոր $\frac{x}{2}$ անկյան փոփոխության համապատասխանում են x :
 չորսը հետևյալ քանակները պարբերություններ π -ն են, այսինքն
 յերկուսից քանակներն ունենալով բոլոր $\frac{x}{2}$ անկյունները
 առանձին առանձին թվերով արտահայտվում են.

$$\frac{x}{2} = k\pi + \alpha$$

այսինքն x կերպով են, զոր

$$x = 2k\pi + 2\alpha,$$

այսինքն x անկյան բոլոր արժեքներն իրարից քառապատասխան
 են ընդհանուր թվերով արտահայտվող. քանի խափանող, բոլոր
 x անկյունները Գրաքերի անհրաժեշտ են, tg , ctg ,

գրեցանք x անկյան ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը
ճիշդն ընդ որովհետև ունենք:

Հարձուրդներ

1. Կայց ցույց հանել. բանաձևերի ճշդ-նքները

$$A. \sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \\ - \sin a \sin b \sin c.$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c - \sin b \sin a \cos c - \\ - \sin c \sin a \cos b.$$

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a}.$$

$$B. \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}; \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1};$$

$$\sin 4x = (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x; \cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1;$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^5 x}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}; \cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x.$$

2. Ոգտվելով գ-մասրժան թեորեմից՝ գտնել հետ. անկյունների
ֆունկցիաները.

$$75^\circ, 48^\circ; 15^\circ, 9^\circ, 36^\circ, 22^\circ 30'; 12^\circ, 27^\circ, 42^\circ, 63^\circ, 78^\circ;$$

$$3^\circ, 21^\circ, 24^\circ, 6^\circ, 39^\circ, 7^\circ 30' \text{ և այլն.}$$

3. Կայց ցույց, զոր $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\sin \pi = 0$,

$$\operatorname{tg} \pi = 0, \operatorname{ctg} \pi = \infty \text{ և այլն, ոգտվելով գ-մասրժան}$$

թեորեմից յնչ նրա հետեւանքներից:

4. Գրելու $x = a + b$, յետ $\sin a = 0,5$; $\sin b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

5. Կայքի ցույց, զոր

$$\sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \dots \pm \sqrt{2}}}}}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2},$$

արժանություն թիվը յուրաքանչյուր նորմալի ձև $n-1$ է
յեւ $n-2$ շրանիւն ածրող թիվ է.

6. Մարդել " հերթից յաւ արդարապատրաստները

$$\tan(x + 45^\circ) + \tan(x - 45^\circ)$$

$$\cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - \cos 2a \cos 2b$$

$$\tan a + 2 \tan 2a + 4 \tan 4a + 8 \tan 8a.$$

Եւ ըսել IV . Չորանային ֆունկցիաների հաշվումը.

64. Չորանային ֆունկցիաների հաշվումը հապաճ է ինքնուրույնությունների հետ. ուստի ստացած արդյունքները յիծեր են հաշվարժ յոճային աղյուսակների չեմով, զորոնց ձևը զերտեղված են անկյունների յեւ նրանց ֆունկցիաների արժեքները: Այդ աղյուսակների փոխարէ հաշվումը զերին ապրիճանի հերցում է՝ անկյուններից հոգներն անցնելու յեւ հախաղաղ յեւորի գեղքում թուր հաշվումները զերածում են թշաբանում: Այսպիսով Գործողությունների ալի յոյճի զերաբերմամբ, զորոնց զորոյում են աղյուսակների պատրաստի գեղքով: Այս

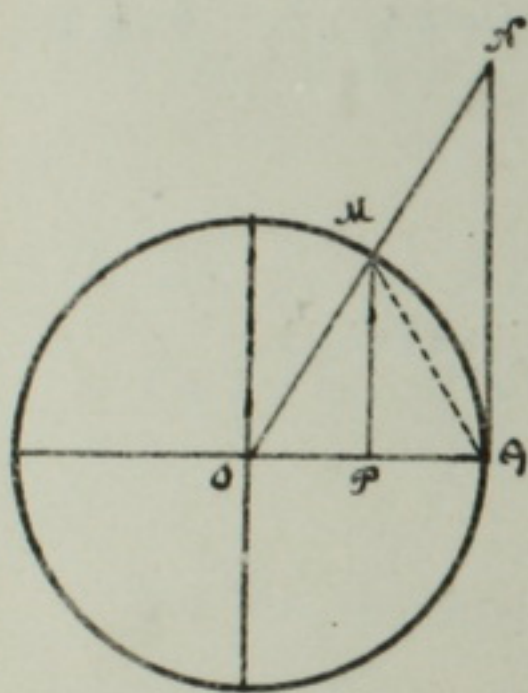
առաջ էլ թերեւ ալ զխառնութեան, զորոնց վրա
հիմնուած են ինչպէս աղյուսակները հաշուի, այնպէս էլ հաշվածե-
րի ստորագները:

65. Կիսամիջանկ թեորեմներ:

Թեորեմ I. Զեթե x անկյունը գտնուած է առաջին քառորդում,
այսինքն արդի ունի հետ. անհամապատասխանները.

$$\sin x < x < \tan x$$

Պիտագորասի $\angle POM = x$ (պատկ. 18): Անունելով AM ուղիղագիծ շաւիկ,



պատկ. 18

կունենանք. Եւթ. $\Delta OMA <$ Եւթ. $\Delta OMA <$ Եւթ. ΔONA կամ, զերպնելով այդ
ճակի վրայէն արդիստեպատասխանները՝

$$\frac{1}{2} OA \cdot MP < \frac{1}{2} OA \cdot OM < \frac{1}{2} OA \cdot AN$$

այսինքն $MP < OM < AN$, կամ բաժա-
նելով R -ի վրա՝

$$\frac{MP}{R} < \frac{OM}{R} < \frac{AN}{R}, \text{ զորի յետ } \frac{AN}{R} = \tan x$$

x անկյան շրջանային չափն է, $\frac{MP}{R} = \sin x$,

$$\frac{AN}{R} = \tan x. \text{ զերպնելով անոնի կունենանք}$$

$$(I) \sin x < x < \tan x$$

Թեորեմ II. Զեթե x անկյունը չգտնւած է չորրորդ, այսինքն $\frac{\sin x}{x}$
յեւ $\frac{\tan x}{x}$ հարաբերությունները չգտնւած են ճշիւ.

զերպնելով I քառորդում գտնուող դրանք x անկյունը:
Նախորդ թեորեմի հիման վրա ունինք.

$$\sin x < x < \frac{\tan x}{\cos x}$$

բաժանելով $\sin x$ -ը այս անհամապատասխանները բոլոր անդամ-
ները վրա յեւ նկատելով զոր անհամապատասխանները նշան-
նախ $\frac{1}{\cos x}$ փոքր է, կարգաւորելով

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

Յեթի x անկյունը չգտնվում է չեղման, $\cos x$ -ը չգտնվում է չեղման:

Այսպիսով ստացանք անհամարժեքության ձևը յեթերորդ ծանոթ
անհամեմատելի չգտնվում է մոտազրկել, հեղեղակայել յեթերորդ
ծանոթել անհամեմատելի չե չգտնվում մոտազրկել, այսինքն $\frac{\sin x}{x}$
համարժեքության անհամեմատելի է 1-ը

Նույն հեղեղակ մեկնել.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Բաժանելով յեթեր ծանոթել x -ի վրա, հայտնաբեր

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x}$$

կամ

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Հեղեղակ սահմաններին հայտնաբեր

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \right) = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Թեորեմ III. Յեթի x անկյունը գտնվում է I քառակուսի,
այսինքն անկյուն յեթի x անկյունը սահմաններին հայտնաբեր
կամ յի քառակուսի յոթանասուներորդ:

Գրեմք x -ը անկյունը յեթի անկյունը յեթի $0 < x < \frac{\pi}{2}$
այնպիսի է մոտազրկել, զոր $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$.

Հայտնաբերել զոր -

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$$

Բայց $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ ըստ I թեորեմի, այդ պատճառով

այս անհամաարությունը պրոչում ե $\cos x$ -ի պոլիմ սահմաններ :

(4) բանաչեղիք ունիմ

$$\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{4}$$

Յեթև (ա) համաարության յեղ $\sin \frac{x}{2}$ -ի պեղ դնեմ $\frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{4}$

աղելի փոքր թիվը , ցարքերությունը հը յեման յեղ հայանալի հերեղյալ անհամաարությունը .

$$\cos x < 1 - 2 \left[\frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{4} \right]^2 \text{ համ}$$

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - 2 \left(\frac{x^3}{32} \right)^2 .$$

դ.արս չգելով անհամաարության յերկրորդ- յաւում շերելիմ բացասալան անդամը՝ աղելի յեմայրած հը լիւնել աղ- յաւը , ուարի յեղ .

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} .$$

Իրայնելով ապացուցած յերկու անհամաարությունները՝ հայանալի .

$$(5) 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} :$$

68. Այժմ յեղ հարոչ եմք , նախընթացի հիման վրա , վորոչել փոքր անկյունները հաղղելու համար յի պարզ յեղանալ : Կնչպես պեմում եմք , սիւուսի սահմանների ցարքերությունը ե $\frac{x^3}{4}$, իսկ հոսիւուսիներ՝ $\frac{x^4}{16}$. այս յերկու ցարքերությունները շարս արագ-արեւ փոքրանում են , յերբ x -ը փոքրանում ե . այս պարտառով հարելի ե յեմ ճշգ-ությամբ լնդ.ունել փոքր անկյունների համար .

$$(6) \sin x = x \text{ յեղ } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} .$$

Այսալ յեմությունը սիւուսի համար հը լիւն $\frac{x^3}{4}$ -ից փոքր

իսկ հասկանալի համար՝ $\frac{x^4}{16} = 17$ փոքր:

ԵՅ. Յոս $1'$ -ի, եւ $\cos 1'$ -ի ձաւշմը. կիրառելի գ. Կոս 3 եւ

Եւսի՛ քի յոսիքի սինուսն ու հոսիւսուք զորոշելու համար:

Հոսիւսիւսիւս $1'$ -ի շրջանային շաւր $= \frac{\pi}{180.60}$, ապա ընդ. ու

Եւելու $\pi = 3,14159$, հստակաւ

$$x = 0,00029, \text{ եւ } 1 - \frac{x^2}{2} = 0,99999$$

սխալն առաւելի զեւթմէ փոքրի $\frac{x^3}{4}$ -ից, զորն իր հերթին

փոքր է, քան $\frac{0,0003^3}{4} = \frac{27}{4 \cdot 10^{12}} = \frac{27}{40} \cdot \frac{1}{10^{11}}$, ապաին սխալ

փոքր է $\frac{1}{10^{11}}$ -ից: Եւսի՛ Եւելու կ' գ. Կոս 3, զոր յերկրորդ-

դեպքում սխալ փոքր է $\frac{1}{10^{15}}$ -ից: Կերտեւայեւ հարող եւ

$\frac{1}{10^{11}}$ -ի ճշգ. ուսումը ընդ. ունել ըստ (6) բանաշեղի, զոր

$$\sin 1' = 0,00029, \cos 1' = 0,99999$$

70. Արեւստի բանաշեղի, Յոս $1'$ -ից եւ $\cos 1'$ -ից բաշու-

կի միւս, ունելի սինուսիքին եւ հոսիւսուսիքին աւելելու

համար ոչ. Կոս 3 աւել. իսկաւ ճարտարութեամբ Արեւստի

(1748) աւել. Եւսի՛ բանաշեղիքը: Զնշաւ գ. Կոս 3

$$\sin (x + \beta) = \sin x \cos \beta + \cos x \sin \beta$$

$$\sin (x - \beta) = \sin x \cos \beta - \cos x \sin \beta$$

$$\cos (x + \beta) = \cos x \cos \beta - \sin x \sin \beta$$

$$\cos (x - \beta) = \cos x \cos \beta + \sin x \sin \beta$$

Առաւելի հազարաւոր, յոսի՛ գ. Կոս 3 եւ յերկրորդին,

ապա Եւելու յերկրորդ շրջանային, եւ աւել. իսկ հստակաւ

$$\sin (x + \beta) + \sin (x - \beta) = 2 \sin x \cos \beta$$

$$\cos (x + \beta) + \cos (x - \beta) = 2 \cos x \cos \beta$$

Ընդ. ունել $x = \beta$. ապա ճարտար զերթի եւսի՛ բանա-

չեղեր և քանակ.

$$\sin(n+1)\beta + \sin(n-1)\beta = 2 \sin n\beta \cos \beta$$

$$\cos(n+1)\beta + \cos(n-1)\beta = 2 \cos n\beta \cos \beta,$$

և որովհետև յեղ պարզած եմք Արիմանի բանաչեղերը.

$$(7) \begin{cases} \sin(n+1)\beta = 2 \sin n\beta \cos \beta - \sin(n-1)\beta, \\ \cos(n+1)\beta = 2 \cos n\beta \cos \beta - \cos(n-1)\beta: \end{cases}$$

71. Այս բանաչեղերը չիրաւ որոշման շարք պարզ և : Երբ համար ընդ-մեծն $\beta = 1'$ յեղ n -ին ցումք հաջորդ-աբար 1, 2, 3, ... արժեքները : Յերբ $n = 1$, հպարտումք

$$\sin 2' = 2 \sin 1' \cos 1',$$

$$\cos 2' = 2 \cos^2 1' - 1$$

$$\sin 3' = 2 \sin 2' \cos 1' - \sin 1'; \cos 3' = 2 \cos 2' \cos 1' - \cos 1'.$$

$$\sin 4' = 2 \sin 3' \cos 2' - \sin 2'; \cos 4' = 2 \cos 3' \cos 2' - \cos 2'.$$

.....

.....

Այսպիսով $\sin 1'$ -ի յեղ $\cos 1'$ -ի արժեքների որոշումը հարող եմք շրջանային բովանդակների հաշվածը $1'$ -ից $1'$ շարունակ ցանկացած շարով : Բայց ավելի լայն և այդ հաշվածը շարունակ որոշել որոշեղ $\sin 30^\circ$ յեղ $\cos 30^\circ$, և որովհետեղ բովանդակների հեղանգ-ա արժեքները հարելի ե գ-րել, նախ ընթացի հաճանքն, հեղեղ յալ յեղանակող :

72. Վերջնեղ

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

բանաչեղեր յեղ նրանց յեղ ընդ-մեծն $\alpha = 30^\circ$. այն ժամանակ -

$$\text{և ալ } \sin(30^\circ + \beta) + \sin(30^\circ - \beta) = 2 \sin 30^\circ \cos \beta.$$

$$\cos(30^\circ + \beta) - \cos(30^\circ - \beta) = -2 \sin 30^\circ \sin \beta.$$

Եկապելով, զոր $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, յեզ յերկու հաճախորտ-
թյուններն առաջին ճառերի յերկրորդ անդամները գրա-
նելով յերկրորդ ճառը, կապանանք

$$\sin(30^\circ + \beta) = \cos \beta - \sin(30^\circ - \beta)$$

$$\cos(30^\circ + \beta) = \cos(30^\circ - \beta) - \sin \beta.$$

β -ին գրաւով $1'$, $2'$, $3'$... հաջորդական արժեքները,
այս բանաչեղերով կապանանք.

$$\sin 30^\circ 1' = \cos 1' - \sin 29^\circ 59'; \cos 30^\circ 1' = \cos 29^\circ 59' - \sin 1';$$

$$\sin 30^\circ 2' = \cos 2' - \sin 29^\circ 58'; \cos 30^\circ 2' = \cos 29^\circ 58' - \sin 2'.$$

.....

Այսպիսով կը հաշվենք շրջանային ֆունկցիաների
արժեքները 30° -ից մինչեւ 45° անկյունների հաճաք յեզ
այդ-յեզ կանգ-կառնելով: Այնպիսի 45° անկյունների ֆուն-
կցիաները 45° -ից մինչեւ 90° , կը գտնենք

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha)$$

$$\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$$

բանաչեղերով, զորոնք յեզ առաջուց հայտնի են: Այսպիսով
կը ղերգանա ածրողը հաշվածը:

73-74. Շրջանային ֆունկցիաների աշխուսակները:

Այսպես որե՛մ, գտնված են հաշվումների յեղանակները.

մեր կարող ենք ընդրել կաճախոր ճիշտ, որ. $1^\circ, 1', 10'', 1''$

եւ. առն, յեզ կաշեւ այսպիսի, յիշող հարթերու յոն

ունենող անկյունների համար անկյունազանգվածի քանակի քանակ-
անների արժեքը^{ներ} : Այսպես են վարվել հիպոպարթուսը, յեղ
Պրոդոնտուսը և առաջին առյուսակների հաջողները, յեղ
այդպես են շարունակել են նրանց գործը հեպտագոն հաջ-
ողները : Բնական շրջանային քանկյունների այդ առյուսակ-
ները, ծառային, ասկային, գործածության յեղ ծրային ծրելով
XVIII դարը :

Հոգաբարձների գյուղը նրանց գործածությունը դարձրեց
գրեթե ավելորդ . այդ առյուսակների ցեղը բնույթին ան-
կյունազանգվածի քանկյունների Հոգաբարձների առյուսակնե-
րը : Այս առյուսակները առավելությունները, ինչպես յեղ
նրանց գործածության յեղանակը, արդեն դիտված են I
հատում :

75. Հիպոպարթուս. Քառս համար, ցված պայծառների յեղա-
դրանքով, անհրաժեշտ է լինում գրել աշխարհի անկյուն-
ների քանկյունները, զորում զեպտոզված չեն առյուսակներում.
նայնպես յեղ հարթ է լինում գրել աշխարհի անկյուններ,
զորում քանկյուններ (կամ նրանց Հոգաբարձները) արժեք-
ները զեպտոզված չեն առյուսակներում : Կործանականում
այդ յերկու հարցերը լուծված են շատ հեշտությամբ
առանցին առյուսակների իրարից, զորում հաղված են
"Partes proportionales", այսինքն "համեմատական ծա-
ռեր" : նրանք զեպտոզված են Հոգաբարձների բոլոր առյու-
սակներում . I-ին ծառայ գրեթե, թե ինչպես պեղի և
այդ առյուսակները բանակել :

„Partes proportionales“ աշխատելով կարծաթանշ
կրկնած եւ հեղեղայալ թեորեմերը վրա:

ԴԵ. Պատկեր IV. Անկյան փոքր փոքրությունները հաս-
տատված են նրա շրջանային փակեցիքների հաճախ-
ության փոքրություններին:

Դիցուք h -ը կարծաթ եւ I խառնդու գլուխը x -ը
սեղե x անկյան շաք փոքրիկ անունը (որ անունը I' -ը):
Ըստ բանաձեղի ունենք.

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

Վերադառնալ h -ը բազմակերպ փոքրեւ, այս կարող ենք
ընդունել $\cos h = 1$, $\sin h = h$. այն հաճախեալ թեր հաճա-
խությունները h զանաւ.

$$\sin(x+h) = \sin x + h \cos x.$$

Վերջ

$$\sin(x+h) - \sin x = h \cos x \dots (a)$$

Վերջնական h այն շաք փոքր h_1 անուն, որից անկյուն h_1 -
ընդ h գլուխներ:

$$\sin(x+h_1) - \sin x = h_1 \cos x \dots (b)$$

Բաժանելով (a)-ն (b)-ի վրա՝ ապաւանտ ենք

$$(9) \quad \frac{\sin(x+h) - \sin x}{\sin(x+h_1) - \sin x} = \frac{h}{h_1}, \text{ զոր յեղ պէտք էր}$$

ապաւանտել:

Այս թեորեմը նման շեղում կարելի է ապաւանտել
նայելով ճիշտ փակեցիքների հաճախ. այդ թանկանք ենք
աշխատելով:

77. թեորեմ V. Անկախ փոքր փոփոխությունները հանգում
 ցանկած են նրա (ոգարիքի) համապատասխան փոփոխության
 ներքին :

Վերջինից նախընթաց ծրարվոր (ա) համապատասխանը

$$\sin(x+h) - \sin x = h \cos x$$

յեղ նրա թույլի անգամները բաժանելով $\sin x$ -ի վրա՝

$$\frac{\sin(x+h)}{\sin x} = 1 + h \operatorname{ctg} x.$$

Ոգարիքով յեղյալ ծարերը հաջանալով

$$\operatorname{Lg} \sin(x+h) - \operatorname{Lg} \sin x = \operatorname{Lg}(1 + h \operatorname{ctg} x)$$

h -ն ընդրում ենք անհատ, փոքր $h \operatorname{ctg} x$ փոքր լինելով 1-ից.

համապատասխան հայտնի է, փոքր անգամ քանակներ

$$\operatorname{Lg}(1 + h \operatorname{ctg} x) = M \left[h \operatorname{ctg} x - \frac{h^2 \operatorname{ctg}^2 x}{2} + \frac{h^3 \operatorname{ctg}^3 x}{3} - \dots \right],$$

փոքր յեղ M -ը (ոգարիքների արարելով ծրարելով 10 հիմքի
 համար: Բաժանաճանաչում այս վերջում ներքին անհատ
 ծրար՝ գլխում ենք

$$\operatorname{Lg}(1 + h \operatorname{ctg} x) = M h \operatorname{ctg} x \quad \text{յեղ}$$

$$\operatorname{Lg} \sin(x+h) - \operatorname{Lg} \sin x = M h \operatorname{ctg} x \dots (4)$$

Անհատներ յեղ բաժանաճանաչ փոքր h -ի համար գլխում ենք

$$\operatorname{Lg} \sin(x+h) - \operatorname{Lg} \sin x = M h \operatorname{ctg} x \dots (4)$$

(4) համապատասխանը բաժանելով (4)-ի վրա՝ ստանում ենք

$$(10) \quad \frac{\operatorname{Lg} \sin(x+h) - \operatorname{Lg} \sin x}{\operatorname{Lg} \sin(x+h) - \operatorname{Lg} \sin x} = \frac{h}{h_1} :$$

Անհատ անհատներ ծրար բանաճանաչների համար թողնում են
 աշխատելով:

78. Վերջին յեղյալ թեորեմների վրա է հիմնված Ֆրեյդիման

թեորեմը: Այդ թեորեմները ցանկացած փոփոխություն

են 1' կամ 10" հասարակածի օրոգյութին, նայած աշտամկնե-
րին. ապելի փոքր օրոգյութը գտնված են օրագր. ծան (Տեյթո-
դ-ով) օրոգյութ:

79. Առհասարակ օրագր. ծան համար. Այն ընդ-նկնելու-
ները, զոր Տեյթ արևի նախընթաց թեորեմներն ապացույ-
նի, կարող են այնուամենայնիվ ապ-ելի վրա հաշվածների
ճշդ-ության վրա. այդ պատճառով անհրաժեշտ է քննել, թե
ինչպիսի պայմաններում առաջին հինգ-դասերի-անհանգ-
ները չեն փոխվել: Քանի որ ցուցիկ է $(1 + h \operatorname{ctg} x)$ -ը
փոխանջան Տեյթ բոլոր անդամներն ախաճ յերկրորդ-ից:
Վերադառնալ h -ը բաժանաչակի փոքր է, ապա նրա քանա-
կության յեղ խառնարդ-ն էլ ապելի փոքր են. այդ-պատճա-
ռով Տեյթ յեղբայրանո՞ւնի, զոր անհանգ-ստ զգալի սխալն
առաջանում է փոխանջան յերկրորդ- անդամից, այն է
 $\frac{1}{2} M h^2 \operatorname{ctg}^2 x$ -ը որոշ ցուցիկ: Յերե սխալը պետք է փոքր
լինի հինգ-երորդ- դասերի-անհանգ-ստից, ապա պետք է ցե-
ղի ունենա հեղեղյալ անհաճախություններ.

$$\frac{1}{2} M h^2 \operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{10^5}.$$

Ըստ պայմանի ունիմք. $h < 1'$, $M = 0,43429448 \dots$

այս պատճառով $h < 3 \cdot \frac{1}{10^4}$ (հաշված լառապարհ-ներով),

$M < \frac{1}{2}$, յեղ Տեյթ անհաճախությունը 40 դասում.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{1}{10^8} \operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{10^5},$$

զորից

$$\operatorname{ctg}^2 x < \frac{4}{9} \cdot 10^3 \text{ կամ } \operatorname{ctg} x < \frac{20}{3} \sqrt{10}$$

$$\operatorname{ctg} x < 21$$

Աղյուսակներից գտնուած ենք, զոր $\text{ctg } 3^\circ < 21 < \text{ctg } 2^\circ$ այսինքն
 շրջ յեղյալացնուած ենք, զոր x անկյունը 3° -ից փոքր չպէտք
 Ե լինի: Այսու կողմից $\text{ctg } x = \text{ctg } (90^\circ - x)$, յեղ $\text{ctg } 87^\circ < 21 < 88^\circ$,
 այսինքն x անկյունը չպէտք Ե անցնի 87° -ից: Խաճաղութեամբ
 գտնուած արդ-յունքները գաւթու ենք այն յեղյալացութեան,
 զոր աղյուսակային ցարքերութեաներից կարելի Ե ոգ-գաւել
 3° -ից մինչեւ 87° -ի միջեւ ընկած անկյունները գտնուելու հա-
 ճար: Իսկ այն անկյուններին, զորոնք չեն գտնուած այդ-
 աւանդաներում, միջարդ-ումը չի կարելի կրթաւել անհրա-
 ժեշտ Ե այլ յեղյալաց զորոնք այդ դեպքի հաճար:

ՃԾ. Դեղւածքի բանաձեւերը. Քրանապի ապրիլ 1749-ին
 Դեղւածքը (1749-1822) ցղել Ե իր անունը կրող յորհու
 կարեղոր բանաձեւեր, զորոնց միջոցով կարելի Ե հաւել
 ցոր անկյունները արեւմտեան Ե արեւելեանները բաղաւթան
 յեղ եղ-ութեամբ: Այդ բանաձեւերը կարելի Ե պրանաւ հե-
 ցել յաւ յեղանակով:

Վերցնենք մի անկյուն, զորը պարունակուած Ե n'' դիցուի
 այդ- անկյան շրջանային չափն Ե x : Յերբ $n=1$, ունենք
 $\text{Տեղ } 1'' = \text{շրջ. չափ } 1'' \dots \dots (A).$

Մայրաքոր հաղաւարտութեանը, զորի մեղ, սակայն, սխալը չի
 աղ-ում առաջին հիւղ- ցրանորդ-ական նշանների վրա:
 Այնուհետեւ կաշտենք հեղեղյալ հաճարութեանը

$$x : \text{շրջ. չափ } 1'' = n'' : 1'',$$

զորիցեղից $x = n \cdot (\text{շրջ. չափ } 1'')$, կամ ըստ (A) հաղաւարտութե-
 յան

$$x = n \cdot \text{Տեղ } 1'' \dots \dots (B)$$

Այժմ գտնենք $\sin x = \sin n''$ համասարությունը x -ի
և n յերկու մասերի բաժանելով x -ի վրա.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin n''}{n};$$

(B) համասարությունը նկատարենք n անգամ

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin n''}{n \sin 1''} \dots \dots (C)$$

(C)-արժեքներ այս համասարությունը

$$\lg \frac{\sin x}{x} = \lg \sin n'' - \lg n - \lg \sin 1'',$$

գործելով

$$\lg \sin n'' = \lg n + \lg \sin 1'' + \lg \frac{\sin x}{x} \dots (C')$$

Յեթև n -ը ցուցած է, ապա $\lg n$ -ը կը գտնվե՛նք այժման
նկարից. ապա մասի յերկրորդ-անդամը համարյա մեկ
նույնությունն է, զոր կարելի է հետևորդաբար հաշվել.

ուստի գտնենք միայն գտնելի անդամի մոտավոր արժեքը:

Ըստ II թեորեմի ունենք $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$ մոտավոր համա-
սարությունը. ապա մեծ քանակի ճշնությունը ցույց է տալիս,

զոր այդ համասարության հիմնությունն ապա յե՛նք կը լինի,
յեթև $\frac{x^3}{6}$ -ի ցեղ գտնելով $\frac{x^3}{6}$. Այժմ $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$, հեղինակա-

պես $\lg \frac{\sin x}{x} = \lg (1 - \frac{x^2}{6})$. Վերադառնալով $\frac{x^2}{6} < 1$, ապա V
թեորեմի համաձայն կարելի է ընդունել

$$\lg (1 - \frac{x^2}{6}) = -\frac{M}{6} x^2,$$

զորի մասնակցի դերս ցուցած անդամները չեն ազդում
առաջին հիմն. քանակորդ-ակում նշանակերի վրա:

Այսպես ունենք

$$\lg \frac{\sin x}{x} = -\frac{M}{6} x^2 \dots$$

յեւ զտրգնականքն

$$\lg \sin n'' = \lg n + \lg \sin 1'' - \frac{M}{6} x^2 \dots (C_1)$$

Այս ե ղ-եւնոյթի առաջին բանաձեւը: յերկրորդն ապա-
նալու համար այսպէս կը զարգենք: Ստանք

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} n'',$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{tg} n''}{n \cdot \sin 1''},$$

$$\lg \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lg \operatorname{tg} n'' - \lg n - \lg \sin 1'',$$

$$\lg \operatorname{tg} n'' = \lg n + \lg \sin 1'' + \lg \frac{\operatorname{tg} x}{x}; \dots (C_2)$$

Քննենք ե գտնել $\lg \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ զեքսպոնենտ: Վերադառնալով

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

այս կը փոխարինենք $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \dots$ և $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$ [ըստ (7) բանաձեւի]

$$\text{Բայց } \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Դաւի ընդ x -ը փոքր փանակութեան ե, կարող ենք $\frac{x^4}{4}$ -ը

սխալ փանորդի բնոր աւելանալը զնշել. հետեւեալով

$$\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$$

Դուրս չգնալով զտրգին աւելանալ, փոքրութեան պարզա-
նով, յեւ պարզելով ծնայած արտահայտութեան՝ կարա-

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + \frac{1}{6} x^2,$$

$$\lg \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lg \left(1 + \frac{1}{6} x^2\right),$$

$$\lg \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{2M}{6} x^2$$

Այսպիսով սրանու եւս ղ-եւնոյթի յերկրորդ բանաձեւը

$$\lg \operatorname{tg} n'' = \lg n + \lg \sin 1'' + \frac{2M}{6} x^2 \dots (D_2)$$

Ստանք հետեւեալ, ալ նշանակուածքը

$$S_0 = \lg \sin 1'', \quad \sigma = \frac{2M}{6} x^2;$$

այն համաձայն այդ յերկու բանաչափերը կենդանու զե-
րեզյուս չեղը

(2)
$$\begin{cases} \lg \sin n'' = \lg n + \delta_0 - \delta, \\ \lg \lg n'' = \lg n + \delta_0 + 2\delta. \end{cases}$$

Ճ1. δ_0 -ի յեղ δ -ի արժեքները հաշված են յեղ չեղեղված
կ-էլմեթրի հաշմեղ աղյուսակներում: Այդ աղյուսակները
դասակարգված են կ-լալեմալի I աղյուսակի յուրաքան-
չյուր յերեսի չեղեղը. δ_0 -ն հաշվարարն է յեղ հալա-
ւաւ 4, 685575-10. δ -ն հաշված է x-ից յեղ արդու-
հաշվում է յաւր փոքր կոտորակով, փոքր աւաւիւն
նշանակիչ թվանշանը արտակերպից հեղմ δ -ից չեղն է
բնում, ալարեքն δ -ն յեղ 2 δ արդաւալցւած են δ -արդ-
գաւնորդակաւ նշանի ծրափոքներով:

Այսպիսով ցեւնում ենք, փոք ըստ ցոյցաւ փոքր անկյուն-
ների՝ թուկցիւսների լոգ-արրթմէրը չեղեղը յեղ հալա-
դարչ կ-ործողությունը չեղաւծում են աղյուսակներից
չեղցրած պալրաւալի թվերի գ-ւեարմաւն յեղ հաւնաւն:
Հեղեղյաւ որրնակները յեղ ցոյց կը ցաւն, փոք այդ-դի-
ւի լոգ-արրթմէրը յեղ անկյունները գ-յնեղը հաւալի է
պալրաւում գ-ործնակաւնում:

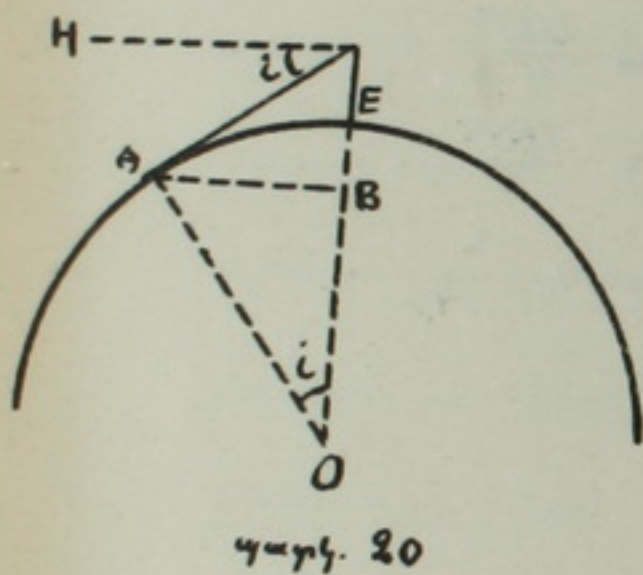
Որրնակներ

Որրնակ 1. Կ-յնեղ π -ն ցաւնորդակաւ հիւց նշանե-
րի ծղղությունք՝ ոգ-րվեղով 21600 կողմ ունեցող հա-
նունալոր բալծանկյունից, փոք շեղ-ւած է յերկարու-
րյաւն $\frac{1}{2}$ ծրափոր շառաւիղի ունեցող շրջանի:

հայտնած անի, զոր $\pi = 3, 14159$ հինգ- տասնորդական
նշանները ճշգրտությամբ:

Որինակ 2. Գտնել յերկրագնդի շառավիղը, յեթե
հայտնի է, զոր հորիզոնի իջժան i անկյունը ճարդա-
հասակի $h = 2$ ծայր բարձրության վրա հայտնած է անի
 $2'44''$:

Որոշուք $CE = h$, $EO = AO = R$. այն ժամանակ (պատկ. 20)



$HCA = i$ անկյունը EC լինի C կե-
րի համար հորիզոնի իջժան անկյու-
նը: Այնուհետև, CA -ն ցիտադե-
րան այն խառնագայթն է, զորը
շողափող է յերկրի մակերևույթին
 A կետում. հետևապես, CAO ան-
կյունն ուղիղ է: Այժմ A -ից իջե-

ցնելով AB ուղղահայացը CO -ի վրա. այն ժամանակ ACO
յեռանկյան ձգ AO եզր EO լինի OC -ի յեզ OB -ի վրեժն
համեմատականը, այսինքն

$$OC : OA = OA : OB$$

յալ $(R+h) : R = R : OB$

Նկատելով, զոր AOB անկյունը համասար է i -ին
(այդ- յերկու անկյունների կողմերը համապատասխանա-
բար ուղղահայաց են), AOB յեռանկյունից գտնու-
նի $AB = R \cos i$, ուստի

$$R + h = \frac{R}{\cos i},$$

Վերջիվերջ ցարկ ճեղագիտական հարաբերակ, սպասված

և R -ի համար

$$R = \frac{h \cos i}{1 - \cos i}$$

արտահայտությունը . այս արտահայտությունը կարելի է գե-
րաձել (ոգ-արթնակա) չեղի

$$\frac{\cos i}{1 - \cos i} = \frac{\cos i}{2 \sin^2 \frac{i}{2}} = \frac{\cos i \cos \frac{i}{2}}{2 \sin \frac{i}{2} \cdot \cos \frac{i}{2} \cdot \sin \frac{i}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} \frac{i}{2}}$$

Արեք

$$R = \frac{h}{\operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} \frac{i}{2}}$$

Քննելով h -ի յեղ i -ի ցեղ իրենց արժեքները յեղ արտա-
հայտելով h -ը իրենց ծանրող՝ գերազանցող, և
կարգադրել .

$$R = \frac{1}{500 \operatorname{tg} 164'' \operatorname{tg} 82''}$$

Ոգ-արթնակա զարթն հաշվարկությունը՝ գրեմոն ենք
եղ $R = 3,80123$, զորոշելի յեղ

$$R = 6327,4 \text{ իրենց}$$

Ըստ Գերհեր յերկրի շառաչիչ փոփոխում է 6357
իրենց յերկրի 6378 քմ. հեղեղապես , յեր ծոցապոյ
յեղանակը քաղ բաղակներն իրենց արդ-յունք :

Որոշակ 3. զորոշել բաղաձան ճիշ բեղեմոն գրեղ
լուսարժեք խոփոխում :

Պ-րոցի յերկրի շառձան արաչ-արժեքն է $v = 30 \frac{\text{քմ.}}{\text{վայրկ.}}$,
լուսի արաչ-արժեքն է $V = 300000 \frac{\text{քմ.}}{\text{վայրկ.}}$, խոփոխ
անկումը նշանակելով α , ունիք .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{V} , \text{ զորոշ}$$

$$\lg \alpha = 0,0001$$

Հոգարիքների գ-րանուհ

$$\lg \lg \alpha = 6,00000 - 10,$$

$$\lg \alpha = \lg \lg \alpha - S_0 - 25$$

$$\lg \alpha = 1,31441$$

$$\alpha = 20'',626:$$

Դուրիքների

1. Արեգի հորիզոնական ցեղապատկերներն են $8''$, 8 . մո-
րոշել արեգի հեռավորությունը յերկրից:
2. Արեգի ցեղաների պրաժմո-րեն են $32'$. գ-րել նրա շա-
ռավիղը.
3. Լուսնի ցեղապատկերներն են $57'18''$. Հորոշել Լուսնի
հեռավորությունը յերկրից.
4. Արեգի ինչ հեռավորության վրա պետք է դնել մի
ապահանջ պրաժմո-րեն ունեցող շրջանակ, զոր ծածկի
արեգը:
5. 200 հոսանքապ ունեցող բարձրություն AB աշտարակ-
ի վրա պետք է 1 հոսն. յերկարությունը BC չորսը:
Մեծություններն ինչ անկյանը կերպիս նա դ-կոնի, զոր
արեգ գ-րելուց են աշտարակի A կիսի հեռ ճեղքանակ
հորիզոնական հարթության վրա, այդ- կիսից 100 հոսա-
նապ հեռացած D կետը:
6. Ջերե ցեղությունն անկյունը գոյի են $40''$ -ից, ինչ չեմ
կարող այնպիս ցեղաներ առարկան: Հորիզոն պետք են լինի
ծառերի յերկարությունը, յերե մեզ պետք կանգնելու

- Տեղ յերեւմտեւ յերկու խորերից եւ ծրարած:
7. 1 սառ. ցրածագ-իճ ունեցող ող-ապարիկը ցտեսանելի
եւ 4' 34" անկյաճ: Դնել հեռապարտւած զրա եւ գ-րն զմոճ
նա զ-իւրակերից:
8. Չոգ-ենալը շարժմոճ եւ հաճախութեամբ $5 \frac{\text{ժայր}}{\text{վայրկ.}}$ արագ-ու-
թյամբ. նրա զրա թնդ-անորը դրւած եւ անկաւ, զոր
ն ունի շարժման ուղղութեանն ուղղահայաց եւ շոգ-ենալի
շարժման ուղղութեանը: Դժանաւով՝ զոր ունի արագ-ու-
թյունը $\frac{400 \text{ ժայր.}}{\text{վայրկ.}}$ եւ, գ-րնել: Եւ ինչ անկյաճ պէտք եւ շեղել
թնդ-անորը, զոր ունի 400 ժայր հեռապարտւ-
ած զրա գ-րնելող նշանին:
9. Բռնանալ յետ արագութեանը՝ Պարնելի յետ Գարի-
լենդ-ա, ունի 97 ժայր յետ 49 ժայր բարձրութեան յետ
շեղմոճ եւ ուղղաձիգ. դիրքից հաճախութեամբ 1, 23 ժայր յետ 2, 4 ժայր: Դնել անկյուններով եւ թեքած
նրանք դ-եպի հորիզոնը:
10. Դերկրից ինչքան պէտք եւ բարձրանալ, զոր հորիզո-
նի թեքան անկյունը կազմի $2^{\circ} 49' 50''$: Դերկրի շառավղը
հաճախութեամբ եւ 6378 իւրստայր:

82. Դնգ-անշան արշաւաւորներ ճշգ-ութեամբ.

Ճիշդ ծանօթ եւ իննութեան առնել արշաւաւորներ զեզե-
ղած յիննութեաններ յետ նրանց ոգնութեամբ կապարդող
հաշիւներ ճշգ-ութեամբ: Ընդ ճշգ-ութեամբ կապած եւ ծր-
արի պայմաններից, զոր յետ պարտիկ կը իննել արշաւոր-
աւանդին:

Ա. Առերկայ առաջ աւերակները եւ վերահասու թելը, թե թել
աւերակներ Ժողովարանը հաշված շրջանային ֆունկցիաները
այն աւերակները, զորոնք գտնուելով են աշխատակներու:
Իրենք արդեն գրեւոր, զոր ճիւղ 1'-ի հաշվածը հաշվարկել
գրանցակներուց- գրանցարկան նշանի Ժողովարանը: Դերեւ աշխ.
Ժողովարանը պահպանելով նախկին հաշարդ- հաշվածները շրջան-
քառ, այսինքն վերջնական արեւմտեան յիւզ հոսիւնները,
արեւելեան գրանցակ գրանցարկան նշաններու, ապա նա-
կով հեղինակութեան շրջանային արեւմտեան հարեւր եւ դիւրութեան:
Գալ այն յիշակաւորութեան, զոր արեւմտեան յիւզ հոսիւնու-
նները աշխատակարար թուոյ աւերակները Ժողովարանը գտնուելով
գրանցարկաններ հետը շարունակ, այսինքն սխալը գործը
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = 0.05$ - րդ:

Բ. շրջանային ֆունկցիաների լոգարիթմները աշխատակնե-
րու հաշվարան հաշվածները հարող են զանազան Ժողով-
արաններ մեկնալ, զոր հաշված եւ յերկու հանգամանքի.
1-ին աշխատակարար արեւմտեան (ինքնուրուշներ) ճիւղ-
արանից յիւզ 2-րդ շրջանային ֆունկցիաների լոգարիթմ-
ները գրանցարկաններ թղթի: Այս յերկու պայմաննե-
րը արեւել հաւ սերտ հաւ: Դրոյ, Գրեւոր 1"-ից 1" լոգար-
իթմները հաշված են հիշգ. գրանցարկաններ: Այն ճա-
նաչ, որ լոգ ճիւղ $39^{\circ}24' -$ ը, լոգ ճիւղ $39^{\circ}24'1" -$ ը,
լոգ ճիւղ $39^{\circ}24'2" -$ ը հաշվարկաւորելն արեւելանայն 9,80182
թղթի, իսկ 9,88803 թղթի հը լինի հեղինակ շարան-
հոսիւնները յարաբանութեան լոգարիթմը. $39^{\circ}24'$, $39^{\circ}24'1"$,
 $39^{\circ}24'2"$, $39^{\circ}24'3"$:

Այս որհեակները մեզ հուշ են պատրու, զոր 1" միջոցի հա-
մար հինգ-դասանորդանշանը բազմական է. ահա թե ինչու
հնգ-անշան աղյուսակներում միջոցները գերցրած են 1'-ից 1',
զորը նույն թան մի ինչ ազդեր են, թան թույլ են պատրու դասանոր-
դանշանների թիվը:

Ել. Հնայած թղոր նախադգաւորություններին յեզ մոզմունքին՝
աղյուսակային տեսությունները պայն մոտաւոր արժեքներն են
շրջանային ֆունկցիաների (հասնւածաց (ոգ-արիթմետիկ), այս պատ-
ճառով պայա տեսությունների մոտոյով նրանց համապատաս-
խանող անկյունները գործշելիս՝ միշտ գործող սխալ անոմ
ենք: Այդ սխալը պարբեր տեսություն ունի պարբեր ֆուն-
կցիաների համար: Երոտ, $1' = 60''$ միջոցի յեզ սինուսների
(ոգ-արիթմետիկ ձև պարբերության համար գ-հնոմ ենք, զոր
մի հարյուրհաւորերորդը (այսինքն հինգ-երորդ-դասանորդանշա-
նի 1 միավորը) համապատասխանում է $\frac{60''}{A}$ թանորդին:

Յետե յերկու անկյունների պարբերությունը գործիւ է $\frac{60''}{A}$ -ից,
այսա նրանց սինուսների հնգ-անշան (ոգ-արիթմետիկը նույնն են,
այսպիսով՝ անկյունը գ-հնոմը խաճանակ սխալի տեսակ ունին
է $\frac{60''}{A}$ -ը: Այսպիսից պարզ է, զոր ինչքան մեծ լինի A-ն,
այնքան գործիւ կը լինի անխաւաքելի սխալը. յեզ գործողե-
լիւզ պարբեր ֆունկցիաների համար, A-ն ընդ-հանրապէս պար-
բեր է, այսա ծոմ է նրանցից յուրաքանչյուրը ինքն առան-
ջին:

Ռ-րդունշով շրջանային ֆունկցիաների (ոգ-արիթմետիկ աղյու-
սակները՝ գ-աւրս ենք հետեւեալ յեզրակացություններին.

1. Յետք անկյունը 0°-ից մինչեւ 90° անոմ է, աղյուսակային
պարբերությունը՝ A-ն, սինուսների համար լայնուակ նվա-

համեմատելով : 12°-ի շուրջը $\alpha = 60$ յեղ սխալը =
 = 1", 22°-ի շուրջը $\alpha = 30$ յեղ սխալը = 2", ինչ ալև. այս
 սխալները հարելի են հեղեղված աշխատանքի ճշգրտությանը :

12°	սխալը 1"	55°	սխալը 7"
22°	" 2"	60°	" 8"
30°	" 3"	70°	" 12"
40°	" 4"	80°	" 30"
45°	" 5"	85°	" 60" = 1'
50°	" 6"	90°	" 3'

88°-ի շուրջը արեւմտյան սինուսը հասանալիս սխալում են յե-
 րեք ցարքեր անկյունների. հեղեղված սխալը լինելու է նույնիսկ
 յերեք րոպեից :

Հասկանալի է, որ համար հարմարեցնել նույն արդյունքները, ճիշտ լինելու
 համարակ հարկով դասաւորված :

Ամենուրեք ենք, վեր ցոյց անկյունները վար են վորոշում հաս-
 նուններով, իսկ ձեռքը՝ սինուսներով :

2. Նշանակելով α , քանդակները (յեղ հարանդ-ենները)
 աշխատանքի ցարքերու յայտնը յեղ դիտելով աշխատանքը
 ցուանում ենք, վեր α -ն ածում են, յերբ անկյունն ածում են
 0°-ից քնդել 45° յեղ նվազում են, յերբ անկյունը շարունա-
 կում են ածել : 45°-ի շուրջը $\alpha = 25$ յեղ սխալը = 2", 4 :
 հեղեղված, քանդակները յեղ հարանդ-ենները քնդում
 անկյունները վորոշում են աշխատանքի յայտնը, վեր
 աշխատանքի հեղեղում են 45°-ից :

3. Ամանդ-ենները նկատմամբ հարմարած հեղեղում քնդում
 յեղ արդյունքները դրված են հեղեղված աշխատանք :

12° սրան 1"	60° սրան 2"
28° " 2"	77° " 1"
45° " 2", 4	84° " 0", 5.

Կանոնադրելով յերկու աշյուսակները գլխակները՝ սրանու եւի
յերրորդ- յեղբակացութիւնը. աւելյունները գլանգեւանները յիշ
կարանգեւանների սրգոցով աւելի քիչ եւ քորովում, քան
սրանաների յիշ կարանաների սրգոցով:

ՃՅ. Տրի քանի խումբ այն ճաւին, թե զոր աշյուսակներով
(հնգանշան թե յեռանշան) նպատակահարմար եւ ոգրով զորո-
ցում յիշ կշանում: Նախընթաց հեղադրութիւններն ապա-
ցուցեցին յեռանշան աշյուսակների անպայման առաջին
թիւը ճշգրտութեան ցուցակները, բայց նրանց բանեցնելը աւել-
ի խաճաճակ եւ խումբ: Բայց դրանք շատ խնդիրների
նիշ բազմակն եւ ինքն յեռութիւնների արժեքները գործել
3 կամ 4 գլանորդանշանի ճշգրտութեամբ, իսկ աւելյուններինը
1/2 րոպեի ճշգրտութեամբ: Նույնը նկատում եւի նախկ ապրիլ
բաշխութեան յիշ: Դա չափաւոր շաւանդը իր հնգանշան
աշյուսակների հաւաքաբանում հիշարարում եւ, զոր նրանց
ոգնութեամբ հաշվել եւ բազմաթիւ խափարածներ յիշ ճշգրտակ-
նների պարունակներ. հնգանշան աշյուսակներին ի գաղտ-
պանութիւն արտահայտելով 1858 թվին նախկ լեզերքին,
զորի հեղինակութեան շնորհիւ հնգանշան աշյուսակները
նույն գործին զորոց:

Հայերը եւ ժողովուրդը, սակայն, չեն արեւմտացիացի շատ խնայող-
 ներում ունեւորած աշխուսեցներ, իշխողներն անբաւարար եւ
 Այսպէս, յերկարաւիտութեան ժողովուրդներու հետեւեալ հարկ-
 ները հաճախակի խաբարարին չարութեան իշխողները հաւ-
 ցում եւ ժողովրդի վրէժխնդրող ժամերին (այսինքն արդիւնեւորին
 սպառնալով եւն չգրանցող-անգնաներով), իսկ անկյունները Օ՝1-ի
 Այսպէս խաբարարին ժողովուրդները հետեւողութեան
 իր հեղի գործ ունենալու այդ իշխողներն անգիր յեղաւթում
 եւ, թելադրելով ֆրէզիայում շնորհաբար զգործակցելու,
 չորսընթաց յեղաւթում։ Այսպէս հարկի եւ խնամ ոգւորելու
 ինչպէս 10-անգամ յեղաւթում իսկ չուր իսկ չուր 48-անգամ
 աշխուսեցներ։ Այնպէս, ֆրէզիայում հաշտութեան խ-
 ժամակ վրայ պատահում եւն զոյալներ չի յեղաւթում 10-անգամ
 գնաներով։ Այս փաստերը բազմապէս եւն ժողովուրդները,
 չորս հիւսնեմ անհրաժեշտ եւ յերկին ոգւորել 7-անգամ
 աշխուսեցներ։ իսկ գործողական հիւսնեմ 5-անգամ աշխ-
 անները արանգ-անգամ բազմապէս եւն։
 Կիրառութեան շրջանակին ֆրէզիայում հաշտութեան համար
 այսպէս բազմապէս յեղաւթումով ոգւորում եւն աշխուսեց-
 իր անաւթին հաշտութեան։ Անկյունները գործողութեան ունի անգիր
 այսպէս յեղաւթում հարձակ, չորս հիւսնեմ եւ շարժերի
 գործողութեան յեղաւթում ինչպէս 10-անգամ չորս զորութեան իր։

Գլուխ V. Անկյունաչափական արտահայտություններն

լոգարիթմական չեղ Գաւը.

84. Անկյունաչափական կոչումն է ածին ծր արտահայտություն, զորի անդամներից առնվալն ծեկը պարունակած է լրջանային ֆունկցիա : Անկյունաչափական արտահայտությունները հաշվելու համար ըստ ծածի ճասին անհրաժեշտ է լինում գիծել լոգարիթմների ոգնություն, չորովհետեւ անկյունաչափական ֆունկցիաների անծրական հաշվումը քվալ անկյունների ծրոցով յեղ հակառակ գործողությունը ծն զծխարություններ է հարույանում :

Այս հանգամանքը ցույց է ցուլրա, թե չորքան անհրաժեշտ է կարողանալ անկյունաչափական արտահայտություններն ցուլ լոգարիթմական չեղ, այսինքն այնպսի չեղ. չոր նրանք չպարունակեն գումարումներ յեղ հանումներ :

85. Անկյունաչափական արտահայտությունները լոգարիթմական չեղի չերաժեշտ համար կա յերկու յեղանակ. չորունցից առաջինը կոչումն է յեղափոխումների յեղանակ, իսկ յերկրորդը՝ այսպես կոչված ոժանդակ անկյան ծում ճան յեղանակ :

Յերկրորդ յեղանակն ալելի ընդհանուր է, բայց յեղ ալելի բարդ. ուստի նրա ոգնության պետք է գիծել ծրայն այն դեպքերում, յերբ առաջին յեղանակն անկրառելի է .

II. Չեղափոխումների յեղանակ.

86, 87. Անկյունաչափական ֆունկցիաների գումար յեղ արարելություն յեղափոխումներ :

և ունի ունեւոր.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Այդպէս մտաւորաբար գումարելով յետևեցող երկու հարաբերութիւնները՝ կարանաւոր.

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta.$$

Դիցուի $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$. այն համարաւոր $\alpha = \frac{p+q}{2}$, $\beta = \frac{p-q}{2}$ յետևեցող կարանաւոր.

$$I \begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \\ \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Ելադրում

1°. Ֆորմուլաները անկյունների սինուսների գումարը հաշուարկելով այդ անկյունների կիսագումարի սինուսը յետ կիսաբացութեան կոսինուսի կրկնապատկի արտադրութիւն:

2°. Ֆորմուլաները անկյունների սինուսների տարբերութիւնը հաշուարկելով այդ անկյունների կիսագումարի կոսինուսը յետ կիսաբացութեան սինուսի կրկնապատկի արտադրութիւն:

Ժրշշ. նույն ձևով

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Բանաւորներից կարանաւոր (ալիս առաջ ունեւաւոր զոր $-\sin \frac{p-q}{2} = \sin \frac{q-p}{2}$)

$$\text{II} \begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2} \end{cases}$$

այսինքն

3°. Հերկու անկյունների կոսինուսների գումարը հավասար է այդ անկյունների կիսագումարի յեղ կիսաբարձրության կոսինուսների կրկնապատկի արտադրյալին:

4°. Հերկու անկյունների կոսինուսների տարբերությունը հավասար է այդ անկյունների կիսագումարի յեղ երեսնյ հակադիր կիսաբարձրության արժեքների կրկնապատկի արտադրյալին:

Առանց գծադրության գրենք հստ.

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q \pm \sin q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q},$$

այսինքն

$$\text{III} \begin{cases} \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \\ \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q} \end{cases}$$

Տիշտ- նույն յեղանակով գրենք հստ.

$$\text{IV} \begin{cases} \operatorname{ctg} p + \operatorname{ctg} q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q} \\ \operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q = \frac{\sin(p-q)}{\sin p \sin q} \end{cases}$$

Հետևաբա ոգրակար է լինում (I) յեղ (II) յումք բանա-
յեղերն այսպես ներկայացնել.

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b),$$

$$2 \sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b).$$

$$2 \cos a \cos b = \cos (a+b) + \cos (a-b)$$

$$2 \sin a \sin b = \cos (a-b) - \cos (a+b)$$

88. Այժմ անցնենք որոշումներին

Որոշում I. Վերլուծել արքայաքիչների $\sin 60^\circ - \sin 30^\circ$ արկանը -

դ-մեջ: ըստ (I 2°) բանաչափի գտնված է՝

$$\sin 60^\circ - \sin 30^\circ = 2 \cos \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} \sin \frac{60^\circ - 30^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \sin 15^\circ = \sqrt{2} \sin 15^\circ$$

Որոշում II. Վերլուծել $1 \pm \sin \alpha$

$$1 + \sin \alpha = \sin 90^\circ + \sin \alpha = 2 \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Զիշտ- ևսյն չեղով 40 գտնվում

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)$$

Որոշում III. Վերլուծել $1 \pm \cos \alpha$

$$1 + \cos \alpha = \cos 0^\circ + \cos \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = \cos 0^\circ - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Որոշում IV. Վերլուծել $\sin \alpha \pm \cos \alpha$

$$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sin \alpha \pm \sin (90^\circ - \alpha) \text{ յեղ առնել}$$

Որոշում V. Վերլուծել $1 \pm \operatorname{tg} \alpha$

$$1 \pm \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ \pm \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin (45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin (45^\circ \pm \alpha)}{\cos \alpha}$$

Որոշում VI. Վերլուծել արքայաքիչների $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = \\ &= 2 \sin 2x \cos (-x) + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1) = \\ &= 2 \sin 2x \left(\frac{1}{2} + \cos x \right) = 2 \sin 2x (\cos 60^\circ + \cos x) = \\ &= 2 \sin 2x \cdot 2 \cos \left(30^\circ + \frac{x}{2} \right) \cos \left(30^\circ - \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

Զիշտ

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \sin 2x \cdot \cos \left(30^\circ + \frac{x}{2} \right) \cos \left(30^\circ - \frac{x}{2} \right)$$

Որինակ VII. Վերլուծել արտադրյալների $\operatorname{tg} x - \sec x$.

Ուշիմք

$$\operatorname{tg} x - \sec x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \sec x (\sin x - 1).$$

Նկատելով՝ զոր $1 = \sin 90^\circ$, գրենք նախ.

$$\sin x - 1 = \sin x - \sin 90^\circ = 2 \cos \left(\frac{x}{2} + 45^\circ \right) \sin \left(\frac{x}{2} - 45^\circ \right).$$

այնուհետև

$$\sin \left(\frac{x}{2} - 45^\circ \right) = -\sin \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right),$$

քայքայ վերադասարկելով $(45^\circ + \frac{x}{2})$ յետ $(45^\circ - \frac{x}{2})$ անկյուններն

իրար լրացնում են ծիծելով 90° , ապա $\sin \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right) = \cos \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)$.

յետ վերգնականորեն

$$\operatorname{tg} x - \sec x = -2 \sec x \cos^2 \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right):$$

Որինակ VIII. Վերլուծել արտադրյալների $\frac{1}{2} - \sin^2 x$.

1° $\frac{1}{2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2 = \sin^2 45^\circ$, հետևաբար

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \sin^2 x &= \sin^2 45^\circ - \sin^2 x = (\sin 45^\circ + \sin x)(\sin 45^\circ - \sin x) = \\ &= 2 \sin \frac{45^\circ + x}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ - x}{2} \cdot 2 \cos \frac{45^\circ + x}{2} \cdot \sin \frac{45^\circ - x}{2} = \\ &= \left(2 \sin \frac{45^\circ + x}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ + x}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{45^\circ - x}{2} \cdot \cos \frac{45^\circ - x}{2} \right) = \\ &= \sin (45^\circ + x) \sin (45^\circ - x) = \sin (45^\circ + x) \cos (45^\circ + x) = \frac{1}{2} \sin (90^\circ + 2x) = \\ &= \frac{1}{2} \cos 2x. \end{aligned}$$

վերգնականորեն սրահում նախ

$$\frac{1}{2} - \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x$$

2° Նույն արդյունքը հարելի է սրահում ահա հասցնելով ազելի համառոտ յեղանակով, այն է՝ $\frac{1}{2} - \sin^2 x = \frac{1}{2} - \left(\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \right)^2 =$
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} \cos 2x.$

Վերադարձնելով նկատում ենք ընդհանուր յեղանակի առաջնությունը -
 նախ յետ թերութունը. առաջնությունն այն է, զոր թմանա-
 լով ընդհանուր յեղանակը, հարելի է...

ածեն թի՛ խնդիր. քերթայունն այն է, զոր շնորհանուր յեղանակի առաջագործած լուծումը հաճախ էրնում է չիք, թի՛չդեռ շարք առգամ հնարավոր է լինում ծառնավոր յեղանակների ոգնությունը արագորեն հասնել նպատակին։
Պարզ է, զոր լուծման ծառնավոր յեղանակների գործարարունը յեռ յեռ կարեւորություն ունի։

Որինակ 15. Վերլուծել արգարթիչների $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$, յերե
 $A + B + C = 180^\circ$.

Ունիմ

$$\sin 2A + \sin 2B = 2 \sin (A+B) \cos (A-B).$$

$$\sin (A+B) = \sin (180^\circ - C) = \sin C.$$

$$\sin 2C = 2 \sin C \cos C = 2 \sin C \cos [180^\circ - (A+B)].$$

$$\sin 2C = -2 \sin C \cos (A+B).$$

այսպիսով

$$\begin{aligned} (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C &= 2 \sin C \cos (A-B) - 2 \sin C \cos (A+B) = \\ &= 2 \sin C [\cos (A-B) - \cos (A+B)] = 2 \sin C \cdot 2 \sin A \sin B. \end{aligned}$$

Վերջնականորեն կարգավորել.

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Որինակ 16. Վերլուծել արգարթիչների

$$\cos^2 A + \cos^2 B - \sin^2 C, \text{ յերե } A + B + C = 180^\circ.$$

Լուծումը շարք չեղերից յեղ յեղ հեշտվում է.

$$\sin^2 C = \sin^2 (A+B) = (\sin A \cos B + \cos A \sin B)^2 =$$

$$= \sin^2 A \cos^2 B + 2 \sin A \cos A \sin B \cos B + \cos^2 A \sin^2 B.$$

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2 B - \sin^2 C &= \cos^2 A + \cos^2 B - (\sin^2 A \cos^2 B + \\ &+ 2 \sin A \cos A \sin B \cos B + \cos^2 A \sin^2 B) = (\cos^2 A - \cos^2 A \sin^2 B) + \\ &+ (\cos^2 B - \sin^2 A \cos^2 B) - 2 \sin A \cos A \sin B \cos B = \end{aligned}$$

$$(A') S_2 = \cos x + \cos(x+h) + \cos(x+2h) + \dots + \cos[x+(n-1)h]$$

$$(B') S_2 = \frac{\cos(x + \frac{n-1}{2}h) \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$$

Որինակ $\bar{XII}$. Գտնել թվաքանական հառաջարկյուն հաջորդանիշների սինուսների յեղ հոսինուսների քառակուսիների գումարները: Պիտեմ

$$(C) S_3 = \sin^2 x + \sin^2(x+h) + \dots + \sin^2[x+(n-1)h],$$

$$(D) S_4 = \cos^2 x + \cos^2(x+h) + \dots + \cos^2[x+(n-1)h].$$

Ոգտվելով

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a)$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a)$$

բանաչեղերից՝ սինոգորուն գտնուս ենք

$$S_3 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \{ \cos 2x + \cos 2(x+h) + \dots + \cos 2[x+(n-1)h] \},$$

$$S_4 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \{ \cos 2x + \cos 2(x+h) + \dots + \cos 2[x+(n-1)h] \},$$

զորտելից, (B') -ի հիման վրա հստակաւ

$$(C') S_3 = \frac{n}{2} - \frac{\cos[2x+(n-1)h] \sin nh}{2 \sin h},$$

$$(D') S_4 = \frac{n}{2} + \frac{\cos[2x+(n-1)h] \sin nh}{2 \sin h}.$$

Որինակ $\bar{XIII}$. Գտնել

$$y = \left[\frac{1 - \cos 2x}{\tan^2 x} \right]_{x=\pi}$$

արտահայտւոյան իսկական արժեքը,

ձերք $x=\pi$, հստակաւ ընդունուս է $\frac{0}{0}$ հերպարաւիւր. այդ ցոյց

է րաւիւ, զոր հստակի հաճարիւր յեղ հայտարարն ունի

այնպիսի ընդհանուր արտադրիւր, զորը x -ի րվյալ արժեքի

հաճար դառնուս է զերո: y -ի իսկական արժեքը գտնելու

հաճար աւհրաւեղիւ է բաժանարարների վերլուսել հաճարիւն

ու հայտարարը, ապա հոգաւելու հստակաւ:

Ուշիւի

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2 \sin^2 x : \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cos^2 x$$

$x = \pi$ արժեքի համար $2 \cos^2 x = 2$, հետեւեալապէս
 $y = 2$.

Որինակ XIV. Գտնել $y = \left[\frac{\sin mx}{\sin nx} \right]_{x=0}$

արտահայտութեան իսկական արժեքը:

$x = 0$ արժեքի համար $y = \frac{0}{0}$, այսինքն y -ի համար սրա-
 ցում է անորոշ արտահայտութիւն: Համարին ու հայտա-
 րարը պէտք է վերլուծենք ընդհանուր արտադրանքի վրայ
 լու համար, սակայն այստեղ հարելի է ոգտել յետ հայտնի
 այն թերեւոր, զոր անվերջ փոքր անկյան սինուսի յետ այդ-
 անկյան հարաբերութեան սահմանը համասար է յետին:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Այստեղ արտահայտութիւնը ճշգրտութեամբ այսպէս.

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \left(\frac{\sin mx}{mx} : \frac{\sin nx}{nx} \right) \frac{mx}{nx} = \frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}} \cdot \frac{m}{n}.$$

Բայց զորովհետեւ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx} = 1$,
 ապա յետ

$$y = \left[\frac{\sin mx}{\sin nx} \right]_{x=0} = \frac{m}{n}:$$

Որինակ XV. Այժմ է ծի հանդիմար n -անկյուն, զորի գագաթ-
 ներն են $A, B, C \dots$ (պատկ. 21): Հշատակեւի նրա հարթ-
 Գիծ K -ով. իսկ յետեւ հարեւան հարթագծերի հաշտւած աշխ-
 նը՝ d -ով. այն ժամանակ բոլոր d -ները ծիւղաւոր են,
 այսինքն $\alpha = \frac{2\pi}{n}$: Այժմ իտեղեւի

կամ թե՛ յեւ շրանից կողմերի վրա իջեցնելով $MK, ML, \dots$ ուղղահայացները. այդ ուղղահայացների թիվը կազմված անկյուններից նույնպես համասար էն α -ի: Յեթե $OM = d$, եւ $\angle OMK = x$ ասյա

$$MK = \kappa + d \cos x, \quad ML = \kappa + d \cos(x + \alpha), \dots$$

գումարելով $MK, ML, \dots$ ուղղահայացները, գումարն անվանելով S , կստանանք

$$\begin{aligned} S &= n\kappa + d [\cos x + \cos(x + \alpha) + \cos(x + 2\alpha) + \dots] = \\ &= n\kappa + d \cdot \frac{\cos(x + \frac{n-1}{2}\alpha) \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Բայց չորովհետեւ $\frac{n\alpha}{2} = \pi$, $\sin \frac{n\alpha}{2} = \sin \pi = 0$, ասյա
 $S = n\kappa$,

այսինքն

կանոնաւոր բազմանկյան ներքին կետից նրա կողմերի վրա իջեցրած ուղղահայացների գումարը համասար է կողմերի թվի յեւ հարթւ.

գ-Տի արտադրանքին: (Վիվիանիի թեորեմ.

Viviani, 1622 - 1703): Յեթե վերցնելու

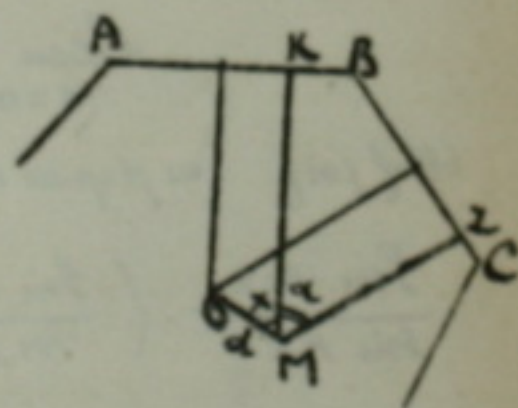
լինելով ուղղահայացների հանրահաշվա.

կան գումարը, ասյա թեորեմը էւ պահպանի իր ուժը բոլոր այն կետերի համար, չորուն գտնվում են բազմանկյան հարթության վրա:

Բ. Ոժանդակ անկյուն ծածկան յեղանակ.

89. Ոժանդակ կաշվում և այն անկյունը, չորի հաշվի թե՛ եւ ծրցնում՝ բանաչեւը լոգարիթմական գործնելու նպատակով:

Ոժանդակ անկյուն թղթողով լուծվող ընդհանուր խնդիրը հետեւում է.



պատկ. 21.

Դիտելով A և B յերկու արտահայտությունների հանրահաշվական
գումարը

$$A + B$$

որոշել է այս գումարը վերանշել լոգարիթմական չեփի:
Այս չեփափոխության ընդհանուր յեղանակը հետևյալն է.

Պահելով

$$A + B = A \left(1 + \frac{B}{A}\right).$$

ի՞նչ յեճարյուն էլ ունենալու լիքին A -ն և B -ն, յիշի, յեթ
հանրաժողով է գործել այնպիսի φ անկյուն, չորի ցանցվածը հա-
վասար լիքի $\frac{B}{A}$ -ի. այն յաճանախ կարանանի.

$$\begin{aligned} A + B &= A \left(1 + \frac{B}{A}\right) = A(1 + \operatorname{tg} \varphi) = A(\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \varphi) = \\ &= \frac{A \sin(45^\circ + \varphi)}{\cos 45^\circ \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Արաջա՛ լոգարիթմական արտահայտությունը հաշվելու համար
պետի է նախապես չորոշել φ -ն $\frac{B}{A} = \operatorname{tg} \varphi$ հավասարումից:
Նշա՛ յեղանակի յիշոցով կարելի է լոգարիթմական չեփի
վերանշել ա՛յն յի յերկանդամ, իսկ յերե այդ յեղանա-
կը հաղորդաբար կիրառելիք յի յանի անգամ, ապա նայել
ա՛յն յի բաղճանդամ:

90. Այս յեղանակի թերությունն այն է, չոր թե՛յել պրաջ-
չոշ բանայնվերը հարճար են հաշվանների համար, բայց բարդ-
են. այս պատճառով հա՛մախ գիճամ ենք յաճանախ յե-
ղանակների, չորոնի պրաջչո՛մ են, յերբ նկատառո՛մ ենք
 A և B արտահայտությունների յեճարյուններն ու նշանները:

1. Դիտելով $(A + B)$ արտահայտության յեղ A և B գումարե-
լիքերը նայնանշան են: Այն յաճանախ $\frac{B}{A}$ հարաբերությու-
նը դրական է, ուստի կարող ենք ընդունել $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}^2 \varphi$. Կե-
րելապես կարանանի

2. Ֆեքտ հայտնի է, թե չեզանոթելի արտահայտության վոր
գումարելին է թվապես ձև, ապա փակագծից արտանմ էնի
այդ ձև գումարելին, իսկ փակագծերի ձեզ պայմանը հարա-
բերությունը, վոր փոխ է 1-ից, ընդունում էնի $\cos \varphi$:

Ֆեքտ, որ. $A > B$, ապա

$$A+B = A \left(1 + \frac{B}{A}\right) = A(1 + \cos \varphi) = 2A \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \cos \varphi = \frac{B}{A}.$$

$$\text{և ույնպես } A-B = 2A \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \cos \varphi = \frac{B}{A} :$$

3. Ֆեքտ չեզանոթելի արտահայտությունը $A-B$ փաթեթություն
կերպարանին ունի յեզ ծրագծաձևակ հայտնի է, վոր

1) A -ն յեզ B -ն նույնաչափ էն,

2) $A > B$,

ապա $\frac{B}{A}$ հարաբերությունը կարելի է ընդունել $\sin^2 \varphi$ (կամ $\cos^2 \varphi$),
յեզ չեզանոթումը կը կարարվի այնպես.

$$A-B = A \left(1 - \frac{B}{A}\right) = A(1 - \sin^2 \varphi) = A \cos^2 \varphi, \sin^2 \varphi = \frac{B}{A}.$$

4. Ֆեքտ արվյալ արտահայտությունն ունի

$$a \sin mx \pm b \cos mx$$

տեսիլ, վորի ձեզ a -ն յեզ b -ն կաճաղոր գործակիցներ են,
ապա լորարիթմական չեզի վերաճելու համար կարելի է
այնպես վարվել.

$$\begin{aligned} a \sin mx \pm b \cos mx &= a \left(\sin mx \pm \frac{b}{a} \cos mx \right) = a \left(\sin mx \pm \tan \varphi \cos mx \right) \\ &= a \left(\sin mx \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos mx \right) = \frac{a}{\cos \varphi} (\sin mx \cos \varphi \pm \sin \varphi \cos mx) = \\ &= \frac{a}{\cos \varphi} \sin (mx \pm \varphi), \text{ վորտեղ } \tan \varphi = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Ուրեմն, յիշեցնելու անկյան սինուսի յեզ կոսինուսի գումարու-
մը, յերբ սրանց գործակիցները փաթեթ են, կարարում էնի
այնպես. գործակիցներից ձեկն արտանմ էնի փակագծից յեզ
գործակիցների հարաբերությունն ընդունում էնի համարաձև
դակ անկյան քանգեներն (կամ կոտանգեներն):

Որինակ. Հոգ-արիթմական հերպարանի քալ
 $4 \sin x - 3 \cos x$

Կարգերությունը :

$$4 \sin x - 3 \cos x = 4 \left(\sin x - \frac{3}{4} \cos x \right) = 4 \left(\sin x - \operatorname{tg} \varphi \cos x \right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{\sin x \cos \varphi - \sin \varphi \cos x}{\cos \varphi} = \frac{4}{\cos \varphi} \sin (x - \varphi), \text{ վերջին } \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4} :$$

91. Ոճանդակ անկյան ծածծան որինակներ.

1. Հոգ-արիթմական հերպարանի քալ

$$x = \frac{a+b}{a-b}$$

արքա հայտություն :

Հորոշակերպ հայտնի չէ՝ a -ն և b -ն, յեւ նույն անշան
 են աղղ-յո՛, թե՛ վոչ, ապա իւրաքանչեւ հարաւոր և ծայր
 ընդհանուր յեղանակով.

$$x = \frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\sin (45^\circ + \varphi)}{\sin (45^\circ - \varphi)} = \frac{\sin (45^\circ + \varphi)}{\cos (45^\circ + \varphi)} = \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi),$$

$$\text{վերջին } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} :$$

2. Հոգ-արիթմական հերպարանի քալ

$$x = \sqrt{a^2 \cos^2 M + b^2 \sin^2 N}$$

արքա հայտություն :

Այս դեպքում յերկու գումարելիներն եւ որական են, ուստի

$$x = a \cos M \sqrt{1 + \left(\frac{b \sin N}{a \cos M} \right)^2} = a \cos M \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{a \cos M}{\cos \varphi}$$

$$\text{վերջին } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin N}{a \cos M} :$$

3. Հոգ-արիթմական հերպարանի քալ

$$x = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

արքա հայտություն :

Այս արքա հայտությունը ներկայացնում է յեղանակ հոշծե-

յիւսիսը որովհետեւ շեղանկան (A) ծրագրով:
Ուշիւր.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc - 2bc - 2bc \cos A} = \\ &= \sqrt{(b+c)^2 - 2bc(1+\cos A)} = \sqrt{(b+c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}} = \\ &= (b+c) \sqrt{1 - \frac{4bc \cos^2 \frac{A}{2}}{(b+c)^2}} = (b+c) \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \\ &= (b+c) \cos \varphi, \text{ և որովհետեւ } \sin \varphi = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cos \frac{A}{2}; \end{aligned}$$

92. $\sqrt{\text{արտաքին շրջանագրի արագության քառակուսիք}}$.

Ստորագրված է զանազան հետաքննարկումներ արագության քառակուսիքի համար:

1. $\cos 47^\circ - \cos 61^\circ + \cos 25^\circ - \cos 11^\circ$;
2. $\sin 88^\circ - 2 \sin 59^\circ - (\sin 92^\circ - \sin 61^\circ)$;
3. $\sin 47^\circ + \sin 78^\circ + (\cos 47^\circ - \sin 102^\circ)$;
4. $\sin a - \cos(a-b)$; 5. $\operatorname{tg} x + \sin x$; 6. $\sec A - 1$;
7. $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} - \operatorname{tg} A$; 8. $\frac{1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2}}$;
9. $\sin A + \cos A - 1$; 10. $\cos A - \sin A + 1$;
11. $\frac{\sin A + \cos(2m-A)}{\cos A - \sin(2m-A)}$; 12. $\frac{1 + 2 \cos A}{1 + 2 \sin A}$;
13. $\frac{2 \sin A + \sin 2A}{2 \sin A - \sin 2A}$; 14. $\frac{\sin x}{1 \pm \cos x}$;
15. $1 - \operatorname{tg}(45^\circ + A)$; 16. $1 - \sin 2x \sqrt{1 - \sin^2 x}$.
17. $3 - 4 \cos^2 A$; 18. $\sqrt{3} \cos a \pm \sin a$;
19. $\cos 72^\circ - \frac{1}{2} \sqrt{3}$; 20. $\cos x - \sqrt{3} \sin x$.
21. $\sin^2(A+B) - \sin^2 A - \sin^2 B$; 22. $3 - 4 \sin^2 48^\circ$;
23. $\frac{\cos^2 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ}{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}$; 24. $\frac{4}{1 - 2 \cos 26^\circ}$.
25. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x$; 26. $3 \sec^2 3x - 2 \sec^2 2x - \sec^2 x$.

28. $\frac{\sin \frac{2}{3} A + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} A)}{\cos \frac{2}{3} A + \cos \frac{4}{3} A}$; 29. $\sqrt{5} - 4 \sin x - 1$.

30. $\frac{(\sec x - 1) \cdot (1 + \cos x)}{\sin(2x - 180^\circ)}$;

31. $\cos A + \cos B + \cos C - 1$.

32. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$

33. $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2}$

34. $\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B$

35. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ (Cagnoli, 1786)

36. $\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C$

37. $\operatorname{tg} 100A + \operatorname{tg} 100B + \operatorname{tg} 100C$

38. $\operatorname{tg} A - \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C$

39. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1$

40. $\sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C$

} $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 180^\circ$

41. $a \sin x \pm \operatorname{tg} y$; 42. $\sin^2 x + \sin^2 y$; 43. $a \pm \sqrt{a \pm b^2}$.

44. $\sqrt{\operatorname{tg} a + \sin a} + \sqrt{\operatorname{tg} a - \sin a}$; 45. $M \cos A + N \cos(90^\circ - A)$.

46. $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$; 47. $\sqrt{\sin^2 12^\circ + \cos^2 40^\circ}$; 48. $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2} - \cos 14^\circ 3'}{\sqrt{2} + \cos 14^\circ 3'}}$.

49. $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$; 50. $\sin A \sin B + \cos A \cos B \cdot \cos C \cos D \cos E$.

Գրել հետևյալ անորոշ արտահայտությունները
խնդրանքով արժեքները.

51. $y = \left[\frac{\sec x - 1}{\operatorname{tg}^2 x} \right]_{x=0}$; 52. $y = \left[\frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} \right]_{x=0}$

53. $y = \left[\frac{x \sin x}{1 - \cos x} \right]_{x=0}$; 54. $y = \left[\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} \right]_{\alpha=\beta}$

55. $y = \left[\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\alpha - \beta} \right]_{\alpha=\beta}$; 56. $y = \left[\frac{\sin(a+x) - \sin a}{x} \right]_{x=0}$

57. $\left[1 + \sec x \right]$ 58. $\left[1 + \sec 2x \right]$

$$59. y = \left[\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \right]_{x=0}$$

$$60. y = \left[\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha}{\sec^2 \alpha - 2} \right]_{\alpha = 45^\circ}$$

$$61. y = \left[\frac{\cos 3x}{\sin(x - 30^\circ)} \right]_{x=30^\circ}$$

$$62. y = \left[\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \sec \alpha} \right]_{\alpha=0}$$

$$63. y = \left[\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \cos 45^\circ} \right]_{\alpha=45^\circ}$$

$$64. y = \left[\frac{\sin \frac{x}{2} + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x} \right]_{x=\pi}$$

$$65. y = \left[\frac{\sin(\alpha - 60^\circ)}{4\cos^2 \alpha - 1} \right]_{\alpha=60^\circ}$$

$$66. y = \left[\frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x} \right]_{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$67. y = \left[\frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg}^2 x - 1} \right]_{x=45^\circ}$$

$$68. y = \left[\frac{\sin^2 x \sin 2\alpha - \sin^2 \alpha \sin 2x}{\sin(x - \alpha)} \right]_{\substack{x=\alpha= \\ =45^\circ}}$$

$$69. y = \left[\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x + \cos 2x \sin x} \right]_{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$70. y = \left[\frac{2\sin^2 x - 1 + \cos \alpha}{\sin(x - \frac{\alpha}{2})} \right]_{\alpha=2x}$$

Գլուխ VI. Հակադարձ շրջանային ֆունկցիաներ.

Հակադարձ ֆունկցիաների ընդհանուր արտահայտությունները.

93. x և y յերկու փոփոխական ճեճությունները հապակցող համապատասխան թեզ, ինչպես հայտնի է, յուրաքանչյուրը հարելի է ընդունել չորսպես հիմք համարելով փոփոխական:

Արհեստաբան

a) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x \dots$

համապատասխանների թեզ անկախ փոփոխական էինք ընդունում x անկյունը (աղեղը) և թեզ ուսման համարում էինք սինուս, կոսինուս, քանգենտ... անկյունաչափական ֆունկցիաների հայտնությունները: Արեւի քանակի, զոր անկյունաչափական ճեճություններն, իրար, անկյուն աչեպիսի ֆունկցիաներն են, զորոնք ընդունակ են փոփոխվելու զորոշ առհասարակում: Բայց, հակադարձելու թյան հայտնության հիման վրա թեզ հարող ենք ասել, զոր յերե, որ՝ սինուս անկյան ֆունկցիան է ասում...

այս և պարծառը, զոր
արկուսսինուր, արկուսկոսինուր, արկուսկոսինգ-նուր, ար-
կուսկոսինգ-նուր, արկուսսինուր, և իմ արկուսկոսինուր կոչ-
վում են հակադարձ անկյունաչափական կամ հակադարձ շրջա-
նային ֆունկցիաներ:

Ներածելով հիշել, զոր այս արքանայություններն յուրա-
փանչյուրը ներկայացնում են անկյուն, հետեւապէս չափվում են
ասորի ծաններով կամ շառաւղորդներով:

94. Նրդ-ն գիտենք, զոր ցվյալ անկյուն հաճար նրա ան-
կյունաչափական ֆունկցիաները լինում են յաւելագումար զո-
րոշ յեւ յարժեք: Անկյուն անկյունաչափական ֆունկցիայի
ցվյալ արժեքին հաճապարարականութեւ զոչ թե յայն յո-
ւանկյուն, այլ անսահման թվով անկյուններ յնչդեռ ան-
կյունաչափական ֆունկցիաները յարժեք են, հակադարձ
անկյունաչափականները բազմարժեք են: Արդեւ կարգա-
ձեւով այն բաժանելով, զորոնք պարունակում են յիշ-
նայն անկյունաչափական ֆունկցիայի ցվյալ արժեքին հա-
ճապարարականող բոլոր անկյունները: Այժմ բաժանաւել
նշելով, զոր նայն իսկ յո շրջանագծի սահմաններում ան-
կյունաչափական ֆունկցիայի յուրափանչյուր արժեքին կը
հաճապարարականի 2 անկյուններ: Իսկ յեթե նկարառեմք
նայեւ պարբերականութեան հասկացությունը, զոր հնարաւո-
րությունն է ցույցս տեսն յո անկյուն յեճապել կամաւոր
թվով լրիւ շրջանագծով առանց փոփոխելու նրա ան-
կյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, ապա յաւելագ-
ումայն հասկանալի կը լինի, զոր $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$,
արքանայություններն անորոշ արքանայություններ են,
զորոնք x -ի ցվյալ արժեքի հաճար ունին անսահման:

թվով թե՛ գրական յեղ թե՛ բացասական լուծուճեւեր,
այնպէս զոր.

$\text{Arc sin } a$, $\text{Arc cos } b$, $\text{Arc tg } c \dots$ (a, b, c - հասարակուն) անկյուններից յարաբանելոյրը կարող է ընդունել արժեք-
ների ծր ածքողը շարք $+\infty$ -ից յիշել $-\infty$ աստճան-
ներում:

Բացարկէնք որիւնկներով: Գործել, զոր $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Կարբերականութեան հարկութեան հաճախ, ունիւնք

$$\sin 390^\circ = \frac{1}{2}; \sin 750^\circ = \frac{1}{2}; \sin 1110^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\sin (-330^\circ) = \frac{1}{2}; \sin (-690^\circ) = \frac{1}{2}; \sin (-1050^\circ) = \frac{1}{2} \dots$$

հերեմիւսպէս

$$\text{Arc sin } \frac{1}{2}$$

Կայճանանշանը կարող է արկերայնել թե՛ 30° -ի, թե՛ 390° -ի.

թե՛ 750° -ի, թե՛ 1110° -ի, թե՛ (-330°) -ի, թե՛ (-690°) -ի ... անկյուն.

այսինքն $\text{Arc sin } \frac{1}{2}$ -ը կարող է ընդունել անսահման թվով

արժեքներ $+\infty$ -ի, եղ $-\infty$ -ի յիշել:

95. Հակադարձ շրջանային ֆունկցիաների աստճանութիւն անձգա-
րեւն բխում է, զոր

$$\sin (\text{Arc sin } a) = a,$$

$$\cos (\text{Arc cos } b) = b,$$

$$\text{tg} (\text{Arc tg } c) = c, \text{ յեղ այլն:}$$

Իրոք, գործել, որ. $\text{tg} (\text{Arc tg } c)$ -ն նշանակում է գործել

այնպիսի անկյան ցանգեւոր, զորի ցանգեւոր հաճախարէ

c -ի. արդեւ, զոր այդպիսի անկյան ցանգեւոր կը լիւնք c :

96. Հերադա Բացարկ-ութեան յեղ գործաճելու եւնք հերեմիւսալ
նշանակումները.

$$\text{Arc sin } a, \text{Arc cos } a, \text{Arc tg } a \dots (\text{A յաճախումը սկսող})$$

պայճանանշաններով հասկանալի այն բոլոր անկյունները,
 զորոնց սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը ... հաշվարար են a -ի:
 $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$... (a փոփրադասով սկսվող)

պայճանանշաններով հասկանալի թվապես փոփրագույն այն
 անկյունը, զորի սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը ... հա-
 շվարար են a -ի:

Հերեքապես, դրական y -ի համար

$\arcsin y$, $\arccos y$, $\operatorname{arctg} y$, $\operatorname{arccotg} y$, $\operatorname{arcssec} y$, $\operatorname{arccosec} y$

անկյուններին յուրաքանչյուրը 40 գ-րեմի առաջին փառքում:

Իսկ բացասական y -ի համար $\arcsin y$, $\operatorname{arctg} y$, $\operatorname{arccotg} y$,
 $\operatorname{arccosec} y$ անկյունները բացասական առաջին փառքում
 $(0^\circ$ -ից - $90^\circ)$ կը լինեն, իսկ

$\arccos y$ յեւ $\operatorname{arcssec} y$

անկյունները՝ 90° -ից յինչեւ 180° ($\frac{\pi}{2}$ -ից յինչեւ π):

Այս նշանակումները ծածկում են այսուհետեւ յիշք առնելի առաջ
 պիտի ունենանք. զոր

$\arcsin y$, $\arccos y$, $\operatorname{arctg} y$... (փոփրադաս a -ով սկսված) -

հակադարձ շրջանային ֆունկցիաները տվյալ y -ի համար
 ներկայացնում են յիսյն յի, յիանգամայն զորոն անկյուն:

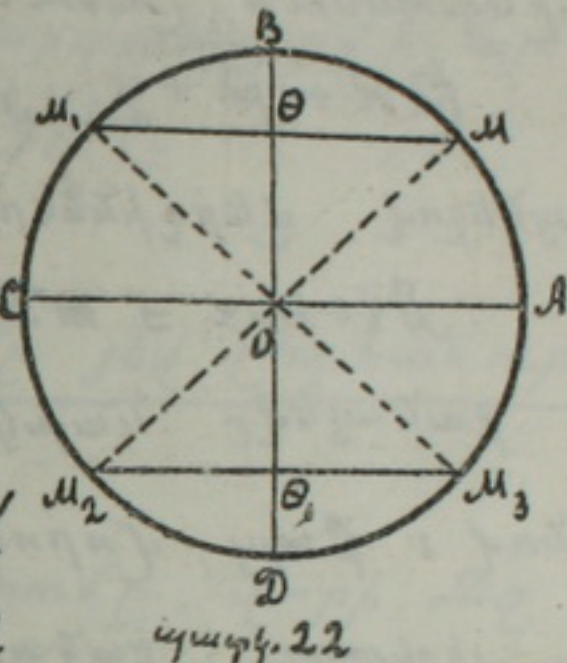
97. Հակադարձ շրջանային ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի
 յեւթուրյունը կարելի է զորոնել q -րաֆիկորեն: Բնութային
 առնելի յի փառք արիւնակներ:

98. Արկուսսինուսի կառուցումը յեւ ընդհանուր արկուսսինուսի
 դիպում տված է $\sin y = x$, զորի յեզ x -ը տվյալ դրական թիվ է,
 1 -ից փոփր: q -րեմի $y = \operatorname{Arcsin} x$ անկյան ընդհանուր արկու-
 հայությունը:

Կարելի է անթիզապես կառուցանել x սինուսն ունեցող յերկու

անկյուններ, Վորոնյ աշենը փոխ է շրջանագծի: Որոշումը
համար վերջնական 1 ծիպոր ծանոթուն ունենող շառավիղի ծրագ-
նագ-ի՝ (պարհ. 22) յեվ ցանկնով AC յեվ BD իրար ողջահայաց
տրամագծերը՝ յերկրորդի վրա դնեն $OO = x$ հարվածը յեվ θ կե-
տից ցանկնով AC-ի զուգահեռը, Վորո. դիպում, շրջանագծի՝ հա-
տուժ է M յեվ M, կետերուն: OO -ը սի-

նունի ընդհանուր գիծ է AO M յեվ AO M,
անկյունների համար, Վորոնյից առաջինը
յո. նշանակելու դեպքում, յերկրորդը հը լի է
նի $\pi - \gamma_0$: Բայց այս նույն սինուսն ունին
այնպիսի բոլոր անկյունները, Վորոնի AO M յեվ
 AO M, անկյուններից տարբերվում են ածքող



թիվ անգամ 2π -ով (360° -ով) կամ զույգ. թիվ անգամ π -ով:
Այս պատճառով փոխալ համասարման ընդհանուր լուծու-
նը հը ներկայանա յերկու արտահայտություններով՝

$$2k\pi + \gamma_0 \quad \text{յեվ} \quad (2k+1)\pi - \gamma_0,$$

Վորոնյ ծեզ k -ն նշանակում է Վորենի ածքող դրական կամ
բացասական թիվ:

Այս յերկու արտահայտությունները կարելի է ծեկով պատկե-
րացնել: Անհետն էնի, Վոր + նշանն առաջին արտահայտության
ծեզ համապատասխանում է π թվի զույգ. արտադրիչին, իսկ յերկրոր-
դի ծեզ՝ անզույգ. արտադրիչին: Ընդհանուր լուծումը կարգահայտվի
ծեկ բանաձևով՝

$$x = m\pi + (-1)^m a \cos \gamma,$$

Վորի ծեզ m -ը կարող է լինել ամեն ծրագքող թիվ, զույգ-
կամ անզույգ, դրական կամ բացասական: Զարգերաց դա-
տողությունների ընթացքում x -ը համարում էին դրական թիվ:

Այժմ ենթադրենք, Վոր x -ը բացասական է յեվ նրա բացարձակ
արժեքը նշանակենք $|x|$: Բացասական սինուսի միջոցով անհայտ-

Եւ ըստ այսման ինչպէս որ արտաքին զրա վերջնէն
 Էնքորոնից դեպի ներքեւ $0\theta_1 = |x|$ եւ θ_1 -ից քաննէն հորիզո-
 նական արտաքին զուգահեռը: M_3OA անկունը նշանակենք
 y_0 -ով: Այն ժամանակ քվարտ հաշուարարութեան ծանաւոր
 լուծուեալը ԿԸ լինեն $\angle AOM_2 = \pi + y_0$ եւ $\angle AOM_3 = 2\pi - y_0$,
 իսկ ընդհանուր լուծուեալը՝

$$(2k+1)\pi + y_0 \text{ եւ } 2(k+1)\pi - y_0:$$

Քիստեցեալ վերջիններս՝ կարանաւոր ընդհանուր բանաձեւը՝

$$\text{Arccos } x = m\pi - (-1)^m \arccos |x|:$$

Այս բանաձեւը նախկինից քարքերում է վերջին անգամ
 նշանակ: Բայց, վորովհետեւ $\arccos x$ -ն անշուշտ ֆունկցիա է,
 ապա յերկրորդ բանաձեւի մէջ առաջ յեկող ամէլ բացասա-
 կան նշանը կարելի է քալ $|x|$ հիմքին, վորից հետո յերկու
 բանաձեւերն եւ կարգաւորուին -

$$\text{Arccos } x = m\pi + (-1)^m \arccos x.$$

առաջին բանաձեւով, վորի մէջ x -ը կարող է լինել թե՛ դրա-
 կան, յեւ թե՛ բացասական:

Նախընթացից ցուցանու էնի, վոր բազմաթիւ $\text{Arccos } x$ ֆուն-
 կցիայի հետապնդումն ըստ եւութեան վերածվում է նրա մի ար-
 ժեքի՝ $\arccos x$ -ի հետապնդմանը, վորպիսի արժեքը փոփոխվում է
 $-\frac{\pi}{2}$ -ից մինչեւ $+\frac{\pi}{2}$ -ը, յերբ հիմքը փոփոխվում է -1 -ից մինչեւ
 $+1$, յեւ վորը պահպանու է դրական նշան դրական x -ի
 դեպքում, յեւ բացասական նշան՝ բացասական x -ի դեպքում:

99. Պիտագորասի քվարտ

$$4(\cos^2 x + \sin x) = 1$$

հաշուարարել: $\cos x$ -ն արգասիացրելով $\sin x$ -ի միջոցով կարա-
 նաւոր $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$

հաշուարարել, վորը լուծելով ԿԸ գտնենք

$$\sin x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3.4}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4} = \frac{3}{2} \text{ կամ } -\frac{1}{2}.$$

՝ ռազիւ լուծուծ պէտքեան չէ, վորովհետեւ սինուսը չի կարող 1-ից թէ՛ լինել: Դսկ սինուսի յերկրորդ արժեքին համապատասխանուծ են $180^\circ + 30^\circ$ յեւ $360^\circ - 30^\circ$ անկյունները, կամ ավելի ընդհանուր՝ $(2k+1)180^\circ + 30^\circ$ յեւ $2(k+1)180^\circ - 30^\circ$: Կոյժի համապատասխան լրիւ լուծուծ կարգահայտելի այսպէս՝
 $x = m \cdot 180^\circ - (-1)^m \cdot 30^\circ$:

100. ՝ քննարկելու է կառուցուծ յեւ ընդհանուր արքահայտութիւնը:

Դիցուի քանի որ $\operatorname{tg} y = x$ համապատասխանուծ. վորի թե՛ x -ը կոսմոսի թանկան ղ-րակաւ կամ բացասական թիւ է: Արքահայտելի $y = \operatorname{Arctg} x$ ֆունկցիայի բոլոր արժեքները:

Վորովհետեւ քանդեւի պարբերութիւնը համապատասխան է կիւս-շրջանագծի շափին (π), ապա պարզելի վրա y -ի հարծար թայն թիւ արժեք կգրենել, վոր պարբերութիւնից փոքր է:

՝ յ- արժեք վորոշելու հաճար 1 թաւոր իբրեւ շաւափող ունեցող շրջանագծին կո քանելի A սկզբուծ շոշափողը, այդ շոշափողի վրա կո վերջենել $AR = x$ հարվածը յեւ կո թայնելի R -ը O -ի հետ:

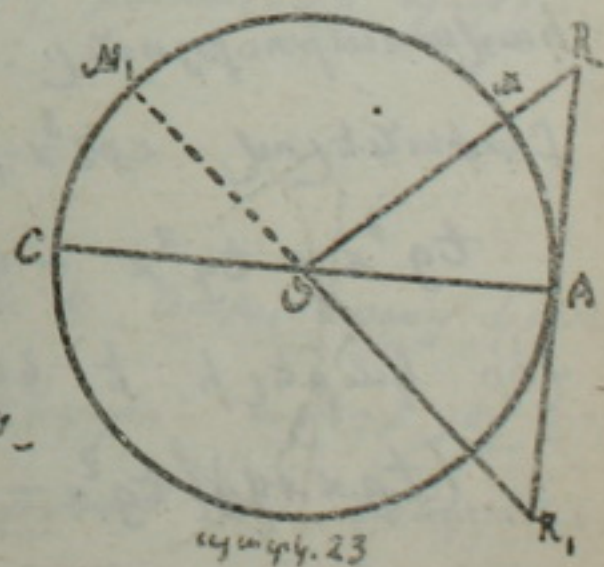
՝ ռազայաճ $AOA = y_0$ անկյունը կո լինի y -ի հաճար վորոշան արժեքը:

AOA անկյանն ավելացնելով y անկյանը թիւ լրիւ պարբերութիւններ՝

$m\pi$, կո գրենել $y = m\pi + y_0$ ընդհանուր բանաձեւը կամ

$$\operatorname{Arctg} x = m\pi + \operatorname{arctg} x.$$

՝ յ- ընդունելի, վոր x -ը ուսումնասիրուծ է. յեւ նրա բացարձակ



Դժուարյունն է $|x|$: Այդ դեպքում շոշափողի վրա վերցնում ենք A կետից դուրս ելնելով $A R_1 = |x|$ հարկածը, R_1 -ը թափվում էն O -ի հետ յեվ սրաչափ գծի շարունակում թնչելով շրջանագծի հետ M կետում հարկելով: $AO M$, անկյունը 40 և ինչ ϕ անկյանի վորոնեղի արժեքը α այն, վորը փոխ է պարբերությունից: Յերե M, OC անկյունը նշանակելով y_0 -ով, ապա այդ արժեքը 40 և ինչ $\pi - y_0$, յեվ ընդհանուր լուծումը կարգադրվի -

$$y = m\pi - y_0 \text{ կամ}$$

$$\operatorname{Arctg} x = m\pi - \operatorname{arctg}|x| \text{ բանաձևով:}$$

Քննարկենք արհեստական դեպքում, այսպեղ յեվն նկատում ենք, վոր յերկու բանաձևերը վերաձևում են իրարն առաջինին, յերե սրա յերկրորդ ծառում առաջ յեկող գումարումը հասկանալով հանրահաշվական իմաստով յեվ յերկրորդ գումարելիի վերջնական նշանը քանի որ սրա հիմքին:

Այսպիսով $\operatorname{Arctg} x$ բաղձարժեքի ֆունկցիայի վանաչափ արժեքները պարբերվում են իրարն π -ին բաղձապարիկ ֆունկցիայուններով փոխադրելի արժեք $\operatorname{arctg} x$ -ից, վորը փոխվում է $-\infty$ -ից թնչելով $+\infty$, յեվ վորը թշտ նույն նշանն ունի, ինչ վոր x -ը:

101. Որինակ. վերցնելով

$$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x - 3 \cos^3 x = 0$$

համասարությունը:

Բաժանելով $\cos^3 x$ -ի վրա կարգադրվի,

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

վոր կարելի է ներկայացնել այսպես.

$$(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0:$$

Այս համասարությունից բխում են հետևյալ յերեքը.

$$\operatorname{tg} x = -1, \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \text{ յեվ } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}:$$

Հուճեւոյ առաջին հաճախութեւնը հարանաւի

$$x = m \cdot 180^\circ - 45^\circ$$

ընդ-հանուր բանաձեւը:

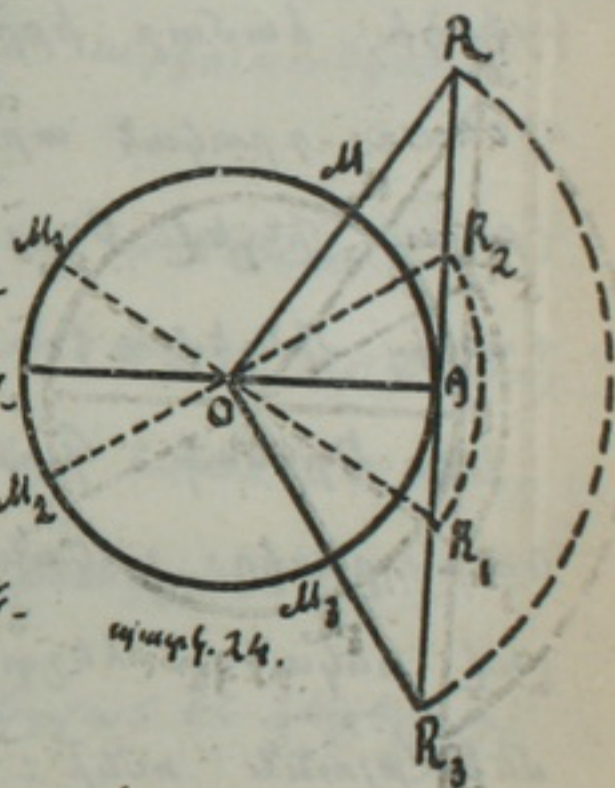
Յերկրորդ, յեւ յերրորդ, հաճախութեան լուծման համար ստանում ենք

$$x = m \cdot 180^\circ \pm 60^\circ \quad \text{ընդ-հանուր բանաձեւը:}$$

102. Արկուսսեկանսի հառուցումը յեւ ընդ-հանուր արտահայտութիւնը:

Պ-իցուի հարկաւոր է $\sec y = x$ հաճախութեան հիման վրայ, զորի յեւ x -ը դրական է յեւ 1-ից յեւ, հաշուել $y = \text{Arcsec } x$ ընդ-հանուր արտահայտութիւնը:

Գ-ճեւոյ 1 ժամոր շառավիղ ունեցող շրջանագիծ յեւ աշեղներ Մ սկզբում շոշափողը x շառավիղով նկարում ենք շրջանագծի համակենտրոն աշեղ, զոր շոշափողը կտրում է R_1 յեւ R_2 կէտերում: Ժխայնեւոյ այդ կէտերը O կենտրոնի հետ կորոշենք $\angle AOM_1 = y_0$ յեւ $\angle AOM_2 = 2\pi - y_0$ յերկու աւելյունները, զորոնք յերկուսն էլ փոքր են շրջանագծից յեւ ունին x -ին հաճախար սեկանսներ: Բայի այս աւելյուններն են $2k\pi + y_0$ յեւ $2(k+1)\pi - y_0$ արդար հայտնութիւններով պարկերայւած բոլոր M_2 աւելյունները կուենեան այդ նույն սեկանսը: Վերադառնալ յերկու արտահայտութիւնների յեւ π -ի ծոց յեւան արտադրիչը չույզ թիւ է, ապա յեւ ընդ-հանուր լուծում տրոյ բանաձեւը պէտք է ունենա հետեւեւիլ տեսքով:



$$\text{Arcsec } x = 2k\pi \pm \text{arcsec } x:$$

Այն դեպքում, յերբ x -ը բացասական է, նախընտրայ կառուցումը յիմի բարդանում է: Համակենտրոն աշեղի յեւ շոշափողի հարձան R_1 յեւ R_2 կէտերը ծայան են կենտրոնի հետ յեւ սրայած Գ-ճեւը շարունակում յիմեւ շրջանագծի հետ յերկրորդ աւելած հարկեւ: Յիմեւ COM_1 -ը յեւ COM_2 -ն ընդունենք

հիմնով ոճանդակ անկյուն $y_0 = \arcsin |x|$, ապա փոխարինելով $\sin$ և $\cos$ կ՛լինեն $\angle AOM_1 = \pi - y_0$ և $\angle AOM_2 = \pi + y_0$; Այս օգնությամբ լուծենք հիմնով վրայ կ՛կապենք շրջանագծեր՝

$$\arcsin x = (2k+1)\pi \mp \arcsin |x|$$

Բայց այս բանաձևն անպետք է օգտագործել միայն x -ի դեպքում, երբ x -ը գտնվում է $[-1, 1]$ միջակայքում, քանի որ $\arcsin$ ֆունկցիան ընդհանուր բանաձևով $\arcsin x = (2k+1)\pi \mp \arcsin |x|$ չի գործում, երբ $x > 1$ կամ $x < -1$ ։ Այսինքն $\arcsin x$ ֆունկցիան ընդհանուր բանաձևով $y_0 = \arcsin |x|$ չի գործում, երբ $x > 1$ կամ $x < -1$ ։ Այսինքն $\arcsin x$ ֆունկցիան ընդհանուր բանաձևով $y_0 = \arcsin |x|$ չի գործում, երբ $x > 1$ կամ $x < -1$ ։

103. Որոշենք. Գործնականում կարելի է խուսափել անկյուն ընդհանուր փոխարինելու անհրաժեշտությունից, փոխարինելով $\sin$ և $\cos$ ֆունկցիաները $\cos$ ֆունկցիանով (եթե $\sin x = \frac{1}{\cos x}$)։

$$(9-3\sqrt{5})\sec^4 x - 2(9-2\sqrt{5})\sec^2 x + 8 = 0$$

Կապենք $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, ապա ստանանք $8\cos^4 x - 2(9-2\sqrt{5})\cos^2 x + (9-3\sqrt{5}) = 0$

$$8\cos^4 x - 2(9-2\sqrt{5})\cos^2 x + (9-3\sqrt{5}) = 0$$

Կապենք $\cos^2 x = t$, ապա ստանանք $8t^2 - 2(9-2\sqrt{5})t + (9-3\sqrt{5}) = 0$

$$\cos^2 x = \frac{9-2\sqrt{5} \pm \sqrt{29-12\sqrt{5}}}{8} = \frac{9-2\sqrt{5} \pm (3-2\sqrt{5})}{8}$$

Վերջից յեւ

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \text{ կամ } \cos^2 x = \frac{6-2\sqrt{5}}{8}$$

Քանակութեամբ արժար հանելով այս նոր հաշվարարութեան
գործածելն 4 պարզագույն հաշվարարութեան

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

հետևելով զոր $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cos 51^\circ 50' 15''$ իսկ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$,
յեւ պարզաւ 4 հաշվարարութեան յորախանց յորն առանցիկ
լուծելով՝ քննենք եւս, զոր քվար սկզբնական հաշվար-
արն ընդհանուր լուծուի պարունակվում է հետեւյալ
բանաչափերի մէջ.

$$x = 2k \cdot 180^\circ \pm 30^\circ \quad x = 2k \cdot 180^\circ \pm 51^\circ 50' 15''$$

$$x = (2k+1)180^\circ \mp 30^\circ \quad x = (2k+1)180^\circ \mp 51^\circ 50' 15''$$

զորտեղ k -ն կաճաւոր մեծութեան ամբողջ թիւ է:

104. Եւթարդ որինակից դուրիւն է նկատել, զոր արկուկութե-
անս ընդհանուր չեւից գործելու նման է արկուկական
ընդհանուր չեւից գործելուն:

Կարելի է ապացուցել, զոր Arcsin -ը յեւ Arccosec ,
 Arctg -ը յեւ Arctg -ը, Arsec -ը յեւ Arccos -ը արդարաւոր-
որոշ բանաչափերու չափ-չափ միանգամայն նման են իրար:

117- բացարկում է նրանով, զոր ուշիւ ֆունկցիաները՝
 $\sin$ յեւ $\cos$, tg յեւ ctg , sec յեւ $\cos$ կապակցված են հետեւյալ
բանաչափերով

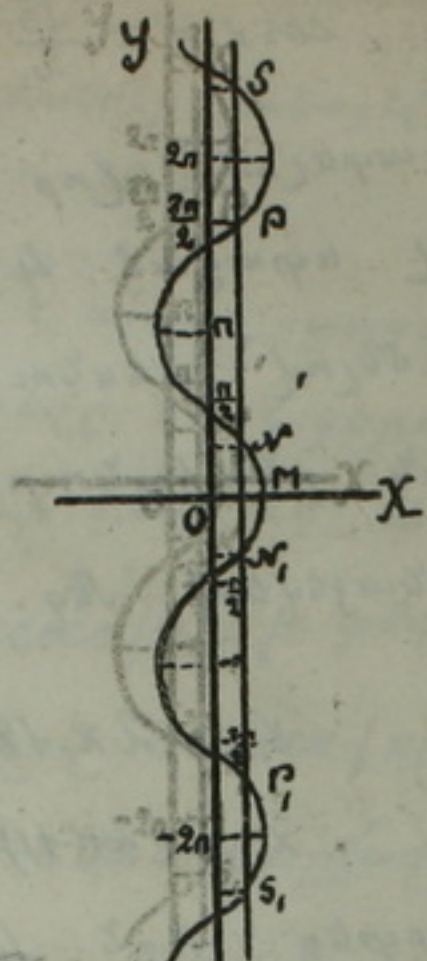
$$\sin x \cdot \text{cosec} x = 1, \quad \text{tg} x \cdot \text{ctg} x = 1, \quad \text{sec} x \cdot \cos x = 1,$$

զորոնց շնորհիւ նրանք չափ-չափ առաւ նշանակաւն են
 x -ի ան արժեքների համար:

105. Հակադարձ շրջանային ֆունկցիաների գրաքիւլ.
Կառուցանելով, որ արկուկութեան գրաքիւլ:

x -երի առանցիկ վրա դնելով $\cos x$ -ի արժեքները՝ y -ների առանց
ի վրա կարգաւորել x անկում հաշվարարութեան արժեքները (պարհ 20)
117- արկուկութեան համար ապացուց գրաքիւլ բոլորովին նշանակա-
լիւ զոր կախումայն, յերե միայն նշանակաւն 117

ենյուն հարելի և ցույց տալ ենայն $\sin$ հակադարձ շրջա-
 ենային ֆունկցիաների նկարագրի վորոշ
 գրաֆիկներ և նյուն և և լինել, ինչ վոր
 հաստատարանալու հետ շրջանային ֆուն-
 կցիաներին:



106. Հակադարձ շրջանային
ֆունկցիաների արանայնություն-
քննել:

Հանրաձայնության անունը հակադարձ $F(x) = 0$ ունի վերջա-
 վոր թվով լուծույթներ: Դիմ $y = \arcsin x$ հակադարձում, ինչպես
 րենալ, ունի անսահման թվով լուծույթներ, հետևաբար, նա
 էի հարող հանրաձայնության հակադարձ լինել:

Հակադարձ շրջանային ֆունկցիաներ
հաստատվող թանկագիններ:

107. Առհասարակ, վոր հակադարձ շրջանային ֆունկցիա-
 ներ $\arcsin$ և $\arccos$ են յեվ վոր նրանց $\arcsin$ և $\arccos$ հանույններն
 արտահայտվում են այդ- ֆունկցիաների փոխադարձ արժեքնե-
 րով ևս ինչպես արտահայտվում են:

Առհասարակ, յեթ իմա և և լինում հակադարձ շրջա-
 ենային ֆունկցիաների մասին, ի նկարի և և ունենում
 ծրայն այդ- փոխադարձ արժեքներ:

ուղիղ շրջանային ֆունկցիաների միջափնեջուր հայտնաբերում
 համապատասխանում է հակադարձ շրջանային ֆունկցիաների
 առանցքի հայտնաբերում:

Հակադարձ ֆունկցիաները հապակցող քանակները դնորին
 է արտաձև ուղիղ ֆունկցիաները հապակցող համապատաս-
 խան քանակներից: Աշխատող քանակներից մի քանիսը:

108. Հիպոթենու քանակներ.

Միջոցով $\sin y = x$: Այն ժամանակ

$$\cos y = \sqrt{1-x^2}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{ctg} y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \operatorname{sec} y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{cosec} y = \frac{1}{x}:$$

Ըստ այսմ հարելի է գրել այն քանակները, զորոնք բնոր
 հակադարձ շրջանային ֆունկցիաները հապակցում են արկապի
 սին, հիպոթենու:

$$y = \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$

$$= \operatorname{arcsec} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcosec} \frac{1}{x}:$$

109. Վերածան քանակներ.

Այս քանակները, զորոնք ապացուցված են ուղիղ ֆունկցիաների
 համար, արդեն բանեցրին հակադարձ ֆունկցիաների ընդհա-
 նուր արտահայտությունները հաշվելիս: Այսպես նկատելի

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \operatorname{sec} \alpha = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

առընդդրությունները պայմանավորում են մի պարզ հապակ-
 ցություն նմանապես հակադարձ ֆունկցիաների միջոցով: Այսին-
 քան քանակների հիման վրա, ընդունելով $\sin \alpha = x$, $\operatorname{tg} \alpha = y$,
 $\operatorname{sec} \alpha = z$, հանկուտ.

$$\arcsin x + \arccos x = \operatorname{arctg} y + \operatorname{arccotg} y = \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arcosec} x = \frac{\pi}{2}:$$

110. Պրկուսի թեորեմ. Ընդունելով, զոր α և β անկյուններից յուրաքանչյուրը փոքր է $\frac{\pi}{2}$ -ից՝ գրենք թեյեմային հետևյալ քանակագիտությունը՝

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha :$$

Յեթե այսպես ընդունենք $\sin \alpha = x$, $\sin \beta = y$, ապա $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\cos \beta = \sqrt{1-y^2}$. Ընդգծենք նորից, զոր $\arcsin$ -ը յոշտ ցույց է ցույց լիս $\frac{\pi}{2}$ -ից փոքր անկյուն յեւ զերեւելի քանակագիտի թեյեմային քանակագիտություններից անկյունների հակադարձներին. հարանային թեյեմային քանակագիտությունը

$$\alpha + \beta = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \text{ յեթե } \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha + \beta = \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \text{ յեթե } \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$$

Սին քանակագիտություն, զորոնց դեպքումս ցույց է անկյունում թեյեմային քանակագիտություն, հարեւելի է ներկայացնել ալ ինչպիսիք $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ համար $\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$ անհամադրանքային ցույց է ցույց լիս, զոր $\sin \alpha < \cos \beta$, իսկ այսպեսից հետեւում է, զոր $\sin^2 \alpha < 1 - \sin^2 \beta$ համար $x^2 + y^2 < 1$: Նույն ժամանակ հակադարձներ, զոր $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ քանակագիտություն համար է $x^2 + y^2 > 1$ քանակագիտություն:

Ի թի համախմբելով նախընթաց արդյունքները՝ յեւրակացնում ենք, զոր սինուսի գումարման թեորեմն արկուսինուսի նկատմամբ արքանայինում է հետեւելու քանակագիտություններից թեյեմ.

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \text{ յեթե } x^2 + y^2 < 1,$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), \text{ յեթե } x^2 + y^2 > 1:$$

111. Պրկուսի թեորեմ. Նախընթացի նման

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

քանակագիտի թեյեմային քանակագիտություն $\cos \alpha = x$, $\cos \beta = y$, զորից հարանային $\sin \alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\sin \beta = \sqrt{1-y^2}$,

$$\cos(\alpha + \beta) = xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}.$$

$$\alpha + \beta = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}):$$

Իսկ հակադարձներ $\arccos$ նշանակում այսպիսի թեյեմ, թեյեմային քանակագիտություն,

հասկանալ ֆունկցիայի այն արժեքը, Վորժ Դրական անկյունը
դեպքում յետ և 0-ից, բայց փոքր $\frac{\pi}{2}$ -ից, իսկ բացասական
անկյունը դեպքում յետ և $\frac{\pi}{2}$ -ից, բայց փոքր π -ից:

Այս պայմանի հետևանքով նախորդ համապարփությունը Վե-
րաբերում և α -ի յետ β -ի այն բոլոր դրական արժեքներին,
Վորնից Գումարը Գրեվում և 0-ի յետ π -ի յետ:

Ընդերք և անժգորտի համապարփում, Վոր յետ յետ
Տասի հիմք դրական և, այս $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, յետ Շնդհակա-
նակն: Դորտ, Շնդհակա $xy > \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}$, Դորակում և
Բարձրացնել յետ և Գրեվել $x^2 + y^2 > 1$ և $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$,
Վորից հետևում և $\cos \alpha > \sin \beta$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) > \sin \beta$, $\frac{\pi}{2} - \alpha > \beta$ յետ,
Դորակում $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$: Հասկանալ և, Վոր համապարփում և նախ
 $xy < \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}$ յետ $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$

հակադիր անհամապարփություններ:

Այսպես որևէ, Կոսինուսի Գումարում թևերի արկուկո-
սինուսի նկարագր արկուկոսինուսի և ժր Բանակելով

$$\arccos x + \arccos y = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}).$$

112. Արկուստանգենտ.

Յետ $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ և $\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$, այս $\tan \alpha < \cot \beta$, յետ, հետևանք,
 $\tan \alpha \cdot \tan \beta < 1$: Շնդհակաակն, յետ $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, այս $\tan \alpha \cdot \tan \beta > 1$:
Վերջնակ

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Բանակել, և շանակել $\tan \alpha = x$, $\tan \beta = y$ յետ անյունի
հակադարձ ֆունկցիաներին: Վորնից հետևում $\arctan$ -ով
հակադարձ և ֆունկցիայի այն արժեք, որը $\frac{\pi}{2}$ -ից փոքր,
այս նախորդ Բանակել և և համապարփում և և

$$\alpha + \beta = \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \text{ յետ } \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{և } \alpha + \beta = \pi - \arctan \frac{x+y}{1-xy}, \text{ յետ } \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}.$$

Այս բանաձևերը կարելի է գրել այսպես.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \text{ յերբ } xy < 1,$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi - \operatorname{arctg} \frac{x+y}{-1+xy}, \text{ յերբ } xy > 1:$$

✓ Երկրորդ խմբի.

Կարելի է նաև հանդիսանալ մի քանի հայտնաբերումներ:

1. $\operatorname{Arccos} x$; 2. $\operatorname{Arctg} y$; 3. $\operatorname{Arccosec} z$;

4. $\operatorname{Arcsin} (\pm 1)$; 5. $\operatorname{Arccos} (-\frac{1}{2})$; 6. $\operatorname{Arctg} (-\operatorname{tga})$.

Դիտարկենք հետևյալ հայտնաբերումները.

7. $\operatorname{arcsin} \frac{3}{5} + \operatorname{arcsin} \frac{4}{5}$; 8. $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$; 9. $\operatorname{arccsc} \frac{1}{2} + \operatorname{arccsc} \frac{1}{3}$;

10. $3 \operatorname{arcsin} \frac{1}{4}$; 11. $\frac{\operatorname{arccosec} (-1)}{2}$; 12. $3 \operatorname{arctg} \sqrt{3}$; 13. $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$;

14. $\frac{\operatorname{arccos} \frac{1}{2}}{4}$; 15. $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$; 16. $\operatorname{arctg} 7 + 2 \operatorname{arctg} 3$;

17. $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$; 18. $\operatorname{tg} (4 \operatorname{arctg} 3)$.

Կարելի է նաև հանդիսանալ մի քանի ճշգրիտ բանաձևեր.

19. $\operatorname{arctg} \frac{1}{70} = \operatorname{arctg} \frac{1}{83} + \operatorname{arctg} \frac{1}{447}$.

20. $\operatorname{arctg} \frac{p}{q} + \operatorname{arctg} \frac{q-p}{q+p} = \frac{\pi}{4}$; 21. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} = \operatorname{arccos} \frac{a-x}{a+x}$;

22. $\operatorname{arccos} \frac{9}{\sqrt{82}} + \operatorname{arccsc} \frac{\sqrt{41}}{4} = \frac{\pi}{4}$; 23. $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

24. $\operatorname{arcsin} \frac{4}{5} + \operatorname{arcsin} \frac{5}{13} + \operatorname{arccos} \frac{63}{65} = \frac{\pi}{2}$;

25. $\operatorname{arctg} \left[\frac{2}{a} + \frac{a6(6+1)}{2} \right] = \operatorname{arctg} \frac{(6+1)a}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a6}{2}$.

26. $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arccos} \frac{a}{6} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arccos} \frac{a}{6} \right) = \frac{26}{a}$.

Կ-Լուրս V. Անկյունաչափական հաճախություններ.

113. Հաճախությունը կոչվում է անկյունաչափական, յեթե նա պարունակում է մի կամ մի քանի անհայտ անկյունների անկյունաչափական ֆունկցիաներ. այսպես, որ. անկյունաչափական են հետևյալ հաճախությունները. $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$, $\sin 5x = \sin 4$.

$\operatorname{tg}(\alpha + x) = m \operatorname{tg} x$ / առաջին հաճախության մեջ անհայտը հիմքն է, յերկրորդի մեջ՝ հիմքի մասն է, յերրորդի մեջ՝ թե մեկը յեմ թե մյուսը):

Անկյունաչափական հաճախություններից պետք է տարբերել անկյունաչափական նույնությունները. այսպես կոչվում են այն հաճախությունները, զորոնք ծրար են հիմքի մեծ արժեքների համար: Ար. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ հաճախության մեջ առաջին մասը ծրար հաճախ է յերկրորդին. այս հաճախությունը մի նույնություն է. իսկ $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ ծրար է հիմքի միայն մի քանի արժեքների համար, հետևյալն առ մի հաճախություն է.

Լուծել անկյունաչափական հաճախությունը նշանակում է զորոնշել այն անկյունները, զորոնք նրան բավարարում են, այսինքն նրա յերկու մասերը դարձնում են հավասար (այդ անկյունները կոչվում են հաճախարժան արժեքներ): Լուծման համար պետք է նախ զորոնշել անհայտ անկյուն (կամ անհայտ պարունակող հիմքի) զորեմ ֆունկցիան, ապա սրա միջոցով զորոնշել հիմքը (սովորաբար աղյուսակների միջոցով): Եթե անհայտից մեկ հայտնի է, զոր ֆունկցիայի փոխալ արժեքին համապատասխանում է անկյունների մի անվերջ շարք. այսպիսով, անկյունաչափական հաճախությունը (յեթե նա հնարավոր է), ունի անվերջ թվով արժեքներ. սովորաբար գտնում են նրանց ընդհանուր յեմը: Դիցուք որ. Լուծելով զորեմ անկյունաչափական

3) ֆունկցիաների գումարը յեւ տարբերությունն արտադրյալի ճեւա-
փոխող բանաճեւերը .

4) ֆունկցիաների արտադրյալը գումարի յեւ տարբերության ճեւա-
փոխող բանաճեւերը .

Նույն նպատակի հաճար յերբեճի ոգտակար եւ լինեմ զիճեւ անհայտ
հաճեւարության հարկություններին :

Այս բոլոր բանաճեւերի հարճար կիրարկությունը պահանջում եւ ճեւ
վարճություն : Ձեւափոխումների արդյունքում հաճարս արաջվում եւ իռա-
ցիոնալ յեւ յերկարճեւ արտահայտություններ , իսկ յերբ կաճենում եւ
հաճաւարումն ալաթել նրանցից , արաջվում եւ կողճեւի լումներ :
Կարելի եր ոգտվել այն թեորեւից , Վոր անկյունաչափական բոլոր
ֆունկցիաներն արտահայտվում եւ $\text{tg } \frac{x}{2}$ -ի ճիզոցով ռաջիոնալ ճերպով :
Բայց այստեղ յեւս արդյունքում հաճարս արաջվում եւ բարճր աարի-
ճանի հաճաւարումներ , ուստի հեարաճոր չի լինում ճիշտ կիրառել
այս տեղադրությունը :

Պարիզի Louis - G - Grand լիցեւմի որոթ. M. Ch. Bioche - լ նորերս
նշեց թի պարզ յեւ գեղեցիկ կանոն , Վորին հետեւելով կարելի
եւ ճիշտ խուսափել ճեւափոխումների իռաջիոնալությունից յեւ
յերկարճեւությունից :

Այդ կանոնը կարելի եւ այսպես բանաճեւել .

116. Ինչի թեորեւ . 1^o Յերե անկյունաչափական հաճաւարումը չի
փոփոխվում , յերբ x -ի տեղ դնում եւթ $\pi + x$, կաճ $\pi - x$,
կաճ $(-x)$, ապա իրրեւ ոճանդակ անհայտ վերցնում եւթ հաճա-
պարաւախաւարար կաճ $\text{tg } x$, կաճ $\sin x$, կաճ $\cos x$:

2^o Յերե անկյունաչափական հաճաւարումը փոփոխվում եւ , յերբ
 x -ի տեղ դնում եւթ $\pi + x$, $\pi - x$, $(-\pi - x)$, ապա իրրեւ ոճանդակ
անհայտ վերցնում եւթ $\text{tg } \frac{x}{2}$:

Թեորեւի ապալույցը , պարզության արաջում , թողնվում եւ աշակեւորներին :

Մ թ ի ն ա կ ն ե Ր .

Մ թ ի ն ա կ 1. Հ ու ճ ե լ

$$\sin 3x = \cos x - \sin x$$

հաճախարուծը:

$\pi + x$ դնելով x -ի տեղ՝ գտնուծ եւի, վոր հաճախարուծունեւն աւիտիոփի եւ ծաւծ. այս պարծառով իբրեւ ռժաւդ.աւն աւեհայր վերցնուծ եւի $\tan x$ -ը:

Պարզ ճեւափոխուծերով գտնուծ եւի.

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x = \cos x - \sin x,$$

$$3 \tan x - 4 \tan x \sin^2 x = 1 - \tan x,$$

$$4 \tan x - 1 - \frac{4 \tan^3 x}{1 + \tan^2 x} = 0,$$

$$\tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0,$$

Արաւարեի $\tan x$ -ի նկարծաժք թի խաւակուի հաճախարուծ. լուծելով այն՝ կուենեւեի.

$$\tan x = 2 \pm \sqrt{3},$$

$$x_1 = \kappa \pi + \arctan(2 + \sqrt{3}), \quad x_2 = \kappa \pi + \arctan(2 - \sqrt{3}):$$

Բայրի դրաւից, հաճախարուծը $\cos x$ -ի վրա բաժաւեւիս յեւի կոր. սրիւի $x = \pm \frac{\pi}{2}$ արծաւրը, ուսրի

$$x_{3,4} = 2\kappa \pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

Մ թ ի ն ա կ 2. Հ ու ճ ե լ

$$\sec x = \sin x + \cos x$$

հաճախարուծը:

$\pi + x$ տեղադրուծունեւը հաճախարծաւն նշաւը էի փոխուծ, ուսրի հաճախարուծը արարահայրեւի $\tan x$ -ով: Այդ նպարակով հաճախարծաւն յերկու ծաւերը բաղծապարկեւի $\sec x$ -ով (վորովեւրեւ $\cos x = 0$ րվ)աւ հաճախարծաւն արծաւրը էի)

$$\sec^2 x = \tan x + 1, \quad \tan^2 x + 1 = \tan x + 1, \quad \tan x (\tan x - 1) = 0.$$

Վորից հետեւցնում ենք յերկու հաճախարուծ.

1) $\operatorname{tg} x = 0$, 2) $\operatorname{tg} x = 1$.

Աստի $x_1 = k\pi$, $x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

Որիչակ 3. Լուծել

$$\frac{4 [\sec x + \operatorname{tg} x (8 \sin x - 9)]}{\sin 2x (9 - 2 \sin x)} = -1$$

հաճախարուծ:

$\pi - x$ փոխադրութունը փոխում է $\sec x$ -ի, $\operatorname{tg} x$ -ի յեւ $\sin 2x$ -ի նշանները: աւսիւն փոխում է թե՛ հաճախիչի յեւ թե՛ հայրարարի նշանը. այդ պատճառով փոխադրելուց հետո արտահայտումը չի փոխվում: Կաճախարուծն արտահայտում ենք $\sin x$ -ով, հաճախիչն ու հայրարարը բազմապատկելով $\cos x$ -ով. ստանում ենք.

$$\frac{4(1 + 8 \sin^2 x - 9 \sin x)}{2 \sin x \cos^2 x (9 - 2 \sin x)} = -1$$

$$2 \sin^4 x - 9 \sin^3 x + 14 \sin^2 x - 9 \sin x + 2 = 0.$$

$\sin x$ -ի նկատմամբ արտացոյցելով 4-րդ աստիճանի աւելորդադաս հաճախարուծ:

Լուծելով ըստ հանրահաշիւի կանոնների (փոխադրութուն $\sin x + \frac{1}{\sin x} = y$), կարանաւել.

$$2y^2 - 9y + 10 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = \frac{5}{2}:$$

Ստիւտից x -ի վորոշումն հաճախ կուտենաւել յերկու հաճախարուծ-

1) $\sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$, 2) $\sin^2 x - \frac{5}{2} \sin x + 1 = 0$:

Սաղիւնն ունի յերկու հաճախար արժարներ $\sin x = 1$, Վորից $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$: Բայց թել հաճախարուծը բազմապատկելով $\cos x$ -ով, Վոր հաճախոր է $x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ կողմակի արժարի ծածծում. հետեւցաւ ստացաւ արժարներից ծիայն թելն է պարկանում հաճախարծանը, իսկ ծիուը կողմակի է. դուրս չգելով նա գրնում ենք ծի Լուծում $x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{2}$:

Յեթրորդ. հաճախորժը ցույցիս է $\sec x = \frac{1}{2}$ (վերադարձվել $\sin x = 2$ արժանի անհնարին է), զորից թվ.

$$x_2 = \kappa \pi + (-1)^{\kappa} \frac{\pi}{6} :$$

Որինակ 4. Հոստել

$$\sec x - \operatorname{ctg} x = \sin x + \cos x$$

հաճախորժը .

Այս դեպքում թույլ յերևի ցեղադրություններն էլ ցոխում են հաճախորժան նշանը, ուստի հաճախորժը վերադարձվել $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ -ի:

Դարչ ճեղափոխությունը ցույցիս են.

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\frac{(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2})^2 (1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}) - (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})(1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})} = 0$$

$$\frac{(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2})(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})} = 0,$$

$$1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0, \quad x_1 = 2\kappa \pi.$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \infty, \quad x_2 = (2\kappa + 1)\pi.$$

Այս յերկու լուծումը կարելի է արքաահայտել ծի բանաչեմով.

$x = m\pi$, վորտեղ m -ը վորեմե անքող թիվ է:

Որինակներ

$$1. \sec x + \sin x = \cos x; \quad 2. 1 + \cos 2x = \sin x + \operatorname{tg} x;$$

$$3. 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5 \operatorname{cosec} x; \quad 4. 6 \sin 2x + 5 = 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x);$$

$$5. \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x + 2 = 0$$

$$6. 5 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 3 \sin x \cos x;$$

$$7. 7 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x = 15 \cos^2 x;$$

$$8. 2 \sin x = \sin(45^\circ - x); \quad 9. 2 \sin 3x = 3 \cos x + \cos 3x.$$

$$10. 8 \cos^4 x = 5 + 2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 15 \sin^2 x \cos^2 x - 15 \sin^3 x \cos x.$$

117. Բխոշի թեորեմի ա. ծառն ուղղորդված է կիրառել հաճախորդ-
ների ծի վորոշ խճրի վրա: Արանք այն հաճախորդներն են,
վորոնք պարունակում են ահեհայր անկյան ծիայն սիկուսը յեվ
կոսինուսը յեվ վորոնք յեվ անդամների չափումները $\cos x$ -ի յեվ
 $\sin x$ -ի նկարծածք ծիծիանցից ցարթերվում են չույց-թվով:

Այդ-դի-ի հաճախորդները լուծելու հաճար նրանց դարչնում ենք
 $\sin x$ -ի յեվ $\cos x$ -ի նկարծածք հաճախելու, վորի հաճար $\cos^2 x +$
 $+ \sin^2 x$ -ի հարճար աստիճանով բաղճապարկում ենք բոլոր
անդամները, բայի այն անդամից, վորի չափումը $\cos x$ -ի յեվ $\sin x$ -ի
նկարծածք բարճրադույնն է. այնուհետեվ հաճախորճան յերկու
ճաները բաճանում ենք $\cos^2 x$ -ի վրա (ո-ը ցույց է ցալիս անդամների
չափումը) յեվ պրանում ենք ծի հաճախորճ, վորը պարունակում է
ծիայն $\tan x$ -ը:

Պիցուք ունիւք

$$8 \cos^4 x = 5 + 2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 15 \sin^2 x \cos^2 x - 15 \sin^3 x \cos x$$

հաճախորճը:

Նախ գրում ենք.

$$8 \cos^4 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + 2 \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3 \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) -$$

$$- 15 \sin^3 x \cos^2 x - 15 \sin^3 x \cos x.$$

ապա յերկու ճանն էլ բաճանում ենք $\cos^4 x$ -ի վրա. պրաչվում է.

$$8 = 5(\tan^2 x + 1)^2 + 2 \tan^2 x (\tan^2 x + 1) + 3(\tan^2 x + 1) - 15 \tan^2 x - 15 \tan^3 x$$

$$\text{կամ } 7 \tan^4 x - 15 \tan^3 x = 0.$$

այս հաճախորճ, վը ցալիս է

$$1) \tan x = 0, \quad \text{վորտեղից } x = k\pi$$

$$2) \tan x = \frac{15}{7}, \quad \text{" } x = k\pi + \arctan \frac{15}{7}$$

այստեղ k -ն վորեվն ամբողջ թիվ է կամ չերո:

Արորով ցալիս ենք դասական կոլված հաճախորճան լուճումը,

վորից վերաճվում են բաղճարիվ հաճախորճներ:

113. $a \sin x + b \cos x = c$: Այս հավասարումը պարզապես է որոշ-
 անկախ հավասարումների թվից յեւ ռւնի յեւ հիբրանոթյունն :
 Բայց քանի որ յեւ բազմաթիւ անկյունաչափական հավասարում-
 ներ վերածվում են այս հավասարման : $a \sin x + b \cos x$ արտահայ-
 տությունն ներկայացնում է յերկու պարզ ձոձ անկյունի շար-
 ժումների խառնուրդների գումար :

Առաջին յեղանակ . Այս յեղանակը հիբրանվում է այն հավա-
 սարումներին , զորոնց յեւ a, b, c գործակիցները թվեր են , յեւ
 զորոնց յեւ ցանկանում ենք գտնել լուծումների թվական
 արժեքները լոգարիթմական աղյուսակի յիշոցով :

Պիցուք
$$a \sin x + b \cos x \equiv r \sin(x + \varphi)$$

$$\equiv r \sin x \cos \varphi + r \cos x \sin \varphi,$$

զորի յեւ r -ը դրական թիվ է , իսկ φ -ն 0 -ի յեւ 2π յիջեւ
 գտնվող անկյուն :
 Եւ այնպիսով հերոս պրանում ենք .

$$(1) \begin{cases} r \cos \varphi = a, \\ r \sin \varphi = b. \end{cases}$$

Յերե a -ն յեւ b -ն հասարակ թվեր են , հարելի է նախ զորոշել

(1) առնչություններից r -ը

$$r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2 + b^2, \text{ յեւ } r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

ապա հաշվել 0 -ի յեւ 2π -ի յիջեւ գտնվող φ անկյունն ,

որ (1)-ի յերկրորդ առնչությունից , քաւով $\cos \varphi$ -ին a -ի նշանը :

Յերե a -ն յեւ b -ն հասարակ թվեր են , յեւ յերե անհրաժեշտ
 է $\sqrt{a^2 + b^2}$ արտահայտությունը լոգարիթմական դարչնել , ապա
 լաւ է (1) առնչություններից նախ արտաձել

$$\tan \varphi = \frac{b}{a};$$

այս բանաչեւից φ -ի հաճար պրաչվում է յերկու արժեք ,
 զորոնք գտնվում են 0 -ի յեւ 2π -ի յիջեւ :

համարների ընթացում ներքին քայլեր, զորի համար կ. բնական
 ունի նույն նշանը, ինչ զոր $\sin$ նշանը նույն նշանը,
 ինչ զոր $\cos$ -ն. այս պայմանով x -ի համար պատկեր
 ներքին գրական արժեք -

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{b}{\sin \varphi}$$

համապատասխանության թեկն ու թեկի թաղանթ:
 Այսպեսով համապատասխան է φ քանակ -

$$r \sin(x + \varphi) = c,$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{r}.$$

այսպեսով հետևում է.

$$x + \varphi = 2k\pi + \arcsin \frac{c}{r}$$

$$x + \varphi = (2k+1)\pi - \arcsin \frac{c}{r}$$

Եւ այսպիսով տրոստ ստանալով ծր. ինք. $\sqrt{r^2}$.

Եթե համապատասխանության $\sin$ և $\cos$ նշանները յոթանշանային
 շարք

$$x = 2k\pi + \arcsin \frac{c}{r} - \varphi ; \quad x = (2k+1)\pi - \arcsin \frac{c}{r} - \varphi ;$$

Հորով հետևելով $\frac{c}{r} - c$ ներկայացնում է սինուսի արժեք, այսինքն
 $-1 \leq \frac{c}{r} \leq 1,$

$$\text{այսինքն} \quad -\sqrt{a^2+b^2} \leq c \leq \sqrt{a^2+b^2}.$$

Ֆերկորդ. յեղանակ: «յս յեղանակը կիրառվում է այն համապատասխանություններին, զորոնց մեջ գործակիցներից գոնե մեկը կախված է իր պարամետրից. այդ- համապատասխանություններին համապատասխանաբար կենդանիները պետք է պարզապես հետապնդել այս պարամետրի նկատմամբ. պարզ է, զոր հարց էի կարող լինել x -ի համար թվական արժեքներ հաշվելու (համար) ծագում:

$\sin x = c$ յեղ $\cos x = 1$ արք. հայտնի է $\tan \frac{x}{2}$ -ի ֆունկցիոնալներով.
 համապատասխան է φ քանակ.

$$a \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + b \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = c,$$

Վորպեղից կարանանք

$$(b+c) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c - b = 0.$$

Այսպեղից հետեւում է (արժանեքի իրական արժեքների համար)

$$a^2 - (b+c)(b-c) \geq 0 \quad \text{այսինքն}$$

$$-\sqrt{a^2+b^2} \leq c \leq \sqrt{a^2+b^2}$$

հաճախարուծու ունի յերկու արժանք.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} \end{cases}$$

Այսպեղից կարանանք $\frac{x}{2}$ -ի համար արժեքների յերկու շարք.

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = k\pi + \arctg \frac{a + \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} \\ \frac{x}{2} = k\pi + \arctg \frac{a - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}, \end{cases}$$

Վորպեղից յեւ.

$$x = 2k\pi + 2 \arctg \frac{a + \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$$

$$x = 2k\pi + 2 \arctg \frac{a - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$$

այս հաճախարուծների թիւ k -ն զորեւէ անորոշ թիւ է, կամ զերո:

Որինակ. Լուծել

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{2} \quad \text{հաճախարուծել}$$

Հաճախարուծել բնական է, ուրեմն կը կիրառենք առաջին յեղանակը:

Հաճախարուծան առաջին ծաւր եռյեւացեւէք $\varepsilon \sin(x+\varphi)$ արդա-
հայտարարան հետ, կարանանք.

$$\begin{cases} \varepsilon \cos \varphi = 1 \\ \varepsilon \sin \varphi = \sqrt{3} \end{cases}, \quad \text{Վորպեղից } \varepsilon = \sqrt{1+3} = 2.$$

այսպեղից հետեւում է.

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad \text{Վորպեղից } \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Հաճախարուծել ընդունում է հետեւյալ ձեւը.

$$2 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -\sqrt{2} \quad \text{կամ } \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

11, արհեստի պատենտ էնի - 231-

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + (-\frac{\pi}{4}) \\ x + \frac{\pi}{3} = (2k+4)\pi - (-\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Վորով թիվ x -ի համար գտնուծ էնի արժեքները հետևյալ կերպ շարժել.

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{7\pi}{12} \\ x = 2k\pi + \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

այսպիսի n -ն ընրելիս անհրաժեշտ թիվ է, կամ չէրա:

Ծանոթություն. Դասակարգելով կազմած այս հավանությունը ունի լուծ-
ման բազմաթիվ յեղանակներ, վորոնց բոլոր էլակի յերկարացաճաճան
յեղանակ.

119. Յերրորդ- ծերոդ. Ժի թանի որիւնակներով ցույց տանի, թե
հեշտու կարելի է հաճախարուծելը վերլուծել արարարիւններ:

1. Լուծել $4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x - 3 = 0$ հաճախարուծ:

Պէիւի. $4 \sin^2 x (\sin x + 1) - 3 (\sin x + 1) = 0,$

$$(\sin x + 1)(4 \sin^2 x - 3) = 0, \text{ վորպէնիս}$$

կամ $\sin x = -1, x_1 = -90^\circ; x = 90^\circ (4k-1).$

Ժի կամ $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; x_{1,2} = \pm 60^\circ; x = 60^\circ (3k \pm 1):$

2. Լուծել $\sin 2x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x - \sin 2x + 1 = 0$ հաճախարուծ

Պէիւի. $\sin 2x (\operatorname{tg} x - 1) - (\operatorname{tg} x - 1) = 0, \text{ կամ } (\operatorname{tg} x - 1)(\sin 2x - 1) = 0.$

հետեւեալայն կամ $\operatorname{tg} x = 1; x_1 = 45^\circ, x = 45^\circ (4k+1)$

Ժի կամ $\sin 2x = 1; 2x_1 = 90^\circ; x = 45^\circ (4k+1):$

3. Լուծել $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$ հաճախարուծ

Պէիւի $2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + \cos x.$

$$\sin 2x (2 \cos x + 1) = \cos x (2 \cos x + 1); (2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0$$

$\cos x (2 \cos x + 1)(2 \sin x - 1) = 0.$ այսպիսիս հետեւեալն է

կամ 1) $\cos x = 0, x = 90^\circ (2k+1)$

կամ 2) $\cos x = -\frac{1}{2}, x_1 = 120^\circ, x = 120^\circ (3k \pm 1)$

կամ 3) $\sin x = \frac{1}{2}, x_1 = 30^\circ, x = 30^\circ (12k+1) \text{ կամ } x = 30^\circ (12k+5):$

120. Յերրորդ- ծերոդ-Ը Կիրառուծ է շար հաճախ, բայց թան-
աւոր անհրաժեշտ է լինուծ նախապէս կարարել թի շարժելու:

Թանիւն:

թերեւէ յերկու որիւնդ: $- 232 -$

1. Լուծել $\sin 17x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 5x = 0$ հաճախորոշել:

Ունիմք $\sin 17x + \sin 60^\circ \cos 5x + \cos 60^\circ \sin 5x = 0,$

$\sin 17x + \sin (60^\circ + 5x) = 0, \sin 17x = -\sin (60^\circ + 5x) = \sin (-60^\circ - 5x):$

հետեւեալաբար

կամ 1) $17x + (-60^\circ - 5x) = (2k+1)180^\circ$, չորսերկից $x = 10^\circ (3k+2),$

յեւ կամ 2) $17x - (-60^\circ - 5x) = 2k \cdot 180^\circ$, չորսերկից $x = \frac{30^\circ}{11} (6k-1):$

2. Լուծել $\sin (\pi \cos x) = \cos (\pi \sin x)$ հաճախորոշել:

Ունիմք. $\cos (\frac{\pi}{2} - \pi \cos x) = \cos (\pi \sin x)$, չորսերկից

$(\frac{\pi}{2} - \pi \cos x) \pm (\pi \sin x) = 2k\pi$, կամ π -ով կրճատելով

$\cos x \mp \sin x = \frac{1}{2} - 2k.$

Քանակաւոր բարդացնելով՝ կարգաւորել.

$1 \mp \sin 2x = (\frac{1}{2} - 2k)^2:$

Ստացանք հասարակարար արժեքն է 0, ուստի

$\sin 2x = \pm \frac{1}{2}, 2x = \arcsin \frac{1}{2}, x = k \cdot 90^\circ \pm \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2}:$

121. Կուգլեայի հաճախորոշելը

Լուծել. $5 \cdot 7^{\sin^2(45^\circ + \frac{x}{2})} + \frac{2}{3} \cdot 7^{1+\sin x} = 21$ հաճախորոշել.

Եւսի գործում ենք, չոր

$\sin^2(45^\circ + \frac{x}{2}) = \sin(45^\circ + \frac{x}{2}) \cos(45^\circ - \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}(\sin 90^\circ + \sin x) = \frac{1+\sin x}{2}.$

Ուրեմն յեր հաճախորոշել կարելի է գրել այսպէս.

$5 \cdot 7^{\frac{1+\sin x}{2}} + \frac{2}{3} \cdot 7^{1+\sin x} = 21.$

Կամ, յերեւ ընդունելով $7^{\frac{1+\sin x}{2}} = y$, $2y^2 + 15y - 63 = 0.$

Այս հաճախորոշումը լուծուածքն են

$y_1 = 3, y_2 = -10,5:$

Յերկրորդ արժեքը էի բաժարարում հաճախորոշումը, չորսերկից

գրել $7^{\frac{1+\sin x}{2}} = 3$ իւր գրաւուն է յեճախորոշել. ուստի ինքն է

$7^{\frac{1+\sin x}{2}} = 3$, չորից սրանում ենք

$1 + \sin x = \frac{2 \lg 3}{\lg 7}, \sin x = \frac{\lg 9 - \lg 7}{\lg 7}.$

այս արտահայտութիւնը լոգարիթմելով՝ աղյուսակի յիշոյով

կը գործենք, չոր

$x = 7^\circ 25' 2'' 4:$

122.

Σ imp d m. p. m. ζ ζ ζ ζ ζ

Le Stal hinc et inde in pace Subter.

$$\begin{aligned}
31. & 2 \cos x = \sec x, \quad 32. \sin x = \sec x, \quad 33. \cos^2 x - \cos x - 6 = 0, \\
34. & 2 \sec^2 x - 7 \sec x + 3 = 0, \quad 35. 4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} = 0, \\
36. & 3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2, \quad 37. \sin 3x = 2 \sin x, \quad 38. \sin 2x = 3 \cos 3x, \\
39. & \sin 3x = 8 \sin^3 x, \quad 40. \operatorname{ctg}^2 x - \sec^2 x = \frac{1}{4}, \quad 41. \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x = 5, \\
42. & \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}, \quad 43. \cos x + \cos 2x = 1, \quad 44. 2 \sin x \sin 3x = 1, \\
45. & 3 \operatorname{tg}^2 x - 16 \sin^2 x + 3 = 0, \quad 46. \frac{\cos x - 5}{\cos x} = \frac{\cos x - 10}{\cos x + \sqrt{3}}, \quad 47. 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3, \\
48. & \sin(x + 45^\circ) + \sin(x + 75^\circ) = \sin 82^\circ, \quad 49. \sec(45^\circ + x) \sec(45^\circ - x) = 4, \\
50. & \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x, \quad 51. \sin x + \cos 3x = 0, \quad 52. 3 \sin x = 7 \sin(y - x), \\
53. & \sin x + \sin y = \sin(x + y), \quad 54. \sin(13x - 270^\circ) = \sin(13x + 60^\circ), \quad 55. \cos \pi x = \cos \pi x, \\
56. & \operatorname{tg} \frac{3}{5} x \cdot \operatorname{ctg} \frac{5}{3} x = 1, \quad 57. \operatorname{tg} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{x + \frac{\pi}{2}} = 1, \\
58. & \sin(x + 20^\circ) + \sin x = \cos 10^\circ, \quad 59. \operatorname{tg} 3x = \sin 6x, \quad 60. 3 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x + 1 = 0, \\
61. & \sin \frac{n+1}{2} x + \sin \frac{n-1}{2} x = \sin x, \quad 62. \operatorname{tg}(x + a) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - \frac{1}{3}}, \\
63. & 2 \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 2, \quad 64. \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x, \quad 65. \sqrt{3} \cos x - \sin x = 1, \\
66. & \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}, \quad 67. a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = c, \quad 68. a \sin 2x + b(\sin x + \cos x) = 0, \\
69. & \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = m, \quad 70. a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c, \\
71. & \sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x), \quad 72. \operatorname{tg} x + a b \operatorname{ctg} x = a + b, \quad 73. a \operatorname{tg}^2 x + b = c \sec^2 x, \\
74. & \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} [\arcsin(\cos 60^\circ)], \quad 75. \sin(43^\circ + x) \cos(47^\circ - x) = \frac{3}{4}, \\
76. & a \sin(x + m) \sin(x + n) = b, \quad 77. a \sin(A - x) = b \cos x, \quad 78. \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x) = m, \\
79. & \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} 2x = \sin x (1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} x), \quad 80. \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = m^3 - 3m, \\
81. & \sin(\pi + x^2) - \cos(2x - 3) = 0, \quad 82. \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}, \quad 83. 3^{1 + \sin x} = 4, \\
84. & 5^{1 + \operatorname{tg} x} = 125, \quad 85. 16^{\sin x} + 3 \cdot 4^{\sin x} = 10, \quad 86. 1, 2^{\cos^2 x + \cos x} = (\frac{6}{5})^{0,45}, \\
87. & 0,4^{1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots} = 0,3; \quad 88. \operatorname{tg} x^{y x^{\operatorname{tg} x} \dots} = \sin 10^\circ, \\
89. & \operatorname{arctg} 1 = 2 \operatorname{arctg} x, \quad 90. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 2x = \frac{3\pi}{4}, \quad 91. \operatorname{arctg} \frac{1}{a+1} = 2 \operatorname{arctg} a, \\
92. & \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{3\pi}{4}, \quad 93. \operatorname{arctg} \frac{\pi}{9} + \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \\
94. & \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{8}, \quad 95. 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \\
96. & \arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad 97. \arcsin x = \arcsin(3x - 2), \\
98. & \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x - 1) = \dots
\end{aligned}$$

123. Յերկանհայր հաճախարարների սխալություններ.

Յերկանհայր հաճախարարների սխալությունները կետակետ հետևյալ
 չեղելու ունեն. որովհետև յերկու հաճախարարներից մեկը գալիս է յերկու
անհայր անկյունների գումարը կամ քարթեքությունը, իսկ մյուսը՝ մյուս
 անկյունների նույնականը կամ լրացուցիչ ֆունկցիաների վերելքը կա-
 պակցությունը: Մյուսիսի հաճախարարը լուծելու համար պետք
 էնքան անհայր անկյունների գումարը, յերեք հայտեր է քանակ
 քարթեքությունը կամ գոյնում էնքան քարթեքությունը, յերեք հայտեր է քանակ
 մյուս նախադասում չեղանդություն էնքան Երկ հաճախարարը, չորս նախադաս
 կամ է անհայր անկյունների ֆունկցիաների վերելքը կապակցությունը,
 առաջերորդ-վերելք հետևյալ ընդհանուր ցուցանիշներով.

1. Յերեք գոյն է ֆունկցիաների գումարը կամ քարթեքությունը նախա
 չեղանդություն էնքան ըստ գումարման բանալիների:

2. Երկու քարթեքություն չեղանդություն էնքան ըստ արտադրյալի բանալիների

3. Յերեք գոյն է յերկու ֆունկցիաների հարաբերությունը, այսինքն հաշվա
 բանը գրած էնքան համեմատությունն չեղանդ յերեք քանակ առաջացնում էնքան
 չորս համեմատություններ, որովհետև ունենալով յերեք քանակ, չորս առաջին ինքնարթ
 քանակ անդամների գումարը մարտնչում է մյուս անդամների քարթե
 քանակն այնպիսի, ինչպես յերեքերորդ հարաբերության անդամների գումարը
 իրենց քարթեքության:

4. Անհայրների յեղ կոսինուսների փոխակուսիները փոխարինվում են ըստ
 հետևյալ բանալիների.

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} :$$

5. Յերեքն յերկանհայր հաճախարարների սխալների լուծումը վերաճում է հե-
 տեղյալ փոքր ծրարահայր հաճախարարի լուծման.

$$a \sin \theta + b \cos \theta = c,$$

վերելք անհայր է $x + y$ գումարը կամ $x - y$ քարթեքությունը:

Նախընթաց հոդվածի ընդհանուր ցուցանիշները կիրառելիք քանակներ որի
 նախնների լուծման:

նախորդ. հոդվածի 1-ին կետի համաձայն գրուծ ենք.

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a, \text{ և } 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos b = a.$$

ստացանք գրուծ ենք. $\cos \frac{x+y}{2} = \frac{a}{2 \cos b}$, հետ. $\frac{x+y}{2} = \arccos \left(\frac{a}{2 \cos b} \right)$:

ի՞նչ անենք $\frac{x-y}{2} = b$, ինչ $\frac{x+y}{2} = \arccos \left(\frac{a}{2 \cos b} \right)$, 7-յուրիւ ե գրենք x -ը և y -ը:

Արիւնակ 2. Հոսեւ $\sin x \sin y = a$, $x+y = 2b$ հաւանար. սխալե՞ծ:

ընդհանուր ^{սուրճարկ} 3-րդ կետի համաձայն գրուծ ենք.

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2a \text{ և } \cos(x-y) - \cos 2b = 2a, \text{ ստացանք ինչ } \cos(x-y) = 2a + \cos 2b, \text{ և } x-y = \arccos(2a + \cos 2b) \text{ ինչ անենք:}$$

Արիւնակ 3. Հոսեւ $\frac{\sin x}{\sin y} = a$, $x-y = 2b$ հաւանարութեան սխալե՞ծ:

ընդհանուր ^{սուրճարկ} 3-րդ կետի համաձայն գրուծ ենք.

$$\frac{\sin x}{\sin y} = a, \quad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{a+1}{a-1} \text{ և } \frac{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}} = \frac{a+1}{a-1},$$

ստացանք ինչ գրուծ ենք $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{a+1}{a-1} \cdot \operatorname{tg} b$ և $\frac{x+y}{2} = \arctan \left(\frac{a+1}{a-1} \operatorname{tg} b \right)$ ինչ անենք:

Արիւնակ 4. Հոսեւ $\cos^2 x + \sin^2 y = a$, $x-y = 2b$ հաւանարութեան սխալե՞ծ:

Աղաւթեւ ընդհանուր ^{սուրճարկ} 4-րդ կետի գրուծ ենք.

$$1 + \cos 2x + 1 - \cos 2y = a, \text{ և } 2 \sin(x+y) \sin(y-x) = 2a - 2, \text{ ստացանք ինչ } \sin(x+y) = \frac{1-a}{\sin 2b}, \text{ և } x+y = \arcsin \left(\frac{1-a}{\sin 2b} \right):$$

Արիւնակ 5. Հոսեւ $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = a$, $x+y = 2b$ հաւանար. սխալե՞ծ:

ընդհանուր ^{սուրճարկ} 1-ին կետի համաձայն գրուծ ենք.

$$\frac{\sin(y-x)}{\sin x \sin y} = a, \quad \sin x \sin y = \frac{\sin(y-x)}{a}.$$

2-րդ կետի համաձայն շարունակենք հաշուել.

$$\cos(y-x) - \cos(x+y) = \frac{2}{a} \sin(y-x), \text{ և } \cos(y-x) - \frac{2}{a} \sin(y-x) = \cos 2b.$$

հաշուելու համարման ան ծաւալման դեպք (ուսեւնք 4-ը գրենք $(y-x)$ ցարքերուսնը, ինչ $(y+x)$ գումարն արդեւ հայտնի է:

124. Հարժուրդներ.

- | | |
|--|--|
| 101. $x+y = \frac{\pi}{2}$; $\sin x \cos y = 0,75$. | 102. $x+y = \frac{\pi}{2}$; $6 \operatorname{tg} x = 5 \operatorname{tg} y$. |
| 103. $x+y = \frac{\pi}{2}$; $\sin x + \cos y = \operatorname{tg} x$. | 104. $x+y = \frac{\pi}{6}$; $\sin x = 3 \sin y$. |
| 105. $\sin x = \cos 2y$; $\sin 2x = \cos y$. | 106. $x+y = \alpha$; $\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos \alpha$. |
| 107. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -\frac{4}{\sqrt{3}}$; $\sin 2x - \sin 2y = -\sqrt{3}$. | |

109. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1$; $\cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 110. $2(\sin 2x + \sin 2y) = 2 \sin(x+y) = 1$.
 111. $\sin y = k \sin x$; $2 \cos x + \cos y = 1$. 112. $\sin x + \sin y = \sin \theta$; $\cos x + \cos y = \cos \theta$.
 113. $x + 2y = \frac{\pi}{2}$; $3 \operatorname{tg} x + 12 \operatorname{tg} y = 5\sqrt{3}$. 114. $\operatorname{tg} x = a \operatorname{ctg} y$; $\operatorname{tg} 2x = b \operatorname{ctg} 2y$.
 115. $\sin x \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} \epsilon$; $\cos y \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha$.

Սկզբի բարդ տիպի յերկանհայր հաճախությունների սխալները, ինչպես
 յեղ յերեք յեղ սկզբի անհայրներ պարունակող հաճախությունների սխալները,
 ը, վերաճում են զերեք յինքնուրույն առանձնացվածը:

Վարժություններ.

1. $x + y + z = 180^\circ$; $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 2$; $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = 3$.
 2. $x + y + z = 180^\circ$; $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3$; $\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = 14$.
- Գրել x, y, z ցրական անկյունները, յերեք
3. $x + y + z = 180^\circ$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = m : n : p$.
 4. $x + y + z = 90^\circ$; $\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = m : n : p$.
125. Սկզբունական հաճախություններ կազմելու յեղ հետազոտելու վերաբե-
րյալ խնդիրներ.

1. ABC յեռանկյուն յեղ B անկյունը 2 անգամ յեղ C անկյունը, յեղ ϵ
 յեղ a կողմի հարաբերությունը հաճախ է $\sqrt{2}$ -ի: Գրել C անկյունը:
2. Հաճախակող սեղանը պարզում է փոքր հիմքի շուրջը. սեղանի
 բարձրությունը հաճախ է աղ. հիմքին: Գրել կող յեղ յեղ հիմքի միջև
 յեղան անկյունը, յերեք հայրնի է, զոր պարամից առաջացած ծավալ
 ծավալն է $V = 13 \pi \cdot 4^3$ խոր. սծ.:
3. ABC յեռանկյունը պարզում է c կողմի շուրջը, պրայած ծավալ
 ծավալն է $V = 356,134$ խոր. սծ.: Հայրնի է, զոր $h_c = 4,5$ սծ.,
 $\alpha = \angle(a, h_c) = 58^\circ 14' 0''$. Գրել $x = \angle(\epsilon, h_c)$:
4. Ծառի յեղ աղտաբակի հեռավորությունն է $d = 15$ սծ.: Յերեք դիպնի
 աղտաբակ յեղ ծառը հերթով կանգնելով նրանց հիմքերի մոտ, աղտա
 աղտաբակի անկյունային բարձրությունը 2 անգամ յեղ 40 լինի Ծառի
 անկյունային բարձրությունը: Յուր յերեք կանգնելով նրանց հեռավորու
 թյան միջակայքում, աղտա նրանց անկյունային բարձրությունները են:

5. AB փրամագրիսն ունեցող հիսաշրջանը պարփուս է AB -ին ուղղահայաց OE շառավղի շուրջը: Վորոնեւ շրջանագ.Տի C կէտի դիրքը, յերե հայտնի է, զոր BC աղեղի պարուծից առաջացած ծարձի կողմային ծակերեւոյթը հաճաւար է ծարձի վերին հիմքի ծակերեւոյթին:
6. Նորիզոնական դիրք ունեցող ապակյա կէոր սկաճառակի վրա հորիզոնական ուղղութեամբ ընկնում է լոյսի ծառագայթը յեւ նրանից դուրս է գալիս սկզբնական ուղղութեամբ զուգահեռ: Գտնել անկճան անկյունը:
7. BOC փրամագ.Տի շարունակութեան վրա ընդհարած է S կէտը յեւ նրանից քարված է SA շոշափոռը. իզեցեւելով AP ուղղահայացը յեւ յիացեւելով A -ն O -ի հետ՝ SOA անկյունն անճանեւելի է: Գտնել այս անկյան ճեճութեունը, յերե հայտնի է, զոր աճրող չեւ BC փրամագ.Տի շուրջը պարփուս դեպքում SA կոնի կողմային ծակերեւոյթը եւ հարաբերի AC շերտի ծակերեւոյթին այնպէս, ինչպէս $m:n$: Նաշվել x -ը, յերե $m=3$, $n=2$:
8. Ուղղանկյուն յեռանկյունը պարփուս է նախ a եղի, ապա b եղի շուրջը: Պարուծից պրացված կոների լրիւ ծակերեւոյթների հարաբերութեունը հաճաւար է 2-ի: Գտնել A անկյունը:
9. Գտնել շրջանային ներարի կենտրոնական անկյունը, յերե $R=55$. յեւ յերե ներարին իր սահմանային շառավիղներից յեւ շուրջը պարփուս առաջացած ծարձի լրիւ ծակերեւոյթը հաճաւար է $S=94,4373$ խառ. ճ.:
10. Գտնել ներգ.ճան է յի կոն, զորի ճեւիւ C կոնի գագաթով անցնող փրամագ.Տի հետ կապճում է ց սոր անկյունը: Գտնել ϑ -ն, յերե կոնի հարաբերութեունն այն գտնային բացալին, զորի հիմք յեւ բարձրութեունը նույնն էն, ինչ զոր կոնիւնը, հաճաւար է $\frac{5}{9}$ -ի:
11. Գտնել a -ն, յերե նա բաճարւում է հերեւոյալ հաճաւարճան $\cos 2x - 2 \cos x = a$.
12. Պարարուի A գագաթից ուղղիւի (դիրեկտրիս) վրա իզեցրած է $AB = h$ ուղղահայաց. B -ից քարված է $BM = d$ շոշափոռը, զոր A -ի հետ կապճում է α անկյունը: Գտնել α -ն յեւ հաշվել, յերե $\frac{d}{h} = 2\sqrt{2}$:
13. ABC յեռանկյան յեւ $A_0 = 15^\circ$, $A = \frac{\pi}{4}$ յեւ $\tan B = 2 \tan C$: Նաշվել կոշճերը յեւ անկյունները:
14. Ըրզպի AOB իսաորդին ներգ.ճան է $OPMO$ ուղղանկյունը. P -ն գտնվում է OA -ի վրա, իսկ Q -ն՝ OB -ի վրա: Ընդունելով $R=1$, գտնել $x = \angle POQ$, յերե յեռանկյան պարագ.Տի հարաբերութեունն իր ծակերեւոյթն՝ հաճաւար է n -ի: Նաշվել x -ը, յերե $4\sqrt{2}$, $n=4\sqrt{6}$:
15. Կիճան է $\tan^2 \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = a$ հապ պարուս: Վորոնեւ a չ

27. Ֆեռանկյան անկյունները, ինչպես յեզ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$,
կազմում են թվաբանական հառաջադասություն: Ծույց րաւ, Վոր անկյուն-
ների քարքերության կոսինուսը հաճաաք է $\frac{1}{2}\sqrt{3}$:
28. $ABCD$ շեղանկյունը կազմւած է ABC յեզ BCD յերկու հաճաաքակողմ
յեռանկյուններից: D -ից անցնում է յի շարժական ուղիշ. իր դիրքերից
յեզի ժամանակ նա հաւրում է շեղանկյան AC յեզ AB կողմերի շարունա-
կությունները E յեզ F կետերում: $\angle$ ից նույն ժամանակ BE յեզ CF ուղիղները
հաւրում են M կետում: Գրելել այդ կետի յերկրաչափական րեղը:
29. B, O, C կետերը դասաւորւած լինելով յի ուղիղի վրա՝ գրելում են
իրարից հաճաաք հեռաւորության վրա: Վորողել այն A կետի դիրքը,
վորից BC հաւրումը յերեւում է ուղիղ անկյաւ, յերե m_a յեզ β հաւրելի
են: Բանաչեզի յեզ լնդումել $m_a = \sqrt{3}\beta$:
30. ABC յեռանկյան յեզ րււած է A անկյունը. բայի դրանից, ներգ-ճյաւ
ըզանի O կենդրոնից յինչել A -ն OB -ի յեզ OC -ի յիզին հաճաաքակաւ են:
Գրելել B -ն յեզ C -ն: Վորողել A -ի maximum-ը:
31. Ֆեռանկյան կողմերը կազմում են թվաբանական հառաջադասուն.
 A անկյունը գրելում է յիզին յեճության կողմի դիճայ: Գրելել B -ն յեզ C -ն,
 A -ի maximum-ը յեզ հաղել անկյունները, յերե $A = 45^\circ$:
32. β կիսողի u յեզ v հաւրւածները հայրել են. բայի դրանից րււած է՝
 $a^2 + b^2 = q^2$: Գրելել C անկյունը յեզ հեքաւղորել լուճաւը: - հաղել C -ն,
յերե $u = 3$, $v = 4$, $q = 10$:
33. Ֆեռանկյան յեզ րււած է A անկյունը յեզ m կիսապարագի հաւրել-
ությունը ներգ-ճյաւ ըզանի շառաւղիշ: Գրելել B -ն յեզ C -ն: հաղել B -ն
յեզ C -ն, լնդումելով $A = 60^\circ$ յեզ $m = 3 + 2\sqrt{3}$.
34. Պատրոսի յնդիրը. - xoy ուղիղ անկյան կիսողի վրա վերցրած M
կետից րաւել յի ուղիղ այնպեւ, Վոր անկյան կողմերի յիզել լնդւած
նրա AB յաւն ունենա րււած m յերկարությունը:
35. Վ'գաւելի յնդիրը. - Կ(որ Բիւ)արդ-ի P կետում գրելում է գնդա-
իւ. յնչ ուղղությաւ պերի է հաւրւած րաւ այդ գնդակին, վոր նա յեղել-
ից n անգաւ անդրադառնաւուց հեքո վերադառնաւ նույն կետը:
36. Պատկաւի յնդիրը. Լուճել յեռանկյունը, յերե րււած են
 a , b , c , $n = \frac{b-c}{a}$:
37. Պորեկոսի յնդիրը. Դիւորը գրելում է հորիւնական հաւրու-
յան K կետւոյ յեզ րեւում է A , B յեզ C անճաւղելի կետերը. վորուց
յիզել յեղւած հեռաւորությունները հայրել են, յեզ վորոնի յնչ գրելում
են: Կետիւ AB յեզ BC ուղիղները լնդում են M կետում:

38. ABC արանկյուն յեռանկյուն թիւ Ծ յեւ Ե կտրերը հ յեւ հ բար-
չութիւնները հիմքերն են: Հայրենի է, զոր

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{5}, \quad \frac{AB+ED+DC}{a} = m.$$

գտնել յեռանկյուն անկյունները: — Հետազոտել լուծուած յեւ հաշվել
անկյունները, յերբ $m = \frac{6}{5}$:

Համելված

Պատճառաւ համարուր անկարկ.

Լի. Ուղղագիծ յեռանկյունաչափութիւնը.

Հարգեալ յեւ

Յեզիպարու.

Երբ ճեմքն անցած անկախարկ հարաւորութիւնները
թիւներն, առ այժմ, հետաւորութիւնը չեն արաւիս հաւ-
տարապէս անելու, թէ ինչպէս յեւ յեզիպարուի ինչ
արգաստեւ են հասցրել յեռանկյունաչափութիւնը հիմնելը:

Անկախաւ է, զոր յերկու ժողովուրդներն, եւ ոգւովն են յեղել կոսիւնուի:
Յեզիպարուի նրան ցուցել են նայել իսկ առանցիկ անուն՝ "segt" 2. Բայց
հայրենի չէ՝ կազմուած են յեղել արդ-յոք կոսիւնուի հաշորդական արժեքների
աշխուսակներ:

Հունաստան. Հիպպարխոսը, զորի գործունէութիւնը վերաբերում է
160-125 թ. թ. թ. ա., հենդաւ իր նախորդների աշխատանքի վրա
կիրառում է յերկրաչափութիւնը ցուցանելու հաշվումների նոր յեղանակներ
գտնելու համար: Նրան է պատկանում Պարզոճեաւի անունը կրող հայրենի լուծ-
ութիւնը: "Այն յի ներգծյալ իսկանկյուն թիւ անկյունագծերի արտադրյալը
համասար է հակադիր կողմերի արտադրյալների գումարին": Այս լուծութիւն
ընթացիկ հիմնուած՝ նա 12 գրի թիւ ցուցել իր "Պատճառաւորութիւնը Երգա-
նի աշեղների լարերի ծաւրն" գործը, զորի թիւ առաջին անգամ թեր-
ւած է լարերի աշխուսակը, որաւ կիրառութիւնը յեռանկյունների
ծաւր ծաւանակ, այլ յեւ գնդաւան յեռանկյունաչափութիւնը ցուցնելու
որն անհրաժեշտ լինելով աստղաբաշխութիւնը համար՝ անելի վաղ
արգաստեւ իսկ հարթ յեռանկյունաչափութիւնը:

Ըրի ալ խոշոր դեմ յեռանկյունաչափության ապագայում հան-
դիսանում է հերոնի Ալեխանդրացին, զոր աշխատել է Ալեխանդրի-
այում ավելի վաղ, իսկ 120 Վ. Ֆ. Տ. ա. թայի Տեխնաքանության յեզ
հողաչափության վերաբերյալ գործնական յեզ ցուցանան արժեքա-
վոր աշխատանքներից նա հարթ յեռանկյունաչափության ապագա-
րեզում ավել է շատ նորություններ: Նրան են պատկանում հե-
տևյալ բանաստեղծերը.

$$1) \frac{ab}{h_c} = \frac{ac}{h_b} = \frac{bc}{h_a} = 2R, \quad 2) F = p \cdot r$$

$$3) F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} :$$

Հերոնին է պատկանում նաև թեոդոլիտի նկարագրությունը,
զոր յեզ բարեփոխելով՝ հարծարեցրել է յերկրաաշխատան աշխատանք-
ներին:

Կիպարիոսի գործերն անթիզորեն յեզ չեն հասել: Նրա աշխատությունն
ների յեզ ծառ ծրար է կազմողու Մյուդոնոսի հաշվավոր „*Μεγίστη*
δύναμις - ὁλβή“ յերկափրության յեզ, զոր հեղագայում արաբներն
ալափոխվելով անվանեցին „ալճագեպ“: Այս աշխատության յեզ
արդեն կարելի է գրենել ուղղագիծ յեռանկյունաչափության հիմնա-
կան ցարերի:

Դե ինչ հառաջադիժությունն արալ յեռանկյունաչափությունը հերոնից
հետո հունաստանում, այդ հայրն չե. այսփան յիայն գիտենի, զոր ակազում
է յի յերկարարել հալածանի Դաթեճափիկայի դեմ յեզ 529 թ. Ֆ. Տ. հ.
կայսերական հրամանով արգելվում է այդ „հեթանոսական ուսմունք“:
Ահա՛ նույն այդ թվին լայս ցուած՝ հուսփնիսանոսի որինագրի համա-
պատասխան ցեղ (չարագեպների, ճաթեճափիկաների յեզ արանց նման
այնոց ճասին): „... Դուկ ճաթեճափիկայի դափափեցրելի արվեստ
իսպառ արգելվում է“:

Հեդիկներ. Հեդիկ ճաթեճափիկաների աշխատանքները ճաղկեց Ֆ. Տ. հ.

Յ-րդ դարից յինչեզ 12-րդ դարը: Ըրինչեզ հիպպարխոսը
յեզ Մյուդոնոսը լարն են ընդունում իբրեզ անկյան չափ, հեդիկ ճա-
թեճափիկաները գործածության յեզ ծրարին լարի կեզ յեզ նրա հա-
ճար աշուսակներ հաշվեցին: Այդ կիսալարը սանկրիփերեն կոչվու-
նի „*axdhagina*“ (չորս աղեղի լարի կեզ), զորովհետեզ բացարե

լարիներն, առաջին հայացքից ցարդիւնաց, «սինուս» անունը:
 Բանից դուրս ե գալիս, զոր արար թարգմանիչները «giva» բառ
 դարձրել են «giba»: Բայց արարներն ու ճանաչողները չեն գրգռւմ,
 ուստի «gb» բառն ընդունւել է զորպէս զուր արարական «gaib»
 (զայր, ծոց) բառը յեւ թարգմանւել է (լարիներն ցարդացիներն)
 «sinus» (ծոց):

Հնդիկները գործածութեան ծրարին նայել լրացուցիչ անկյան սինուսը,
 զոր հետագայում անվանւելից կոսինուս («sinus complementi» —
 լրացման սինուս, ֆրեյզերէնով դարձել է «sinus co», այսինքն «cosinus»):
 Երանել զորոշոյթն լրացուցիչ անկյունների սինուսի յեւ կոսինուսի փո-
 խադարձ կախումը, այսինքն

$$1) \sin A = \cos (90^\circ - A)$$

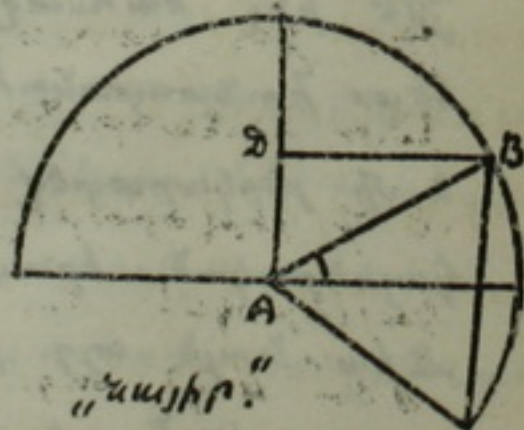
բանաւորելով, այլ յեւ առաջին հիմնական առընչութիւնը՝

$$2) \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Պարկերի վրա կարելի է դիտել այդ յերկու թեորեմների հնդական
 ապացոյցը, զոր ցեղի եր ունենում պարկերի ծոց գրեւով «նայիր»:

« րարներ ». « րդեւ » « Լ - Կանսուր խալիֆի
 որով հնդիկների ապրդարաւորա-

կան յեւ ծարճարիկական գրիերը թարգման-
 վում են արարերն (772): Հետագայում թարգ-
 մանւում են նույն արեւակ աշխարհագրէր հոյն
 ծարճարիկութեան գործերից: Այս թարգմանու-
 րյունների վրա կրթւում է արար ծրարը: Պար-
 ւից արիայակն Մահաճեդ-իբն-Գեբերը, զորը



«նայիր»

հայրն է «Լ - Բարդուան անունը» (877-929), ապրդարաւորական կա-
 րելով աշխարհագրից զար, ծշակում է սինուսների յեւ կոսինուսնե-
 րի աշխուսակներ, այլ յեւ վարդում է յեւ անկյունաւորական այլ հար-
 ցերով: «Բուլ վեֆան» (990-998) ծրարում է $\frac{\sin x}{\cos x}$ հարաբերութեան գործա-
 ծութիւնը, երա հաճար կազմում է աշխուսակներ յեւ ոգրւում է անհա-
 վասարութիւններից $\sin \frac{1}{2}^\circ$ -ը հաշվելու նպատակով: Այսպիսով յեւ ան-
 կյունաւորութեան գլխաւոր ճեւթերութեւրը կարարւել են ծիշելով $\frac{1}{2}$ րա-
 րը, բայց երանել. դժբախտաբար, անհայր ծնայիւ ճեւթրուայիւ,
 ծիշելով զոր Պարթաւն ու Էդգործոն արանուար, արդեւ 500 րարի անց,
 հնդկացիներն աշխարհագրի ծրարն անհայր արանուար արդեւ 500 րարի անց,

Յեզրոպա . Կուսաստանից Դարաշիա գաղթած հույների ծագմանը
բայան շրջանում աշակերպեց ՆՎ դարի Տեմազ-ույն Տաթևապրիկոս
Կոստան Մյուսերը , զոր ազգի հայրն է Ղեգ-իոճոնիստանու անունով
(1436 - 1476) : Արդ-են նրա ուսուցիչը՝ Կուրբան (1421 - 1461) կազմե-
լր սինուսների հաճար ստեղծած յեզ բարելուծած աշուսակներ :
Ղեգ-իոճոնիստանուը ծրարում է քանդակների գործածությունը , կա-
ծում է նրանց հաճար աշուսակներ յեզ այնուհետև ծշակում է
յեռանկյունների (ուճման քանությունը : Դր ֆնեւ Տասնավոր քեպ-
ֆերից շարերին նա քվել է սրածիր , պարզ յեզ գեղեցիկ (ուճում :
Ղեգ-իոճոնիստանուից հետո յեռանկյան քանությունը ինչ բանով է
հարստացել : նրա աշխատությունը՝ „ *De triangulis omnimodis*
libri quinque ” գրված է 1464 թվին , բայց առաջին անգամ տպա-
գրված է Տիայն 1533 թվին նյութներերով :

Նիկոլայ Կուլը (1401 - 1464) զբաղվելով շրջանի ֆառանկանա
խնդրով՝ ստացավ հետեւյալ բանաձևը՝

$$R = \frac{p}{n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

զորտեղ p -ն կանոնավոր ներգծյալ n -անկյան կիսապարագիծն է ,
իսկ R -ը՝ շրջանի շառավիղը : Այս բանաձևը հանդիսանում է Խիս-
պարտաքի յեզ Կարդոնուի կիրառած յեղանակի ընդ հանրացումը :
Յեռանկյունաչափությունը կիրառությունը պահանջող գործնական
խնդիրները հերթական դարձրին հաշվումները պարզելու խնդիրը :
Բանն այն է , զոր սինուսների յեզ քանդակների հաճար պարա-
րած աշուսակները , զորոնք հաշված եին յեզ թվով քանոթրանշան-
ներով , ինչպես որ . Ղեգ-իոնուից 11 նշանով յեզ Կիրիսկուսից
16 նշանով , պահանջում էին յեզ բազմաանշան թվերի բազմապատկում
յեզ բաժանում . գրությունն այն ժամանակվա յեղանակների անկարա-
րության պարծառով ստացվում էին հսկայական հաշիվներ :

Այս էր պարծառը , զոր Տաթևապրիկոսների ծի յերկար շարք զբաղ-
վեց այն խնդրով , թե ինչպես կարելի է բազմապատկումը յեզ
բաժանումը փոխարինել գումարմամբ յեզ հանձամբ : Այս զորոնում-
ներն իրենց արդյունավետը լուծումն ստացան անգլիացի նեպերի
(1550 - 1617) յեզ նրա ժամանակակից շվեյցարացի Բյուրգ-ի Դիժուսից
անկախ կատարած աշխատանքների Դիդոնով , զորոնք գրան հաշվումն-

Կեպլերի՝ այդ խնդրին լեռարկող աշխատությունը լույս տեսավ 1614
թվին „*Mixtilinei logarithmorum canonis descriptio* - Edinburgi.
1614.” Լեռարկությունը: Չնորիից այն հանգամանքին, Վոր հաշվածները
չգալիորեն պարզվում են (ոգարիթմների ^{ներ} ծրարում, Կեպլերի առյու-
սակները, որոնք Բրիգգսի լեռարկումից, Վոր (ոգարիթմները) Կա-
նոնական լեռարկում, 2-3 փարզա լեռարկում լեռարկելուց զգալի
ածքող ճեղքոպայում:

Բյուրգրե իրենց (ոգարիթմների հիմք լեռարկում $(1 + \frac{1}{104})^{10^4}$ թիվը,
Վոր շատ ծոք է բնական (ոգարիթմների ^{ներ} ներկայումս լեռարկում
հիմքին: Երա աշխատանքը, սակայն, յերկար ժամանակ ծառայ առ-
հայտության ծեղ յեղ առանձին աշխատություն լեռարկում ժամանա-
կակիցները լրա:

Ղեկավար (1514 - 1576) գործածության է ծրարում անկանոց յեղ
կաշվում է Երա համար աշխատակներ: Երան են պարկանում Եայթ
Տին 2x-ը յեղ Տին 3x-ը $\sin x$ -ի ծրարում արտահայտող բանաշեղերը:

Բայի դրանից, Ղեկավար Վարդակի առում է, Վոր յեռանկյունա-
չափական յեռությունները կարելի է դիտել Վորպես յեռանկյան կող-
մերի հարաբերություններ, յեղ Վոր, հեղեղապես այդ յեռությունները
կարելի է սրանալ առանց շրջանի որևորյան դիտելու:

Հոլլանդական որոհ. Անելլիուս (1581 - 1626) հնարում է յեռանկյունա-
չափական յեռող յեղ Երա ծրարում չափում է յերկրի ծրարականը:
Անելլիուսին է պարկանում Եայթ բեկման հաշվաղոր որևից $\frac{\sin i}{\sin r} = n$,
Վոր սխալմամբ լեռարկում են Դեկարտին:

1610 թվին Պիտիսկուսը (այս լեռարկում սինուսների, փանգեանների
յից անկանների յեռանկյունաչափական Եր աշխատակներ, Վորոնք
հաշվում են 10"-ից 10" 16 փանգորդանշաններով, իսկ փոքր անկյուն-
ների համար - 26 փանգորդանշաններով: Այս աշխատությունը հաղեց
կը Տա իրենց փայլող Կորող ծարդային համբերություն: Երա ղե
նշանակություն ունի սոփոկան աշխատակների սրուգ. յան համար:

Յեռանկյունաչափության Յեռանկյունաչափությունն որաք բառով
տերմինները կաշվում է Կրիգոնոստերիա, Վոր ծագում
է հունարեն *τρίγωνον* - յեռանկյուն յեղ
μέτρον - չափում է թանկից

Այս անունն առաջին անգամ գործածված է Միքիսկուսի 1595 թվին
 հայտնված «Trigonometria sive de solutione triangulorum tractatus brevis et per-
 spicuus»: «17- հանգանակից սկսած յոթն և յոթ հանգանակից գործածությունը:
 Այսին ժամանակին է վերաբերում secans, tangens, cosecans, eosinus,
 cotangens անունների սկզբնավորությունը: Առաջին յարկուսը ծնունդ
 թույլա քիչ է «geometriae Rotundi» (1583) գրքում գործածվում,
 յերրորդն առաջին անգամ գործածել է Ռեդինուսը («Opus Palatinum»),
 չորրորդը յեւ հինգերորդը՝ Գյուլիսերը («Canon Triangulorum», 1620):
 Ժիրարը 1626 թվին սկսած է բանեցնել sin., tan., sec., կրճատման
 ու, իսկ Oughtred (Լուսթրիդ) 1657-ին գործածում է նախ $\cos$
 յեւ $\cot$ կրճատմանը, վերաբերված զերեւակաւորին հասարակում են
 ծնունդ Ռեդինի հեղինակությանը յառաջով սկսած 1748 թվին:
 «secans» (հարստ) յեւ «tangens» (շաղկապող) անունները բխում են
 այդ ծնունդների գրաքից նշանակությունների:

Բ. Անկյունաչափական ծնունդների պատմություն

Պիտագորասի թեորեմից հետո յերբ կարողացան գիտնականներ
 անցումը յեռանկյունաչափությունից անկյունաչափության: Եւրոպ
 ժամանակ այդ ուղղությամբ արված են առաջին անգամ յայն
 XVII դարում: Արդեն վիեթայի (1540-1603) բաշխարիվ գործերում
 արենուր պատկերացում է իրենից անկյուն ծնունդի. $\sin \theta$ -ի
 յեւ $\cos \theta$ -ի յառաջով շարքի է վերածում $\sin n\theta$: Զուրը 1673 թ.
 Այուստինը գրած շարքերի վերածումը բանաձևեր ուղիղ յեւ հակա-
 դարձ շրջանային ծնունդների համար: Այնուհետև ժան Բերնուլլին
 (1667-1748) այն յիստի արտահայտելիս վեր յեռանկյունաչափական
 ճեմությունները կարող են վերլուծական յիստագրածայն անկյուն վորդնում-
 ների նյութ գաւառաւ, իսկ Մաւրը (1667-1751) ոգրվելով կոմպլեքս
 թվերի պատկերությունից՝ գրած իր անունը կրող նշանավոր թեորեմը.

$$(\sin \theta + i \cos \theta)^n = \sin n\theta + i \cos n\theta.$$

1727 թվին լույս տեսավ Mayer-ի «Arithmetica of Lines» գիրքը,
 զորը բխում է յեռանկյունաչափությունից յեւ ծնունդների յայն
 Լեոնարդ-Ուլերը 1748 թվին հրատարակելի «Introductio in
 analysis infinitorum» հոշակաւոր յերկր, զոր իր առաջին

Տեսնում պարունակում է անկյունաչափական ֆունկցիաների մի նոր
 արեւութուն. այսպէս նրանց բոլոր հատկութիւններն ուսումնա-
 սիրված են զերեւոյթէն, շարժերի միջոցով: Միւրի հանձարեղ
 ծիպիչ գրաւ պերս յեղ զարմանալի հասց անկյունաչափական,
 ցուցնային յեղ լոգարիթմական ֆունկցիաների միջեւ:

Այդ անշնչութիւններն են

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \text{ զորից հետեւում է}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Քերչին համապարտւած, յերեւելունենթ $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha i$,

սինուսի համար քաջիւս է

$$\sin \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

արժեք, այսինքն կ'եղծ անկյուն սինուսը հարող եռանկյուն իրա-
 կան դրական արժեքներ, զորոնք 1-ից մէն են:

Տակագործ շրջանային հանգչիւններ հասցում են լոգարիթմական
 ֆունկցիայի հետ

$$\operatorname{arctg} \theta = \frac{1}{2i} \log \frac{1+i\theta}{1-i\theta} \text{ հաշուարարածք:}$$

Միւրի հետ միասնական լաճարիւր (1728-1778) հիմք է դնում
 կեղծ անկյունների արեւութուն, նրանց համար առյուսակներն է
 հաշվում յեղ 1768 թվին հրատարակում է «Կիպերթուլական յե-
 ու անկյունաչափութիւն» ծիպիւ. զորի մէջ Մասթրի բունայեղն կիրառ-
 ված է երկրորդական ֆունկցիաներին: Լյուդ-րանտ (1736-1813) ըս-
 րելաւում յեղ ընդլայնում է Միւրի մերողները: Լեմանգր (1753-1833)
 իր «Traité des fonctions elliptiques»-ի մեղ ածիտում է յառաւելա-
 մյա զարմանիւնների արդյունքները՝ պերեղծելով զերեւոյթէն մի նոր
 ծիպիւ, զորն հիմնված է անկյունաչափական ֆունկցիաների վրա:

Մահվանից մի քանի շաբաթ առաջ նա հրատարակում է լրացուցիչ
 յերրորդ- հատոր, զորն ընդ-դրկում է Էբելի յեղ յակոբի աշխատան-
 քների ածիտումը եւ իրարիք ֆունկցիաներին զերարեւում: Վերջին
 յերկուսը, գառուսի հետ միասին, գրան նոր ֆունկցիաների կրկնակի
 պարբերականութիւնը՝ իրական յեղ կեղծ, րվին մի շարք ընդհանուր
 թեորեմներ յեղ նշեցին, զոր անկյունաչափական ֆունկցիաները հաշ-
 մում են արանայեղ-եղեր ֆունկցիաների մեծածաւալութիւն հիմքը:
 Նայտագործութիւններ յեղան նայեղ այլ ուղղութիւններ: Էրդեն
 քանիւն Բերլինիւն (1700-1782) երկուսիք միմեք եր հղացեղ քառ-

Վիզուալ : Բրաւուայի բնաբան փորձէ շար ալելի հեռան գնաց :
 Երա „ Դիօսել աստուծոյս de la chaleur ” (1822) գրիւմ զե-
 րեղման է յի նշանակոր քերտեմ, շար վարի ածէն յի քրակաւ
 քուեկիւ կարելի է զերանել այնպիսի շարի, վարի աւադներն
 էն օ-ից յիւնել 25 փափաքիւղ ածելու արեւուները յիւ կար-
 նուները :

Այսպիսով աւելցուելով աւելու քուեկիւների կիրառութեան
 աւադները լայնանում են, յիւ կարելի է անել, զերուծութեան,
 քուեկութեան, մեքենայութեան, աւադը քուեկութեան գրեթե
 բոլոր փեքիւրները կարելի է աւելցուել իւրեքուստի եւի, զորեւ
 զարգացումը, քեռ աշար էլ շարունակում են :

— 47 —

Կերպարանագրութիւնը պարտաւորաբար յանձնարուի իւրաքանչիւր զանգեղանիքի ընդհանուր խնամքով, հետեւեալ յերկրի:

1. H. Weber և Y. Wellstein, Энциклопедия элементарной математики, т. II. перев. под ред. В. Карака. 1910.
2. H. Ferval Éléments de Trigonometrie, 1919.
3. Komblu-Roeder, Trigonometria, 1901
4. И. К. Шмидович, Учебник прямоугольной тригонометрии, 1914
5. Н. А. Шапошников, Курс прямоугольной тригонометрии, 1913
6. А. А. Лалин և М. А. Свариковский. Учебник прямоугольной тригонометрии, 1913.
7. Н. П. Сметов. Прямоугольная тригонометрия, 1911.
8. Н. Рибкин. Учебник прямоугольной тригонометрии и сборник задач, 1916
9. В. Елюков, А. Яковит. Курс тригонометрии, 1908
10. Н. Балабин. Курс тригонометрии, 1910
11. А. Серре. Прямоугольная тригонометрия, пер. 66. Тумор 1885

Այսին հանգիստը կարծի ընդ ծանօց, ևրա զանաւորութիւնը յեղ յերկրային ուղղութիւնը պարզանիւն է զ. Երկրէն, զորի համար յեղ Կերպարանագրութիւնը կրուի է ևրա անունը:

Գործը ծանոթութիւններով և ծանօթեցնելու համար շատ անգամ հարկէ հիշարարութիւններ չենք արել այն հարգածները հեղինակները ծանօն, զորոնք անհաշիւ են հիշուի գործերը յեղ կամ պարզանիւն են խօսքորոնքի գրելն:

Խօսքորոնք:

19 յոնիսիսի 1922

Յերեմիան



ЦЕНА

III
3407