

УДК: 52—337

КОМПТОНИЗАЦИЯ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. II

Ю. Э. ЛЮБАРСКИЙ

Поступила 15 июля 1985

Принята к печати 20 октября 1987

Рассматривается рассеяние излучения на электронах в сверхсильном магнитном поле ($v_g \gg v$). Получены собственные значения и собственные функции оператора переноса. Результаты применяются к решению задачи о комптонизации низкочастотного излучения в горячей плазме.

1. *Введение.* В предыдущей работе [1] было показано, что задача о комптонизации низкочастотного излучения в сверхсильном магнитном поле, $v_g \gg v$, расщепляется на две: задачу о форме спектра и собственно задачу переноса. Было получено аналитическое выражение для спектра, зависящее, как от параметра, от собственного значения λ задачи переноса

$$\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)s(\tau) = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|)s(\tau') d\tau'. \quad (1)$$

Ядро $K(t)$ определяется соотношением (I.18) (здесь и далее цифра 1 означает, что приведен номер формулы в [1]). Займемся решением уравнения (1).

2. *Случай поля, направленного перпендикулярно излучающему слою.* В этом случае имеется единственное выделенное направление — направление магнитного поля, поэтому задача осесимметрична. Ядро (I.18) принимает вид

$$K(t) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{(1 - \mu^2)}{\mu} e^{-\frac{1 - \mu^2}{\mu} t} d\mu. \quad (2)$$

При $t \gg 1$ вклад в интеграл дает только область $1 - \mu \ll 1$. Вводя переменную $y = 1 - \mu$, получим в главном порядке по $1/t$

$$K(t) = 3 \int_0^{\infty} y^2 e^{-2yt} dy = \frac{3}{4t^3}. \quad (3)$$

Как указывалось в [1], диффузионное приближение в данном случае неприменимо, поскольку коэффициент диффузии (или, что то же самое, второй момент ядра (2)) расходится. Поэтому требуется решить непосредственно уравнение (1). При $\tau_0 \rightarrow \infty$ можно найти асимптотику собственных значений и собственных функций по поведению Фурье-образа ядра в нуле [2]. В нашем случае преобразование Фурье ядра (2) дает

$$\tilde{K}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqt} K(|t|) dt = \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{(1-\mu^2)^3 d\mu}{(1-\mu^2)^2 + (q\mu)^2} \rightarrow 1 - \frac{3}{4} q^2 \left(\ln \frac{4}{q} - 2 \right). \quad (4)$$

Отсюда, согласно [2], получаем

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4\tau_0^2} (\ln 4\tau_0 - 2). \quad (5)$$

Критерием применимости формулы (5) служит медленность изменения логарифма в (4) при $q \sim 1/\tau_0$ (т. е. необходимо выполнение условия $\ln \tau_0 \gg 1$). При интересующих нас значениях $\tau_0 \approx 20$ это условие не выполняется, и пользоваться формулой (5) нельзя.

Поскольку решение задачи комптонизации определяется только наименьшим собственным значением уравнения (1) и соответствующей собственной функцией, удобно воспользоваться вариационным методом. Решение уравнения (1) эквивалентно нахождению минимума функционала [3]

$$\begin{aligned} U &= \int_{-\tau_0}^{\tau_0} s^2(\tau) d\tau - \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) s(\tau) s(\tau') d\tau d\tau' = \\ &= \int_{-\tau_0}^{\tau_0} s^2(\tau) \left\{ 1 - \int_{-\tau_0}^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) d\tau' \right\} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) [s(\tau) - s(\tau')]^2 d\tau d\tau' \end{aligned} \quad (6)$$

при условии

$$\int_{-\tau_0}^{\tau_0} s^2 d\tau = 1.$$

Собственное значение $\frac{3}{4}\lambda$ тогда будет множителем Лагранжа задачи на условный экстремум. Для функции в фигурных скобках в (6) получим выражение

$$A(\tau) = 1 - \int_{-\tau_0}^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) d\tau' = 1 - \frac{3}{4} \int_0^1 d\mu \frac{(1-\mu^2)^2}{\mu} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} e^{-\frac{1-\mu^2}{\mu}|\tau-\tau'|} d\tau' = \\ = \frac{3}{4} \int_0^1 (1-\mu^2) \left[e^{-\frac{1-\mu^2}{\mu}(\tau_0+\tau)} + e^{-\frac{1-\mu^2}{\mu}(\tau_0-\tau)} \right] d\mu. \quad (7)$$

При $\tau_0 \pm \tau \gg 1$, т. е. вдали от концов интервала, ее асимптотика равна

$$A(\tau) = \frac{3}{4} \frac{\tau_0^2 + \tau^2}{(\tau_0^2 - \tau^2)^2} \quad (8)$$

Решение будем искать в виде

$$s(\tau) = \sum_{k=0}^N \alpha_k s_k(\tau), \quad (9)$$

где пробные функции имеют вид

$$s_k(\tau) = 1 - (\tau/\tau_0)^{2k}. \quad (10)$$

Вводя обозначения

$$U_{ik} = \int s_i s_k A d\tau + \frac{1}{2} \int K(|\tau - \tau'|) [s_i(\tau) - s_i(\tau')] [s_k(\tau) - s_k(\tau')] d\tau d\tau', \quad (11)$$

$$V_{ik} = \int s_i s_k d\tau = 2\tau_0 \left(1 - \frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2i+2k+1} \right),$$

запишем систему уравнений для коэффициентов α_k , минимизирующих функционал (6), в виде

$$\sum_{k=0}^N \left(U_{ik} - \frac{3}{4} \lambda V_{ik} \right) \alpha_k = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (12)$$

Условие разрешимости системы (12) дает уравнение для λ :

$$\text{Det} \left| U_{ik} - \frac{3}{4} \lambda V_{ik} \right| = 0. \quad (13)$$

Поскольку нас интересует случай $\tau_0 \gg 1$, будем вычислять интегралы в (11) асимптотически в главном порядке по $1/\tau_0$. Для U_{00} имеем

$$U_{00} = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} A(\tau) d\tau = \frac{1}{2} + 0 \left(\frac{1}{\tau_0} \right). \quad (14)$$

Как следует из оценок, приведенных в [1], величина λ , которая имеет смысл вероятности выхода фотона за время $t = (cN_e \sigma_e)^{-1}$, имеет порядок $1/\tau_0^2$. Нетрудно видеть с учетом этого, что все элементы определителя (13), кроме элемента с $i = k = 0$, имеют порядок $1/\tau_0$. Отсюда следует, что если разложить определитель (13) по первой строке, первое слагаемое будет иметь на единицу более низкий порядок по $1/\tau_0$, чем остальные. Поэтому, интересуясь значением λ только в главном порядке по $1/\tau_0$, можно не вычислять элементов первой строки.

Далее мы ограничимся в сумме (9) первыми двумя членами ($N = 1$), поэтому для нахождения λ осталось вычислить только U_{11} :

$$U_{11} = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} [1 - (\tau/\tau_0)^2]^2 A(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) \frac{(\tau^2 - \tau'^2)}{\tau_0^4} d\tau d\tau'. \quad (15)$$

В первом интеграле функция $A(\tau)$ умножается на функцию, квадратично стремящуюся к нулю на концах интервала интегрирования. Это позволяет вместо точного значения $A(\tau)$, даваемого интегралом (7), подставить в (15) асимптотику (8). Во втором интеграле в (15) сделаем замену $u = (\tau + \tau')/\tau_0$, $v = (\tau - \tau')/\tau_0$. Получаем

$$U_{11} = \frac{3}{4\tau_0^2} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} [1 + (\tau/\tau_0)^2] d\tau + \frac{3\tau_0^2}{16} \left\{ \int_{-2}^0 dv v^2 K(\tau_0 |v|) \int_{-2+v}^{2+v} u^2 du + \right. \\ \left. + \int_0^2 dv v^2 K(\tau_0 |v|) \int_{v-2}^{2-v} u^2 du \right\} = \frac{2}{\tau_0} + \frac{\tau_0^2}{4} \int_0^2 v^2 K(\tau_0 v) (8 - 12v + 6v^2 - v^3) dv. \quad (16)$$

Интеграл от $v^m K(\tau_0 v)$ при $m > 2$ элементарно вычисляется, если заметить, что в главном порядке по $1/\tau_0$ можно вместо точного значения $K(\tau_0 v)$ подставить асимптотику (3). При $m = 2$ этого сделать нельзя, нужно использовать точную формулу (12). Меняя порядок интегрирования, получим

$$I = \int_0^2 v^2 K(\tau_0 v) dv = \\ = \frac{2}{\tau_0} \int_0^1 \left\{ \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} - e^{-2\tau_0 \frac{1 - \mu^2}{\mu}} \left[\frac{\mu^2}{1 - \mu^2} + 2\mu\tau_0 + 2(1 - \mu^2)\tau_0^2 \right] \right\} d\mu. \quad (17)$$

Интеграл по μ представляет собой разность двух интегралов, расходящихся при $\mu=1$. Заменяв верхний предел на $1-\varepsilon$, можно вычислить каждый интеграл в отдельности, взять их разность, а затем положить $\varepsilon \rightarrow 0$. Первый интеграл вычисляется элементарно, во втором сделаем замену $y=1-\mu$ и учтем, что при $\tau_0 \gg 1$ основной вклад в него дает область $y \sim \frac{1}{\tau_0} \ll 1$. Получаем

$$I = \frac{2}{\tau_0} \left\{ -1 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-4\tau_0 y} \left[\frac{1}{2y} + 2\tau_0 + 4y\tau_0^2 \right] dy \right\} = \\ = \frac{2}{\tau_0} \left(\ln 8\tau_0 + \gamma - \frac{7}{4} \right). \quad (18)$$

Здесь $\gamma = 0.577 \dots$ — постоянная Эйлера. Она появляется при разложении интегральной экспоненты в (18) по малым ε [4].

Окончательно получаем для собственного значения λ формулу

$$\lambda = \frac{5}{2\tau_0^2} \left(\ln 8\tau_0 + \gamma - \frac{13}{3} \right). \quad (19)$$

При $\ln \tau_0 \gg 1$ она совпадает с асимптотически точным соотношением (5) с точностью до замены коэффициента $5/2 = 2.5$ на $\pi^2/4 = 2.47$. Это свидетельствует о том, что вариационный метод обеспечивает хорошую точность. Поскольку при получении формулы (19) все интегралы вычислялись с точностью до $1/\tau_0$, эта формула применима практически при $\tau_0 > 10$.

3. Угловое распределение и поляризация излучения. В работе [1] было показано, что функция источников фотонов моды 2 $S(\nu, \tau)$ факторизуется

$$S(\nu, \tau) = s(\tau) Z(\nu). \quad (20)$$

Отсюда следует, что и выражение для интенсивности излучения $I = \frac{h\nu^3}{c^2} n$ также факторизуется. Опуская в дальнейшем размерный множитель, запишем интенсивность в виде

$$I(x, \vec{l}, \tau) = J(\vec{l}, \tau) F(x), \quad (21)$$

где $F = x^3 Z$, $x = h\nu/kT$. Угловое распределение J связано с функцией источников $s(\tau)$ обычным соотношением

$$J(\vec{l}, \tau) = \begin{cases} \sin^2 \psi \int_{-\tau_0}^{\tau} e^{-\frac{\sin^2 \psi}{\cos \theta} (\tau - \tau')} s(\tau') \frac{d\tau'}{\cos \theta}, & \cos \theta > 0 \\ -\sin^2 \psi \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-\frac{\sin^2 \psi}{\cos \theta} (\tau' - \tau)} s(\tau') \frac{d\tau'}{\cos \theta}, & \cos \theta < 0. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь, как и прежде, ψ — угол между направлением движения фотона и магнитным полем, θ — угол между направлением движения фотона и нормалью к излучающему слою (рис. 1.1). Если поле направлено по нормали, $\psi = \theta$.

В предыдущем разделе было показано, что в матрице коэффициентов системы (12) только коэффициент с $i=k=0$ имеет порядок $O(1)$, остальные же имеют порядок $O(1/\tau_0)$. Отсюда следует, что $a_0/a_1 \sim 1/\tau_0$. Поэтому можно считать, что в глубине слоя собственная функция совпадает с s_2 :

$$s = 1 - (\tau/\tau_0)^2. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) получаем при $\tau_0 \pm \tau \gg 1$

$$J(\mu, \tau) = (1 - \tau^2/\tau_0^2) \frac{2}{1 - \mu^2} + \frac{2\tau\mu}{(1 - \mu^2)^2} - \frac{2\mu^2}{(1 - \mu^2)^3} - \\ - \left(\tau_0 + \frac{|\mu|}{1 - \mu^2} \right) \frac{|\mu|}{\tau_0^2 (1 - \mu^2)^2} \exp \left[-\frac{1 - \mu^2}{|\mu|} (\tau_0 + \tau \operatorname{sgn} \mu) \right]. \quad (24)$$

Здесь $\mu = \cos \theta$.

Подставляя (23) в (1.28), получим окончательное выражение для спектра излучения моды 1

$$\bar{F}_1(x) = \frac{\tau_0}{3} \left(\frac{x}{x_g} \right)^2 F_2(x). \quad (25)$$

Отметим, что в области $\mu > \frac{3}{4} \left(\frac{\nu}{\nu_g} \right)^2 \tau_0$, где фотоны моды 1 беспрепятственно выходят из слоя, $I_1 \equiv F_1$, поскольку сечение $d\sigma_{21}$ не зависит от направления движения рассеянного фотона.

Для того, чтобы получить угловое распределение выходящего излучения моды 2 $J(\mu, \tau_0)$, необходимо знать поведение функции $s(\tau)$ вблизи границ слоя. В этой области функция $s(\tau)$ меняется на масштабах $(\tau_0 - \tau) \sim 1$, поэтому в рамках вариационного метода необходимую информацию можно получить, только сохранив в ряде (9) $N \gg 1$ членов. Про-

ще непосредственно «исправить» функцию (23) вблизи границ слоя, действуя на нее оператором, стоящим в правой части уравнения (1). Каждая такая « Λ -итерация» [5] улучшает исходную функцию на глубину $\tau \sim 1$. Поскольку в глубине слоя функция (23) является хорошим приближением к решению уравнения (1), уже одна Λ -итерация позволяет получить хорошее приближение для углового распределения излучения [5].

Введем переменную $y = \tau_0 - \tau$. Вблизи границы $\tau = \tau_0$ функция (23) меняется линейно

$$s = 2y/\tau_0. \quad (26)$$

Действуя на (26) оператором (1), получаем в главном порядке по $1/\tau_0$

$$\tilde{s}(y) = 2 \int_0^{\infty} K(|y - y'|) y' dy' = \frac{2y}{\tau_0} + \frac{3}{2\tau_0} \int_0^1 \mu e^{-\frac{1-\mu^2}{\mu} y} d\mu. \quad (27)$$

Видно, что поправка быстро убывает с ростом y , поэтому в глубине слоя функция s совпадает с (23). Учитывая, что такая же поправка возникает и у границы $\tau = -\tau_0$, получим окончательно «улучшенную» функцию источников в виде

$$\tilde{s}(\tau) = 1 - \tau^2/\tau_0^2 + \frac{3}{2\tau_0} \int_0^1 \mu \left(e^{-\frac{1-\mu^2}{\mu}(\tau_0-\tau)} + e^{-\frac{1-\mu^2}{\mu}(\tau_0+\tau)} \right) d\mu. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (22), получим

$$J(\mu, \tau_0) = \frac{2}{\chi\tau_0} - \frac{2}{(\chi\tau_0)^2} + \left[\frac{2}{\chi\tau_0} + \frac{2}{(\chi\tau_0)^2} \right] \exp(-2\chi\tau_0) + \\ + \frac{3\chi}{2\tau_0} \left(\frac{2 + \chi^2}{2\sqrt{4 + \chi^2}} \ln \frac{2 + \chi + \sqrt{4 + \chi^2}}{2 + \chi - \sqrt{4 + \chi^2}} - 1 - \frac{\chi}{2} \ln \chi \right), \quad (29)$$

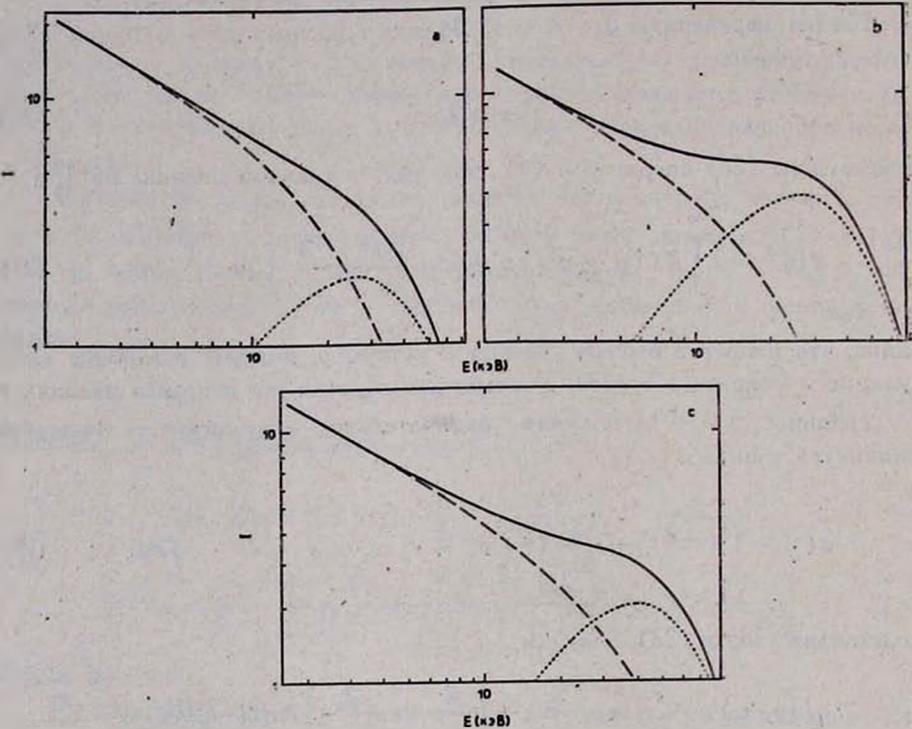
$$\chi = \frac{1 - \mu^2}{\mu}.$$

Сравнение с угловым распределением, полученным после двух Λ -итераций, показывает, что при углах $\theta < 80^\circ$ формула (29) обеспечивает точность 20—30%, и только в направлениях, почти касательных к излучающей поверхности, она занижает результат в 1.5—2 раза.

Полученные результаты иллюстрируются рис. 1, 2, на которых приведены угловое распределение и спектры излучения каждой моды. Видно, что поляризация излучения сильно зависит от угла и частоты и может да-

же менять знак. С помощью (21), (25) получаем для степени поляризации P соотношение

$$P = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{1 - 3(\nu_H/\nu)^2 J(\mu, \tau_0)}{1 + 3(\nu_H/\nu)^2 J(\mu, \tau_0)} \quad (30)$$



1. Спектры излучения плоского слоя с оптической полутолщиной $\tau_0 = 20$. Температура электронов 15 кэВ. Магнитное поле направлено перпендикулярно слою. Штриховая линия — спектр моды 2, пунктирная — мода 1, сплошная — суммарный спектр а) $B = 10^{13}$ Гс, $\theta = 30^\circ$; б) $B = 10^{13}$ Гс, $\theta = 60^\circ$; в) $B = 2 \cdot 10^{13}$ Гс, $\theta = 60^\circ$.

4. Случай поля, направленного параллельно излучающему слою. В этом случае имеется два выделенных направления, поэтому кроме полярного угла θ введем азимутальный угол φ . Ядро (I.18) тогда примет вид

$$K(t) = \frac{3}{16\pi} \int (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^2 e^{-\frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{|\cos \theta|} t} \frac{d \cos \theta d\varphi}{|\cos \theta|} \quad (31)$$

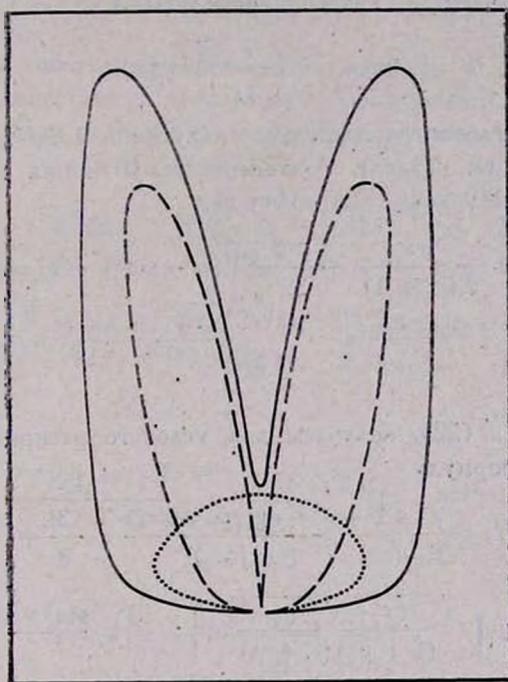
Благодаря тому, что в рассматриваемой геометрии «дырка» в сечении расположена вдоль излучающего слоя, можно пренебречь непосредственно вы-

летающими фотонами и решать задачу в диффузионном приближении. Раскладывая функцию $s(\tau)$ под интегралом в уравнении (1) в ряд Тейлора до второго порядка, получим

$$D \frac{d^2 s}{d\tau^2} = -\lambda s, \quad (32)$$

где

$$D = \frac{2}{3} \int \tau^2 K(|\tau|) d\tau \quad (33)$$



2. Угловое распределение излучения, выходящего из слоя с оптической толщиной $\tau_0 = 20$. Магнитное поле направлено перпендикулярно слою, $v/v_g = 0.15$. Штриховая кривая — мода 2, пунктирная — мода 1, сплошная — суммарное излучение. При углах $\theta > 70^\circ$, где слой непрозрачен относительно фотонов моды 1, угловое распределение показано схематически.

— коэффициент диффузии. Нетрудно показать, что (33) совпадает с обычным определением (I.12). Окончательно получаем

$$D = \frac{1}{2} \quad (34)$$

Решая уравнение (32) с граничными условиями Маршака

$$\left(D \frac{ds}{d\tau} - \frac{1}{2} s \right)_{\tau=\pm\tau_0} = 0, \quad (35)$$

получим

$$\lambda = \frac{\pi^2}{8(\tau_0 + 1)^2}, \quad (36)$$

$$s = \cos \frac{\pi\tau}{2(\tau_0 + 1)}. \quad (37)$$

Отсюда сразу получаем для интенсивности моды 1

$$F_1(x) = \frac{\tau_0}{\pi} \left(\frac{x}{x_g} \right)^2 F_2(x). \quad (38)$$

Чтобы получить угловое распределение излучения моды 2, воспользуемся, как и в предыдущем разделе, Λ -итерациями. Функция источников, «исправленная» вблизи грани слоя, имеет вид

$$s(\tau) = \cos \frac{\pi\tau}{2(\tau_0 + 1)} + \frac{3}{32\tau_0} \int (\mu - \sin^2\varphi - \mu^2 \cos^2\varphi) \times \\ \times \left[e^{-\frac{\sin^2\varphi + \mu^2 \cos^2\varphi}{\mu}(\tau_0 - \tau)} + e^{-\frac{\sin^2\varphi + \mu^2 \cos^2\varphi}{\mu}(\tau_0 + \tau)} \right] d\Omega. \quad (39)$$

Подставляя (39) в (22), получаем для углового распределения выходящего излучения формулу

$$J = \frac{\pi\chi}{2\tau_0} \left\{ \frac{1 + \chi + \exp(-2\chi\tau_0)}{\chi^2 + (\pi/4\tau_0)^2} - \frac{3}{8} + \right. \\ \left. + \frac{3}{4}(2 + \chi) \int_0^1 \mu \sqrt{\frac{\mu}{(1 + \mu\chi)(\chi + \mu)}} d\mu \right\}; \quad \chi = \frac{\sin^2\varphi + \mu \cos^2\varphi}{\mu}. \quad (40)$$

Интеграл в (40) при малых χ стремится к $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{3}\chi \right)$, а при $\chi \rightarrow \infty$ имеет асимптотику $\frac{1}{2\chi} \left[1 - \frac{4}{3\chi} \right]$. Объединяя эти предельные выражения в аппроксимационную формулу $(2\sqrt{1 + 8\chi/3 + \chi^2})^{-1}$, получим соотношение

$$J = \frac{\pi\chi}{2\tau_0} \left\{ \frac{1 + \chi + \exp(-2\chi\tau_0)}{\chi^2 + (\pi/4\tau_0)^2} - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \frac{2 + \chi}{\sqrt{1 + 8\chi/3 + \chi^2}} \right\}, \quad (40')$$

которое с точностью до нескольких процентов совпадает с (40). Видно,

что в рассматриваемом случае диаграмма направленности также вытянута вдоль направления магнитного поля (ему соответствуют малые χ).

5. *Решение задачи с источниками фотонов.* До сих пор мы предполагали, что фотоны генерируются на низких частотах ν_0 и искали решение в области $\nu > \nu_0$. Чтобы получить нормировку этого решения, в правую часть уравнения (1.6) следует добавить член, описывающий источники фотонов (имеются в виду только источники фотонов моды 2, т. к. для моды 1 система прозрачна). Будем считать, что они распределены по объему излучающей области, в соответствии с собственной функцией уравнения

(1.21) $\frac{1}{c\sigma_T N_e} \left(\frac{dn}{dt} \right)_0 = f(x_0) s(\tau)$ (в общем случае следует разложить функцию источников по собственным функциям уравнения (1.21)). В силу линейности задачи достаточно рассмотреть монохроматический источник. Тогда решением задачи является функция Грина уравнения (1.20):

$$G(x, x_0) = \frac{15 m_e c^2}{4 kT} \frac{x \Gamma(\beta - x + 1/2)}{\Gamma(2\beta + 1)} \frac{\exp\left(\frac{x_0 - x}{2}\right)}{x^2} \times$$

$$\times \begin{cases} W_{x, \beta}(2x_0/x) M_{x, \beta}(2x/x), & 0 < x < x_0 \\ M_{x, \beta}(2x_0/x) W_{x, \beta}(2x/x), & x > x_0 \end{cases} \quad (41)$$

Здесь

$$M_{x, \beta}(x) = \frac{2^{-2\beta} \Gamma(2\beta + 1) x^{\beta+1/2}}{\Gamma(\beta - x + 1/2) \Gamma(\beta + x + 1/2)} \int_{-1}^1 e^{1/2xt} (1-t)^{\beta+x-1/2} (1+t)^{\beta-x-1/2} dt, \quad (42)$$

$$x = 2 \left[1 + \frac{15 m_e c^2 kT}{2 (h\nu_g)^2} \right]^{-1/2}, \quad (43)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{15 m_e c^2}{2 kT} \lambda}. \quad (44)$$

При произвольном спектре источников комптонизация установит спектр

$$F_2(x) = x^3 \int_0^\infty G(x, x_0) f(x_0) dx_0. \quad (45)$$

Полная энергия излучения моды 2, выходящего за время $t = (c\sigma_T N_e)^{-1}$ с единицы поверхности слоя, дается соотношением

$$L_2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) d\tau = \frac{4\pi(kT)^4}{(hc)^3 \sigma_T N_e} \int_0^{\infty} F_2(x) dx. \quad (46)$$

Множитель $\lambda \int s(\tau) d\tau$ возник потому, что, как нетрудно усмотреть из уравнения (I.21), λ имеет смысл вероятности ухода фотона из системы, и, следовательно, полное число выходящих фотонов равно $\lambda \int s d\tau$.

Если монохроматический источник фотонов находится на малой частоте $x_0 \ll 1$, можно получить аналитическую связь между мощностью источника L_0 и светимостью слоя L . Для этого заметим, что в наиболее интересном случае, когда спектральный индекс на низких частотах $\alpha < 1$, основная энергия в спектре приходится на область частот $x \sim 1$, в которой спектр описывается верхней формулой в (41). Область $x < x_0$, в которой спектр имеет другой вид, дает в светимость пренебрежимо малый вклад, поэтому в формулу (46) можно подставить только верхнее выражение из (41). Тогда интеграл выражается через гипергеометрическую функцию $F(a, b; c; z)$ [4]:

$$\frac{L_2}{L_0} = \frac{2^{3\beta-3.5} \pi (4\beta^2 - 1) (4\beta^2 - 9)^2}{x^{\beta-2.5} (2+x)^{\beta+2.5} \cos \pi\beta} \frac{\Gamma(\beta-x+0.5)}{\Gamma(2\beta+1)\Gamma(3-x)} \times \\ \times x_0^{\beta-2.5} F\left(\beta+2.5, \beta-x+0.5; 3-x; \frac{x-2}{x+2}\right). \quad (47)$$

С помощью соотношения (I.28) нетрудно точно так же получить выражение для мощности излучения моды 1:

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{2^{2\beta-3.5} \pi (4\beta^2 - 1) (4\beta^2 - 9) (4\beta^2 - 25) (4\beta^2 - 49)}{x^{\beta-4.5} (2+x)^{\beta+4.5} \cos \pi\beta} \times \\ \frac{\Gamma(\beta-x+0.5)}{\Gamma(2\beta+1)\Gamma(5-x)} x_0^{\beta-2.5} F\left(\beta+4.5, \beta-x+0.5; 5-x; \frac{x-2}{x+2}\right). \quad (48)$$

6. **Заключение.** Мы рассмотрели задачу о влиянии комптонизации на спектр излучения плазмы при $v \ll v_g$ в условиях преобладания поляризации вакуума. В рассматриваемой ситуации индуцированными процессами, как правило, можно пренебречь, поэтому задача линейна и достаточно найти функцию Грина — спектр излучения при монохроматическом источнике фотонов. В свою очередь функция Грина определяется решением однородной задачи. В случае, когда среда прозрачна относительно фотонов моды 1 (условие 1.5), необходимо решать только уравнение переноса фотонов моды 2. Оно сводится к уравнению (I.17) относительно усредненной

по углам функции распределения фотонов (I.14). Частотные и пространственные переменные в этом уравнении разделяются.

Частотный спектр описывается уравнением Уиттекера (I.20), из линейно независимых решений которого стандартным образом конструируется функция Грина (41), (43), (44). Она определяется температурой среды T , гирочастотой ν_g и оптической толщиной τ_0 . Зависимость от последнего параметра содержится в собственном значении λ задачи переноса (I.21). Эта величина для случаев, когда магнитное поле перпендикулярно и параллельно излучающему слою, дается соответственно формулами (19) и (36). При произвольном спектре источников фотонов спектр выходящего излучения дается формулой (45). Зная спектр излучения моды 2, легко получить спектр излучения моды 1, возникающего за счет рассеяния $2 \rightarrow 1$. Он дается соотношением (25).

Угловое распределение выходящего излучения (каждой моды) не зависит от частоты, поскольку переменные в задаче разделяются $I_i(\nu, \vec{l}) = J_i(\vec{l}) F_i(\nu)$. Угловое распределение излучения моды 1 изотропно, $I_1(\nu, \vec{l}) = F_1(\nu)$, поскольку среда предполагается прозрачной для этого излучения. Диаграмма направленности излучения моды 2 дается формулами (29) и (40') соответственно для двух рассмотренных направлений магнитного поля. В обоих случаях диаграмма оказывается вытянутой вдоль направления поля. Как видно из примеров спектров излучения, приведенных на рис. 1, вид суммарного спектра зависит от угла только потому, что меняется относительная интенсивность каждой моды (рис. 2), хотя спектр каждой моды остается неизменным. Роль моды 1 возрастает с возрастанием частоты и с увеличением угла между магнитным полем и направлением наблюдения.

Институт космических исследований
АН СССР

COMPTONIZATION IN THE SUPERSTRONG MAGNETIC FIELD. II

YU. E. LYUBARSKY

The scattering of radiation on electrons in the superstrong magnetic field ($\nu_g \gg \nu$) is considered. Eigenfunctions and eigenvalues of operator of radiation transfer are obtained. The results are applied to solution of the problem of comptonization of soft photons in the hot plasma.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Э. Любарский, *Астрофизика*, 28, 183, 1988.
2. H. Widom, *Trans. Am. Math. Soc.*, 106, 391, 1963.
3. T. Holstein, *Phys. Rev.*, 83, 1159, 1951.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Наука, М., 1971.
5. Д. Михалас, *Звездные атмосферы*, Наука, М., 1982.