531.1
Հ-17

4573

Հակոբյան, Ա.

...ական մեթոդական.
...ատրիկա. 17բ.

ՅՕՀՀ

531
Հ-17

ՊՐՈՖ. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Հ ՍՏՈՒԳՎԱԾ Է 1961 Թ.

ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ

Ի Մ Ա Ս

Ս Տ Ա Տ Ի Կ Ա

4623
III
950



ՀԱՅ ՊԵՏՀՐԱՏ

ԵՐԵՎԱՆ 1941

Проф. А. АКОПЯН

Теоретическая механика

Часть I. СТАТИКА

(На армянском языке)

Армгиз, Ереван, 1941

Ի ԲԱԺԻՆ

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՀԱՇՎԱՀԱՇԻՎ

ԳԼՈՒԽ I

ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ, ՀԱՆՈՒՄԸ, ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ

§ 1. Սկալար եվ վեկտորական մեծություններ *Ֆիզիկական մեծությունները կարելի է տարրաբաժանել երկու խմբերի։*

Առաջին խմբին պատկանող մեծությունները լիովին որոշվում են իրենց թվական արժեքով, ինչպես, օրինակ՝ ծավալը, մասսան (որոնց թվական արժեքները կարող են լինել միայն դրական), ջերմաստիճանը, պոտենցիալը (որոնց թվական արժեքները կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես և բացասական)։

Վերցնելով մի որևէ AB առանցք, մենք կարող ենք տվյալ ֆիզիկական մեծության դրական արժեքները պատկերել այդ առանցքի հատվածներով՝ վերջիններս վերցնելով մի ուղղությամբ, նույն մեծության բացասական արժեքներն այդ դեպքում կպատկերանան AB առանցքի այնպիսի հատվածներով, որոնք վերցված են հակառակ ուղղությամբ։ Օրինակի համար, եթե ջերմաչափի մեջ անդիկի սյան ծայրը բարձր է այն գծից, որի մոտ նշանակված է 0 թվանշանը, ջերմաստիճանը դրական է, իսկ եթե անդիկի սյան ծայրը ցածր է այդ գծից, ջերմաստիճանը բացասական է։

Երկրորդ խմբին պատկանող մեծությունները, բացի թվական արժեքից, ունեն նաև մի որոշ ուղղություն։ Այդպես են, օրինակ, հեռավորությունը, ուժը, արագությունը։ Այս մեծությունները, ընդհանրապես չի կարելի պատկերել միևնույն անփոփոխ առանցքին պատկանող հատվածներով։ Այսպես, օրինակ, ոչ այն քամու արագությունը, որ փչում է հարավից դեպի արևելք, ոչ էլ այն քամունը, որ փչում է հարավից դեպի արևմուտք, չի կարելի պատկերել մի այնպիսի առանցքի հատվածներով, որ ուղղված է հյուսիսից դեպի հարավ։

Առաջին դեպքում հատվածը պետք է ուղղված լինի հարավից դեպի արևելք, իսկ երկրորդ դեպքում՝ հարավից դեպի արևմուտք։

Այն հատվածը, որ ունի որոշ մեծություն (չափ) և որոշ ուղղություն տարածության մեջ, կոչվում է վեկտոր։ Ակնհայտ է, որ երկրորդ խմբին պատկանող ամեն մի ֆիզիկական մեծություն կարելի է պատկերել վեկտորով։ Դրա համար վեկտորը պետք է այնպես ընտրել, որ ֆիզիկական մեծության և այդ վեկտորի չափերը հավասար լինեն, իսկ ֆիզիկական մեծության և վեկտորի ուղղությունները՝ միատեսակ։

Այս պատճառով երկրորդ կարգի ֆիզիկական մեծությունները կոչվում են վեկտորական մեծություններ կամ, ավելի կարճ, վեկտորներ։

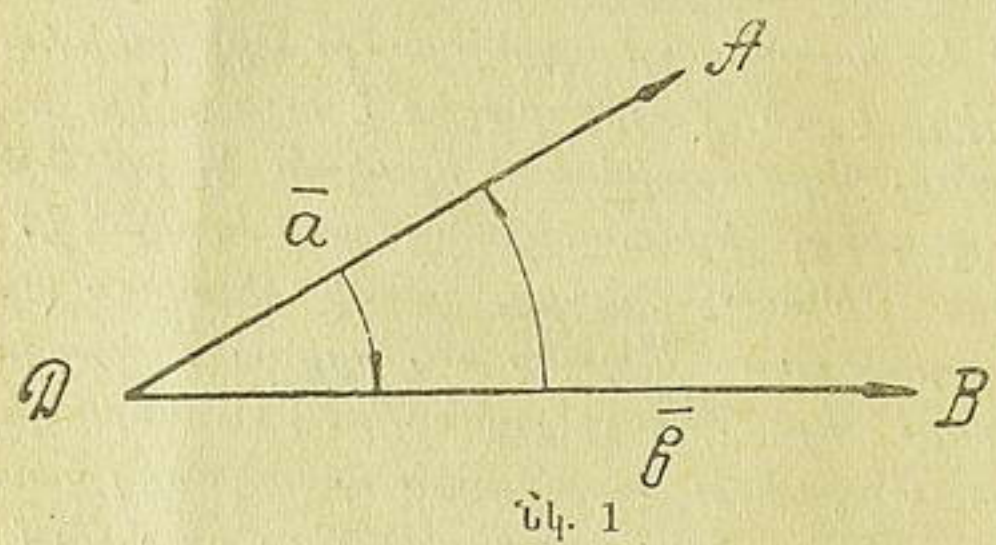
Իսկ առաջին խմբին պատկանող ֆիզիկական մեծությունները կոչվում են սկալար մեծություններ կամ, կրճատ՝ սկալարներ:

§ 2. Վեկտորների նշանակումը: *Անվերջ ուղղի դիրքը լիովին որոշվում է երկու կետով, որոնցով անցնում է այդ ուղիղը: AB հատվածի դիրքն ու չափը կատարելապես որոշվում է նրա A և B ծայրակետերով: Բայց, եթե տրված են վեկտորի C և D ծայրակետերը, վեկտորը դեռ լիովին որոշված չէ. անհրաժեշտ է նաև յնպես մատնանշել, թե որ կետից դեպի որ կետն է ուղղված այդ վեկտորը: Եթե վեկտորն ուղղված է C կետից դեպի D կետը, ապա C-ն կոչվում է վեկտորի սկիզբը, իսկ D-ն՝ վեկտորի վերջը:*

Վեկտորը նշանակվում է կամ երկու տառով և կամ մի տառով, ընդ որում վեկտոր նշանակող այդ տառերի վրա դրվում է փոքրիկ սլաք, ինչպես՝ $\vec{CD}$, $\vec{r}$, $\vec{a}$: Վեկտորը երկու տառով նշանակելու դեպքում՝ առաջին տառը ցույց է տալիս վեկտորի սկիզբը, իսկ երկրորդը՝ վեկտորի վերջը Գրի պարզության նպատակով սլաքները մենք կփոխարինենք գծիկներով, ինչպես՝ $\overline{CD}$, $\overline{r}$, $\overline{a}$:

Վեկտորի չափը մենք նշանակելու ենք միևնույն տառերով, բայց առանց գծիկների, ընդ որում երբեմն այդ տառերը դնելու ենք զուգահեռ գծիկների միջև. օրինակ՝ CD, $|CD|$, r, $|r|$ հանդիսանում են $\overline{CD}$ և $\bar{r}$ վեկտորների չափերը (տես. § 8):

§ 3. Վեկտորների ուղղությունը եվ իմաստը: *Վերցնենք երկու վեկտորներ՝ $\overline{a}=\overline{DA}$ և $\overline{b}=\overline{DB}$, որոնք ունեն մի ընդհանուր սկիզբ (նկ. 1): Այդ երկու վեկտորներով կազմված ամենափոքր անկյունը կարելի է վերցնել կամ $\overline{DA}$-ից դեպի $\overline{DB}$ և կամ $\overline{DB}$-ից դեպի DA: Այսպիսով առանում ենք երկու անկյուն:*



նկ. 1

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \angle ADB,$$

որ նկարի վրա վերցված է ըստ ժամացույցի սլաքի, և

$$(\overline{b}, \overline{a}) = \angle BDA,$$

ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ:

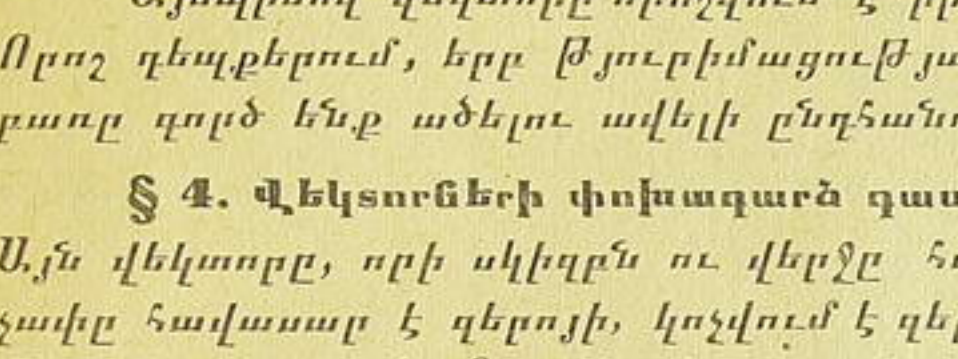
Այս երկու անկյունները տարբեր նշան ունեն, նրանց գումարը՝

$$(\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{b}, \overline{a}) = 0$$

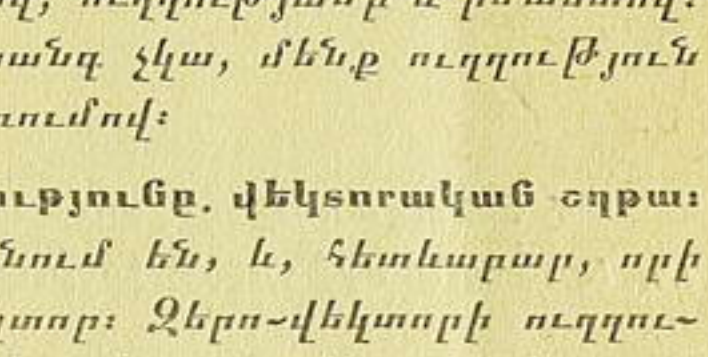
Երբ $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$ կամ $(\overline{a}, \overline{b}) = \pi$, $\overline{a}$ և $\overline{b}$ վեկտորներն իրար զուգահեռ են՝ $\overline{a} \parallel \overline{b}$: Եթե $(\overline{a}, \overline{b})$ անկյունը հավասար է զերոյի (նկ. 2), և մենք կամենում ենք նշել այդ հանգամանքը, ապա $\overline{a}$ և $\overline{b}$ վեկտորները կոչում ենք համազուգահեռ: Իսկ եթե $(\overline{a}, \overline{b}) = \pi$ (նկ. 3), ապա ցանկանալով նշել այդ հանգամանքը, մենք $\overline{a}$ և $\overline{b}$ վեկտորները կոչում ենք հակազուգահեռ:

Պայմանավորվենք համազոյահեռականության և հակազոյահեռականության համապատասխանաբար նշանակել այսպես (նկ. 2 և 3).

$$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b},\quad \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$$



Նկ. 2.



Նկ. 3.

Հաճախ նպատակահարմար է լինում «ուղղություն» գաղափարը բաժանել երկու գաղափարների. ուղղություն (այդ բառն նեղ առումով) և իմաստ:

Միևնույն անվերջ ուղղին զուգահեռ վեկտորներն ունեն միևնույն ուղղությունը (այդ բառի նեղ առումով):

Միատեսակ իմաստ ունեն այն վեկտորները, որոնք իրար համազոյահեռ են:

Իսկ հակազոյահեռ վեկտորներն ունեն միատեսակ ուղղություն, բայց տարբեր իմաստ:

Այսպիսով վեկտորը որոշվում է իր չափով, ուղղությամբ և իմաստով: Որոշ դեպքերում, երբ թյուրիմացության վտանգ չկա, մենք ուղղություն բառը գործ ենք ածելու ավելի ընդհանուր առումով:

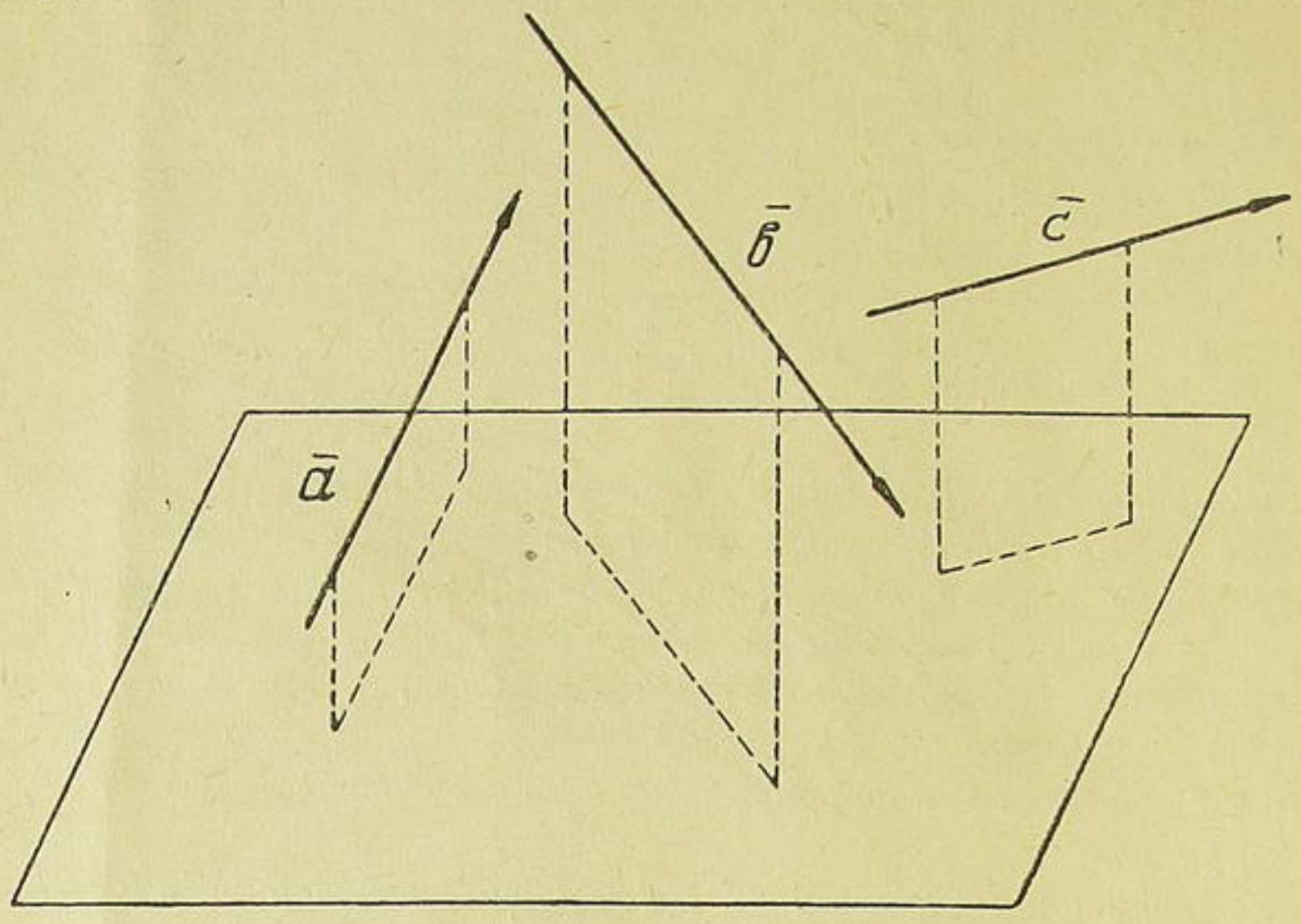
§ 4. Վեկտորների փոխադարձ դասավորությունը. վեկտորական շղթա: *Այն վեկտորը, որի սկիզբն ու վերջը համընկնում են, և, հետևաբար, որի չափը հավասար է զերոյի, կոչվում է զերո-վեկտոր: Զերո-վեկտորի ուղղությունն անորոշ է: Օգտվելով այս հանգամանքից՝ ըստ մեր հայեցողության՝ զերո-վեկտորին մենք կարող ենք վերագրել այս կամ այն ուղղությունը: Եվ հակադարձաբար, երբ վեկտորի ուղղությունն անորոշ է դառնում, նրա չափը դառնում է հավասար զերոյի:*

2°. Միավոր վեկտոր կոչվում են այն վեկտորները, որոնց չափը հավասար է մեկ միավորի: Միավոր վեկտորը մենք նշանակելու ենք մեկ տառով, նրա վրա դնելով փոքրիկ գլխանիշ, ինչպես $\hat{a}$, $\hat{b}$, ընդ որում՝

$$|\hat{a}| = 1,\quad |\hat{b}| = 1$$

3°. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$... վեկտորները, որոնք զուգահեռ են միևնույն հարթությանը, կոչվում են կոպլանար վեկտորներ (նկ. 4): Եթե կոպլանար վեկտորները տեղափոխենք իրենք իրենց զուգահեռ այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրը հատվի ճնացած վեկտորներից մեկն ու մեկի հետ, ապա այդ կերպ տեղափոխված բոլոր վեկտորները կդասավորվեն միևնույն հարթության վրա: Ակներև է, որ երկու ցանկացած վեկտորներ միշտ կոպլանար են: Երեք և ավելի թվով վեկտորներ կարող են կոպլանար լինել կամ լինել:

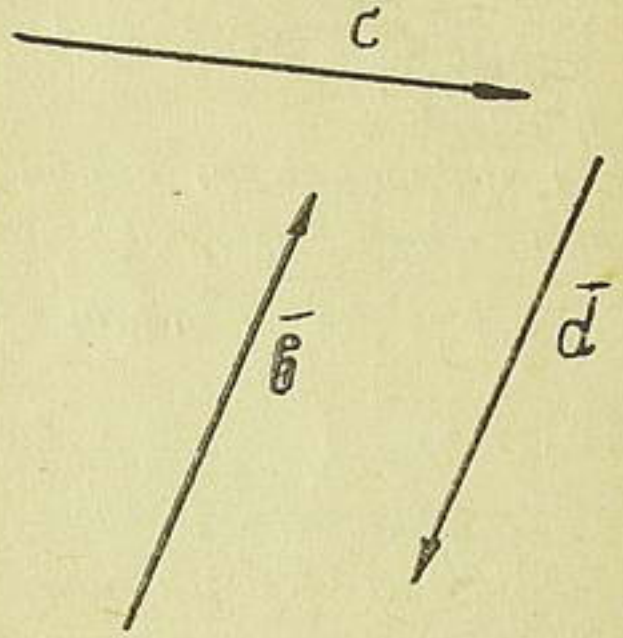
Զուգահեռ վեկտորները կոչվում են նաև կոլինեար վեկտորներ: Այսպիսի վեկտորները զուգահեռ տեղափոխությամբ կարելի է դասավորել մի ուղիղ գծի երկայնությամբ:



Նկ. 4

4°. Հավասար կոչվում են այն վեկտորները, որոնք համազուգահեռ են և ունեն միևնույն չափը. այնպես որ, եթե

$\bar{a} = \bar{b}$, *ապա* $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ *և* $a = b$

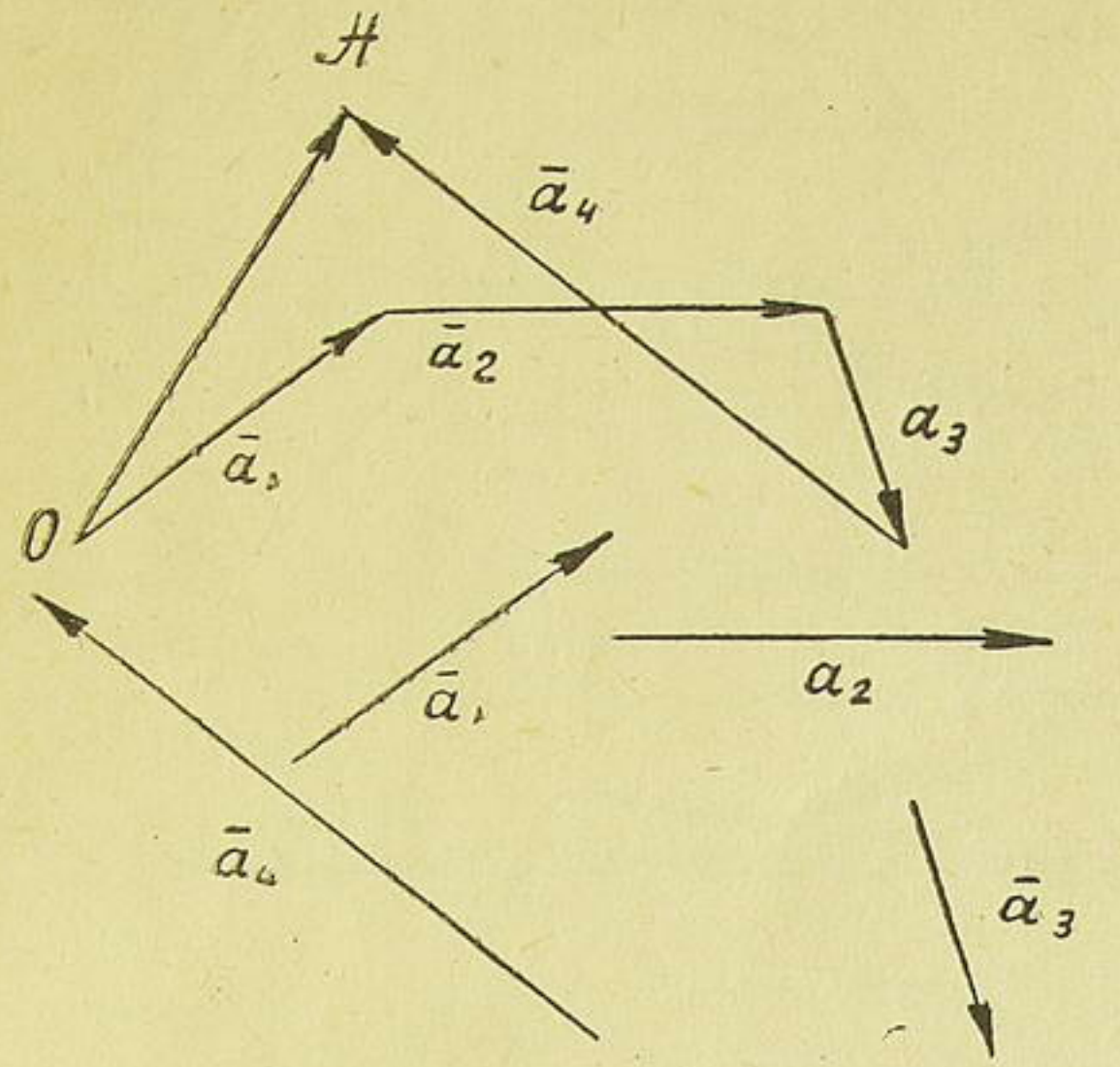


Նկ. 5

5-րդ նկարում պատկերված են չորս վեկտորներ՝ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *և* $\bar{d}$, *որոնք ունեն միևնույն չափը՝* $a=b=c=d$: *Այդ վեկտորներից միայն* $\bar{a}$*-ն և* $\bar{b}$*-ն են իրար հավասար.* $\bar{c}$*-ն հավասար չէ* $\bar{a}$*-ին, որովհետև նրանք իրար զուգահեռ չեն, իսկ* $\bar{d}$*-ն հավասար չէ* $\bar{a}$*-ին, որովհետև նրանք հակազուգահեռ են:*

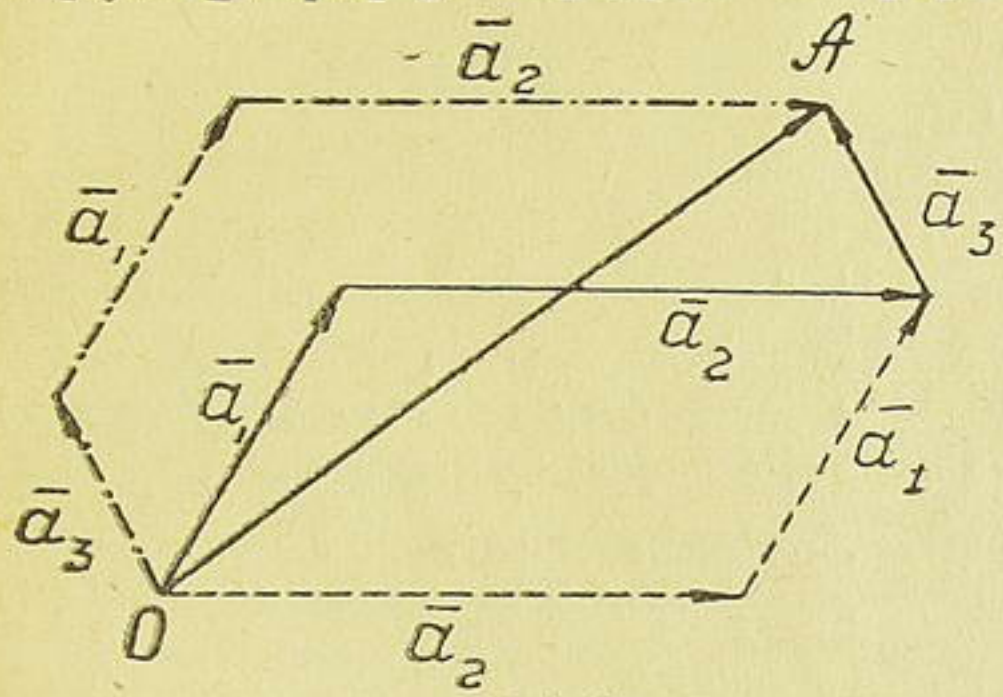
5°. Ասում են, թե $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ *վեկտորները շղթայաձև են դասավորված կամ շղթա են կազմում, եթե (նկ. 6) այդ վեկտորները տեղափոխված են իրենք իրենց զուգահեռ այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրի սկիզբը համատեղվել է միացած վեկտորներից մեկին ու մեկի վերջի հետ: Շղթայի սկիզբն ու վերջը համապատասխանաբար նշանակենք O և A տառերով:* $\overline{OA}$ *վեկտորը կոչվում է շղթան փակող վեկտոր:*

Եթե տրված են երեք վեկտորներ՝ $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, *ապա նրանցից կարելի է կազմել վեց վեկտորական շղթաներ.* $\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3$, $\bar{a}_1\,\bar{a}_3\,\bar{a}_2$, $\bar{a}_2\,\bar{a}_3\,\bar{a}_1$, $\bar{a}_2\,\bar{a}_1\,\bar{a}_3$,



Նկ. 6

$\bar{a}_3\,\bar{a}_1\,\bar{a}_2$, $\bar{a}_3\,\bar{a}_2\,\bar{a}_1$ (նկ. 7)։ *Իսկ ընդհանրապես, փոփոխելով այն հաջորդականությունը, որով դասավորված են վեկտորները, կարելի է* n *վեկտորներից կազմել* $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$ *շղթաներ։*



Նկ. 7

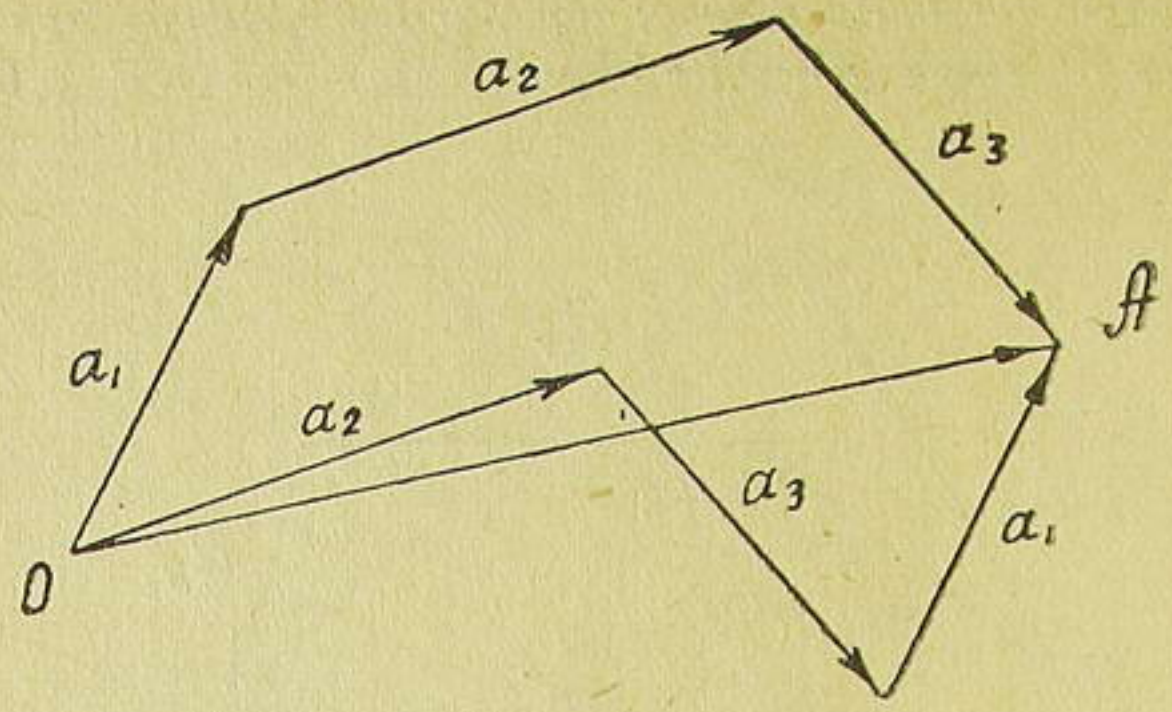
Դժվար չէ համոզվել այն բանում, որ տվյալ վեկտորներից կազմված դանազան վեկտորական շղթաներն՝

ա) ունեն միևնույն վախող վեկտորը, եթե շղթաները կառուցված են մի ընդհանուր սկզբից (նկ.8).

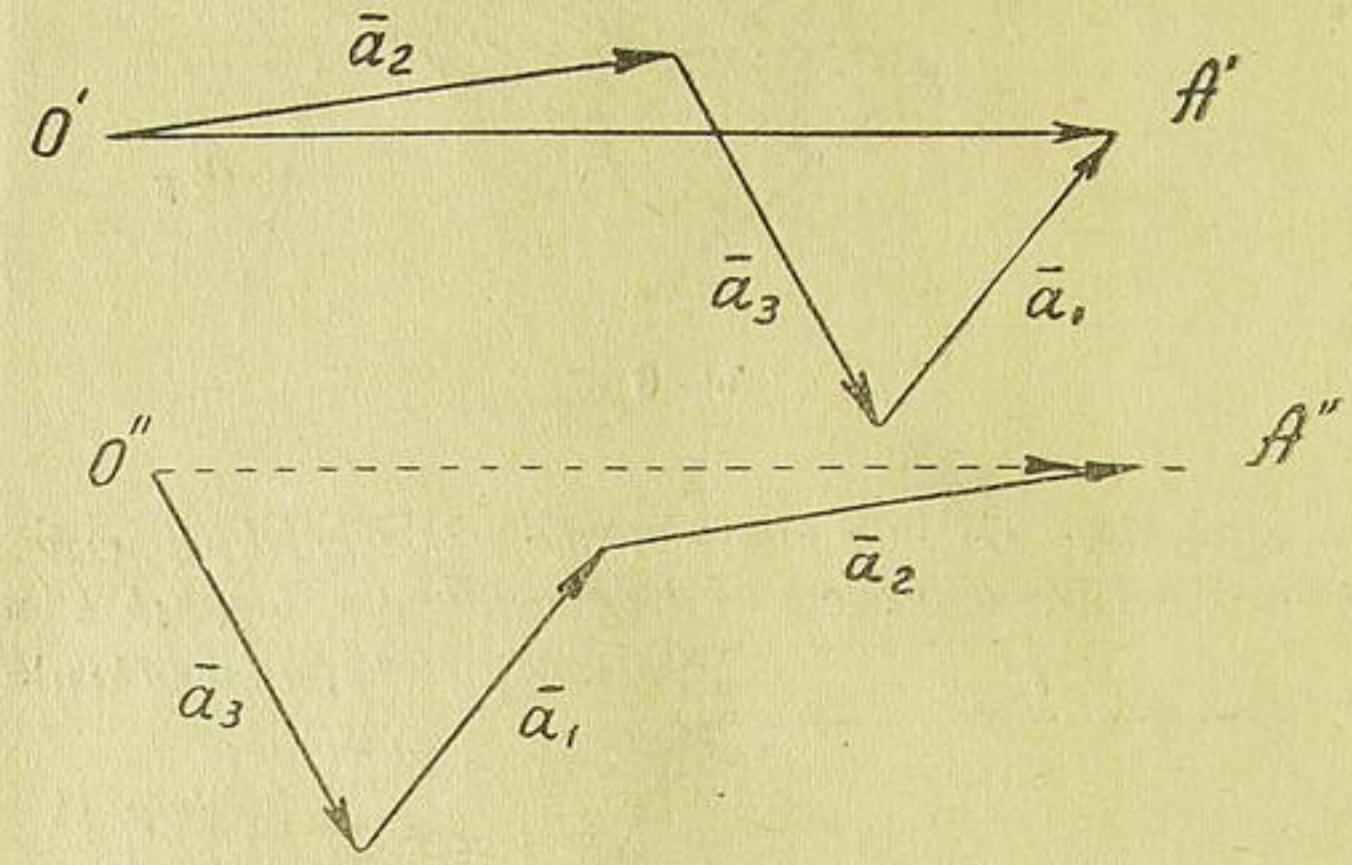
բ) ունեն հավասար վախող վեկտորներ, եթե շղթաներն սկսվում են տարբեր կետերից. օրինակ (նկ. 9)։

$$\overline{OA}=\overline{O'A'}=\overline{O''A''}$$

Երբ վեկտորները զուգահեռ են (համազուգահեռ կամ հակազուգահեռ) նրանց շղթաները և վախող վեկտորները դասավորվում են միևնույն ուղիղ գծի վրա (նկ. 10)։



Նկ. 8



Նկ. 9

§ 5. Վեկտորների գումարումը: 1°. $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, ... $\bar{a}_n$ *վեկտորների գումար կոչվում է այդ վեկտորների շղթան փակող* $\bar{a}$ *վեկտորը.*

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n = \sum \bar{a}_s;$$

Ակնհայտ է, որ ընդհանուր դեպքում

$$a \angle a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

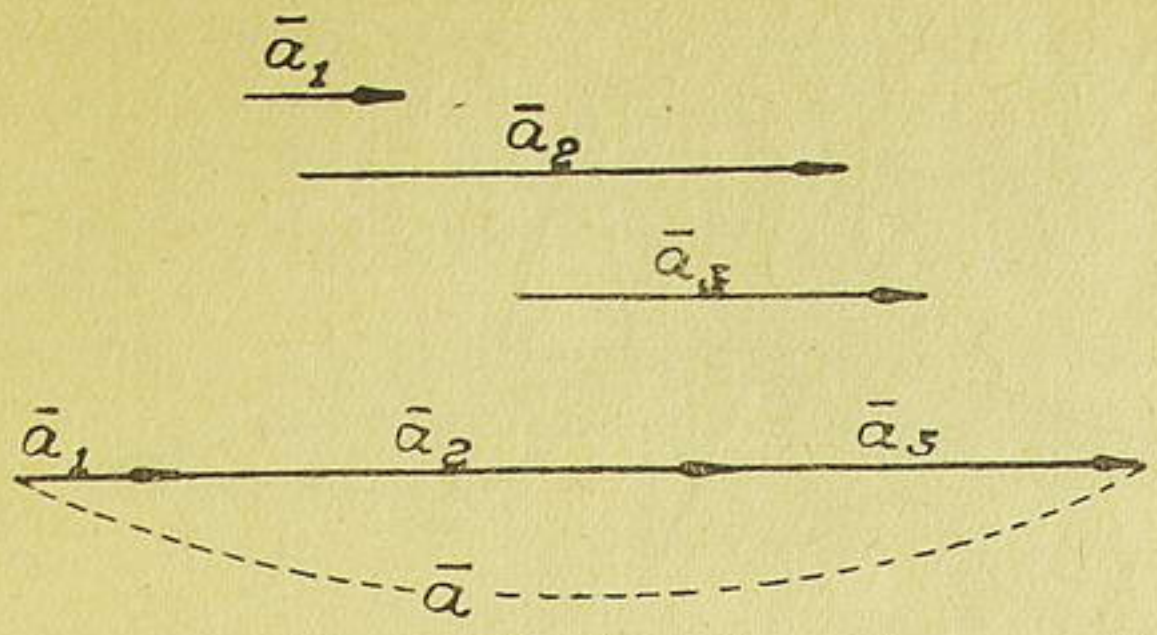
այսինքն գումարի չափը փոքր է գումարվող վեկտորների չափերի գումարից:

Միայն այն դեպքում կունենանք

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

եթե գումարվող բոլոր վեկտորներն համաուղղահեռ են իրար, օրինակ՝ 10-րդ նկարում

$$a = a_1 + a_2 + a_3;$$



Նկ. 10

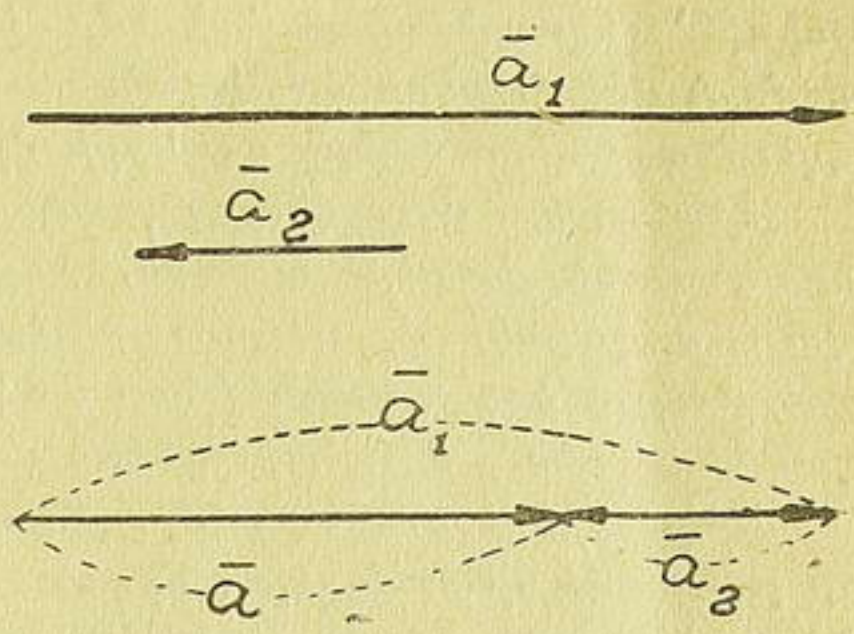
Վերջին դեպքում, երբ գումարվող վեկտորներն համազուգահեռ են, վեկտորների գումարը վեր է ածվում այն հատվածների թվաբանականգումարմանը, որոնք ներկայացնում են գումարվող վեկտորների չափերը։

Ինչպես հայտնի է նաև երկու հակազուգահեռ վեկտորների՝ $\bar{a}_1$-ի և $\bar{a}_2$-ի գումարումը (նկ. 11).

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2,$$

ընդ որում $\bar{a}$ գումարը համազուգահեռ է երկու վեկտորներից նրան, որի չափն ավելի մեծ է.

$$a = |a_1 - a_2|,$$



Նկ. 11

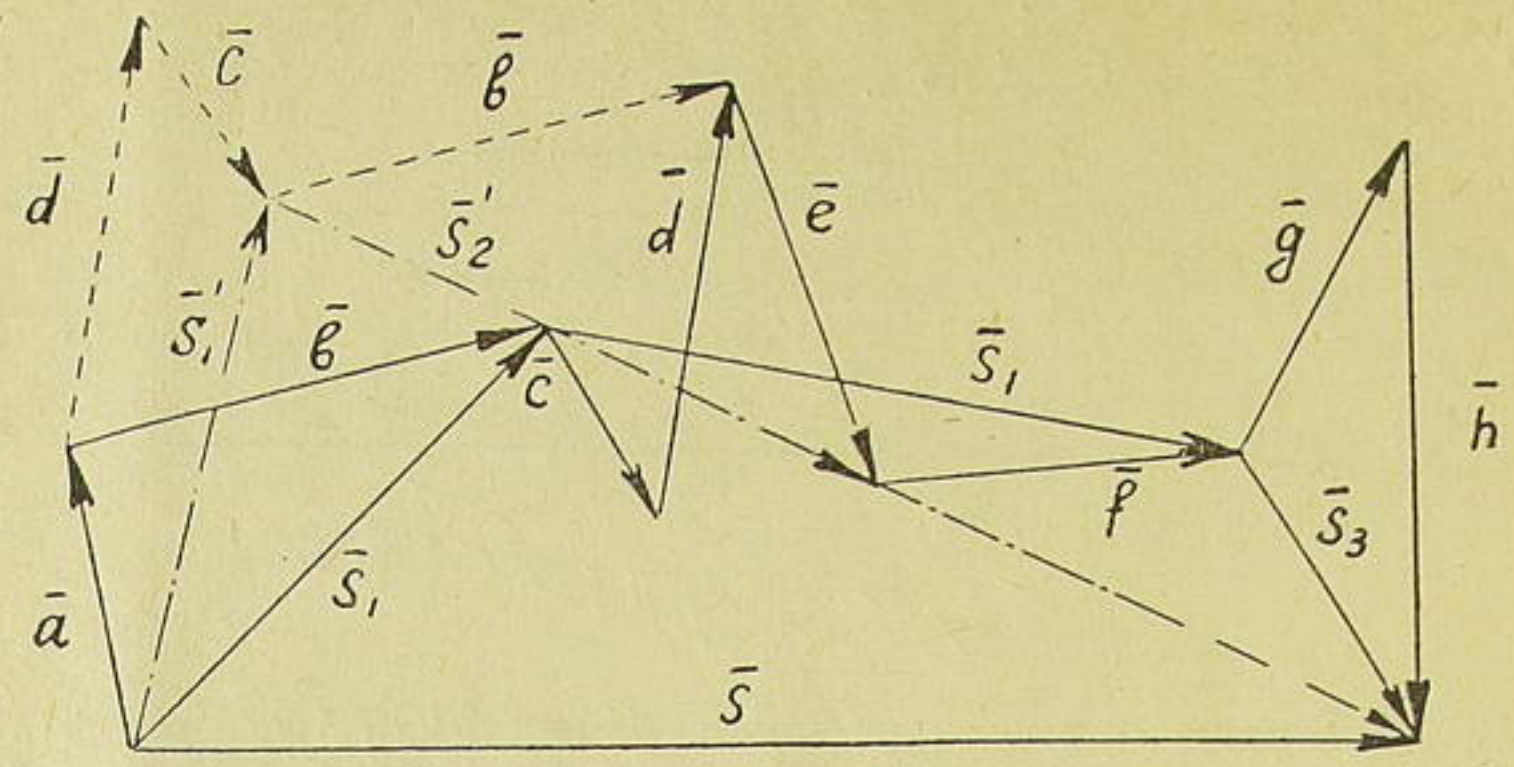
այսինքն՝ գումարի չափը հավասար է գումարվող վեկտորների չափերի տարբերությանը։ Հետևաբար, այս դեպքում վեկտորական գումարը վեր է ածվում թվաբանական հանման կամ հանրահաշվական գումարման գործողությանը։

2°. Արդեն ասվեց (§ 4), որ վեկտորների հաջորդականությունը փոփոխելով, n վեկտորներից կարելի է ստանալ n! վեկտորական շղթաներ։ Եվ եթե այդ շղթաներն սկիզբ են առնում միևնույն կետից, ապա նրանք ունեն միևնույն վախող վեկտորը. իսկ եթե սկսվում են տարբեր կետերից, ապա նրանց վախող վեկտորները հավասար են իրար։

Սրանից պետք է եզրակացնել, որ «վեկտորների գումարը կախում չունի գումարելիների կարգից» (տեղափոխական հատկություն)։

3°. Թող $\bar{S}$-ը լինի $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$, $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ վեկտորների գումարը (նկ. 12)։ Մենք կարող ենք այդ վեկտորներից կազմել զանազան խմբեր. օրինակ՝ $\bar{a}$, $\bar{b}$; $\bar{c}$, $\bar{d}$, $\bar{e}$, $\bar{f}$; $\bar{g}$, $\bar{h}$։ Նշանակենք՝ համապատասխանաբար՝ $\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}+\bar{f}$ և $\bar{g}+\bar{h}$ գումարները $\bar{S}_1$-ով, $\bar{S}_2$-ով և $\bar{S}_3$-ով։ Այդ նույն վեկտորները բաժանենք այս անգամ ուրիշ խմբերի, օրինակ՝ $\bar{a}$, $\bar{d}$, $\bar{c}$; $\bar{b}$, $\bar{e}$; $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ և $\bar{a}+\bar{d}+\bar{c}$, $\bar{b}+\bar{e}$, $\bar{f}+\bar{g}+\bar{h}$ գումարները նշանակենք համապատասխանաբար $\bar{S}_1'$, $\bar{S}_2'$, $\bar{S}_3'$։ Ակնհայտ է, որ

$$\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = \bar{S}_1' + \bar{S}_2' + \bar{S}_3' = \bar{S},$$



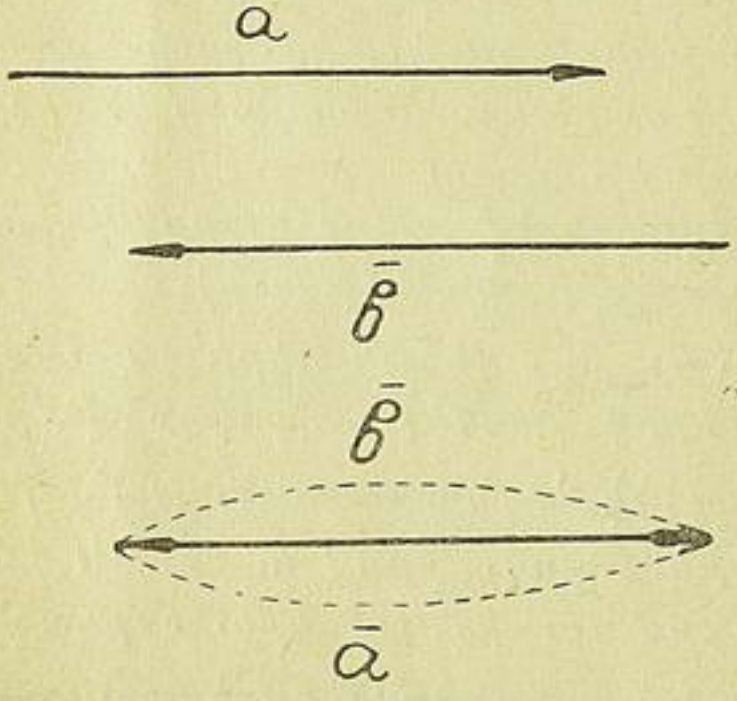
Նկ. 12

այսինքն՝ վեկտորների բաժանումը խմբերի, այդ խմբերի թիվը, նրանց կազմը և վեկտորների հաջորդականությունը նրանց մեջ, ամենևին չեն ազդում այդ վեկտորների գումարի վրա (զուգորդական հատկություն)։

Հետևաբար, վեկտորները գումարելիս կարելի է գումարվող վեկտորները բաժանել խմբերի այնպես, ինչպես մեզ այդ նպատակահարմար է թվում, ոչնչացնել գոյություն ունեցող խմբերը, մի խոսքով ոչնչացնել եղած փակագծերը և մտցնել նոր փակագծեր (այս հատկության կիրառությունները տես § 9 և հաջորդները)։

Վեկտորների գումարը միայն այն ժամանակ է հավասար զերոյի, երբ շղթայաձև դասավորելիս նրանք կազմում են փակ բազմանկյուն (որի մեջ վերջին վեկտորի վերջը համընկնում է առաջին վեկտորի սկզբի հետ)։ Եվ իրոք, վեկտորների գումար հանդիսանում է այն վեկտորը, որ փակում է նրանց շղթան, իսկ փակող վեկտորը հավասար կլինի զերոյի, եթե նրա սկիզբն ու վերջը համատեղվում են։

Որպեսզի երկու՝ $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորների գումարը հավասար լինի զերոյի, անհրաժեշտ է, որ $\bar{b}$ վեկտորի սկիզբն $\bar{a}$ վեկտորը վերջի հետ համատեղելիս, $\bar{b}$ վեկտորի վերջը համատեղվի $\bar{a}$ վեկտորի սկզբի հետ, որ հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ և $a = b$ (նկ. 13).



Նկ. 13

Այսպիսով, եթե

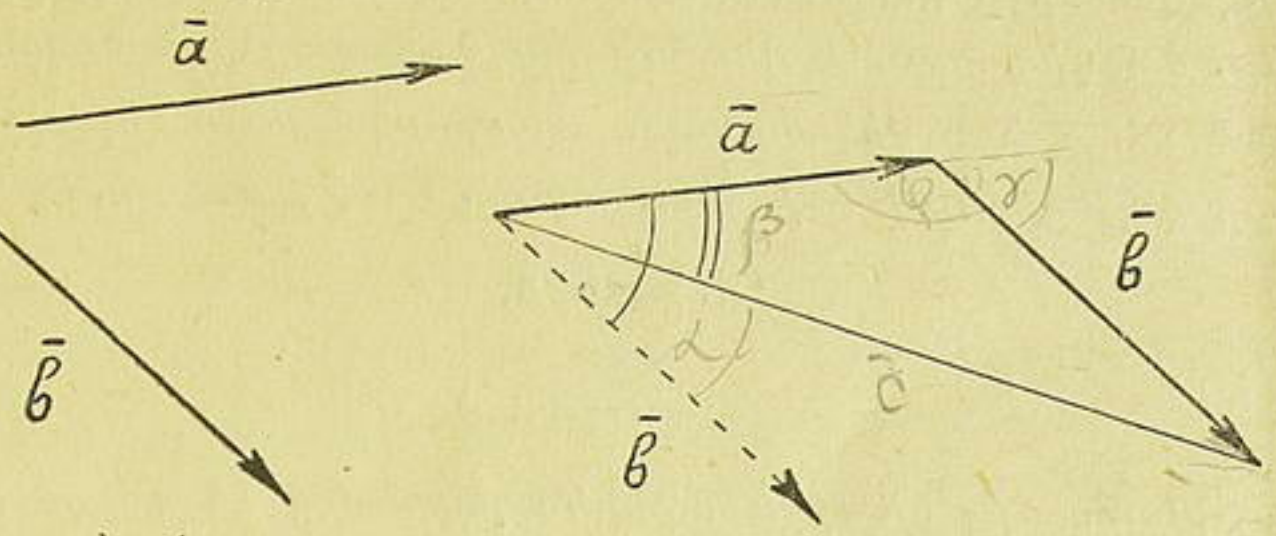
$$\left.\begin{array}{l} \bar{a} + \bar{b} = 0, \\ \text{ապա} \\ \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b} \text{ և } a = b \end{array}\right\} \quad (1\ 1)$$

Եվ հակադարձաբար, եթե $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ և $a = b$, ապա $\bar{a} + \bar{b} = 0$։

Պետք է նկատել, որ երկու գումարելիների դեպքում վեկտորների շղթան և փակող վեկտորը կազմում են եռանկյուն. ուստի գումարելի

երկու վեկտորները և նրանց գումարը միշտ կոպլանար են։ Երեք՝ $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ վեկտորների գումարը հավասար է զերոյի, եթե նրանց շղթան փակ եռանկյուն է. սրա անհրաժեշտ պայմանը $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ և $\bar{a}_3$ վեկտորների կոպլանար լինելն է։ Երեք ոչ-կոպլանար վեկտորների գումարը չի կարող հավասար լինել զերոյի։

Օգտակար է նկատել, որ եթե երկու՝ $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորների չափերն իրար հավասար են ($a = b$), ապա նրանց գումարն $(\bar{a}, \bar{b})$ անկյունը բաժանում է երկու հավասար մասերի (նկ. 14).



նկ. 14

Դիցուք (նկ. 15)

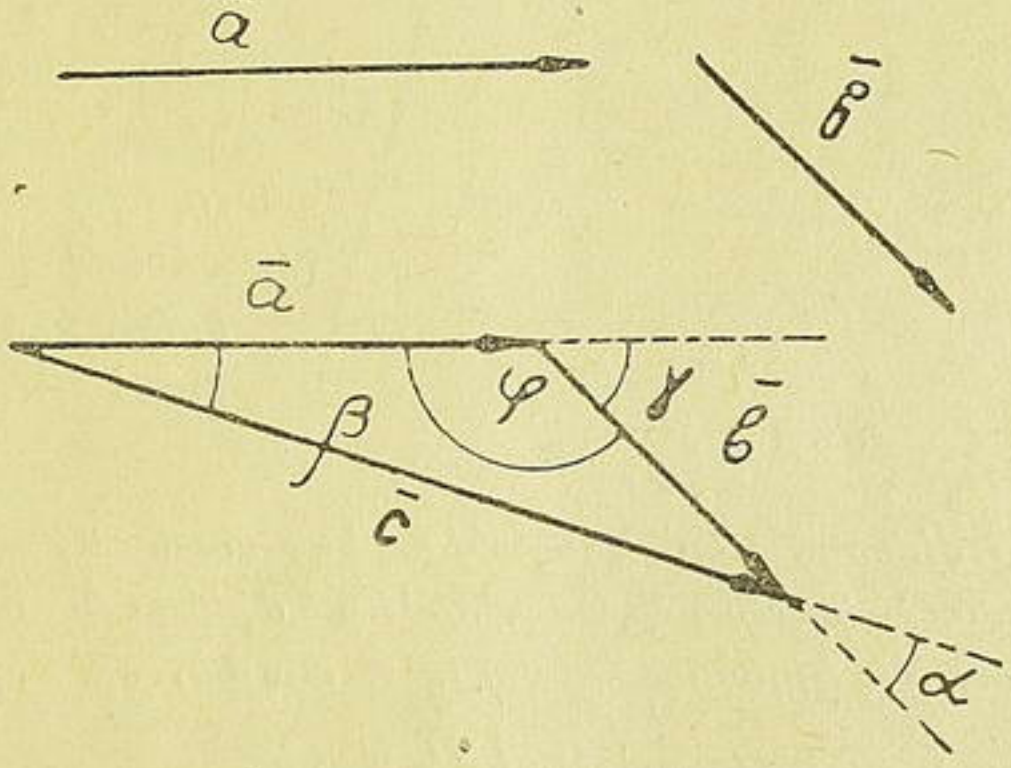
$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c},\ (\bar{a}, \bar{b}) = \gamma,\ (\bar{a}, \bar{c}) = \beta \quad \text{և} \quad (\bar{c}, \bar{b}) = \alpha$$

Հայտնի է, որ

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma$$

(որովհետև $\varphi = \pi - \gamma$)



նկ. 15

Մասնավոր դեպքում, երբ $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, $\gamma = 0$, $\cos\gamma = +1$։ *Իսկ երբ* $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$, $\gamma = \pi$, $\cos\gamma = -1$։

Խնդիրներ

1. $(\bar{a}, \bar{b})$ *անկյունը հավասար է* $60°$, $a = 5$, $b = 16$: *Որոշել* $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ *գումարի չափը,* $(\bar{c}, \bar{a})$ *և* $(\bar{b}, \bar{c})$ *անկյունները:*

2. *Տրված է՝* $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, $(\bar{a}, \bar{c})$ *անկյունը* $= 30°$, $(\bar{b}, \bar{c})$ *անկյունը* $= 45°$: *Որոշել* $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *գումարելիների չափերը:*

3. $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, $c = a$: *Որոշել* $(\bar{a}, \bar{b})$ *և* $(\bar{a}, \bar{c})$ *անկյունները:*

4. $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$: *Ո՞ր պայմաններում* $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$:

§ 6. Վեկտորների հանումը: *Վեկտորների հանումը, ինչպես և թվերի հանումը, հանդիսանում է գումարման հակադարձ գործողությունը:*

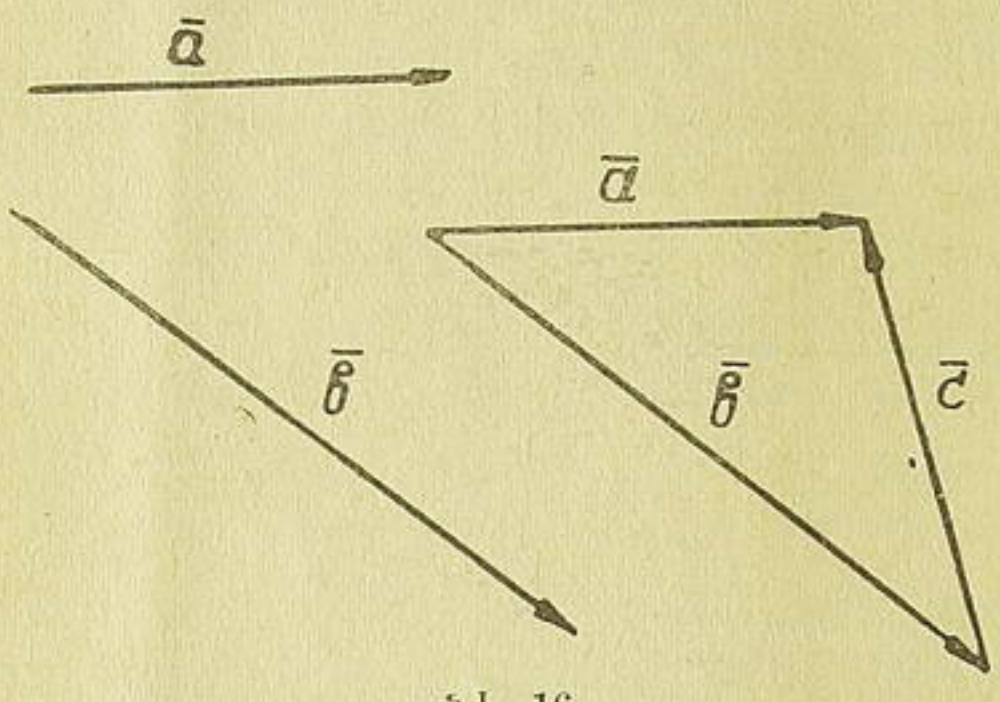
Սահմանում. $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորների տարբերություն կոչվում է այն* $\bar{c}$ *վեկտորը, որ գումարվելով* $\bar{b}$*-ի հետ, տալիս է* $\bar{a}$*, այսինքն, եթե*

$$\left.\begin{aligned} \bar{c} + \bar{b} &= \bar{a}, \\ \bar{a} - \bar{b} &= \bar{c} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I 2)}$$

ապա

Այս սահմանումից անմիջականորեն բղխում է հետևյալ կանոնը.

$\bar{a}$ վեկտորից $\bar{b}$ վեկտորը հանելու համար պետք է այդ վեկտորները տեղափոխել իրենք իրենց զուգահեռ այնպես, որ նրանց սկիզբները համատեղվեն: $\bar{c}$ վեկտորը, որի սկիզբը համընկնում է հանելի $\bar{b}$ վեկտորի վերջի հետ, իսկ վերջը՝ նվազելի $\bar{a}$ վեկտորի վերջի հետ, հանդիսանում է $\bar{a} - \bar{b}$ տարբերությունը: (I 3)



Նկ. 16

Եվ իրոք, 16-րդ նկարից երևում է, որ $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$, *հետևաբար, ըստ* (I 2) *սահմանման՝* $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$:

Ընդհանրապես տարբերության չափը փոքր է նվազելի և հանելի վեկտորների չափերի գումարից (որովհետև «եռանկյան մեջ մի կողմը փոքր է մյուս երկու կողմերի թվաբանական գումարից»), այսինքն՝

$$c < a + b:$$

Եթե $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորները զուգահեռ են, ապա մի ընդհանուր սկիզբ ունենալու դեպքում՝ նրանք կդասավորվեն միևնույն ուղղի վրա. այդ դեպքում* (I 3) *կանոնի կիրառումը ցույց է տալիս, որ*

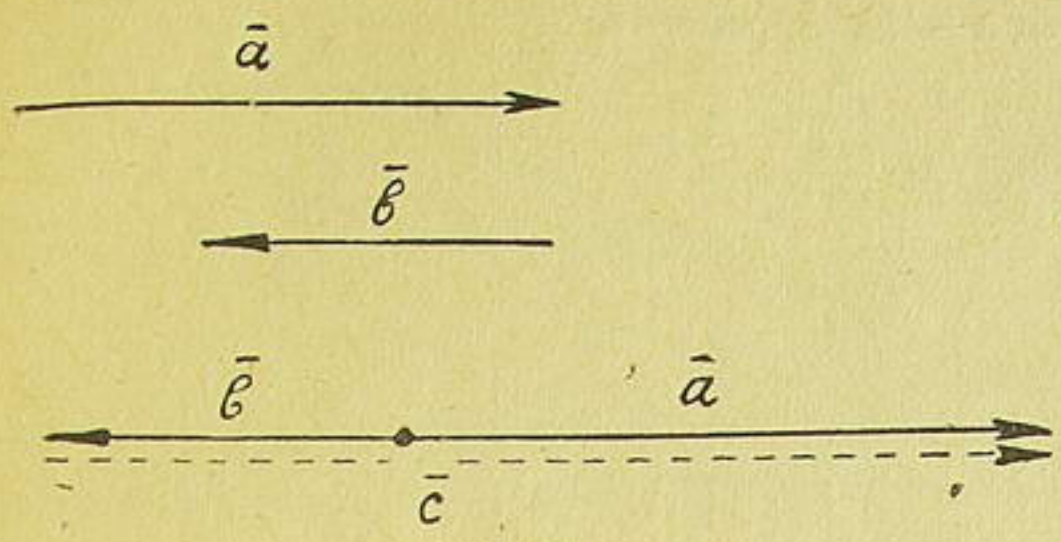
$$c = a + b, \text{ եթե } \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b},$$

և

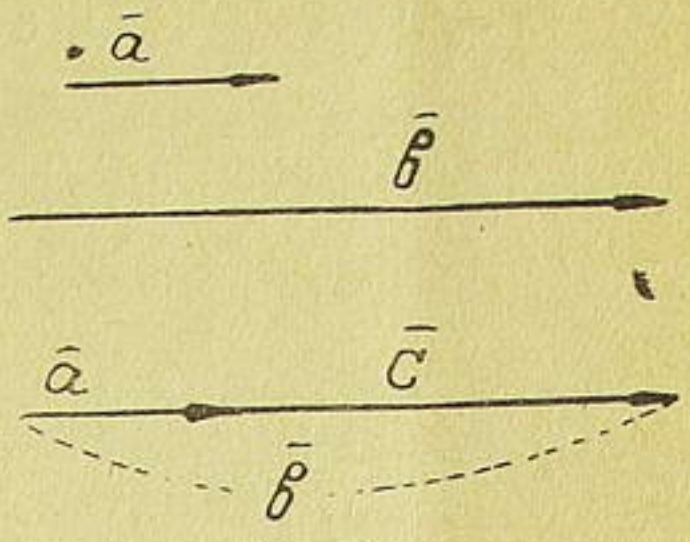
$$c = |a - b|, \text{ եթե } \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$$

(նկ. 17 և 18):

Վերջին հավասարումը ցույց է տալիս, որ երբ նվազելի վեկտորը համագուգահեռ է հանելի վեկտորին, տարբերության չափը հավա-



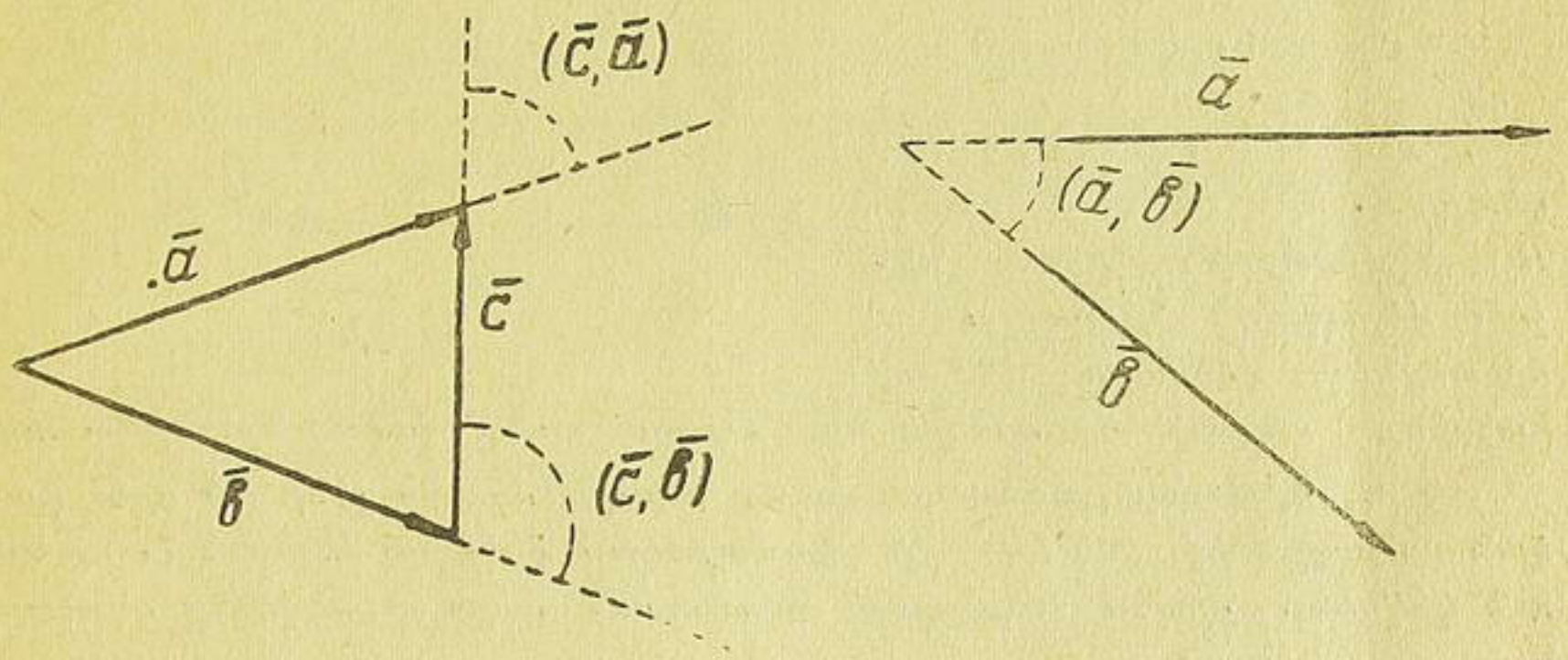
Նկ. 17



Նկ. 18

սար է նվազելու և հանելու չափերի տարբերության բացարձակ արժեքին:

$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ *տարբերությունը կարող է հավասար լինել զերոյի միայն այն դեպքում, երբ* $\bar{a} = \bar{b}$ (*այսինքն՝* $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ *և* $a = b$)*: Եվ իրոք, եթե համատեղենք հավասար վեկտորների սկիզբները, ապա կհամատեղվեն նաև նրանց վերջերը, ուստի այդ վերջերը միացնող վեկտորը կդառնա 0:*



Նկ. 19

Եթե $a = b$*, բայց* $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորները գուգահեռ չեն (նկ. 19), ապա*

$$1)\ c = 2a \sin \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{2}$$

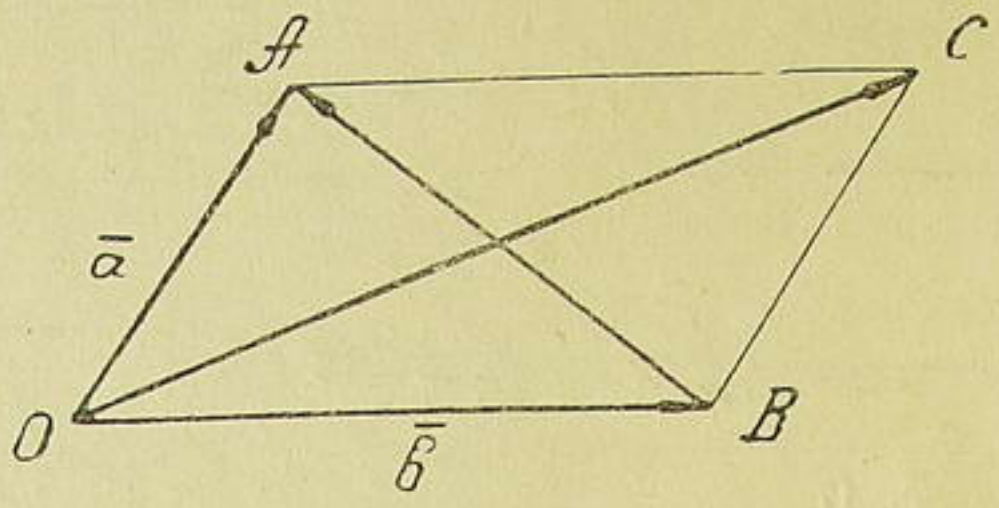
$$2)\ (\bar{c}, \bar{a}) = \frac{\pi - (\bar{a}, \bar{b})}{2},\ (\bar{c}, \bar{b}) = \frac{\pi + (\bar{a}, \bar{b})}{2}$$

§ 7. Լուսաբանում: *1°. Վեկտորների գումարի և տարբերության սահմանումից հետևում է, որ եթե* $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորների վրա գուգահեռագիծ կառուցենք (նկ. 20), ապա* $\overline{OC}$ *անկյունագիծը հավասար կլինի* $\bar{a} + \bar{b}$ *գումարին, իսկ* $\overline{BA}$ *անկյունագիծը՝* $\bar{a} - \bar{b}$ *տարբերությանը. Եթե* $a = b$*, այն ժամանակ գուգահեռագիծը կդառնա շեղանկյուն (նկ. 21),* $\bar{a} + \bar{b}$ *գումարը*

կլրաժանի $\angle AOB = (\bar{a}, \bar{b})$ *երկու հավասար մասերի, իսկ* $\bar{a} - \bar{b}$ *տարբերությունը հավասար մասերի կլրաժանի* $\angle OBC = \pi - (\bar{a}, \bar{b})$

2°. Եթե

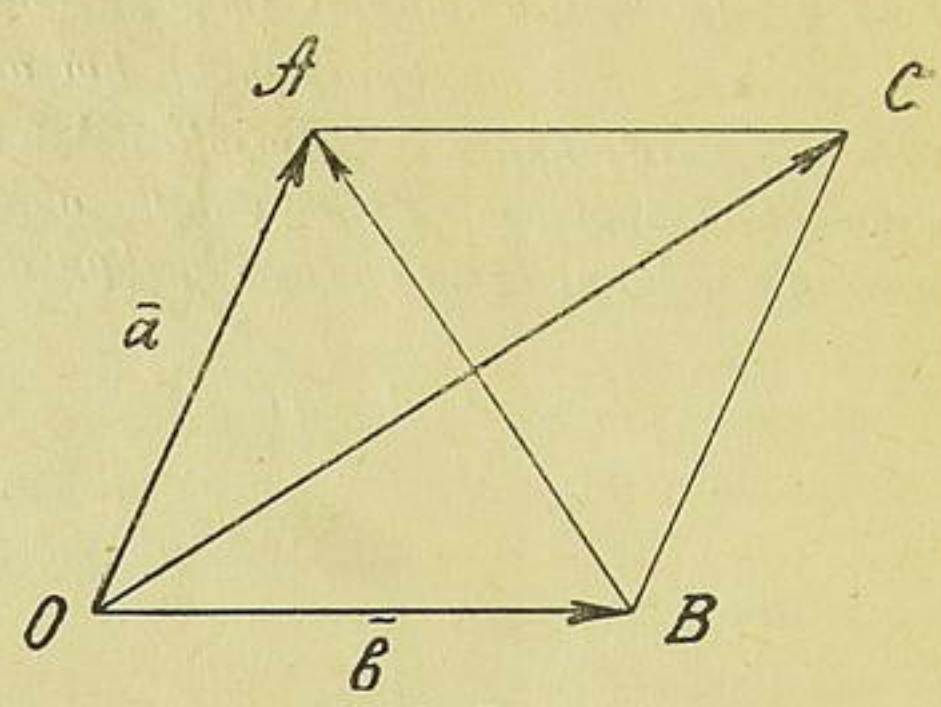
$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}, \quad \bar{c} + \bar{b} = \bar{a}$$



Նկ. 20

հավասարումների մեջ, որոնք ծառայում են $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորների տարբերությունը որոշելու համար, ընդունենք* $a = 0$, *ապա կստանանք*

$$\bar{c} = -\bar{b}, \quad \bar{c} + \bar{b} = 0$$



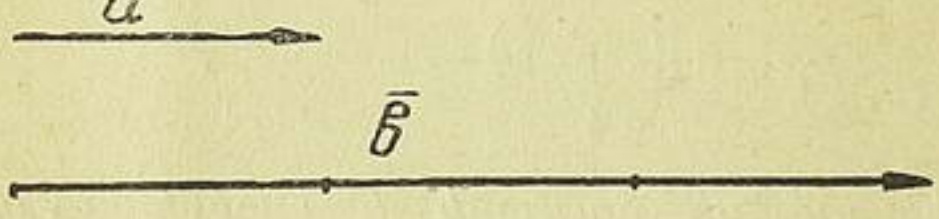
Նկ. 21

Սակայն $\bar{c} + \bar{b} = 0$ *միայն այն դեպքում, երբ* $\bar{c} \uparrow\downarrow \bar{b}$ *և* $c = b$: *Ուստի վեկտորին մինուս նշանն վերագրելը նշանակում է պատեցնել վեկտորը 180°-ով (այսինքն՝ անփոփոխ թողնելով նրա ուղղությունը՝ փոխել նրա իմաստը):*

§ 8. Վեկտորի բազմապատկումը թվով: *Թող* n*-ը լինի մի որևէ դրական ամբողջ թիվ, իսկ* $\bar{a}$*-ն մի կամայական վեկտոր: Ակներև է, որ եթե* $\bar{a}$*-ն կրկնենք որպես գումարելի* n *անգամ, ապա ստացվելիք գումարը՝* $b = n\bar{a}$, *այսինքն՝*

$$\underbrace{\bar{a} + \bar{a} + \dots + \bar{a}}_{n \text{ անգամ}} = n\bar{a} = \bar{b},$$

Ընդ որում, $\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}$ *և* $b = na$: *Օրինակ՝ եթե* $n = 3$, *ապա* $\bar{b} = 3\bar{a}$ *(նկ. 22):*



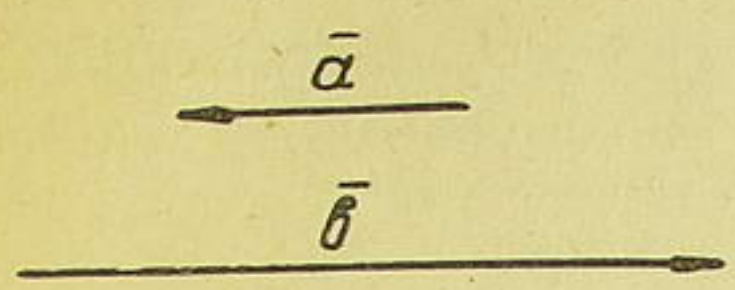
Նկ. 22

Ամբողջ դրական թվերից անցնելով ամեն տեսակ թվերի և հիշելով, որ $(-\bar{a}) \uparrow\downarrow \bar{a}$, *կունենանք՝*

1°. $\bar{a}$ *վեկտորի և որևէ* n *դրական թվի արտադրյալը մի այնպիսի* $\bar{b}$ *վեկտոր է, որ բավարարում է հետևյալ պայմաններին (նկ. 22).*

$$\bar{b} \uparrow\uparrow \bar{a}, \quad b = na$$

2°. ā վեկտորի և որևէ l բացասական թվի արտադրյալը մի այնպիսի $\bar{b}$ վեկտոր է, որ (նկ. 23)։



Նկ. 23

$$\bar{b}\uparrow\downarrow\bar{a},\ |b| = |l|a$$

Այսպիսով՝ որևէ երկու վեկտոր՝ $\bar{p}$ և $\bar{q}$, որոնք կապված են $k\bar{p} = m\bar{q}$ $\left(\text{կամ } \bar{p} = \frac{m}{k}\bar{q}\right)$, հավասարության թյամբ, համագուգահեռ են իրար, եթե k և m գործակիցները միաժեսակ նշան ունեն. այդ նույն վեկտորները հակագուգահեռ կլինեն իրար, եթե k-ն և m-ը տարբեր նշաններ ունեն։

3°. Դիցուք $\hat{c}$-ն մի միավոր վեկտոր է, որ զուգահեռ է $\bar{c}$-ին.

$$\bar{c} \parallel \hat{c}.$$

այդ դեպքում 1⁰-ից և 2⁰-ից հետևում է, որ $\hat{c}$-ն բազմապատկելով c-ով, կստանանք $\bar{c}$, այսինքն՝

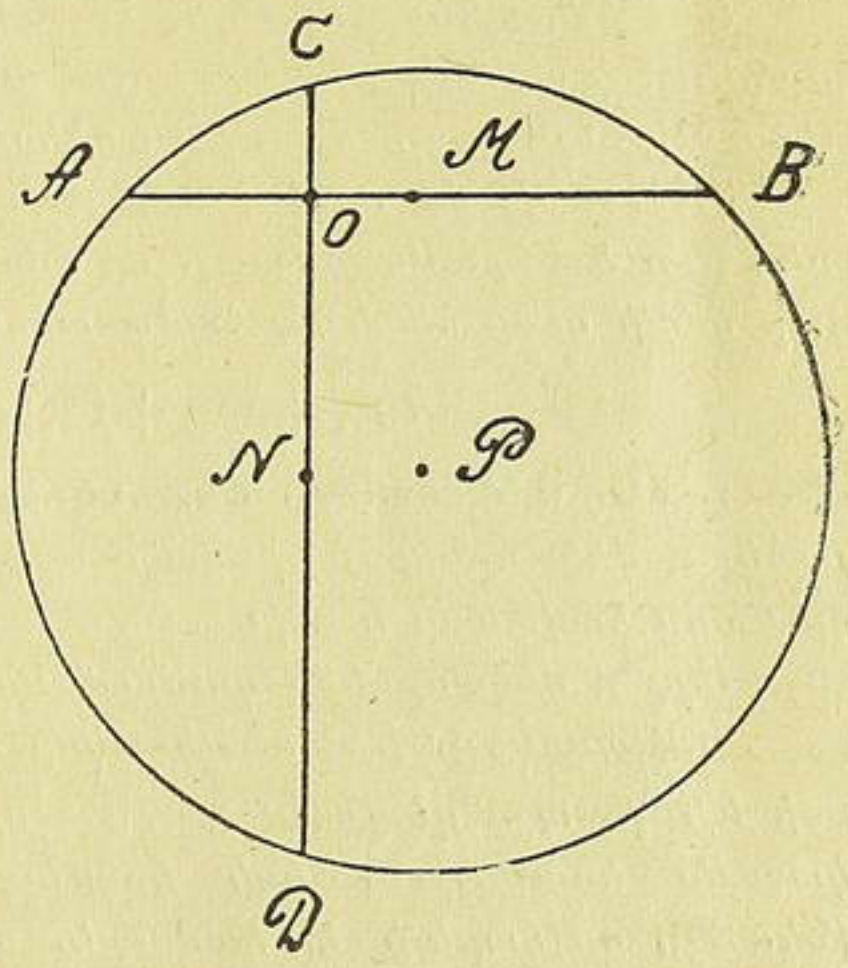
$$\bar{c} = c\hat{c},$$

ուր c-ն $\bar{c}$ վեկտորի թվական արժեքն է։ Եթե $\bar{c}\uparrow\uparrow\hat{c}$, ապա $c > 0$, իսկ եթե $\bar{c}\uparrow\downarrow\hat{c}$, $c < 0$։

Այսպիսով, երբ վեկտորն արտահայտված է իրեն զուգահեռ միավոր վեկտորով, մենք պետք է իրարից զանազանենք վեկտորի չափը և նրա թվական արժեքը։ Վեկտորի չափը միշտ դրական է, մինչդեռ նրա թվական արժեքը կարող է լինել նաև բացասական։

Երբ $\bar{c}$ վեկտորն արտահայտված է $\hat{c}$ միավոր վեկտորի միջոցով, թյուրիմացություններից խուսափելու համար՝ վեկտորի չափը մենք նշանակելու ենք այսպես՝ |c|, իսկ նրա թվական արժեքը՝ c։

§ 9. Խնդիրներ։ *1.* P կետն ունեցող շրջանագծի AOB և COD լարերը փոխադարձ ուղղահայաց են (նկ. 24)։ Ցույց տալ, որ $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 2\overline{OP}$։

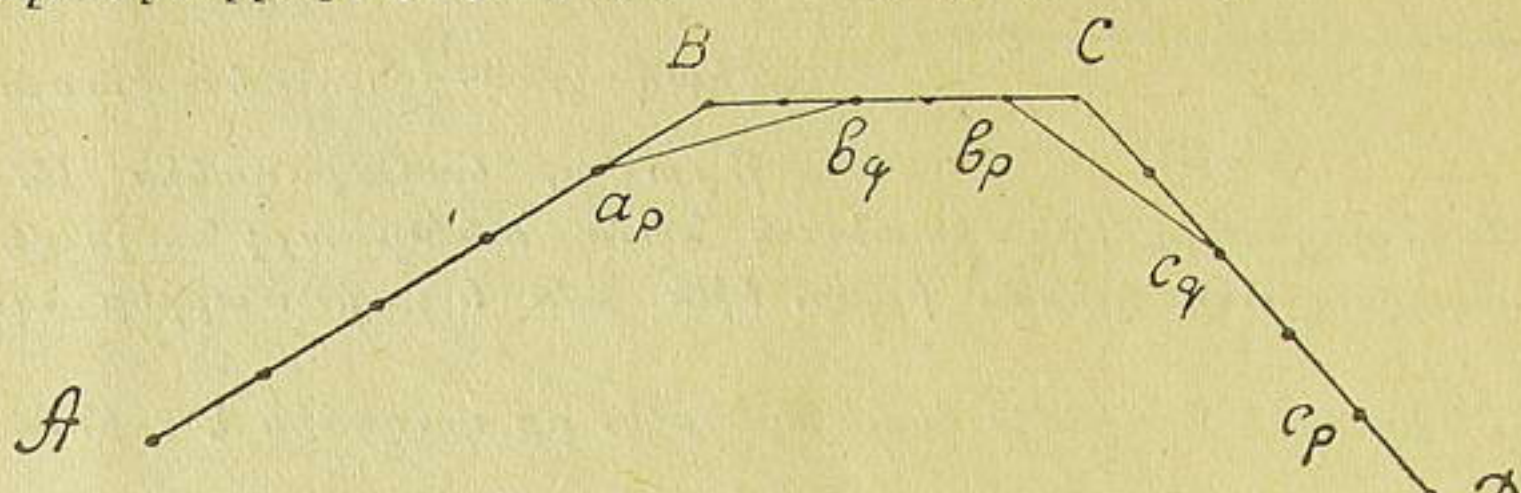


Նկ. 24

AB և CD լարերի միջնակետերը համապատասխանաբար նշանակենք M-ով և N-ով։ Ունենք՝ $\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{MA}$, $\overline{OB} = \overline{OM} + \overline{MB}$. բայց $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$. ուստի $\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OM}$։ Նույն ձևով կստանանք $\overline{OC} + \overline{OD} = 2\overline{ON}$։ Քանի որ M-ը և N-ը հանդիսանում են AB-ի և CD-ի միջնակետերը, ապա $\overline{OM} = \overline{NP}$, $\overline{OM} + \overline{MP} = \overline{OP}$, և այդ պատճառով $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} +$

$+\overline{OD}=2\overline{OP}$: *Եթե* AOB *և* COD *լարերը փոխադարձ ուղղահայաց չեն, այս հավասարությունը տեղի չի ունենա, որովհետև այս դեպքում* $\overline{OM}+\overline{NP}$ *և* $\overline{OM}+\overline{ON}\neq OP$:

2. *Մի որևէ կամայորեն վերցված* ABCDA *քառանկյուն դիտելով որպես վեկտորական շղթա՝ ցույց տալ, որ այդ քառանկյան կողմերի միջնակետերն իրար միացնելով, կստանանք զուգահեռագիծ.*



Նկ. 25

3. *Տրված է* ABCD .... *կամայորեն ընտրված, փակ բազմանկյունը (նկ. 25): Այդ բազմանկյան կողմերից յուրաքանչյուրը բաժանում են* n *հավասար մասերի: Յուրաքանչյուր կողմի* p*-երորդ մասի ծայրը միացնում են հաջորդ կողմի* q*-երորդ մասի ծայրի հետ և այդպիսով ստանում են* $\overline{a_pb_q}$, $\overline{b_pc_q}$, $\overline{c_pd_q}$ *և այլ վեկտորները: Ցույց տալ, որ* $\overline{a_pb_q}$, $\overline{b_pc_q}$, $\overline{c_pd_q}$ .... *վեկտորների շղթան փակ է: (25-րդ նկարի վրա ընդունված է՝* $n=5$, $p=4$, $q=2$):

4. A*-ն,* B*-ն,* C*-ն և* D*-ն — չորս կամայորեն ընտրված կետեր են: P-ն և Q-ն համապատասխանաբար հանդիսանում են* AC *և* BD *հատվածների միջնակետերը: Ցույց տալ, որ* $\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CB}+\overline{CD}=4\overline{PQ}$:

5. *Միջնագծերը դիտելով որպես վեկտորներ, որոնք ակիզք են առնում եռանկյան գագաթներից և վերջանում հանդիպակաց կողմերի միջնակետերում՝ ցույց տալ, որ միջնագծերից կարելի է կազմել փակ եռանկյուն*

6. ABC*-ն մի որևէ եռանկյուն է, որի կողմերի միջնակետերն են* D*-ն,* E*-ն և* F*-ը: Ցույց տալ, որ տարածության ցանկացած* O *կետի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OD}+\overline{OE}+\overline{OF}$$

§ 10. Վեկտորների վերլուծումը: *Սահմանում.* $\bar{a}$ *վեկտորը վերլուծել* n *վեկտորների, նշանակում է գտնել* n *այնպիսի վեկտորներ, որոնց գումարը հավասար է* $\bar{a}$*-ի:*

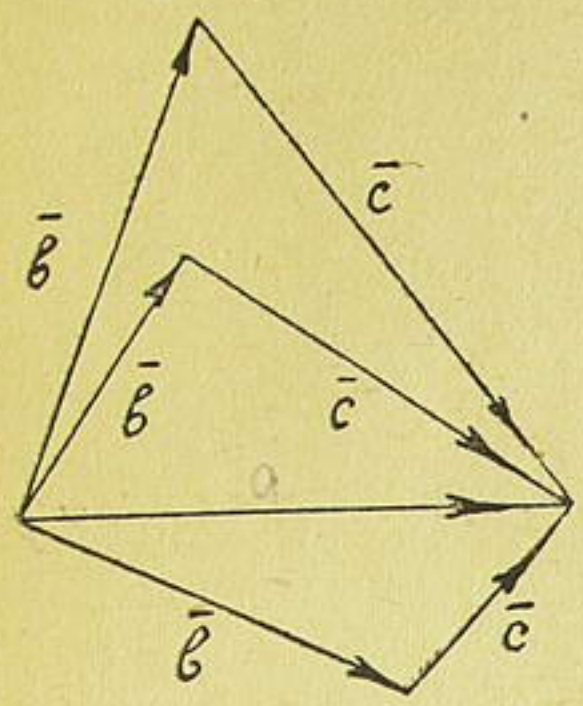
Այդ n *վեկտորները կոչվում են* $\bar{a}$ *վեկտորի բազադրիչները:*

Ենթադրենք, թե $\bar{a}$ *վեկտորը պետք է վերլուծել երկու վեկտորների* $\bar{b}$*-ի և* $\bar{c}$*-ի. այդ դեպքում* $\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$, *այնպես որ* $\bar{a}$*-ն,* $\bar{b}$*-ն և* $\bar{c}$*-ն պետք է կազմեն եռանկյուն, որի կողմերից մեկը՝* $\bar{a}$*-ն, հայտնի է: Ակներև է (նկ. 26), որ կարելի է կառուցել անհամար թվով այնպիսի եռանկյուններ, որոնց մի կողմը հավասար է* $\bar{a}$*-ի: Հետևաբար, որպեսզի այս խնդիրը որոշ դառնա, անհրաժեշտ են լրացուցիչ տվյալներ:*

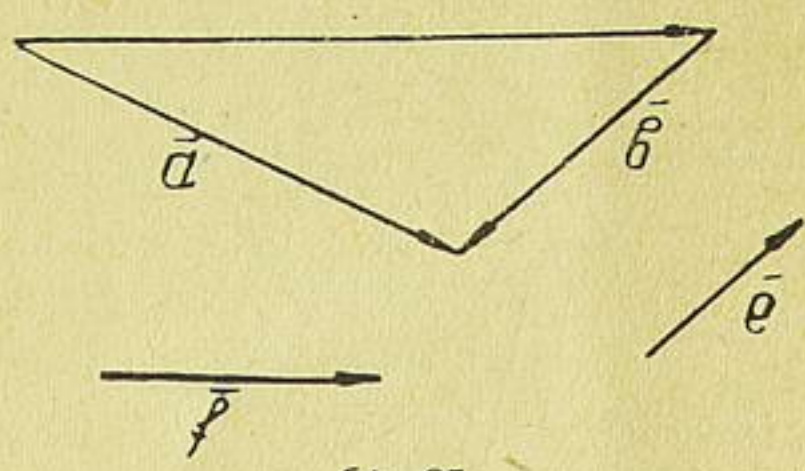
Օրինակներ.

1°. ā վեկտորը վերլուծել այնպիսի երկու վեկտորների ($\bar{b}$ և $\bar{c}$), որոնք համապատասխանաբար զուգահեռ են ē և $\bar{f}$ վեկտորներին, այսինքն՝ $\bar{b} \parallel \bar{e}$, $\bar{c} \parallel \bar{f}$, ընդ որում ենթադրվում է, որ ē-ն և f-ը զուգահեռ չեն իրար:

$\bar{b}$-ն և $\bar{c}$-ն գտնելու համար վարվում են հետևյալ կերպ (նկ. 27), ā վեկտորի սկզբից



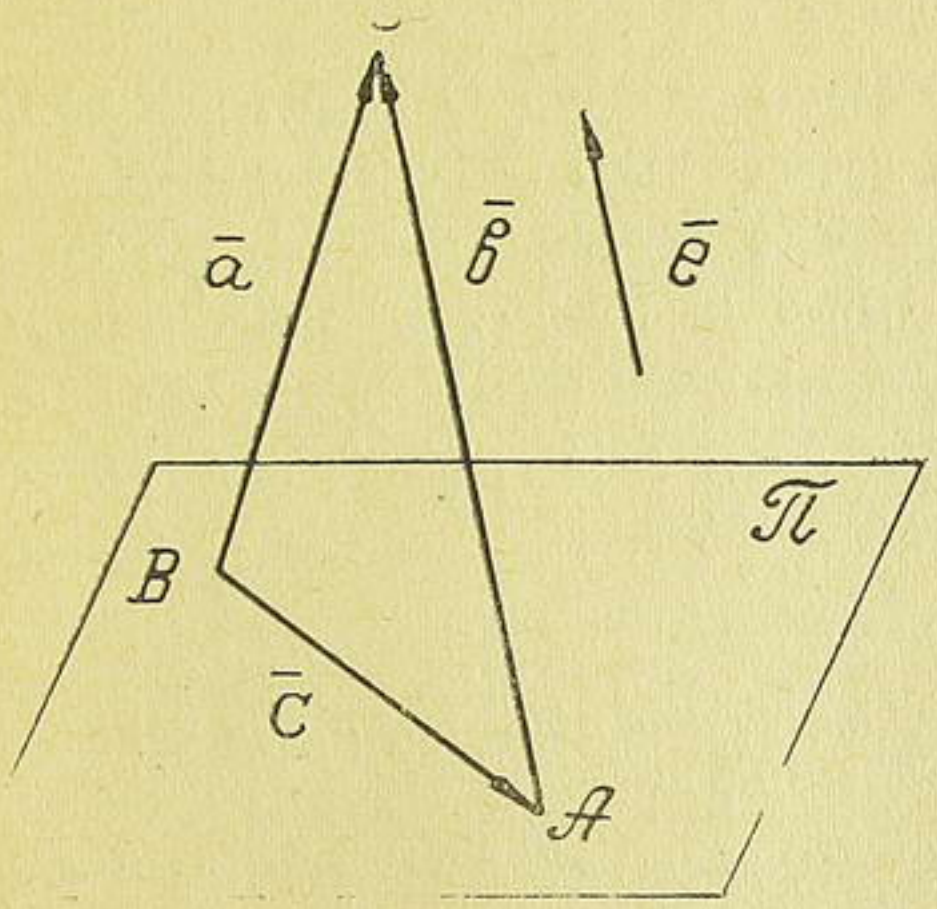
նկ. 26



նկ. 27

(կամ վերջից) տանում են ē-ին զուգահեռ ուղիղ, իսկ նույն վեկտորի վերջից (կամ սկզբից) մի ուրիշ ուղիղ՝ զուգահեռ $\bar{f}$-ին: Այս ուղիղների հատման կետը ā վեկտորի սկզբի և վերջի հետ՝ որոշում են $\bar{b}$ և $\bar{c}$ վեկտորները: Եթե ā-ն, ē-ն և $\bar{f}$-ը կոպլանար են, ապա այս խնդիրը միայն մի լուծում ունի, իսկ եթե ā-ն, ē-ն և $\bar{f}$-ը կոպլանար չեն, խնդիրն անլուծելի է:

2°. ā վեկտորը վերլուծել երկու այնպիսի բաղադրիչների, որ նրանցից մեկը (b-ն) զուգահեռ լինի ē վեկտորին, իսկ մյուսը՝ (c̄-ն) զուգահեռ լինի σ հարթությանը: Այս դեպքում ևս ենթադրվում է, որ ē-ն և σ-ն զուգահեռ չեն իրար:

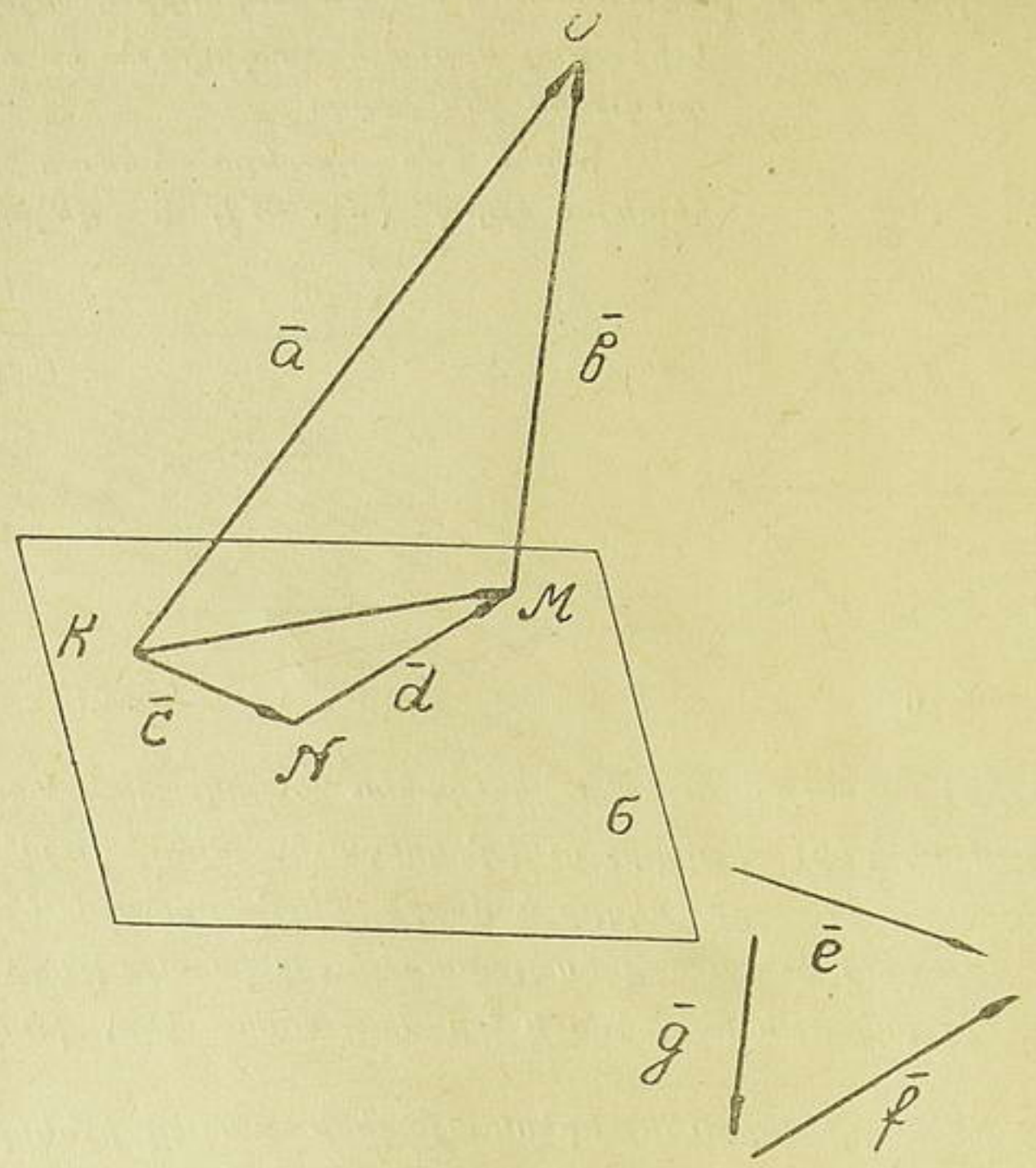


նկ. 28

Թող ā-ն լինի հավասար $\overline{BC}$-ի (նկ. 28): C-ից տանենք CA ուղիղը՝ ē-ին զուգահեռ. B-ից տանենք π հարթությունը՝ σ-ին զուգահեռ: π-ն և CA-ն հատվում են A կետում: $\overline{BA}$ և $\overline{AC}$ վեկտորները, որոնք շղթա են կազմում, համապատասխանաբար հանդիսանում են c̄ և $\bar{b}$ վեկտորները:

3°. ā վեկտորը վեր-

լուծել $\bar{b}$, $\bar{c}$ *և* $\bar{d}$ *վեկտորներին, որոնք համապատասխանաբար զուգահեռ են երեք ոչ կոպլանար* $\bar{e}$, $\bar{f}$ *և* $\bar{g}$ *վեկտորներին։*



Նկ. 29

Թող (նկ. 29) $\overline{KO} = \bar{a}$։ O *կետից տանենք* $\overline{OM} \parallel \bar{g}$, *իսկ* K *կետից՝ σ հարթությունը՝ զուգահեռ* $\bar{e}$ *և* $\bar{f}$ *վեկտորներին։* $\overline{OM}$*-ը σ հարթության հետ կհատվի* M *կետում։ Ինչպես երևում է նկարից,* $\bar{a} = \overline{KM} + \overline{MO}$։ *Քանի որ* $\overline{KM}$*-ը տեղավորված է σ հարթության վրա, ապա* $\overline{KM}$*-ը,* $\bar{e}$*-ն և* $\bar{f}$*-ը կոպլանար են և կարելի է* $\overline{KM}$*-ը վերլուծել* $\overline{KN}$ *և* $\overline{NM}$ *վեկտորների, որոնք համապատասխանաբար զուգահեռ են* $\bar{e}$*-ին և* $\bar{f}$*-ին (տես 1⁰)։ Ընդունելով* $\bar{b} = \overline{MO}$, $\bar{c} = \overline{KN}$ *և* $\bar{d} = \overline{NM}$, *կունենանք.*

$$\bar{a} = \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$$

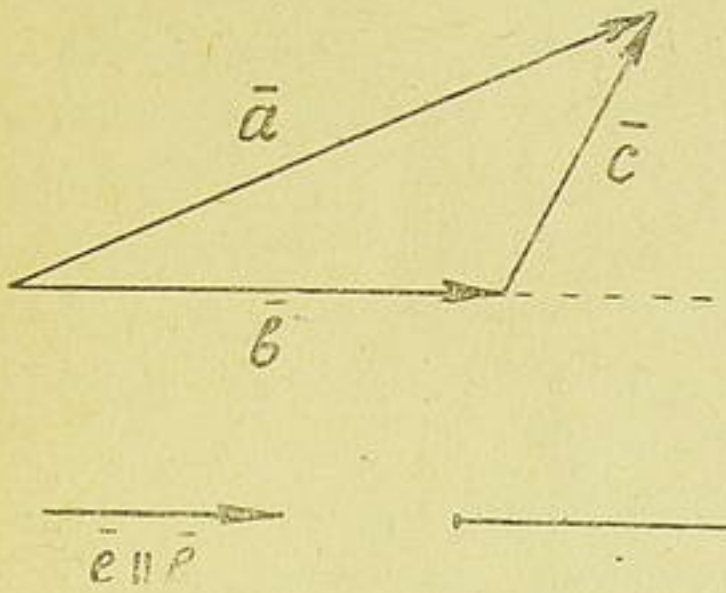
Եթե $\bar{e}$, $\bar{f}$ *և* $\bar{g}$ *վեկտորները կոպլանար չեն, ապա այս վերլուծումը միշտ հնարավոր է և հանդիսանում է միակը։*

Եթե $\bar{e}$*-ն,* $\bar{f}$*-ը և* $\bar{g}$*-ն կոպլանար են, իսկ* $\bar{a}$*-ն,* $\bar{e}$*-ն,* $\bar{f}$*-ը և* $\bar{g}$*-ն ոչ կոպլանար, ապա այս վերլուծումը անհնարին է։*

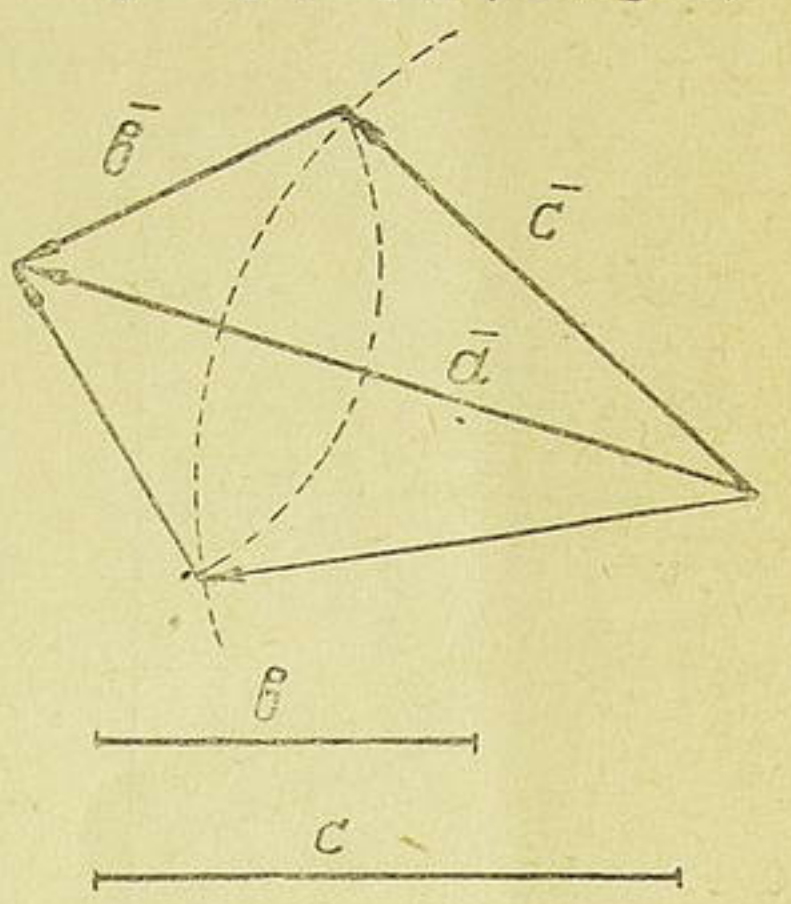
Վերջապես կարելի է ցույց տալ, որ $\bar{a}$ *վեկտորը կունենա բազմաթիվ վերլուծումներ* $\left(\bar{b} \parallel \bar{e},\ d \parallel \bar{g}\ \text{և}\ \bar{c} \nparallel \bar{f}\right)$ *երեքական վեկտորների, եթե* $\bar{a}$, e, $\bar{f}$ *և* g *վեկտորները կոպլանար են։*

Այն մասնավոր դեպքը, երբ $\bar{e}$, $\bar{f}$ *և* $\bar{g}$ *վեկտորները փոխադարձ ուղղահայաց են, հաճախ է քննության առնվում և շատ կարևոր է (տես § 17):*

4°. $\bar{a}$ վեկտորի վերլուծումը երկու բաղադրիչների ($\bar{b}$ և $\bar{c}$), երբ տրված է $\bar{b}$-ի ուղղությունը և $\bar{c}$-ի չափը (նկ. 30), կամ երբ տրված են



Նկ. 30



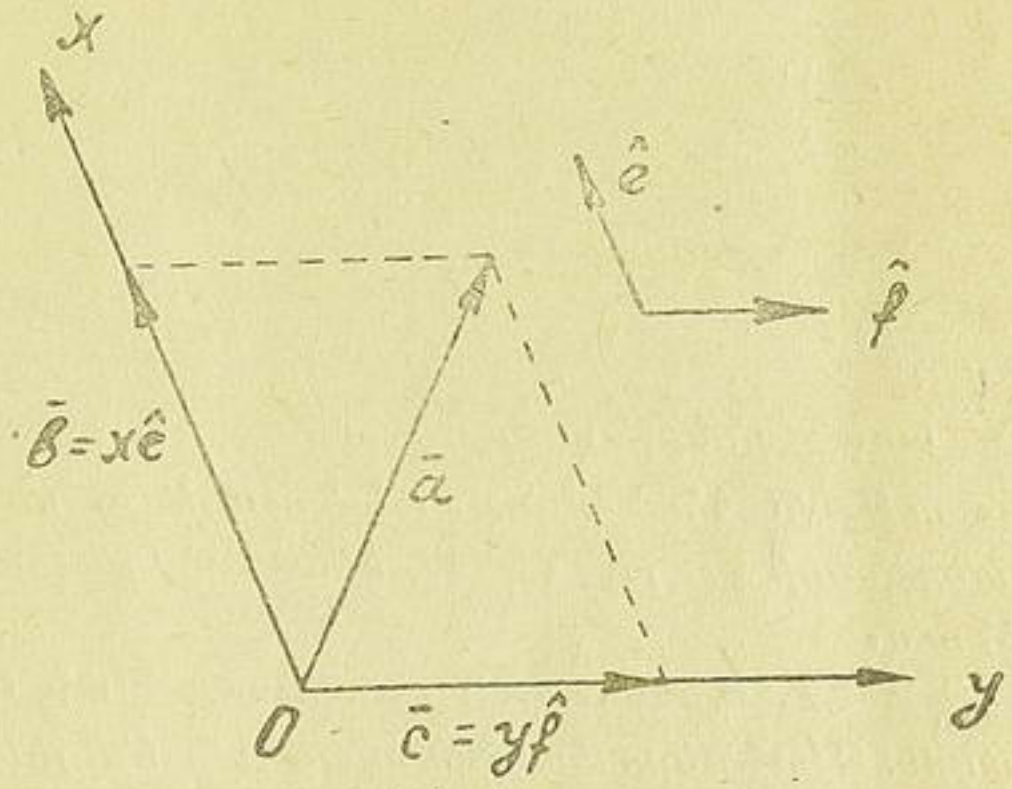
Նկ. 31

$\bar{b}$-ի և $\bar{c}$-ի չափերը (նկ. 31), ևնթադրվում է, որ հայտնի է ընթերցողին:

5°. Այս պարագրաֆի 1° կետում մենք տեսանք, որ $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$, *ուր* $\bar{b} \parallel \bar{e}$, $\bar{c} \parallel \bar{f}$: *Հետևաբար միշտ կարելի է գտնել երկու այնպիսի β և γ դրական թվեր, որոնք բավարարեն* $\bar{b} = \beta\bar{e}$ *և* $\bar{c} = \gamma\bar{f}$ *պայմաններին:* $\bar{a}$ *վեկտորի O սկզբնակետից (նկ. 32) տանենք OX և OY առանցքներն այնպես, որ* $OX \uparrow\uparrow \bar{e}$ *իսկ* $OY \uparrow\uparrow \bar{f}$ *Մուցքներ $\hat{e}$ և $\hat{f}$ միավոր վեկտորները, այնպես, որ* $\bar{e} = e\hat{e}$, $\bar{f} = f\hat{f}$: *Այն ժամանակ e-ն նշանակելով x-ով, իսկ γf-ը՝ y-ով, կունենանք*

$$\bar{a} = x\hat{e} + y\hat{f},$$

ուր x-ը և y-ը համապատասխանաբար հանդիսանում են $\bar{a}$ վեկտորի այն բաղադրիչների թվական արժեքները, որոնք զուգահեռ են OX և OY առանցքներին: $X > O$, *եթե* $\bar{b} \uparrow\uparrow \hat{e} \cdot x < 0$, *եթե* $\bar{b} \uparrow\downarrow \hat{e}$: *Ճիշտ այդպես էլ՝* $y > 0$, *եթե* $\bar{c} \uparrow\uparrow \hat{f} \cdot y < 0$, *եթե* $\bar{c} \uparrow\downarrow \hat{f}$: *Առանցքների OX և OY սիստեմն ընդհանուր դեպքում շեղանկյուն է լինում:*

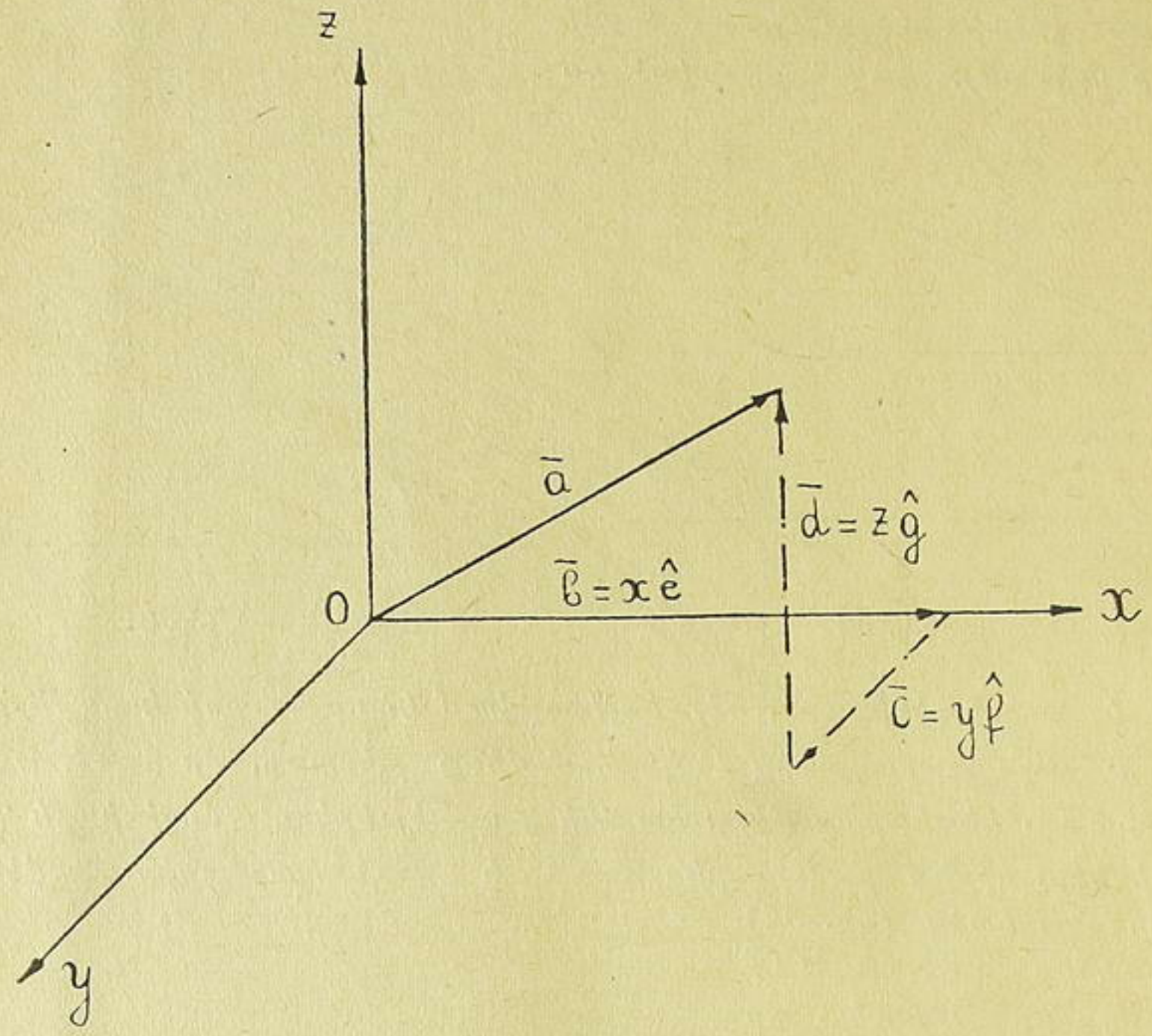


Նկ. 32

Կատարելապես նույն ձևով կարելի է վարվել, երբ $\bar{a}$ վեկտորը վերլուծված է $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ ոչ կոպլանար բաղադրիչների, ընդ որում (տես 3°) $\bar{b} \parallel \bar{e}$, $\bar{c} \parallel \bar{f}$, $\bar{d} \parallel \bar{g}$: *$\bar{a}$ վեկտորի O սկզբնակետից (նկ. 33) տանենք երեք*

առանցքներ՝ OX ↑↑ ē, OY ↑↑ f̄, OZ ↑↑ ḡ: *Մոցներ* ê, f̂, ĝ *միավոր վեկտորներ. այն ժամանակ*

$$\bar{a} = x\hat{e} + y\hat{f} + z\hat{g}, \quad \ldots \qquad (1\ 4)$$



Նկ. 33

ուր x-ը, y-ը և z-ը համապատասխանաբար հանդիսանում են ā *վեկտորի այն բաղադրիչների թվական արժեքները, որոնք զուգահեռ են* OX, OY, OZ *առանցքներին: Համեմատելով* (1 4) *բանաձևը* $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$ *հավասարության հետ՝ մենք տեսնում ենք, որ* $x > 0$, *եթե* $\bar{b} \uparrow\uparrow \hat{e}$ *և այլն: Առանցքների* OX, OY, OZ *սիստեմն ընդհանուր դեպքում շեղանկյուն է լինում:*

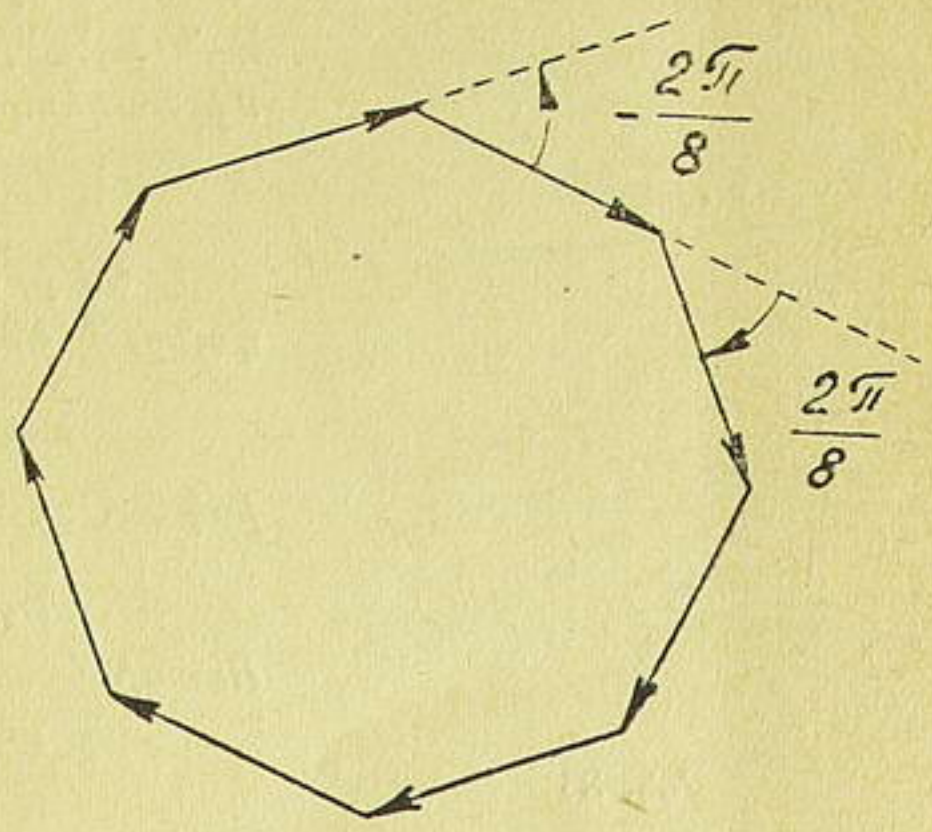
§ 11. Վեկտորների գումարման մի քանի դեպքեր: *Հետևյալ առաջադրությունները հաճախ օգտակար են լինում:*

1°. Կոպլանար և միատեսակ չափեր ունեցող n *վեկտորների գումարը հավասար է զերոյի, եթե այդ վեկտորներից յուրաքանչյուրը միացած* (n—1) *վեկտորներից երկուսի հետ կազմում է* $\frac{2\pi}{n}$ *և* $\left(-\frac{2\pi}{n}\right)$ *անկյուններ: Այս առաջադրության ճշտությունը բղխում է նրանից, որ այդպիսի* n *վեկտորների շղթան կազմում է կանոնավոր փակ բազմանկյուն (նկ. 34, որում* $n = 8$*):*

2°. Հավասար չափ ունեցող n *այն վեկտորների գումարը, որոնք հավասար անկյուններ են կազմում մի որևէ* λ *առանցքի հետ և դասավորված*

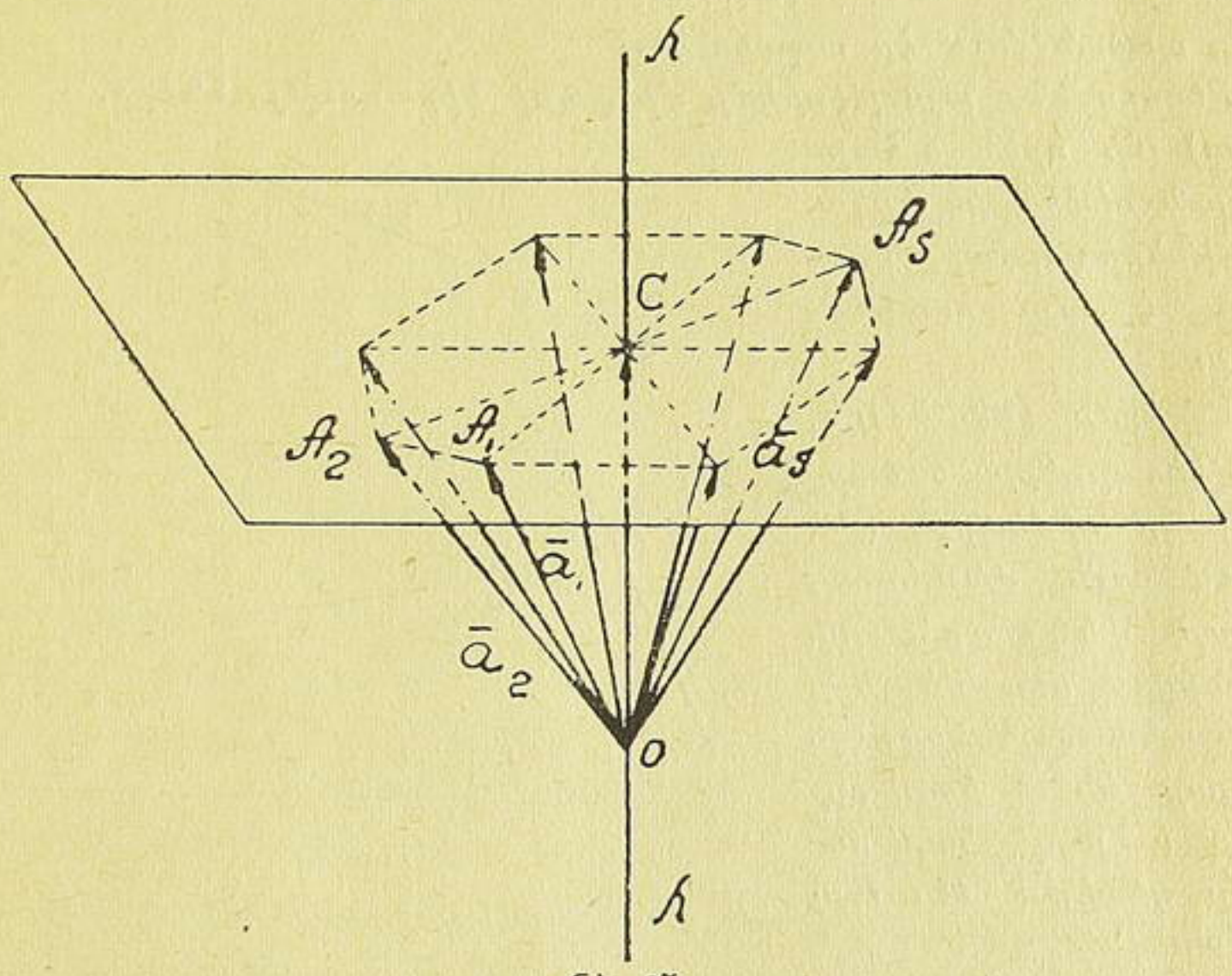
են այնպես, որ այդ վեկտորներին զուգահեռ երկու հարևան միջօրեական հարթությունների կազմած անկյունները հավասար են $\pm \frac{2\pi}{n}$, զուգահեռ է λ-ին:

Թող (նկ. 35) այդ վեկտորները լինեն $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, ..., $\bar{a}_n$. եթե իբրև նրանց ընդհանուր սկիզբ ընդունենք λ-ի կետերից մեկը, օրինակ՝ O, ապա այդ վեկտորների վերջերը կկազմեն կանոնավոր բազմանկյուն, որի հարթությունն ուղղահայաց է λ-ին: Այդ բազմանկյան C կենտրոնը կգտնվի λ առանցքի վրա: Դիցուք $\bar{a}_s = \overline{OA_s}$: $\overline{OC}$-ն նշանակենք $\bar{h}$-ով: Ակնհարև է, որ $\bar{a}_s = \bar{h} + \overline{CA_s}$, ընդ որում $CA_s \perp \lambda$:



Նկ. 34

$$\sum_{s=1}^{s=n} \bar{a}_s = n\bar{h} + \sum_{s=1}^{s=n} \overline{CA_s}$$

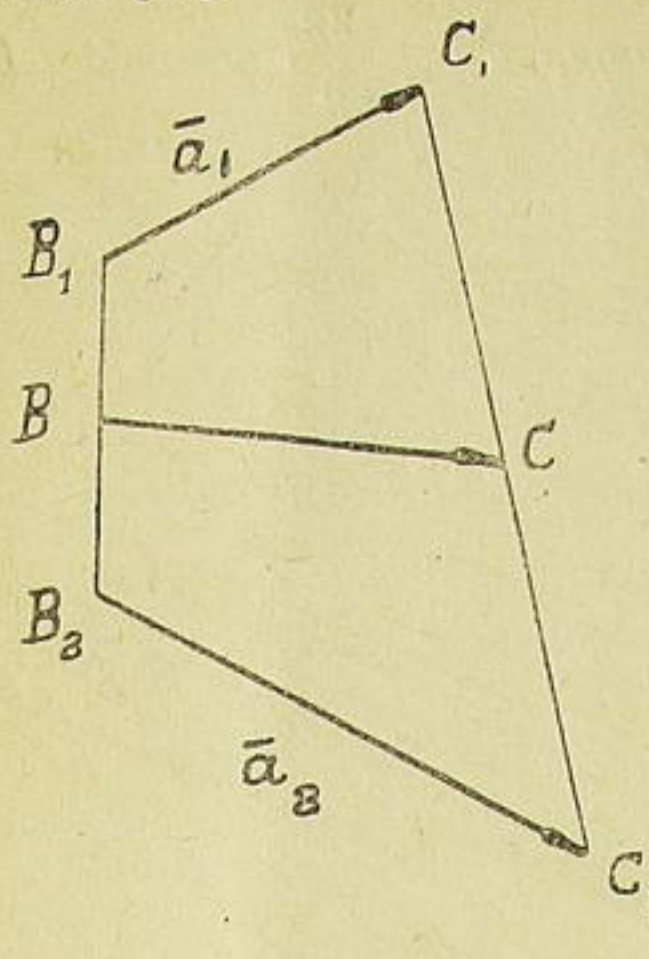


Նկ. 35

$\overline{CA_1}$, $\overline{CA_2}$ .... $\overline{CA_n}$ վեկտորների գումարը համաձայն 1°-ի հավասար է զերոյի,

$$\sum_{s=1}^{s=n} \overline{CA}_s = 0$$

Հետևաբար



Նկ. 36

$$\sum_{s=1}^{s=n} \bar{a}_s = n\bar{h},\quad n\bar{h} \parallel \lambda$$

3°. *Եթե* $\bar{a}_1 = \overline{B_1C_1}$ *(նկ. 36),* $\bar{a}_2 = \overline{B_2C_2}$, B-*ն* B_1B_2-*ի միջնակետն է,* C-*ն՝* C_1C_2-*ի միջնակետը, ապա*

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = 2\overline{BC}$$

Եվ իրոք, B_1C_1 CB *քառանկյունուց գտնում ենք,*

$$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1B} + \overline{BC} + \overline{CC_1}$$

իսկ B_2C_2 CB *քառանկյունուց ստանում ենք,*

$$\overline{B_2C_2} = \overline{B_2B} + \overline{BC} + \overline{CC_2}$$

Ուստի

$$\overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} = (\overline{B_1B} + \overline{B_2B}) + 2\overline{BC} + (\overline{CC_1} + \overline{CC_2})$$

Բայց քանի որ B-*ն* B_1B_2-*ի միջնակետն է, ապա* $\overline{B_1B} + \overline{B_2B} = 0$. *Ճիշտ այդպես էլ* $\overline{CC_1} + \overline{CC_2} = 0$. *Մնում է*

$$\overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} = \bar{a} = 2\overline{BC},$$

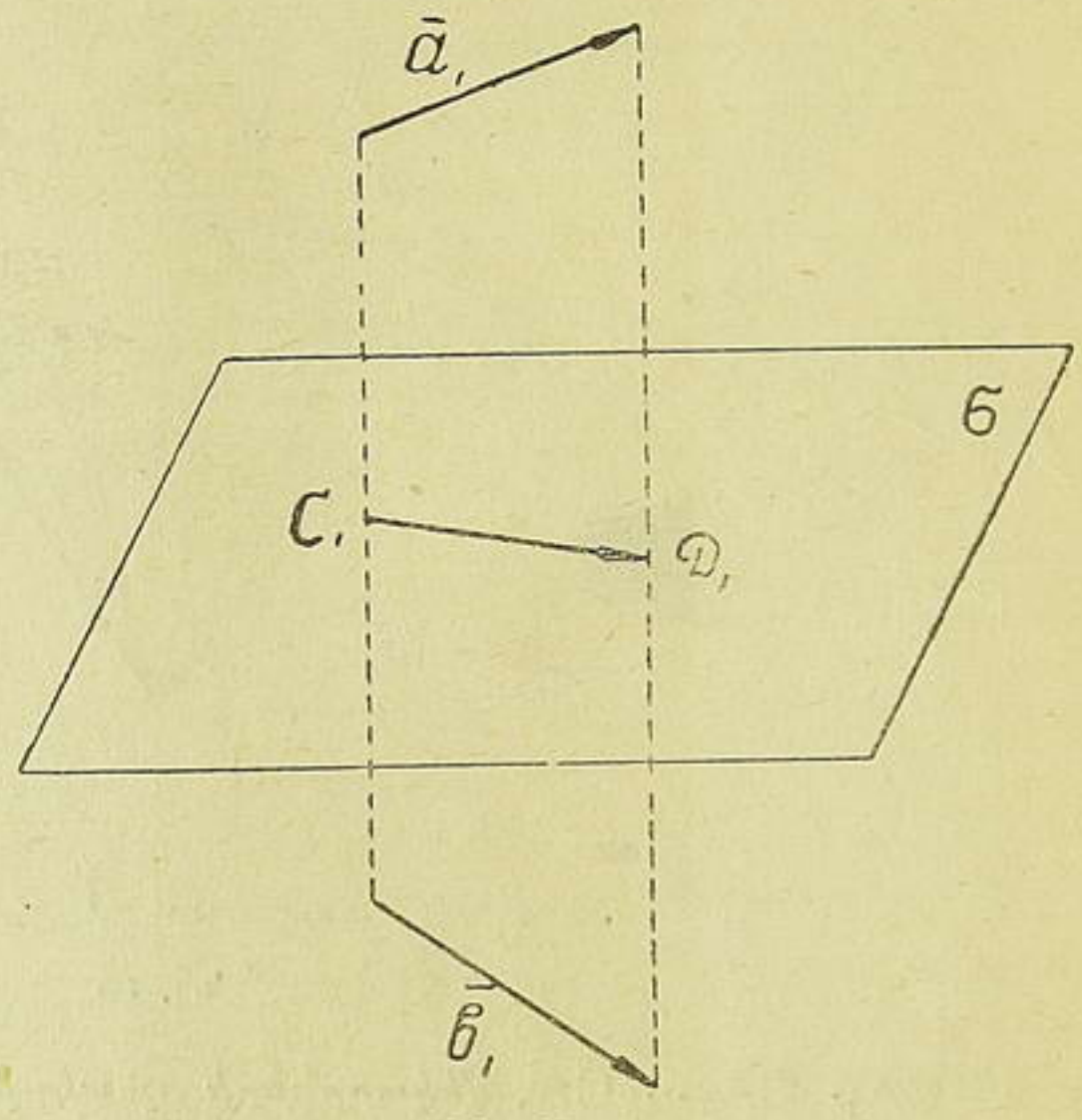
ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել:

Բերում ենք այս թեորեմի մի քանի կիրառությունները.

ա) Մի որևէ o հարթության սիմետրիկ երկու վեկտորների գումարը զուգահեռ է այդ հարթությանը:

Եվ իրոք (նկ. 37), $\bar{a}_1$ *և* $\bar{b}_1$ *վեկտորները o հարթությանը սիմետրիկ են կոչվում այն ժամանակ, եթե այդ վեկտորների սկիզբները ու վերջերը միացնող հատվածները ուղղահայաց են o հարթությանը և այդ հարթությամբ կիսվում են: Այդ պատճառով՝*

$$\bar{a}_1 + \bar{b}_1 = 2\overline{C_1D_1};$$



Նկ. 37

(Եթե $\bar{a}_1$ *և* $\bar{b}_1$ *վեկտորների յուրաքանչյուրը վերլուծելու լինենք երկուական բաղադրիչների՝ o հարթությանը զուգահեռ և*

ուղղահայաց, ապա C_1D_1-ը կլինի $\bar{a}_1$-ի և $\bar{b}_1$-ի այն բաղադրիչը, որը զուգահեռ է σ հարթությանը):

Սրանից հետևում է, որ եթե ունենք σ հարթությանը սիմետրիկ դասավորված վեկտորների մի շարք զույգեր՝ $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$; $\bar{a}_2$, $\bar{b}_2$; ... $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$, ապա այդ 2n վեկտորների ($\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... $\bar{a}_n$, $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, ... $\bar{b}_n$) գումարը զուգահեռ կլինի σ-ին:

Եվ իրոք, օգտվելով զուգորդական հատկությամբ, կարող ենք գրել.

$$(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\dots+\bar{a}_n)+(\bar{b}_1+\bar{b}_2+\dots+\bar{b}_n)=$$
$$=(\bar{a}_1+\bar{b}_1)+(\bar{a}_2+\bar{b}_2)+\dots+(\bar{a}_n+\bar{b}_n)$$

Այս հավասարության աջ մասում յուրաքանչյուր երկու վեկտորի գումարը զուգահեռ է σ հարթությանը, ուստի 2n վեկտորների գումարը ևս զուգահեռ է σ հարթությանը:

բ. Որևէ λ առանցքին սիմետրիկ երկու վեկտորների գումարը զուգահեռ է այդ առանցքին:

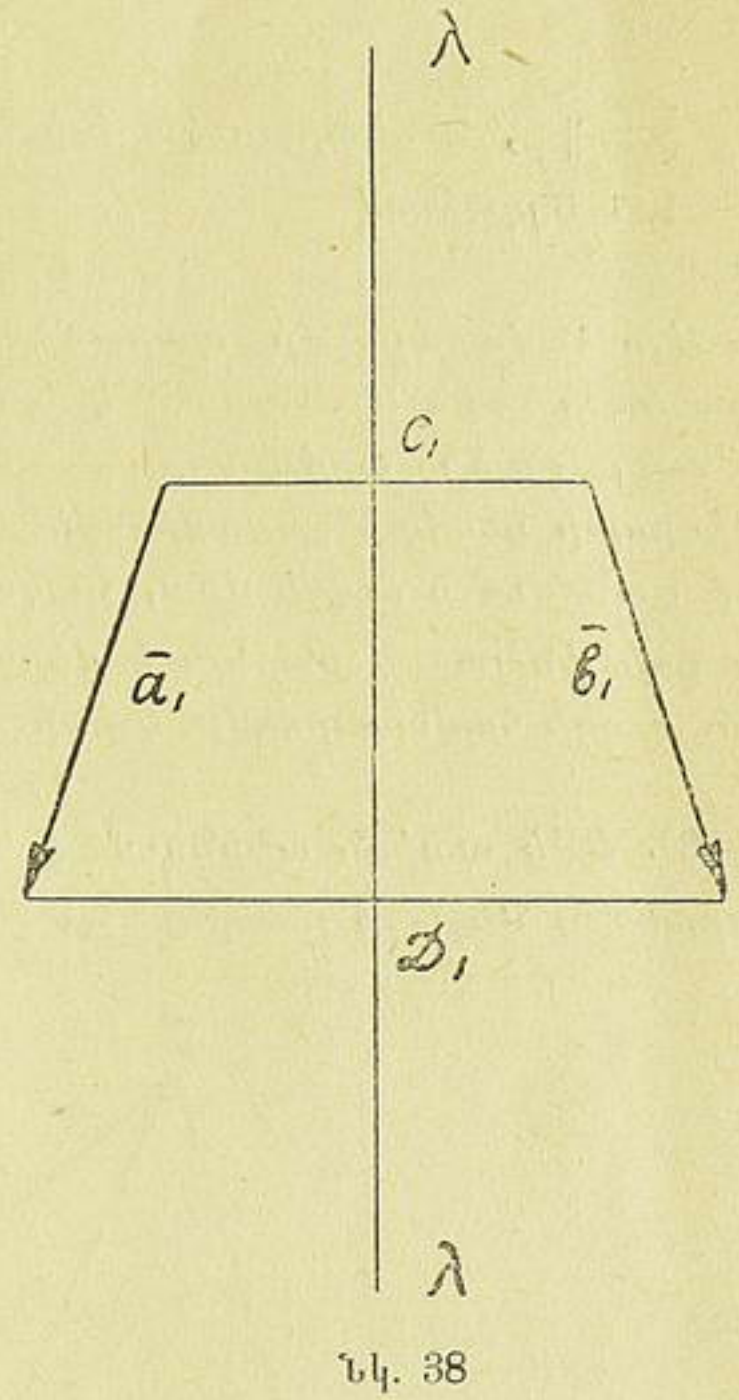
Ինչպես հայտնի է, $\bar{a}_1$ և $\bar{b}_1$ վեկտորները սիմետրիկ են λ առանցքին այն ժամանակ, եթե այդ վեկտորների սկզբները և վերջերը միացնող ուղիղներն ուղղահայաց են λ-ին և այդ առանցքով կիսվում են (նկ. 38): Համաձայն 3^0 թեորեմի $\bar{a}_1+\bar{b}_1=2\overline{C_1D_1}$: C_1D_1-ը տեղավորված է λ-ի վրա (և զուգահեռ է λ-ին):

Այստեղից հետևում է, որ 2n վեկտորների գումարը՝ $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\dots+\bar{b}_1+\bar{b}_2+\dots+\bar{b}_n$, որոնք զույգ առ զույգ սիմետրիկ են λ առանցքին, զուգահեռ է λ-ին:

Նման ձևով ապացուցվում են նաև հետևյալ երկու թեորեմները.

դ. σ հարթությանը սիմետրիկ երկու վեկտորների տարբերությունը ուղղահայաց է σ հարթությանը:

դ. λ առանցքին սիմետրիկ երկու վեկտորների տարբերությունը ուղղահայաց է λ առանցքին:



Նկ. 38

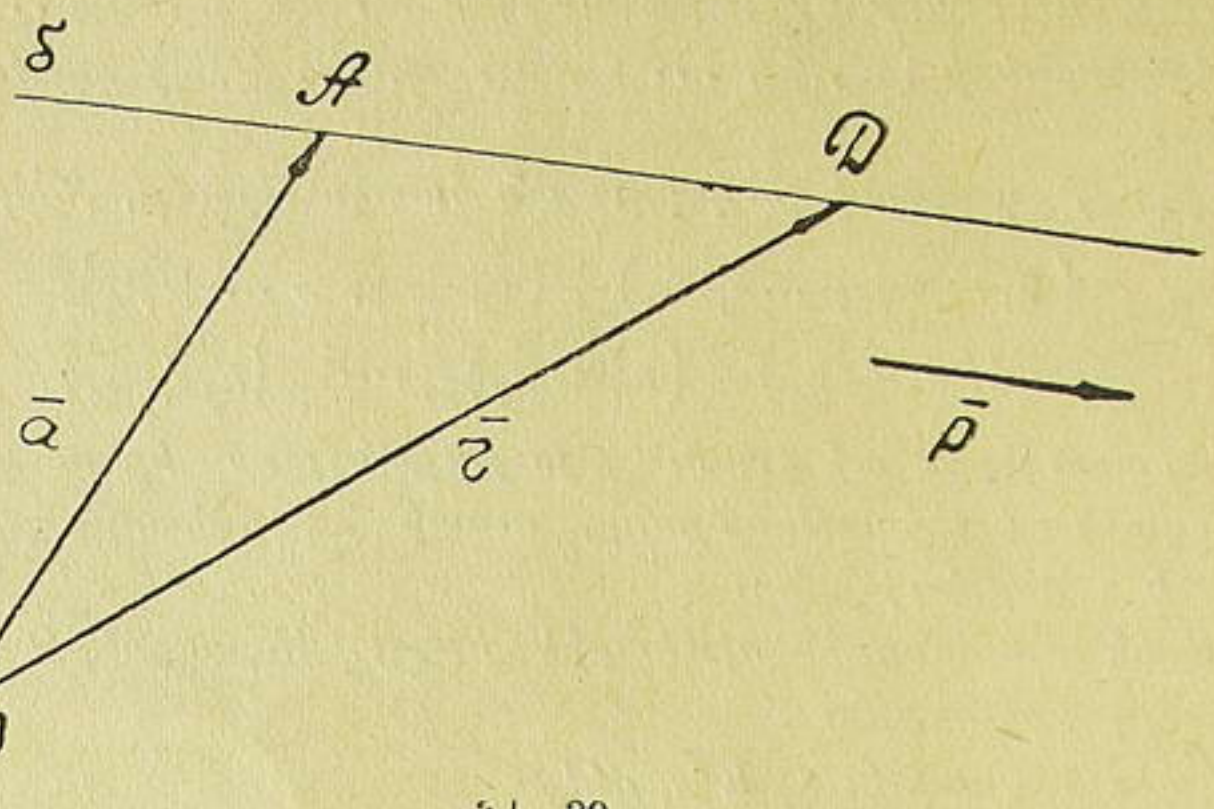
§ 12. Ուղղի եվ հարթության հավասարումը: $\bar{a}=\overline{OA}$, $\bar{b}=\overline{OB}$ վեկտորները կոչվում են A և B կետերի շառավիղ-վեկտորներ, O-ն՝ շառավիղ-վեկտորների սկզբնակետ կամ բևեռ:

A կետը համարվում է տրված, եթե տրված է նրա շառավիղ-վեկտորը, ընդ որում ենթադրվում է, թե բևեռը հայտնի է:

1^0. Դիցուք δ ուղիղն անցնում է A կետով և զուգահեռ է $\bar{p}$ վեկտո-

բին։ Ուղղի ընթացիկ կետը նշանակենք D*-ով (նկ. 39)։* A*-ի և* D*-ի շառավիղ-վեկտորները համապատասխանաբար նշանակենք* $\bar{a}$*-ով և* $\bar{r}$*-ով, այժմ*

$$\bar{r} - \bar{a} = \overline{AD},$$



նկ. 39

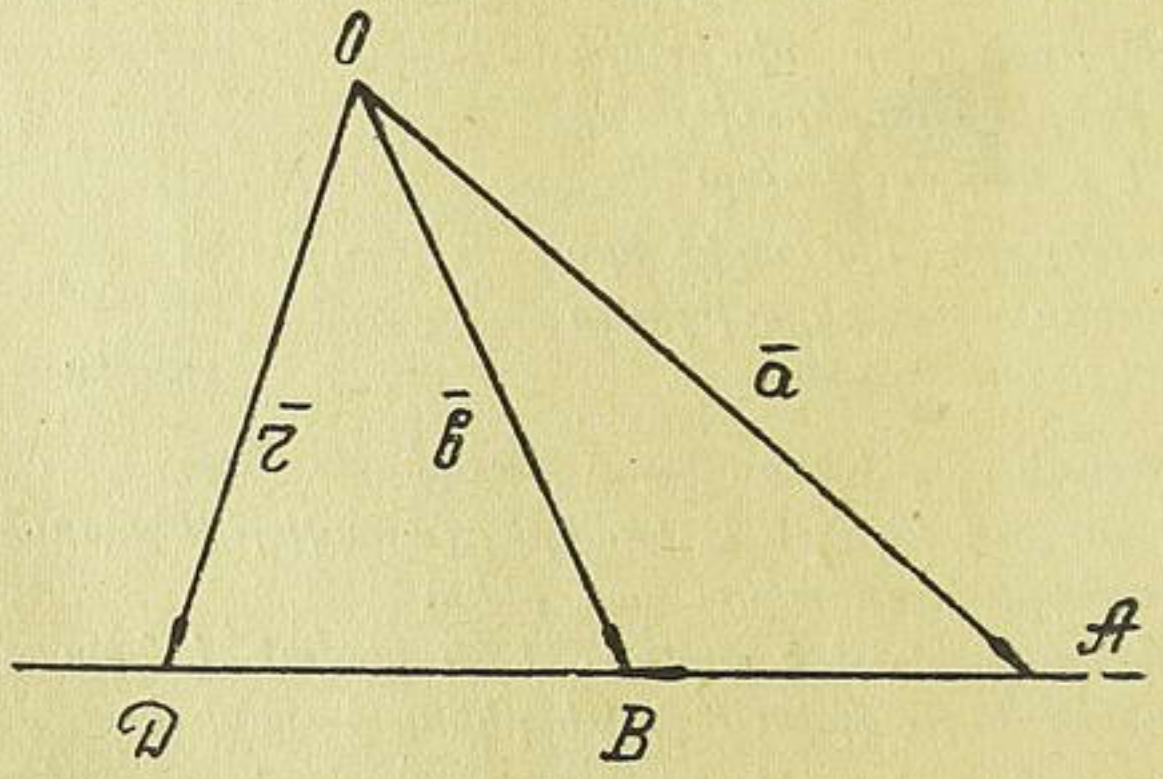
բայց $\overline{AD} \parallel \bar{p}$*, հետևաբար կարելի է գտնել մի այնպիսի* τ *դրական, որ* $\overline{AD} = \tau\bar{p}$*։ Այդպիսով*

$$\bar{r} = \bar{a} + \bar{p}\tau \qquad (15)$$

Այս հավասարումը պարամետրական հավասարումն է δ *ուղղի, որ դուգահեռ է* $\bar{p}$*-ին և անցնում է* A *կետով։* τ*-ն կոչվում է պարամետր։ Տալով* τ*-ին բոլոր արժեքները* $-\infty$*-ից մինչև* $+\infty$*, կստանանք անվերջ ուղղի բոլոր կետերի շառավիղ-վեկտորները։ Այն կետի շառավիղ վեկտորը, որ չի գտնվում* δ *ուղղի վրա, չի կարող արտահայտվել (15) հավասարումով։* $\bar{p}$*-ի փոխարեն կարելի է վերցնել* $\hat{p}$ *միավոր վեկտորը, այն ժամանակ նույն ուղղի հավասարումը կլինի.*

$$\bar{r} = \bar{a} + \hat{p}\tau$$

2°. Եթե ուղիղն անցնում է տված A,B *կետերով (նկ. 40), կարող են որպես* $\bar{p}$ *վեկտոր ընտրել* $\overline{AB}$*-ն։ Քանի որ* $\overline{OA} = \bar{a}$ $\overline{OB} = \bar{b}$ *լինեն հավա-*



նկ. 40

պատասխանաբար A *և* B *կետերի շառավիղ-վեկտորները.* $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$· *հետևապես* $\bar{p} = \bar{b} - \bar{a}$: (I 5)-*ի հիման վրա կարող ենք գրել*

$$\bar{r} = \bar{a} + (\bar{b} - \bar{a})\tau \quad \ldots\ldots \qquad (I\,6)$$

կամ

$$\bar{r} = \bar{a}(1 - \tau) + \bar{b}\tau \quad \ldots\ldots \qquad (I\,7)$$

որտեղ $\bar{r}$*-ն ընթացիկ* D *կետի շառավիղ վեկտորն է. նկատենք, որ* (I 7) *հավասարման մեջ* $\bar{a}$*-ի և* $\bar{b}$*-ի գործակիցների գումարը հավասար է 1-ի:* (I 6) *կամ* (I 7) *հավասարումը հանդիսանում է* A *և* B *կետերով անցնող ուղղի հավասարումը, որ մենք որոնում էինք:*

3⁰. *Վերլուծենք* $\bar{r}$*-ը,* $\bar{a}$*-ն,* $\bar{b}$*-ն և* $\bar{p}$*-ն բաղադրիչների, որոնք զուգահեռ են* OX, OY, OZ *առանցքներին.*

$$\bar{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z, \qquad \bar{p} = \hat{i}p_x + \hat{j}p_y + \hat{k}p_z$$
$$\bar{a} = \hat{i}a_x + \hat{j}a_y + \hat{k}a_z \quad \bar{b} = \hat{i}b_x + \hat{j}b_y + \hat{k}b_z$$

Այժմ (I 5) *և* (I 6) *հավասարումները կարելի է ներկայացնել կոորդինատային ձևով: Եվ իրոք՝ ըստ* (I 5)*-ի*

$$x = a_x + p_x\tau, \quad y = a_y + p_y\tau, \quad z = a_z + p_z\tau,$$

այստեղից՝

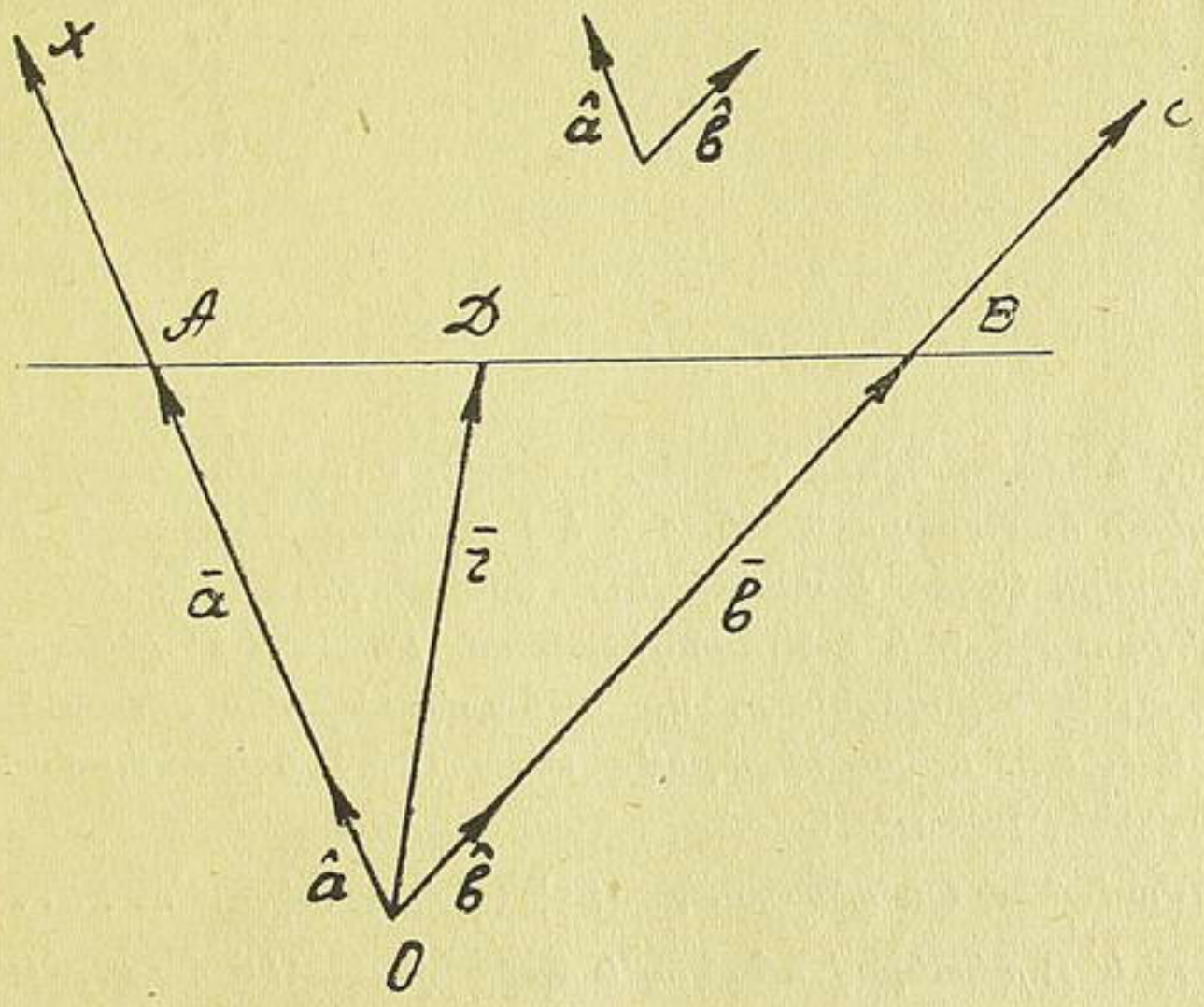
$$\frac{x - a_x}{p_x} = \frac{y - a_y}{p_y} = \frac{z - a_z}{p_z} \qquad (I\,8)$$

տեղադրելով $\bar{r}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, *վեկտորների բաղադրիչները* (I 6)*-ի մեջ կստանանք*

$$x = a_x + (b_x - a_x)\tau, \quad y = a_y + (b_y - a_y)\tau$$
$$z = a_z + (b_z - a_z)\tau,$$

կամ

$$\frac{x - a_x}{b_x - a_x} = \frac{y - a_y}{b_y - a_y} = \frac{z - a_z}{b_y - a_z} \qquad (I\,9)$$



Նկ. 41

Վերջապես ընդունելով OA*-ն և* OB*-ն որպես կոորդինատային* OX *և* OY *(ոչ ուղղանկյան) առանցքներ և նկատի առնելով, որ* $\bar{a}=\hat{a}a$, $\bar{b}=\hat{b}b$ *ստանում ենք (I 7)-ից*

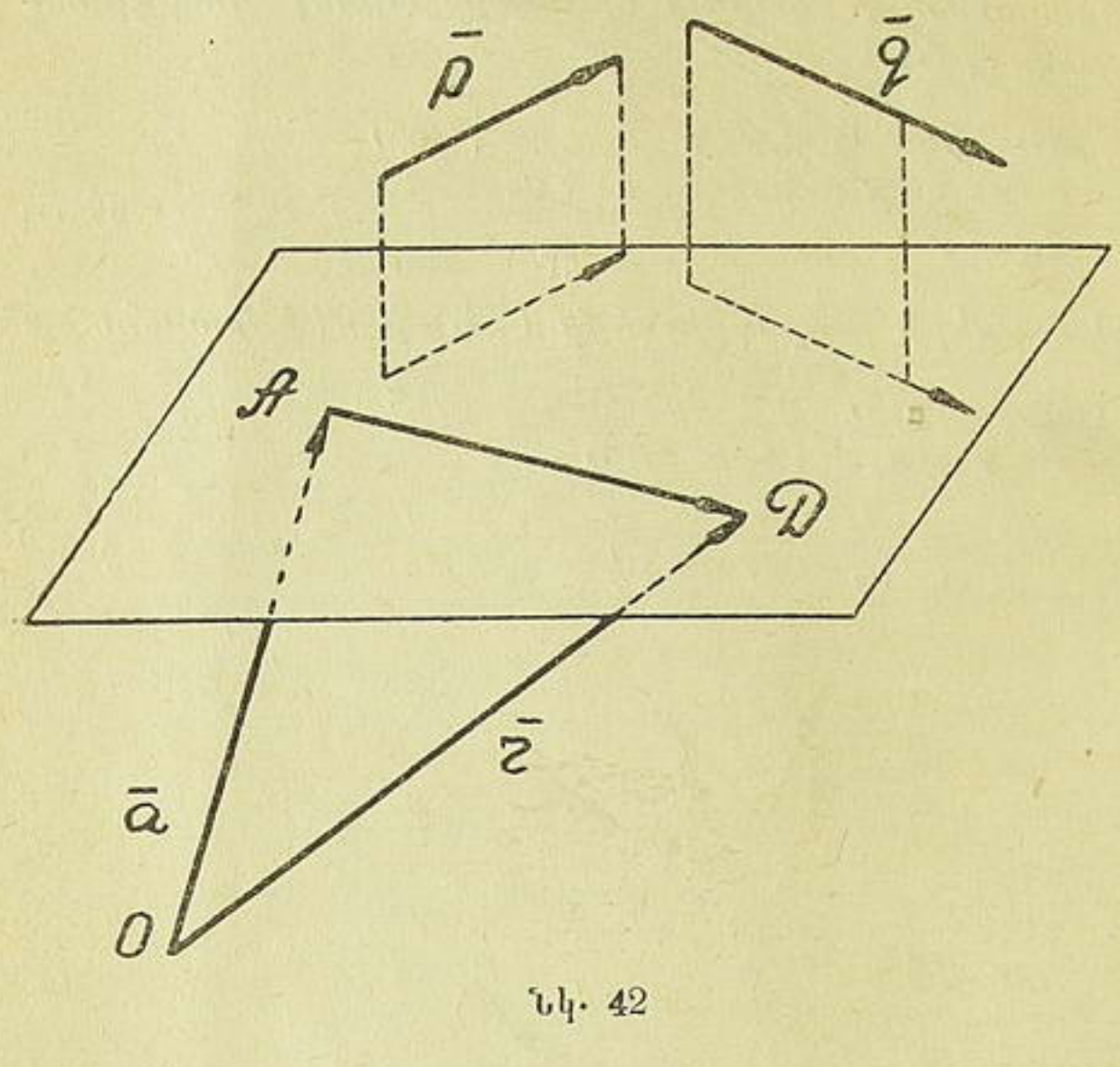
$$r=\hat{a}a(1-\tau)+\hat{b}b\tau=x\hat{a}+y\hat{b}$$

այստեղից $x=a(1-\tau)$, $y=b\tau$, *ուստի*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Այս ուղիղ գծի հավասարումն է, արտահայտված այն a *և* b *հատվածների միջոցով, որ ուղիղը հատում է կոորդինատային առանցքների վրա (նկ. 41)։*

4⁰. σ հարթությունը զուգահեռ է $\bar{p}$ *և* $\bar{q}$ *վեկտորներին և անցնում է* A *կետով, որի շառավիղ վեկտորը հավասար է* $\bar{a}$*-ի։ Գտնել σ հարթության հավասարումը։*



Նկ. 42

Թող (նկ. 42) D*-ն լինի σ հարթության ընթացիկ կետը, իսկ* $\bar{r}$*-ը՝ նրա շառավիղ-վեկտորը։* $\overline{AD}=\bar{r}-\bar{a}$*։ Քանի որ* $\overline{AD}$*-ն գտնվում է σ հարթության վրա, ապա* $\overline{AD}$*-ն,* $\bar{p}$*-ն և* $\bar{q}$*-ն կոպլանար վեկտորներ են. հետևաբար, կարելի է ընտրել այնպիսի* τ *և* λ *գործակիցներ, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\overline{AD}=\bar{r}-\bar{a}=\bar{p}\tau+\bar{q}\lambda$$

կամ

$$\bar{r}=\bar{a}+\bar{p}\tau+\bar{q}\lambda \quad \ldots(I\ 10)$$

Սա A կետով անցնող և $\bar{p}$*-ին ու* $\bar{q}$*-ին զուգահեռ հարթության պարամետրական հավասարումն է. τ-ն և λ-ն պարամետրներն են, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է փոփոխվել* $-\infty$*-ից մինչև* $+\infty$*։*

5⁰. Դիցուք $\bar{b}$*-ն և* $\bar{c}$*-ն հանդիսանում են B և C կետերի շառավիղ-վեկտորները։ Եթե ընդունենք, որ σ հարթությունը զուգահեռ է* $\bar{q}$*-ին և անցնում է A և B երկու կետերով, ապա (I 10) հավասարման մեջ կարելի է ընդունել* $\bar{p}=\bar{b}-\bar{a}$*.*

այն ժամանակ կստանանք. $\bar{r}=\bar{a}+(\bar{b}-\bar{a})\tau+\bar{q}\lambda$ ..... (I 11)

Սա A և B կետերով անցնող և $\bar{q}$*-ին զուգահեռ հարթության հավասարումն է։*

Իսկ այն հարթության հավասարումը, որ անցնում է A, B, C կետերով, մենք կստանանք, եթե (I 11) *հավասարման մեջ ընդունենք* $\bar{q} = \bar{c} - \bar{a}$: *Այն ժամանակ*

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{a} + (\bar{b} - \bar{a})\tau + (\bar{c} - \bar{a})\lambda \\ \text{կամ } \bar{r} &= \bar{a}(1 - \tau - \lambda) + \bar{b}\tau + \bar{c}\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (I\ 12)$$

Նկատենք, որ $\bar{a}$*-ի,* $\bar{b}$*-ի և* $\bar{c}$*-ի գործակիցների գումարը հավասար է մեկի:*

$\overline{OA}$*-ն,* $\overline{OB}$*-ն և* $\overline{OC}$*-ն (նկ. 43) ընդունելով որպես* OX, OY, OZ *կոօրդինատային առանցքներ (ընդհանուր դեպքում այդ կլինի կոօրդինատների շեղանկյուն սիստեմ) և մացնելով* $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ *միավոր վեկտորները, կունենանք՝*

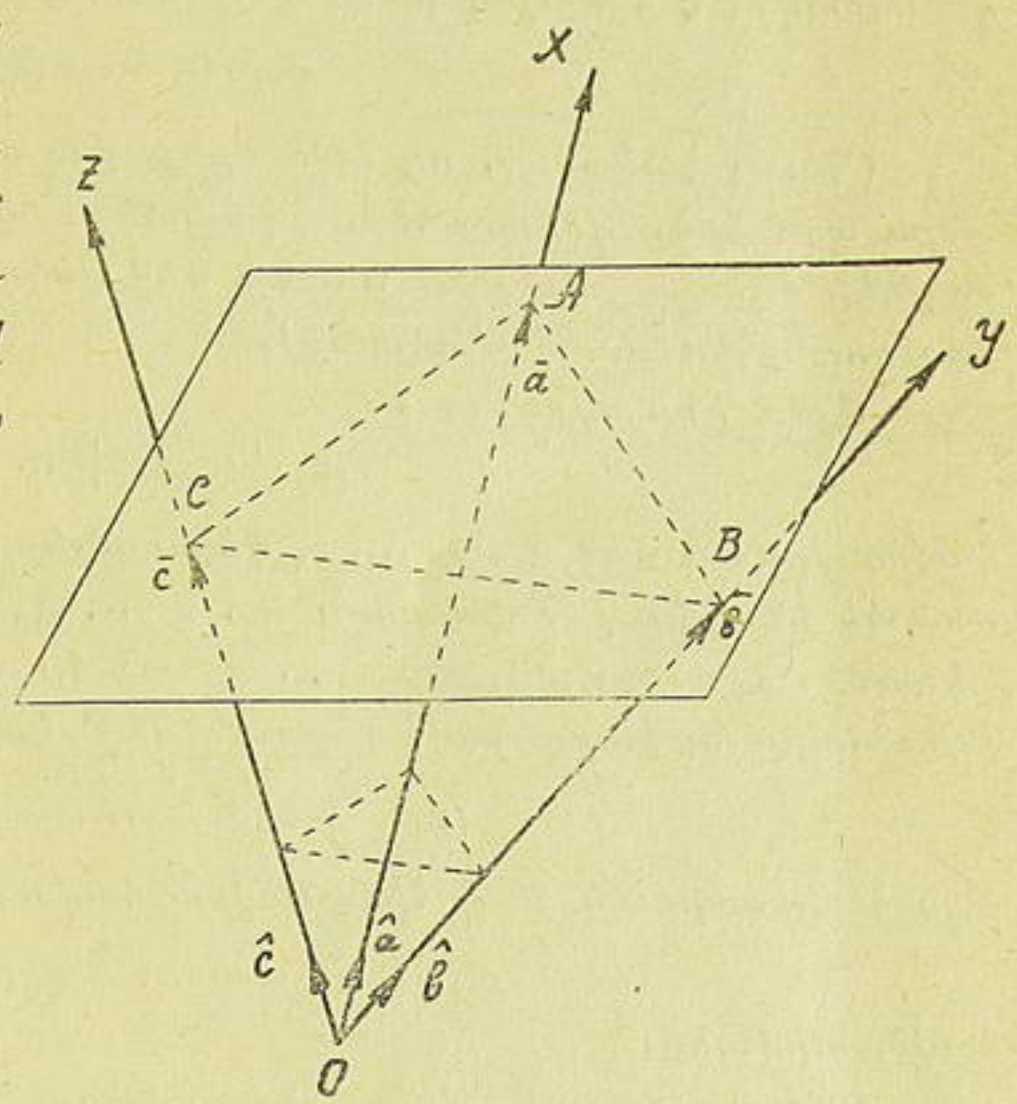
$$\bar{r} = \hat{a}a(1 - \tau - \lambda) + \hat{b}b\tau + \hat{c}c\lambda = x\hat{a} + y\hat{b} + z\hat{c}$$

այստեղ.

$$x = a(1 - \tau - \lambda),\ y = b\tau,\ z = c\lambda$$

Ակնհայտ է, որ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (I\ 13)$$



Նկ. 43

Իսկ սա հարթության հավասարումն է, այն a, b, c *հատվածների նկատմամբ, որ այդ հարթությունը հատում է* OA, OB, OC *առանցքների վրա:*

Եթե կոօրդինատային սիստեմի առանցքները չեն համընկնում OA, OB, OC *առանցքների հետ, այդ դեպքում* (I 13) *հավասարումն անհարմար է հարթության հավասարումը կոօրդինատային ձևով ստանալու համար: Այդ նպատակի համար անհարմար են նաև* (I 11) *և* (I 12) *հավասարումները (տես § 20,3⁰):*

§ 13. Վեկտորական հավասարման հավասարազոր լինելը 2 կամ 3 սկալար հավասարումների: *Հետագայում մենք առիթ կունենանք հանդիպելու հետևյալ տիպի վեկտորական հավասարումների՝*

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = 0, \ldots\ldots\ldots \qquad (I\ 14)$$

որոնց մեջ կարող են անհայտ լինել ինչպես $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n$, *վեկտորներից մի քանիսը, այնպես և* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *սկալար բազմապատկիչների մի մասը:*

Ցույց տանք, որ նայած այն բանին, թե $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորները դուգահեռ են, կոպլանար, թե ոչ կոպլանար,* (I 14) *հավասարումը հավասարազոր է մեկ, երկու կամ երեք սկալար հավասարումների:*

Մենք արդեն դիտենք, որ

1°. Եթե $\bar{a} \neq 0$, *ապա* $\alpha\bar{a} = 0$ *պայմանը հավասարազոր է* $\alpha = 0$ *պայմանին։*

2°. Եթե $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$ *և* $\bar{a}$*-ն զուգահեռ չէ* $\bar{b}$*-ին, ապա* $\bar{a} + \bar{b} \neq 0$։ *Ուստի* $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = 0$ *պայմանը հավասարազոր է* $\alpha = 0$ *և* $\beta = 0$ *երկու պայմաններին։*

3°. Եթե $\bar{a} \neq 0$, $\bar{b} \neq 0$, $\bar{c} \neq 0$ *և* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *և* $\bar{c}$ *վեկտորները կոպլանար չեն, ապա* $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \neq 0$, *և հետևաբար,* $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0$ *պայմանը հավասարազոր է հետևյալ երեք պայմաններին.*

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$$

(Պետք է նկատել, որ եթե երեք վեկտորներից երկուսը զուգահեռ են, ապա այդ երեք վեկտորները կոպլանար կլինեն։ Ուստի, եթե երեք վեկտորներ կոպլանար չեն, նրանց մեջ վեկտորներից որևէ երկուսը չեն կարող զուգահեռ լինել միմյանց)։

Այժմ ենթադրենք, թե

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{a}_n = 0 \quad \ldots\ldots \qquad (I\ 14)$$

հավասարման մեջ $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորները զուգահեռ են իրար։ Այն ժամանակ ընտրելով* $\bar{b}$ *վեկտորն* $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորներին զուգահեռ՝ կունենանք.* $\bar{a}_1 = \beta_1\bar{b}$, $\bar{a}_2 = \beta_2\bar{b} \ldots a_n = \beta_n\bar{b}$։ *Տեղադրելով այս արտահայտությունները նախորդ հավասարման մեջ՝ կստանանք.*

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n)\bar{b} = 0$$

Այս հավասարումն 1°-ի հիման վրա հավասարազոր է

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n = 0 \ldots \qquad (I\ 15)$$

հավասարմանը։

Եթե $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորները կոպլանար են, ապա* $\bar{b}$ *և* $\bar{c}$ *վեկտորներն ընտրելով այնպես, որ նրանք կոպլանար լինեն* $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորներին, կունենանք.*

$$\bar{a}_1 = \beta_1\bar{b} + \gamma_1\bar{c},\quad \bar{a}_2 = \beta_2\bar{b} + \gamma_2\bar{c},\ \ldots\ \bar{a}_n = \beta_n\bar{b} + \gamma_n\bar{c}$$

Այս արտահայտությունները տեղադրելով (I 14) *հավասարման մեջ՝ կստանանք.*

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n)\bar{b} + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \cdots + \alpha_n\gamma_n)\bar{c} = 0$$

Քանի որ ենթադրվում է, թե $\bar{b}$ *և* $\bar{c}$ *վեկտորները զուգահեռ չեն, ապա ըստ 2°-ի*

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n = 0\\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \cdots + \alpha_n\gamma_n = 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \qquad (I\ 16)$$

Վերջապես, եթե $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորները կոպլանար չեն, ապա, ընտրելով* $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ *ոչ կոպլանար վեկտորները, կստանանք*

$$\bar{a}_1 = \beta_1\bar{b} + \gamma_1\bar{c} + \delta_1\bar{d},\quad \bar{a}_2 = \beta_2\bar{b} + \gamma_2\bar{c} + \delta_2\bar{d},\ \ldots$$
$$\bar{a}_n = \beta_n\bar{b} + \gamma_n\bar{c} + \delta_n\bar{d},$$

և այդ դեպքում (I 14) *հավասարումը կգրվի հետևյալ ձևով.*

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n)\bar{b} + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \cdots + \alpha_n\gamma_n)\bar{c} +$$
$$+ (\alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \cdots + \alpha_n\delta_n)\bar{d} = 0$$

3°-ի հիման վրա այս հավասարումը հավասարազոր է հետևյալ երեք հավասարումներին.

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n&=0\\ \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\cdots+\alpha_n\gamma_n&=0\\ \alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2+\cdots+\alpha_n\delta_n&=0\end{aligned}\right\}\cdots \qquad (I\,17)$$

Այսպիսով մի վեկտորական հավասարումը՝

$$\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\cdots+\alpha_n\bar{a}_n=0,$$

հավասարազոր է՝

1) մեկ սկալար հավասարման, եթե $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորները զուգահեռ են իրար,*

2) երկու սկալար հավասարումների, եթե $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորները կոպլանար են,*

3) երեք սկալար հավասարումների, եթե $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ *վեկտորները ոչ կոպլանար են։*

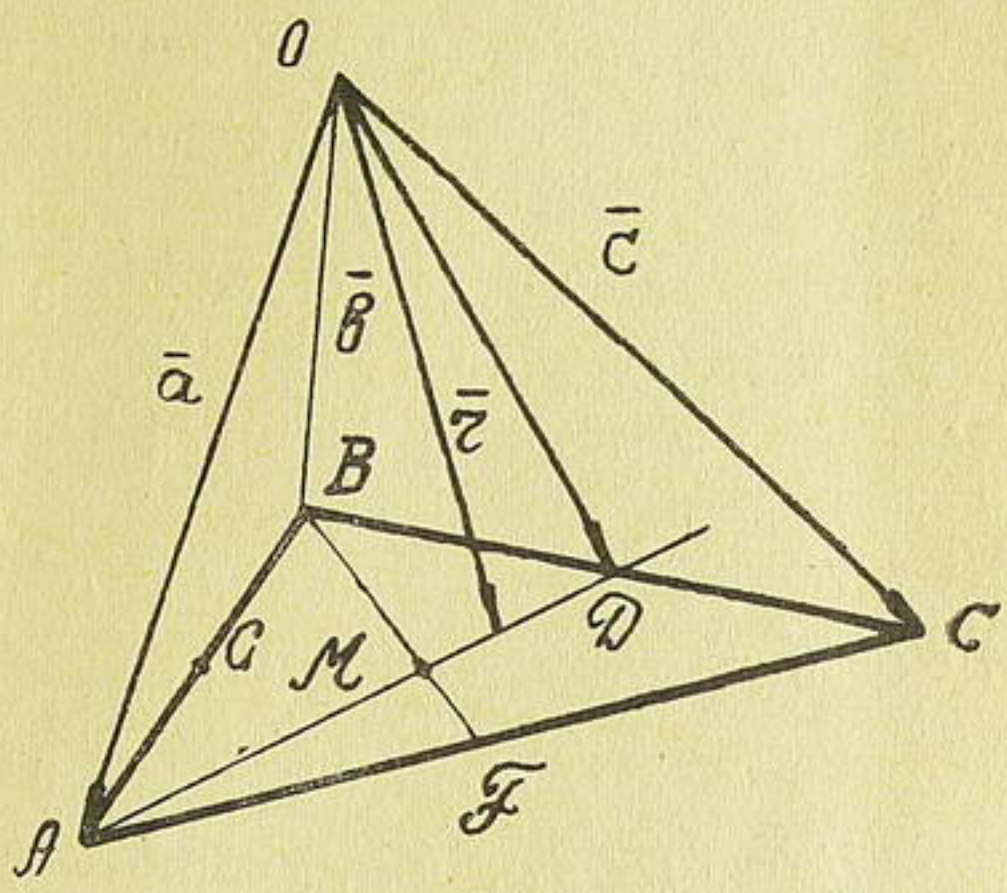
§ 14. Կիրառումներ։ *Մեր ստացած այս արդյունքների կիրառության վերաբերյալ մի օրինակ բերած լինելու համար ապացուցենք հետևյալ թեորեմը. եռանկյան երեք միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով բաժանվում են 2 : 1 հարաբերությամբ։*

Թող ABC *եռանկյունն լինի կամայորեն ընտրված մի եռանկյուն (նկ. 44), իսկ* O *մի կետ, որ չի գտնվում այդ եռանկյան հարթության վրա և մեր կողմից ընտրված է որպես շառավիղ վեկտորների սկզբնակետ։ Ընդունենք*

$\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$

եռանկյան BC, CA *և* AB *կողմերի միջնակետերը համապատասխանաբար նշանակելով* D, F *և* G *տառերով, կունենանք.*

$$\overline{OD}=\frac{\overline{OB}+\overline{OC}}{2}=\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$$



նկ. 44

Նույն եղանակով

$$\overline{OF}=\frac{\bar{c}+\bar{a}}{2}, \qquad \overline{OG}=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$$

AD *միջնագծի հավասարումը [որպես մի ուղիղ, որ անցնում է* A *և* D *կետերով (տես* I 7*)] կլինի*

$$\bar{r}=(1-\tau)\,\bar{a}+\tau\,\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2},$$

իսկ BF *և* CG *միջնագծերի հավասարումները կլինեն.*

$$\bar{\rho}=(1-\lambda)\,\bar{b}+\lambda\,\frac{\bar{c}+\bar{a}}{2}$$

$$\bar{l}=(1-\mu)\,\tau+\mu\,\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$$

Այս երեք արտահայտությունների մեջ τ*-ն,* λ*-ն և* μ*-ն պարամետրեր են, իսկ* $\bar{r}$*-ը,* $\bar{\rho}$*-ն և* $\bar{l}$*-ը* AD, BF *և* CG *միջնագծերի ընթացիկ կետերի շառավիղ-վեկտորներն են:*

Ակնհայտ է, որ AD, BF *և* CG *միջնագծերը զույգ առ զույգ հատվում են մեկը մյուսի հետ: Ա*D*-ի և* BF*-ի հատման կետում* $\bar{r}=\bar{\rho}$*, այնպես որ*

$$(1-\tau)\,\bar{a}+\tau\,\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}=(1-\lambda)\,\bar{b}+\lambda\,\frac{\bar{c}+\bar{a}}{2},$$

կամ

$$\bar{a}\left(1-\tau-\frac{\lambda}{2}\right)+\bar{b}\left(\frac{\tau}{2}-1+\lambda\right)+\bar{c}\left(\frac{\tau}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)=0$$

Իսկ քանի որ $\bar{a}$*-ն,* $\bar{b}$*-ն և* $\bar{c}$*-ն ոչ կոպլանար վեկտորներ են, ապա ըստ* (I 17-*ի*)

$$1-\tau-\frac{\lambda}{2}=0,\quad \frac{\tau}{2}-1+\lambda=0,\quad \frac{\tau}{2}-\frac{\lambda}{2}=0$$

AB*-ի և* BD*-ի հատման* M *կետում պարամետրերի արժեքներն են՝* $\tau=\lambda$, $\tau=\frac{2}{3}$, $\lambda=\frac{2}{3}$, *ուստի* M *կետում*

$$\bar{r}_M=\bar{\rho}_M=\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}$$

Այժմ նույն ձևով գտնում ենք, որ AD *և* CD *միջնագծերի հատման* N *կետում* τ *և* μ *պարամետրերի արժեքները կլինեն—*

$$\tau=\mu=\frac{2}{3},$$

իսկ այստեղից՝

$$\bar{r}_N=\bar{l}_N=\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}$$

Համեմատելով $\bar{r}_M$*-ի և* $\bar{r}_N$*-ի համար ստացված արտահայտությունները, համոզվում ենք, որ* M *և* N *կետերը համընկնում են, այսինքն՝ երեք միջնագծերը հատվում են մի կետում:*

Թեորեմի երկրորդ մասն ապացուցելու համար հաշվենք $\overline{AD}$ *միջնագծի* $\overline{AM}$ *և* $\overline{MD}$ *մասերը.*

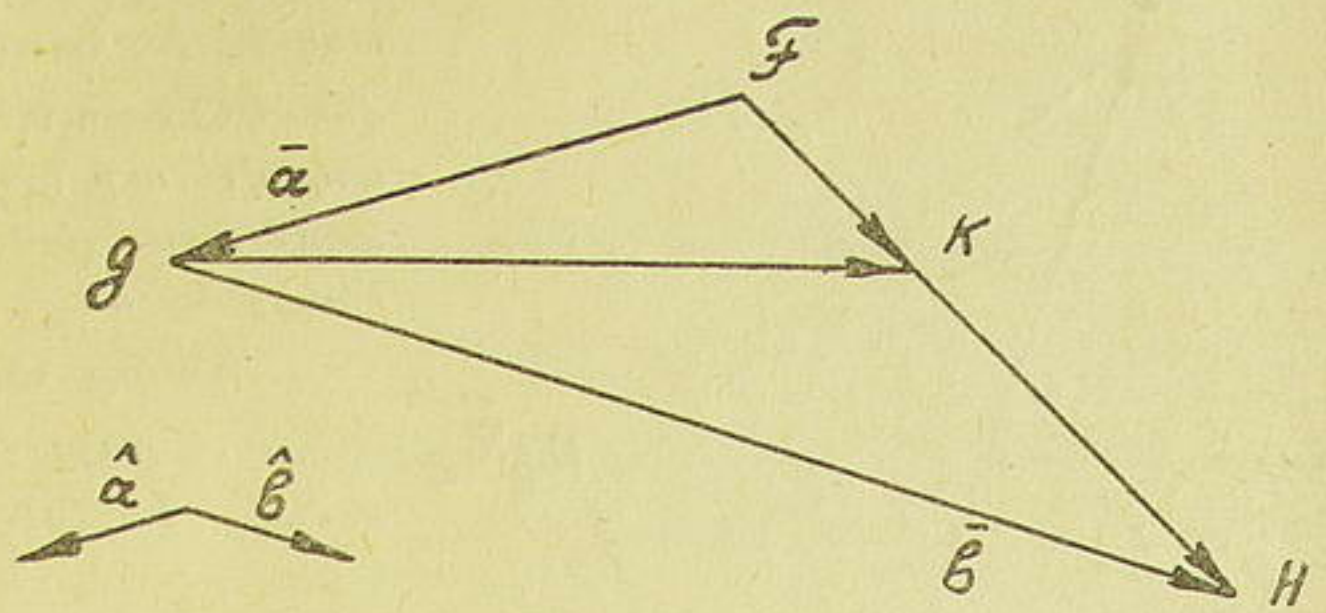
$$\overline{AM}=\bar{r}_M-\bar{a}=\frac{\bar{b}+\bar{c}-2\bar{a}}{3},\quad \overline{MD}=\overline{OD}-\bar{r}_M=$$

$$=\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}-\frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}{3}=\frac{\bar{b}+\bar{c}-2\bar{a}}{6}$$

Այստեղից ուղղակի հետևում է, որ $\overline{AM}=2\overline{MD}$*:*

Մեկ ուրիշ օրինակ: Ինչպես հայտնի է, GK *կիսողը (նկ. 45)* FH

կողմը բաժանում է FK *և* KH *մասերի, որոնք համեմատական են* GF *և* GH *կողմերին, այսինքն՝* $\frac{FK}{KH}=\frac{GF}{GH}$: *Ապացուցենք այդ:*



Նկ. 45

Դիցուք $\overline{FG}=\bar{a}$, $\overline{GH}=\bar{b}$: *Ունենք* $\overline{FG}+\overline{GK}=\overline{FK}$, $\overline{FH}=\bar{a}+\bar{b}$: *Քանի որ կիսաողն* FGH *անկյունը բաժանում է երկու հավասար մասերի, ապա նա հանդիսանում է մի շեղանկյան անկյունագիծ, որի երկու կողմերի ուղղություններն են* $\overline{GF}$*-ը և* $\overline{GH}$*-ը: Շեղանկյան կողմերն ընդունելով հավասար միավորի՝ կստանանք* $\overline{GK}=x(\hat{b}-\hat{a})=x\left(\frac{\bar{b}}{b}-\frac{\bar{a}}{a}\right)$, *ուր* x *գործակիցը դեռ անհայտ է և պետք է որոշվի: Մյուս կողմից՝* $\overline{FK}=y\overline{FH}=y(\bar{a}+\bar{b})$: *Ակնհայտ է, որ* y*-ը կանոնավոր կոտորակ է.* $\overline{KH}=(1-y)(\bar{a}+\bar{b})$:

$\overline{GK}$*-ի և* $\overline{FK}$*-ի արտահայտությունները տեղադրելով* $\overline{FG}+\overline{GK}=\overline{FK}$ *հավասարության մեջ՝ կստանանք.*

$$\bar{a}+x\left(\frac{\bar{b}}{b}-\frac{\bar{a}}{a}\right)=y(\bar{a}+\bar{b}),$$

կամ

$$\bar{a}\left(1-\frac{x}{a}-y\right)=\bar{b}\left(y-\frac{x}{b}\right)$$

Քանի որ $\bar{a}$*-ն և* $\bar{b}$*-ն իրար զուգահեռ չեն, ապա այս հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ յուրաքանչյուր մասն առանձին վերցրած հավասար է զերոյի, այսինքն՝*

$$1-\frac{x}{a}-y=0,\quad y-\frac{x}{b}=0$$

այստեղից

$$x=\frac{ab}{a+b},\quad y=\frac{a}{a+b},\quad 1-y=\frac{b}{a+b}$$

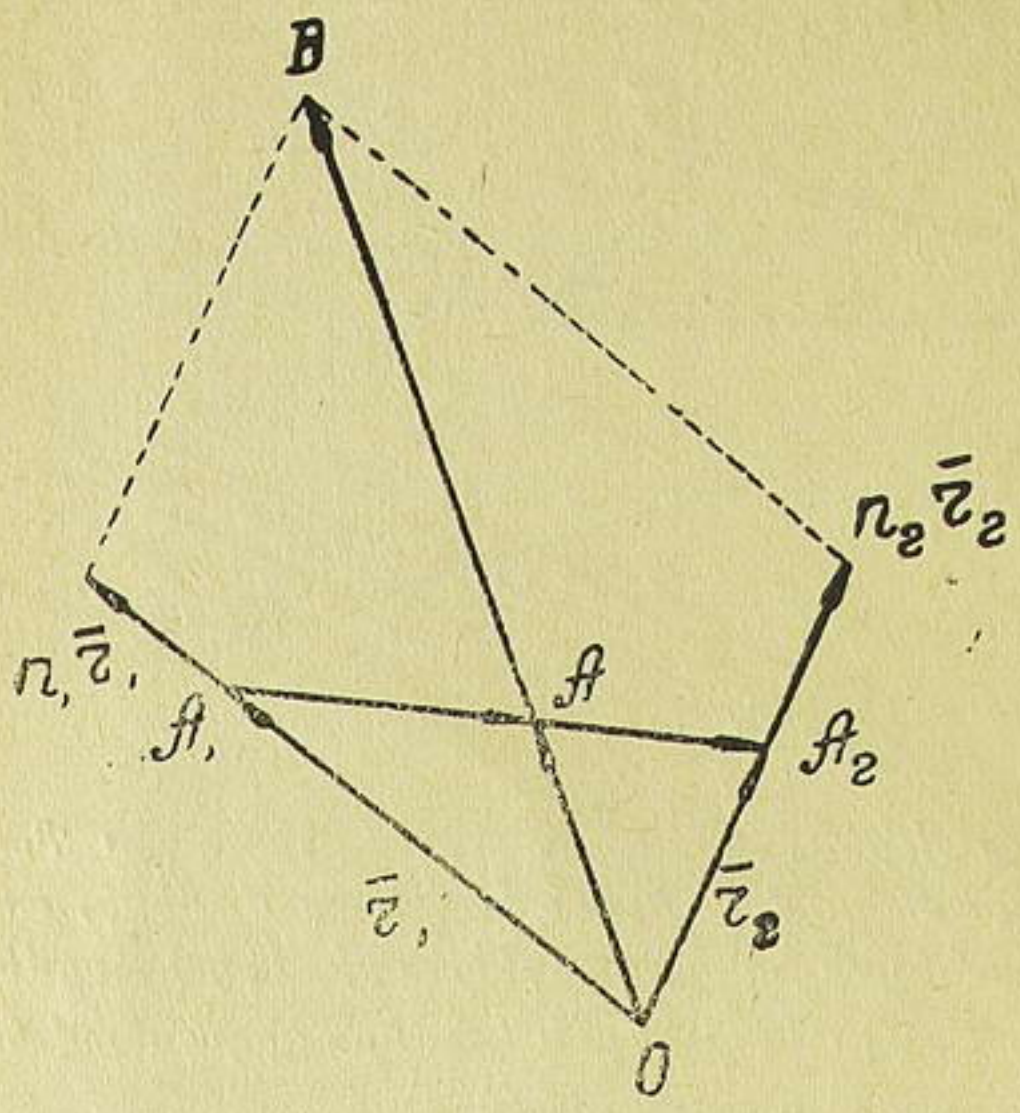
Այսպիսով $\overline{FK}:\overline{KH}=\frac{a}{a+b}:\frac{b}{a+b}$,

կամ, քանի որ $\overline{FK}\uparrow\uparrow\overline{KH}$,

$$FK:KH=a:b=FG:GH,$$

ինչ որ պահանջվում է ապացուցել:

Հեռևյալ խնդիրը հետաքրքիր է իր կիրառություններով։ Տրված են երկու կետեր, A_1 և A_2, որոնց շառավիղ-վեկտորները՝ $\bar{r}_1=\overline{OA_1}$, $\bar{r}_2=\overline{OA_2}$ (նկ. 46)։ Որոշել այն A կետը, որտեղ A_1A_2 հատվածը հատվում է $\overline{OB}=n_1\bar{r}_1+n_2\bar{r}_2$ վեկտորով, ուր n_1-ը և n_2-ը կամայորեն ընտրված գործակիցներ են։



Նկ. 46

Ունենք $\overline{OA}=\overline{OA_1}+\overline{A_1A}$, *բայց* $\overline{OA}\parallel\overline{OB}$, *ուստի և* $\overline{OA}=y\overline{OB}=y(n_1\bar{r}_1+n_2\bar{r}_2)$։ *Նույն կերպ՝ քանի որ* $\overline{A_1A}\parallel\overline{A_1A_2}$, *ապա* $\overline{A_1A}=u\overline{A_1A_2}=u(\bar{r}_2-\bar{r}_1)$։ *Այսպիսով* $\overline{OA}=y(n_1r_1+n_2r_2)=\bar{r}_1+u(\bar{r}_2-\bar{r}_1)$։ *Այստեղից՝* $\bar{r}_1(yn_1-1+u)=\bar{r}_2(u-yn_2)$։ *Քանի որ* $\bar{r}_1$-ը և $\bar{r}_2$-ը զուգահեռ չեն, *ապա վերոհիշյալ հավասարման յուրաքանչյուր մասն առանձին զերոյական հավասար է զերոյի, այսինքն՝*

$$(yn_1-1+u)=0,\quad u-yn_2=0$$

Այստեղից u-ն կստանանք՝

$y(n_1+n_2)=1$, *կամ* $y=\dfrac{1}{n_1+n_2}$, *այստեղից*

$$u=\frac{n_2}{n_1+n_2}.$$

$$\overline{A_1A}=\frac{n_2}{n_1+n_2}-\overline{A_1A_2},\quad \overline{OA}=\frac{n_1\bar{r}_1+n_2\bar{r}_2}{n_1+n_2}.$$

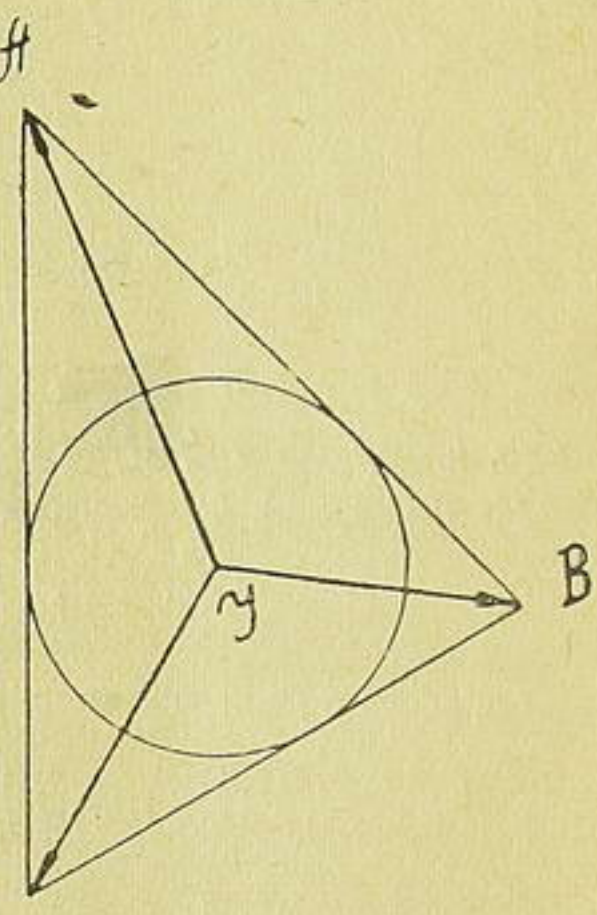
Խնդիրներ

1. Որոշել, թե ինչ հարաբերությամբ են բաժանվում սեղանի անկյունագծերն իրենց հատման կետում։

2. Ապացուցել, որ եռանկյան երեք կիսողները հատվում են մի կետում։

3. a-ն, b-ն և c-ն եռանկյան կողմերն են, որոնք գտնվում են A, B և C գագաթների դիմաց (նկ. 47)։ I-ն եռանկյան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է։ Ցույց տալ, որ

$$a\overline{IA}+b\overline{IB}+c\overline{IC}=0,$$



Նկ. 47

4. Ապացուցել, որ զուգահեռագծի անկյունագծերն իրենց հատման կետում կիսվում են։

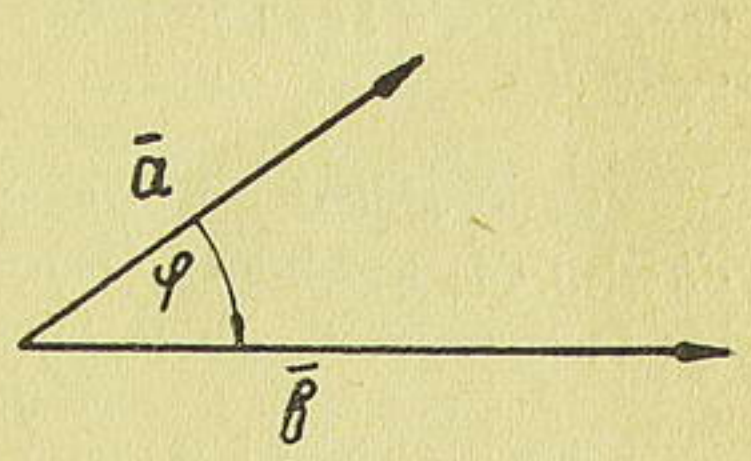
5. Ապացուցել, որ կամայորեն վերցված զուգահեռանիստի երեք անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով բաժանվում են հավասար մասերի։

ԳԼՈՒԽ II

ԵՐԿՈՒ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ

ԵՐԿՈՒ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՍԿԱԼԱՐ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ

§ 15. Սկալար արտադրյալի սահմանումը եվ հատկությունները։ *Դիցուք տրված են* $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորները (նկ. 48), որոնք կազմում են* $\varphi=(\bar{a}, \bar{b})$ *անկյունը։ Այդ վեկտորներից մի սկալար արտադրյալ կոչվում է* c*-սկալարը, որի թվական արժեքը հավասար է* $|ab|\cos(\bar{a}, \bar{b})$*։ Պայմանավորվելով վեկտորների սկալար բազմապատկումը նշանակել բազմապատկիչների միջև մի կետ դնելով՝* $(\bar{a}\cdot\bar{b})$*, կստանանք*



նկ. 48

$$c=\bar{a}\cdot\bar{b}=|ab|\cos(\bar{a}, \bar{b}); \quad \ldots\ldots \quad (II\ 1)$$

Որպես երկու վեկտորների չափերի արտադրյալ՝ $|ab|$*-ն միշտ դրական է, ուստի սկալար արտադրյալի նշանը որոշվում է միմիայն* $(\bar{a}, \bar{b})$ *անկյունով։*

$$\text{Եթե } (\bar{a}, \bar{b})<\frac{\pi}{2},\ \cos(\bar{a}, \bar{b})>0,\ \bar{a}\cdot\bar{b}>0$$

$$(\bar{a}, \bar{b})>\frac{\pi}{2},\ \cos(\bar{a}, \bar{b})<0,\ \bar{a}\cdot\bar{b}<0$$

$$\bar{a}\perp\bar{b},\ \cos(\bar{a}, \bar{b})=0,\ \bar{a}\cdot\bar{b}=0$$

Այսպիսով մեկը մյուսին ուղղահայաց երկու վեկտորների սկալար արտադրյալը միշտ հավասար է զերոյի։

Բացի դրանից, սկալար արտադրյալը դառնում է զերո, երբ $|ab|=0$*, այսինքն՝ երբ* $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորներից մեկն ու մեկը կամ երկուսը միասին վերցրած հավասար են զերոյի։*

(II 1) *Սահմանումից հետևում է, որ թվաբանական և հանրահաշվական արտադրյալները հանդիսանում են սկալար արտադրյալի մասնավոր դեպքը։*

Եվ իրոք, եթե $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$*, ապա* $(\bar{a}, \bar{b})$ *անկյունը հավասար կլինի զերոյի և* $\bar{a}\cdot\bar{b}=|a\,b|=ab$*, այսինքն՝ այս դեպքում վեկտորների սկալար արտադրյալը վեր է ածվում այդ վեկտորների չափերի թվաբանական արտադրյալին։*

Իսկ եթե $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$*, ապա* $(\bar{a}, \bar{b})$ *անկյունը հավասար կլինի* π*-ի, և* $\bar{a}\cdot\bar{b}=-|ab|\cdot(-1)=-|ab|=ab$*։ այս դեպքում վեկտորների սկալար ար-*

տարբերությունը դառնում է այդ վեկտորների թվական արժեքների հանրահաշվական տարբերություն:

Անհրաժեշտ է առանձնակի կերպով նշել այն երկու դեպքերը, երբ սկալար արտադրյալի մեջ՝ 1^0 բազմապատկիչները հավասար են իրար, 2^0 բազմապատկիչները միավոր վեկտորներ են: Առաջին դեպքում պետք է ընդունել $\bar{b}=\bar{a}$: Քանի որ $(\bar{a}, \bar{a})$ անկյունը հավասար է զերոյի և $\cos(\bar{a}, \bar{a})=1$, ապա մենք կստանանք

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |a^2| = a^2 \qquad (II\,2)$$

Սովորաբար $\bar{a} \cdot \bar{a}$ արտադրյալը կոչվում է $\bar{a}$ վեկտորի քառակուսի և նշանակվում է $\bar{a}^2$: Այս նկատի ունենալով կարող ենք նաև գրել

$$\bar{a}^2 = |a^2| = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (II\,3)$$

Այսպես գրված արտահայտությունը նշանակում է, թե վեկտորի քառակուսին հավասար է իր թվական արժեքի քառակուսուն. կամ, որ նույնն է, իր չափի քառակուսուն: (II 3) բանաձևից հետևում է նույնպես, որ որևէ վեկտորի չափը հավասար է այդ վեկտորի քառակուսու քառակուսի արմատին

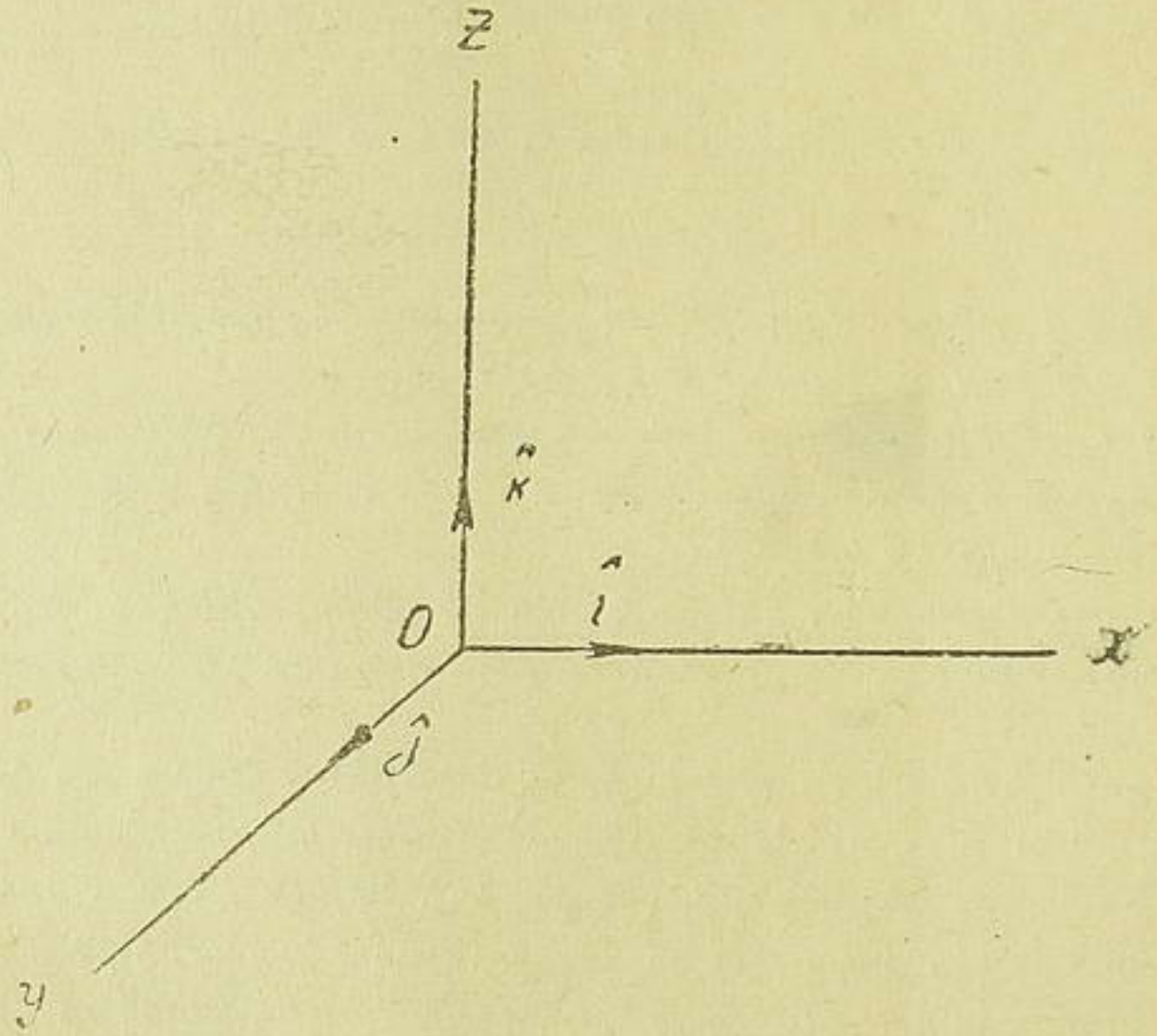
$$|a| = +\sqrt{\bar{a}^2}$$

Այժմ քննության առնենք այն դեպքը, երբ բազմապատկիչները միավոր վեկտորներն են ($\hat{a}$ և $\hat{b}$): Քանի որ $|\hat{a}|=1$ և $|\hat{b}|=1$, ապա $|\hat{a}||\hat{b}| \cos(\hat{a}, \hat{b}) = \cos(\hat{a}, \hat{b})$: Ուստի

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(\hat{a}, \hat{b}) \quad . \quad . \quad . \qquad (II\,4)$$

OX, OY, OZ առանցքների դրական ուղղություններին համապատասխանաբար նշանակելով $\hat{i}$-ով, $\hat{j}$-ով և $\hat{k}$-ով (նկ. 49), կստանանք.

$$\left.\begin{aligned} &\hat{i} \cdot \hat{j} = 0, \quad \hat{j} \cdot \hat{k} = 0, \quad \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \\ &\hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \quad \hat{j} \cdot \hat{j} = 1, \quad \hat{k}\hat{k} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (II\,5)$$



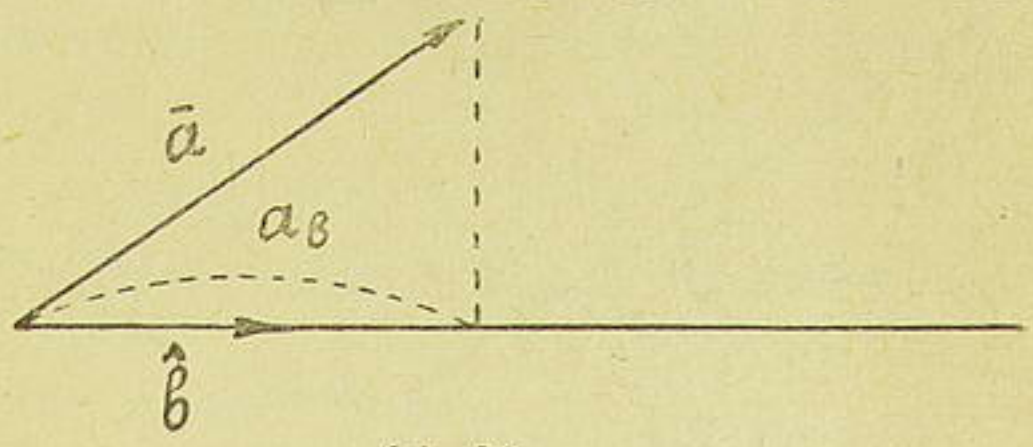
Նկ. 49

Վերջապես, երբ բազմապատկիչներից մեկը միավոր վեկտոր է, օրինակ՝ $\hat{b}$, մենք կունենանք

$$\bar{a}\cdot\hat{b}=|a|\cos(\bar{a},\ \hat{b}),\ \ldots\ldots\ldots \quad (II\ 6)$$

քանի որ $|\hat{b}|=1$: Բայց, ինչպես հայտնի է, $|a|\cos(\bar{a},\ \hat{b})$-ն $\bar{a}$ վեկտորի պրոեկցիան է $\hat{b}$ ուղղության վրա (նկ. 50): Այդ պրոեկցիան նշանակելով a_b-ով՝ կարող ենք (II 6) հավասարությունն արտագրել այսպես.

$$a_b=\bar{a}\cdot\hat{b},\ \ldots\ldots \quad (II\ 7)$$



նկ. 50

Այսինքն՝ $\bar{a}$ վեկտորի պրոեկցիան $\hat{b}$-ին համաուղղահեռ առանցքի վրա, հավասար է $\bar{a}\cdot\hat{b}$ սկալար արտադրյալին:

Վեկտորի որևէ առանցքի վրա վերցրած պրոեկցիան կարելի է կապակցել սկալար արտադրյալի հետ նաև այն դեպքում, երբ բազմապատկիչներից ոչ մեկը միավոր վեկտոր չէ: $\bar{a}$-ի պրոեկցիան $\bar{b}$-ին համաուղղահեռ առանցքի վրա նշանակենք a_b-ով,

$$a_b=|a|\cos(\bar{a},\ \bar{b}).$$

ունենք

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|ab|\cos(\bar{a},\ \bar{b})=|b|[\,|a|\cos(\bar{a},\bar{b})]=ba_b\ldots\ldots \quad (II\ 8)$$

§ 16. Սկալար արտադրյալի հատկությունները (շարունակություն): *Օգտվելով մեր ստացած այս երեք բանաձևերով (II 1, II 7, II 8), կարելի է եւս մեկ երեք սկալար արտադրյալի մի քանի խիստ կարևոր հատկությունները.*

ա. Սկալար արտադրյալը չի փոխվի, եթե փոխելու լինենք նրա բազմապատկիչների տեղերը, այսինքն՝

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}:\ \ldots\ldots\ldots \quad (II\ 9)$$

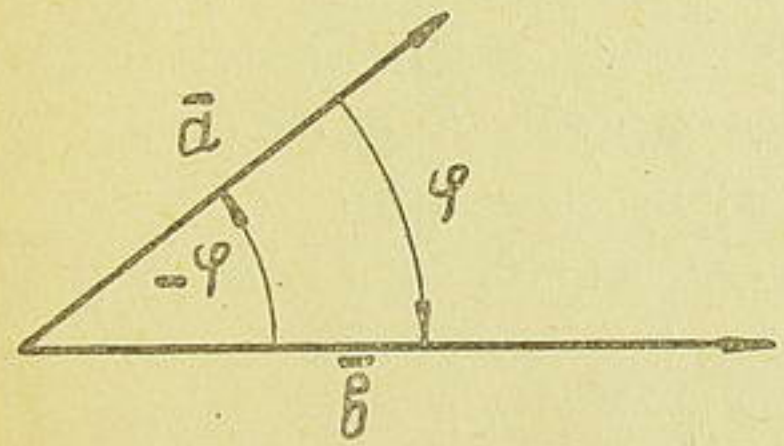
Եվ իրոք

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|ab|\cos(\bar{a},\ \bar{b}) \quad (II\ 9ա)$$

$$\bar{b}\cdot\bar{a}=|ba|\cos(\bar{b}\cdot\bar{a}). \quad (II\ 9բ)$$

Սակայն եթե $(\bar{a},\ \bar{b})=\varphi$, ապա $(\bar{b}\cdot\bar{a})=-\varphi$ (նկ. 51): Իսկ քանի որ $\cos\varphi=\cos(-\varphi)$, ապա (II 9ա) և (II 9բ) հավասարությունների աջ մասերն իրար հավասար են, հետևաբար, հավասար կլինեն նաև ձախ մասերը, այն է՝

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$$



նկ. 51

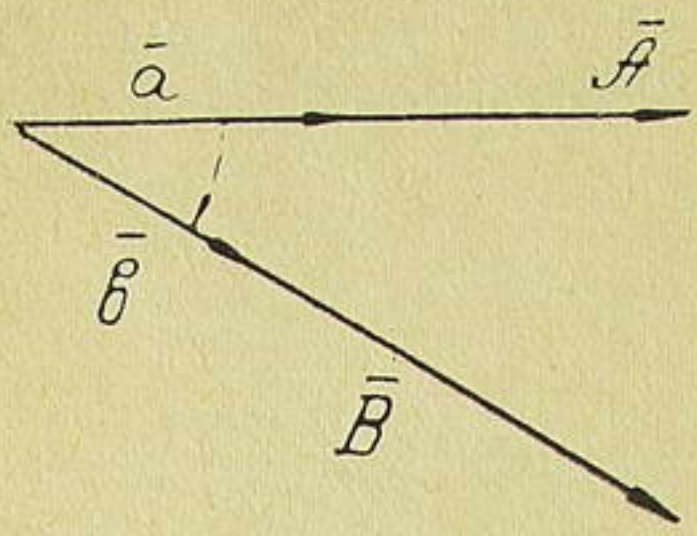
բ. Եթե $\overline{A}=m\bar{a}$, $\overline{B}=n\bar{b}$, ապա

$$\overline{A}\cdot\overline{B}=mn\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b}):\ \ldots\ldots \quad (II\ 10)$$

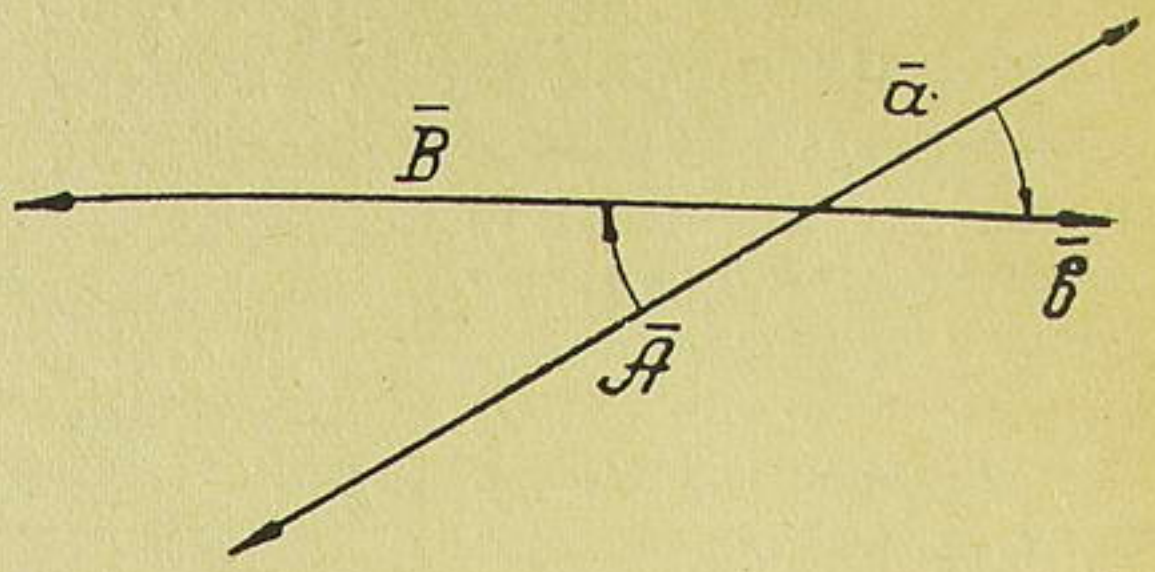
Այստեղ m-ը և n-ը կամայական ընտրված դրական թվեր են, որոնք կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես և բացասական:

(II 10) *հավասարության ճշտությունն ապացուցելու համար որոշենք*

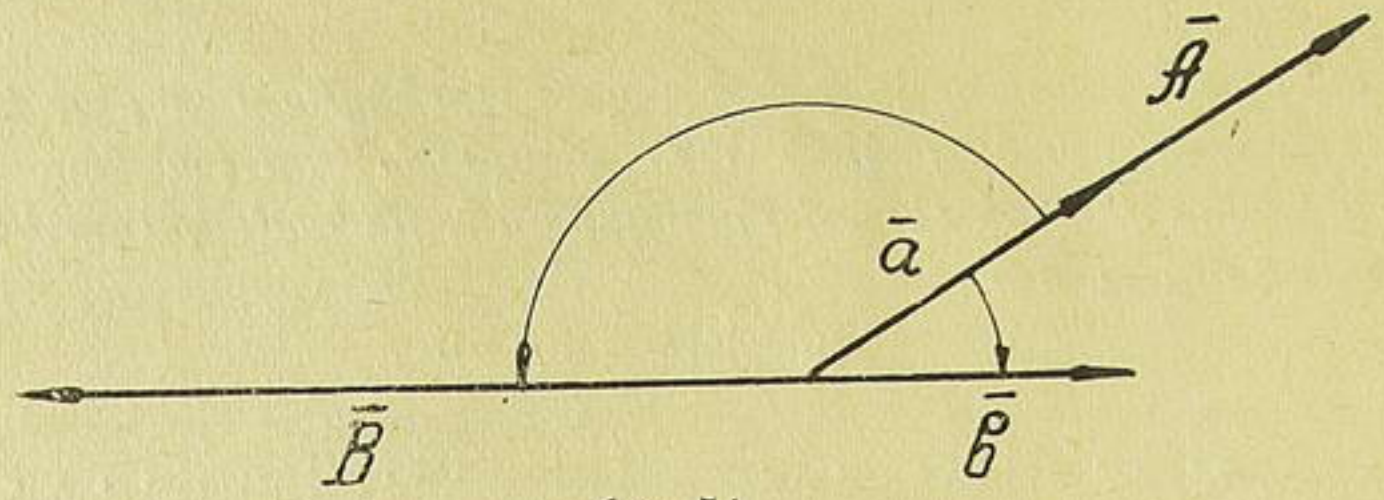
$(\bar{A}, \bar{B})$ և $(\bar{a}, \bar{b})$ *անկյունների առնչությունը* m և n *գործակիցների նշաններից կախված (նկ. 52—55)։*



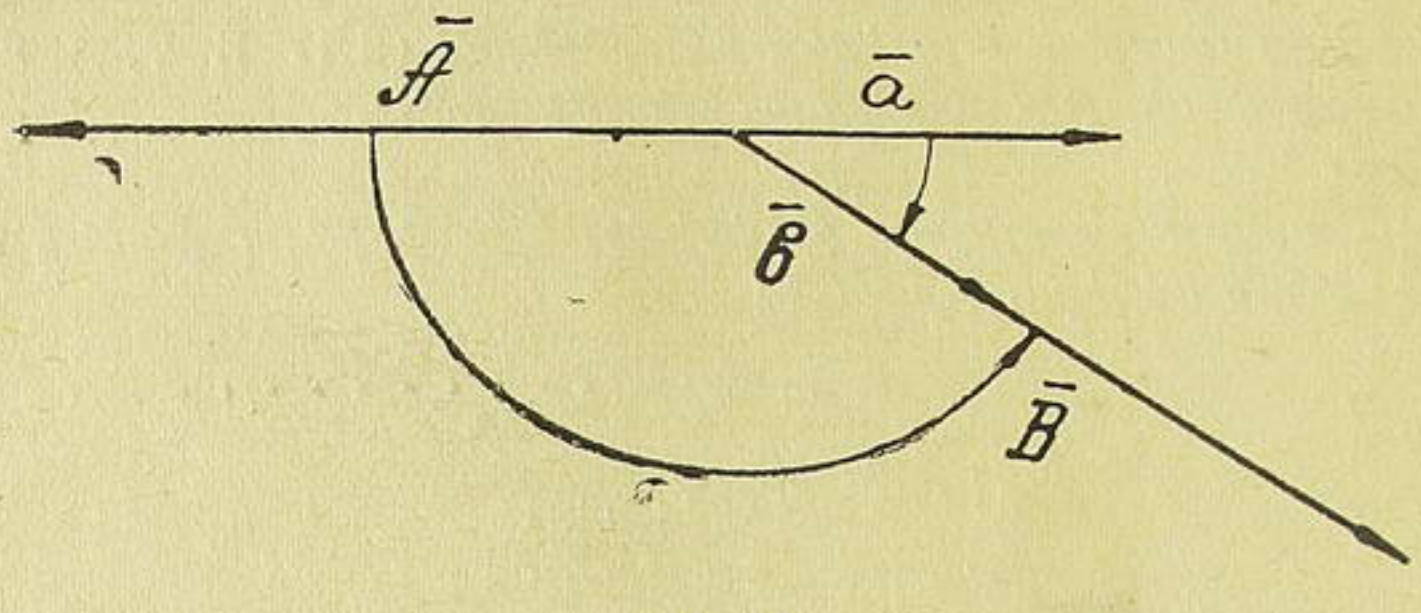
Նկ. 52



Նկ. 53



Նկ. 54



Նկ. 55

1°. Եթե $m>0$, $n>0$ *(նկ. 52), ապա* $mn>0$, *և* $(\bar{A}, \bar{B})=(\bar{a}, \bar{b})$,

2°. Եթե $m<0$, $n<0$ *(նկ. 53), ապա* $mn>0$, *և* $(\bar{A}, \bar{B})=(\bar{a}, \bar{b})$,

3°. Եթե $m>0$, $n<0$ *(նկ. 54), ապա* $mn<0$, *և* $(\bar{A}, \bar{B}) = \pi - (\bar{a}, \bar{b}) \cdot \cos(\bar{A}, \bar{B}) = -\cos(\bar{a}, \bar{b})$,

4°. Եթե $m<0$, $n>0$ *(նկ. 55), ապա* $mn<0$, *և* $(\bar{A}, \bar{B})=\pi - (\bar{a}, \bar{b}) \cdot \cos(\bar{A}, \bar{B}) = -\cos(\bar{a}, \bar{b})$։

Համաձայն սկալար արտադրյալի սահմանման

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |AB| \cos(A_1 B)$$

Սակայն

$$|AB| = |ma \cdot nb| = |mn|\,|ab|$$

Հետևաբար,

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |mn|\,|ab| \cos(\bar{A}, \bar{B})$$

1° և 2° դեպքերում, երբ $mn > 0$ *և* $\cos(\bar{A}, \bar{B}) = \cos(\bar{a}, \bar{b})$, *կունենանք*

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = mn\,|ab| \cos(\bar{a}, \bar{b}) \quad \ldots \quad (II\ 10ա)$$

Ինչ վերաբերում է 3° և 4° դեպքերին, երբ $\cos(\bar{A}, \bar{B}) = -\cos(\bar{a}, \bar{b})$ $mn < 0$, *այսինքն՝* $|mn| = -mn$, *ապա*

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = -mn\,|a \cdot b|\,[-\cos(\bar{a}, \bar{b})] = mn\,|ab| \cos(\bar{a}, \bar{b})$$

Հետևաբար բոլոր հնարավոր դեպքերում տեղի ունի (II 10ա) հավասարությունը։ Սակայն

$$|ab| \cos(\bar{a}_1\, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Այսպիսով ամեն դեպքում

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = mn\,(\bar{a} \cdot \bar{b})$$

Սրանից հետևում է, որ եթե $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորներն արտահայտված են միավոր վեկտորների միջոցով՝* $\bar{a} = a\hat{a}$, $\bar{b} = b\hat{b}$, *ապա նրանց սկալար արտադրյալը կգրվի այսպես.*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\,(\hat{a} \cdot \hat{b}),$$

ուր ab*-ն վեկտորների թվական արժեքների արտադրյալն է։*

գ. Դիցուք

$$\bar{b} = \bar{c} + \bar{l}$$

Այն ժամանակ

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\bar{c} + \bar{l})$$

Ապացուցենք, որ

$$\bar{a} \cdot (\bar{c} + \bar{l}) = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{l}$$

Եվ իրոք, համաձայն (II 8) բանաձևի $\bar{a} \cdot \bar{b} = |a|\, b_a$, *ուր* b_a*-ն* b*-ի պրոեկցիան է* $\bar{a}$ *վեկտորի ուղղության վրա։ Քանի որ գումարի պրոեկցիան հավասար է գումարելիների պրոեկցիաների գումարին, այսինքն՝* $b_a = c_a + l_a$ *ապա* $|a|\, b_a = |a|\, c_a + |a|\, l_a$. *Սակայն ըստ (II 8)-ի* $|a|\, c_a = \bar{a} \cdot \bar{c}$, $|a|\, l_a = \bar{a} \cdot \bar{l}$, *ուստի,*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{l}$$

կամ

$$\bar{a} \cdot (\bar{c} + l) = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{l} \quad \ldots \quad (II\ 11)$$

Եթե սկալար արտադրյալի առաջին բազմապատկիչն է ներկայացնում մի քանի վեկտորների գումար, օրինակ՝ $\bar{a} = \bar{p} + \bar{q}$, *ապա նկատի ունենալով, որ* $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$, *ըստ (II 11)-ի կստանանք*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = b \cdot (\bar{p} + \bar{q}) = \bar{b} \cdot \bar{p} + \bar{b} \cdot \bar{q} = \bar{p} \cdot \bar{b} + \bar{q} \cdot \bar{b}$$

Այսպիսով

$$(\bar{p} + \bar{q}) \cdot \bar{b} = \bar{p} \cdot \bar{b} + \bar{q} \cdot \bar{b} \quad \ldots \quad (II\ 12)$$

Վերջապես ենթադրենք, թե սկալար արտադրյալի երկու բազմապատկիչներն էլ ներկայացնում են վեկտորների գումարներ. օրինակ՝ դիցուք ունենք

$$(\bar{p} + \bar{q}) \cdot (\bar{c} + \bar{b})$$

Այս արտադրյալը հաշվելու համար $\bar{p}+\bar{q}$ *գումարը նշանակենք* $\bar{a}$*-ով։ Ըստ* (II 11) *բ կունենանք.*

$$(\bar{p}+q)\,(\bar{c}+\bar{l})=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{l},$$

իսկ ըստ (II 12)*-բ*

$$\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{p}\cdot\bar{c}+\bar{q}\cdot\bar{c},\quad \bar{a}\cdot\bar{l}=\bar{p}\cdot\bar{l}+\bar{q}\cdot\bar{l}:$$

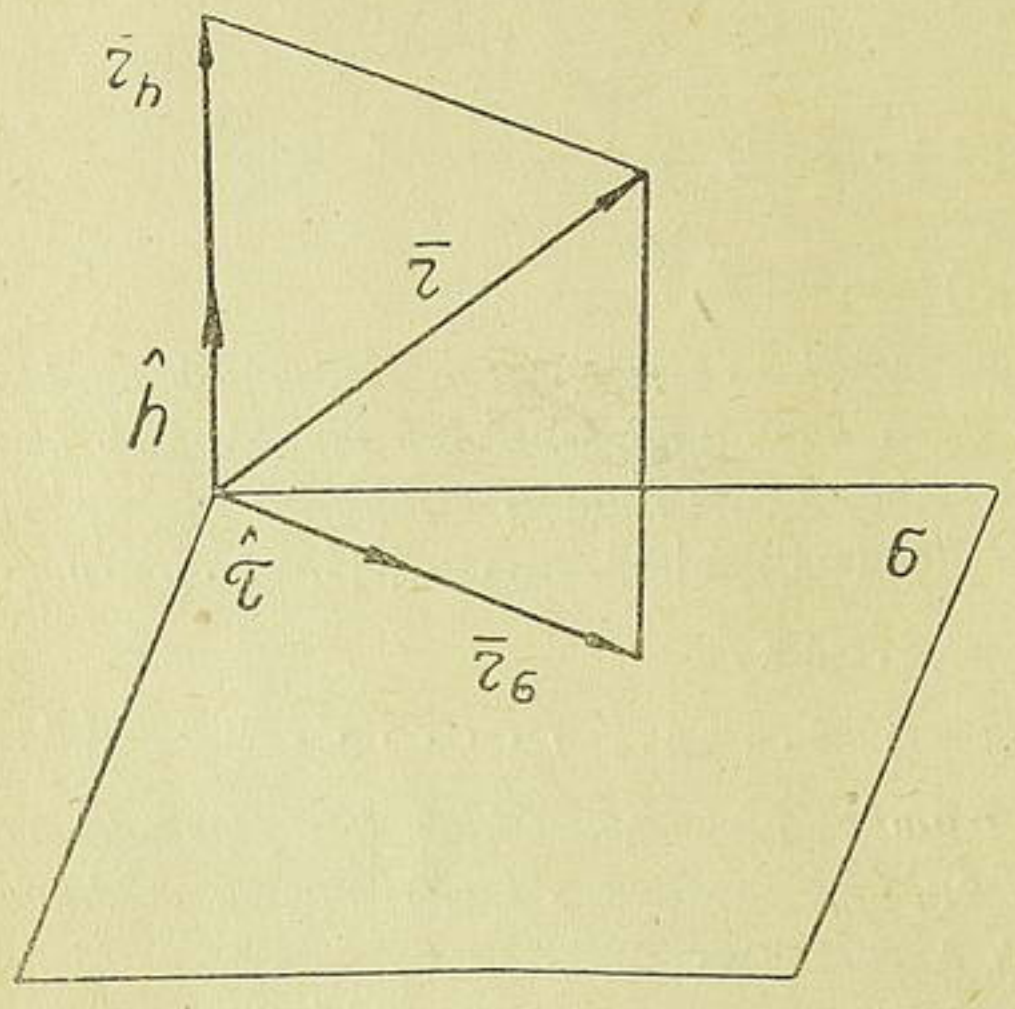
Այսպիսով.

$$(\bar{p}+\bar{q})\,(\bar{c}+\bar{l})=\bar{p}\cdot\bar{c}+\bar{q}\cdot\bar{c}+p\cdot\bar{l}+\bar{q}\cdot\bar{l}:\ .\ .\ .\ .\ .\ .\qquad (II\ 13)$$

Մեր ստացած (II 11), (II 12) *և* (II 13) *ֆորմուլները ցույց են տալիս, որ երկու վեկտորների սկալար արտադրյալի մեջ փակագծերի հետ կատարված գործողությունները ոչնչով չեն տարբերվում հանրահաշվական կամ թվաբանական արտադրյալը հաշվելիս կատարվող նույնպիսի գործողություններից։*

Սկալար արտադրյալի այն հատկությունը, որ արտահայտվում է նախորդ երեք ֆորմուլներով, կոչվում է բաշխական հատկություն։

§ 17. Վեկտորի վերլուծումներ։ *Ցանկացած* $\bar{r}$ *վեկտորը կարելի է վերլուծել երկու կամ երեք բաղադրիչների։ Մենք այստեղ քննության կառնենք միայն ընդհանուր դեպքը, երբ վեկտորի բաղադրիչներն իրար հետ կազմում են պատահական անկյուններ, այլ այն դեպքերը, երբ բաղադրիչ վեկտորները փոխադարձ ուղղահայաց են։ Թող* $\bar{r}$ *վեկտորը վերլուծված լինի երկու փոխադարձ ուղղահայաց վեկտորների, որոնք են՝* $\bar{r}_h$*-ը և* $\bar{r}_\sigma$*-ն, ընդ որում* $\bar{r}_h$ *բաղադրիչը զուգահեռ է* $\hat{h}$*-ին, իսկ* $\bar{r}_\sigma$ *բաղադրիչը զուգահեռ է* σ *հարթությանը, և* $\sigma \perp \hat{h}$ *(նկ. 56)։* $\hat{\tau}$*-ով նշանակենք այն ուղիղի միավոր վեկտորը, որով իրար հետ հատվում են* σ *հարթությունը և այն հարթությունը, որ անցնում է* $\hat{h}$ *և* $\bar{r}$ *վեկտորներով։ Այն ժամանակ* $\bar{r}_\sigma \parallel \hat{\tau}$*։*



Նկ. 56

Հետևաբար միշտ կարելի է գտնել այնպիսի α *և* β *գործակիցներ, որ* $\bar{r}_h=\alpha\hat{h}$*.* $\bar{r}_\sigma=\beta\hat{\tau}$*, ուստի և*

$$\bar{r}=\bar{r}_h+\bar{r}_\sigma=\alpha\hat{h}+\beta\hat{\tau}\ .\ .\ .\qquad (II\ 14)$$

Որպեսզի որոշենք α*-ն և* β*-ն,* (II 14)*-ը բազմապատկենք նախ* $\hat{\tau}$*-ով, ապա* $\hat{h}$*-ով։ Քանի որ* $\hat{\tau} \perp \hat{h}$*,* $\hat{h}\cdot\hat{\tau}=\hat{\tau}\cdot\hat{h}=0$*, և մենք ստանում ենք*

$$\bar{r}\cdot\hat{h}=\alpha\cdot\hat{h}\cdot\hat{h},$$
$$r\cdot\hat{\tau}=\beta\hat{\tau}\cdot\hat{\tau},$$

Բայց միավոր վեկտորի քառակուսին հավասար է մեկի, ուստի $\hat{h}\cdot\hat{h}=1$ *և* $\hat{\tau}\cdot\hat{\tau}=1$*, իսկ* $\bar{r}\cdot\hat{h}$ *և* $\bar{r}\hat{\tau}$ *հանդիսանում են* $\bar{r}$ *վեկտորի* r_h *և* r_τ *պրոեկցիաները* $\hat{h}$ *և* $\hat{\tau}$ *ուղղություններին վրա։ Այսպիսով*

$$\bar{r}\cdot\hat{h}=r_h=\alpha$$
$$\bar{r}\cdot\hat{\tau}=r_\tau=\beta$$

Այսինքն՝ α գործակիցը հավասար է r̄-ի պրոեկցիային՝ ĥ ուղղության վրա, իսկ β գործակիցը r̄-ի պրոեկցիան է τ̂ ուղղության վրա։ α-ն և β-ն դրական են, եթե (r̄, ĥ) և (r̄, τ̂) անկյունները սուր են, իսկ եթե այդ անկյուններից մեկը բութ է, ապա համապատասխան գործակիցը բացասական է։ Այժմ (II 14)*-ը կարելի է գրել այսպես.*

$$\bar{r}=\hat{h}\,r_h+\hat{\tau}\,r_\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II\ 15)$$

Ամեն անգամ, երբ տվյալ առանցքին զուգահեռ բաղադրիչ վեկտորի մասին խոսելիս ցույց չեն տալիս մյուս բաղադրիչները, հասկանում են այն դեպքը, երբ վեկտորը վերլուծված է երկու բաղադրիչների, ընդ որում երկրորդ բաղադրիչն ուղղահայաց է առաջինին։ Այս դեպքում առանցքին զուգահեռ բաղադրիչը հավասար է առանցքի միավոր վեկտորին բազմապատկած վեկտորի պրոեկցիայով այդ առանցքի վրա։ Օրինակ, եթե առանցքը զուգահեռ է ĥ միավոր վեկտորին, ապա r̄ վեկտորի ĥ-ին զուգահեռ բաղադրիչը՝

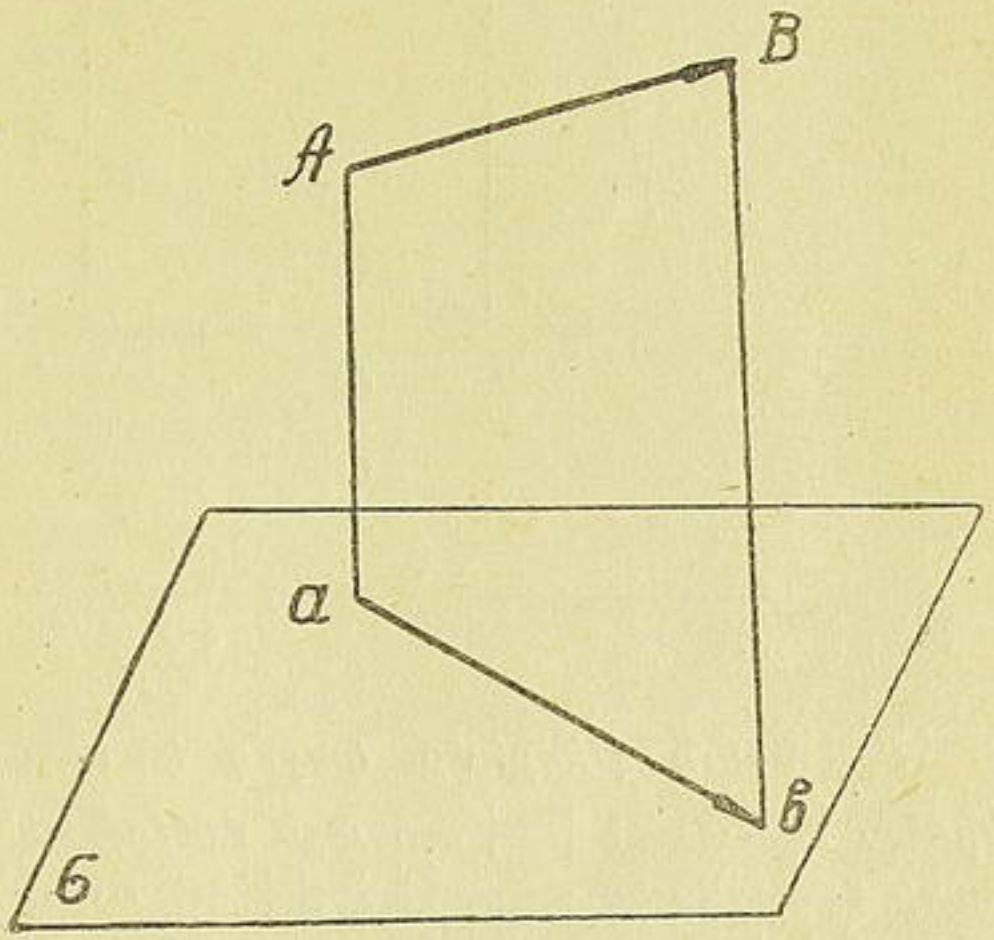
$$r_h=\hat{h}\,r_h, \text{ որ } r_h=\bar{r}\cdot\hat{h},$$

կամ

$$\bar{r}_h=\hat{h}\,(\bar{r}\cdot\hat{h}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II\ 16)$$

§ 18. Վեկտորի վերլուծումները (շարունակություն)։ *Ինչպես հայտնի է, A կետի պրոեկցիան σ հարթության վրա կոչվում է այն a կետը, որտեղ A կետից σ հարթության վրա իջեցրած ուղղահայացը հատվում է σ հարթության հետ* (նկ. 57)։

Եթե a-ն և b-ն հանդիսանում են $\overline{AB}$ վեկտորի սկզբի և վերջի պրոեկցիաները σ հարթության վրա, ապա $\overline{ab}$ վեկտորը կոչվում է $\overline{AB}$-ի պրոեկցիան σ հարթության վրա։



Նկ. 57

Ակնհայտ է, որ

ա) վեկտորի պրոեկցիաները միմյանց զուգահեռ հարթությունների վրա իրար հավասար են։

բ) Երբ σ հարթությունը զուգահեռ է r̄ վեկտորին, ապա վեկտորի $\bar{r}_\sigma$ պրոեկցիան σ հարթության վրա հավասար է իրեն՝ վեկտորին, այսինքն՝ $\bar{r}_\sigma=\bar{r}$

գ) r վեկտորի պրոեկցիան σ հարթության վրա հանդիսանում է այդ վեկտորի $\bar{r}_\sigma$ բաղադրիչն այն դեպքում, երբ նրա մյուս բաղադրիչը ($\bar{r}_h$) ուղղահայաց է σ հարթությանը։

Հետագայում պետք է լավ հիշել, որ վեկտորի պրոեկցիան առանցքի վրա սկալար է, իսկ վեկտորի պրոեկցիան հարթության վրա՝ վեկտոր է։

Քանի որ

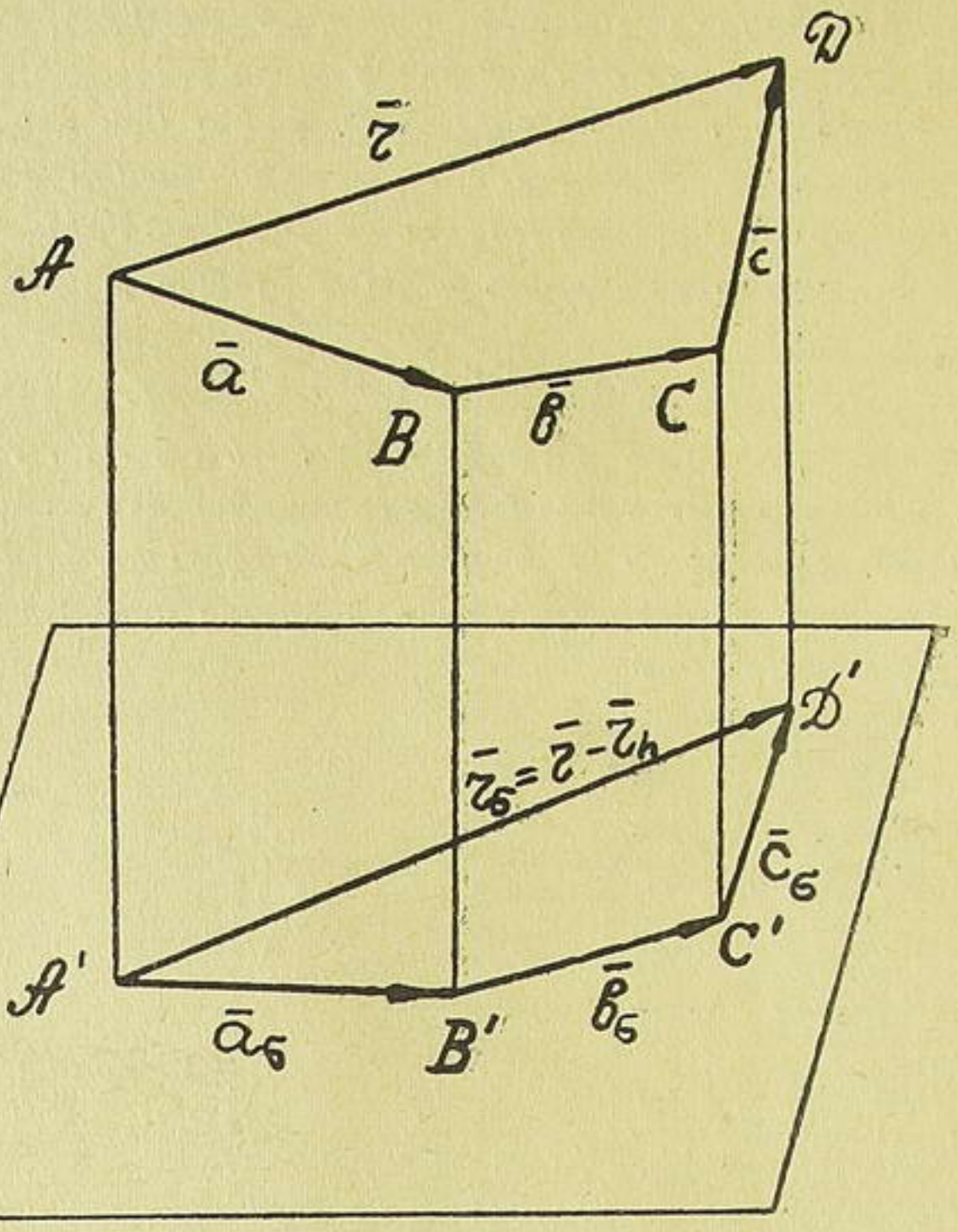
$$\bar{r}=\bar{r}_\sigma+\bar{r}_h,$$

ապա

$$\bar{r}_\sigma = \bar{r} - \bar{r}_h = \bar{r} - h\bar{r}_h,$$

այսինքն՝ վեկտորի $\bar{r}_\sigma$ պրոեկցիան հավասար է վեկտորի և նրա այն բազդրիչի տարբերությանը, որ ուղղահայաց է σ հարթությանը։

Վեկտորների գումարի պրոեկցիան հարթության վրա հավասար է գումարվող վեկտորների նույն հարթության վրա վերցրած պրոեկցիաների գումարին։ Այս իրողությունն անմիջականորեն հետևում է 58-րդ նկարից։



Նկ. 58

Այս նույն թեորեմը կարող է ապացուցվել նաև հետևյալ կերպ։ դիցուք, $\bar{r} = \overline{AD} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} \dots$ այն ժամանակ՝ $\bar{r}_h = \bar{a}_h + \bar{b}_h + \bar{c}_h + \dots$, ուր $\hat{h} \perp \sigma$։ Ուստի $\bar{r}_\sigma = A^1D^1 = \bar{r} - \bar{r}_h = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \dots) - (\bar{a}_h + \bar{b}_h + \bar{c}_h + \dots) = (\bar{a} - \bar{a}_h) + (\bar{b} - \bar{b}_h) + (\bar{c} - \bar{c}_h) + \dots = \bar{a}_\sigma + \bar{b}_\sigma + \bar{c}_\sigma + \dots$

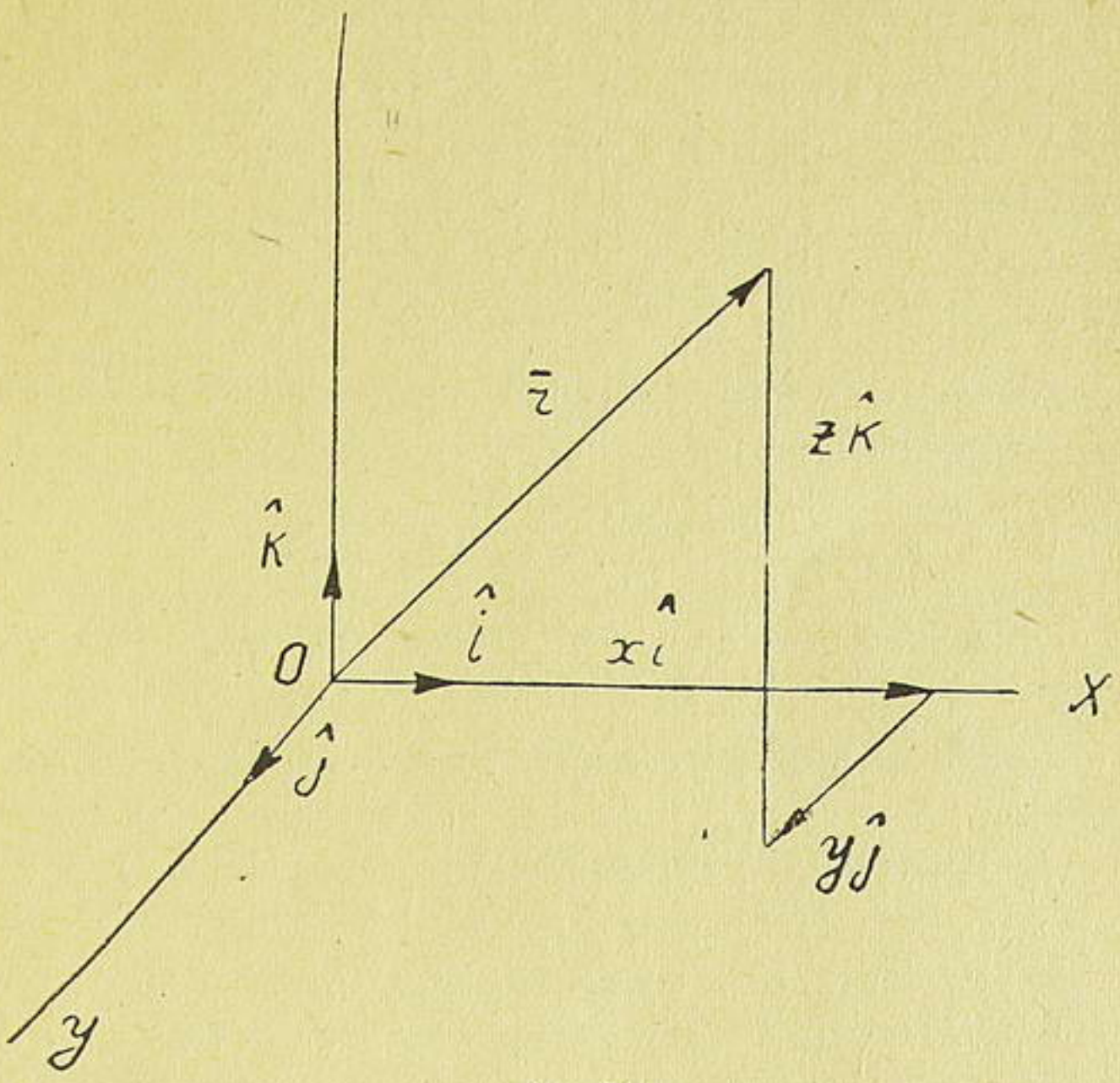
Վեկտորների գումարի պրոեկցիան հարթության վրա 0-ի հավասար է երկու դեպքում. ա) երբ վեկտորների գումարը հավասար է զերոյի, բ) երբ վեկտորների գումարն ուղղահայաց է այն հարթությանը, որի վրա պրոեկտվում է։

§ 19. Վեկտորի վերլուծումները. կոորդինատային արտահայտությունները։ *Այժմ ենթադրենք, թե $\bar{r}$-ը վերլուծված է երեք բաղադրիչների, որոնք զուգահեռ են ուղղանկյան կոորդինատային սիստեմի առանցքներին (նկ. 59)։*

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \dots\dots\dots \quad (\text{II } 17)$$

Գործակիցները որոշելու համար՝ նախորդ (II 17) *հավասարումը սկալար կերպով բազմապատկենք նախ î-ով, ապա ĵ-ով և k̂-ով։ Այդպես վարվելով կունենանք*

$$\bar{r} \cdot \hat{i} = x,$$



նկ. 59

որովհետև $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$, $\hat{j} \cdot \hat{i} = 0$ *և* $\hat{k} \cdot \hat{i} = 0$։ *Բայց* $\bar{r} \cdot \hat{i}$-*ն հանդիսանում է* $\bar{r}$-*ի պրոեկցիան* OX *առանցքի վրա. այդ պրոեկցիան կնշանակենք* r_x-*ով. կունենանք՝*

$$x = \bar{r} \cdot \hat{i} = r_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II 17ա)}$$

Նույն եղանակով (բազմապատկելով ĵ-ով և k̂-ով) կստանանք.

$$y = \bar{r} \cdot \hat{j} = r_y, \quad \text{(II 17բ)}$$

$$z = \bar{r} \cdot \hat{k} = r_z, \quad \text{(II 17գ)}$$

որ r_y-*ը և* r_z-*ը հանդիսանում են* $\bar{r}$ *վեկտորի պրոեկցիաները՝* OY *և* OZ *առանցքների վրա։ Գտնելով x-ի, y-ի և z-ի արժեքները, մենք կարող ենք* (II 17) *բանաձևը գրել այսպես.*

$$\left.\begin{aligned} &\bar{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k} \\ \text{կամ}\quad &\bar{r} = \hat{i}(\bar{r} \cdot \hat{i}) + \hat{j}(\bar{r} \cdot \hat{j}) + \hat{k}(\bar{r} \cdot \hat{k}) \end{aligned}\right\} \quad \text{(II 18)}$$

Այժմ մենք հեշտությամբ կարող ենք $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորների սկալար արտադրյալն արտահայտել նրանց* a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z *պրոեկցիաների միջոցով։ Եվ իրոք*

$$\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k},$$

$$\bar{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k},$$

և $\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$: Բանալով փակագծերը և աչքի առաջ ունենալով (ll 5) բանաձևը, կստանանք.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (ll\ 19$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $\bar{b} = \bar{a}$, մենք կունենանք.

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |a|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (ll\ 20$$

կամ $$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Այդ նույն եղանակով՝

$$\bar{b}^2 = |b|^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$$

կամ $$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

Այս պատճառով $\bar{a} \cdot \bar{b} = |ab| \cos(\bar{a}, \bar{b})$ հավասարումից ստանում ենք հետևյալ հայտնի բանաձևը.

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (ll\ 21)$$

Եթե $\bar{r}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ կամայորեն ընտրված վեկտորների փոխարեն վերցնենք $\hat{r}$, $\hat{a}$, $\hat{b}$ միավոր վեկտորները և նկատի ունենանք, որ

$$\hat{r} \cdot \hat{i} \cos(\hat{r}, OX),\ \hat{r} \cdot \hat{j} = \cos(\hat{r}, OY) \text{ և } \hat{r} \cdot \hat{k} = \cos(\hat{r}, OZ),$$

ապա կստանանք.

$$\hat{r} = \hat{i} \cos(\hat{r}, OX) + \hat{j} \cos(\hat{r}, OY) + \hat{k} \cos(\hat{r}, OZ)$$

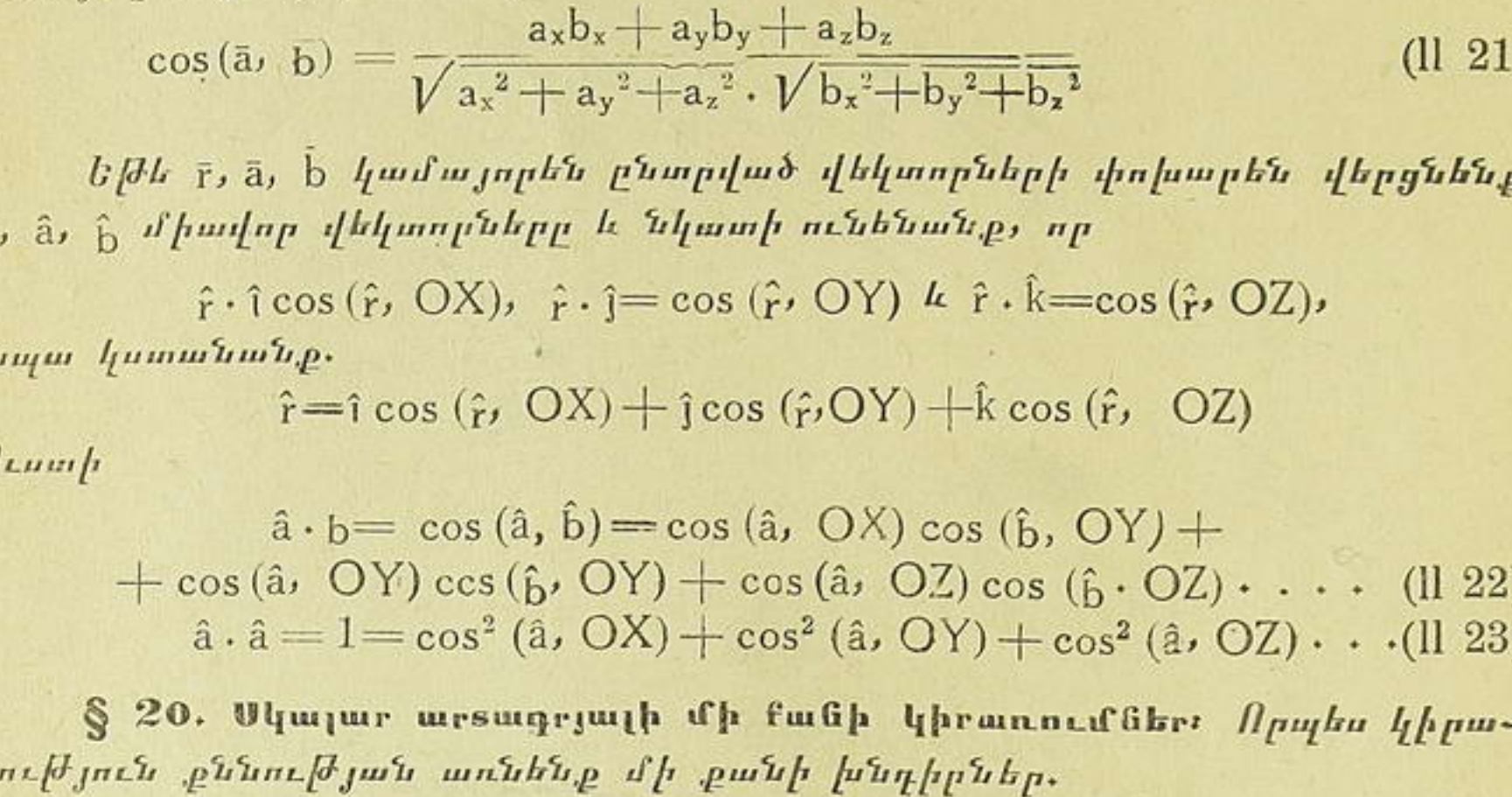
Ունանք

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos(\hat{a}, \hat{b}) = \cos(\hat{a}, OX) \cos(\hat{b}, OY) + \\ + \cos(\hat{a}, OY) \cos(\hat{b}, OY) + \cos(\hat{a}, OZ) \cos(\hat{b} \cdot OZ) \ldots \quad (ll\ 22)$$

$$\hat{a} \cdot \hat{a} = 1 = \cos^2(\hat{a}, OX) + \cos^2(\hat{a}, OY) + \cos^2(\hat{a}, OZ) \ldots \quad (ll\ 23)$$

§ 20. Սկալար արտադրյալի մի քանի կիրառումներ: Որպես կիրառություն քննության առնենք մի քանի խնդիրներ.

I°. Որոշել $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորների սկալար արտադրյալը, իմանալով նրանց պրոեկցիաները $\hat{h}$ ուղղության և σ հարթության վրա, $\sigma \perp \hat{h}$:



Նկ. 60

Վեկտորների պրոեկցիաները $\hat{h}$ ուղղության վրա համապատասխանաբար նշանակենք a_h-ով և b_h-ով (նկ. 60), իսկ պրոեկցիաները σ հարթության վրա նշանակենք $\bar{a}_\sigma$-ով և $\bar{b}_\sigma$-ով։ Այն ժամանակ

$$\bar{a}=a_h\hat{h}+a_\sigma\hat{\tau},\quad \bar{b}=b_h\hat{h}+b_\sigma\hat{\lambda}$$

և

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_h b_h+a_\sigma b_\sigma(\hat{\tau}\cdot\hat{\lambda}),$$

քանի որ

$$\hat{h}\cdot\hat{h}=1,\ \hat{h}\cdot\hat{\lambda}=0,\ \hat{\tau}\cdot\hat{h}=0$$

Ընդունենք՝ $(\bar{a},\bar{b})=\psi$, $(\hat{\tau},\hat{\lambda})=\varphi$, $(\bar{a},\hat{h})=\alpha$, $(\bar{b},\hat{h})=\beta$։

Այն ժամանակ՝

$$a_h=|a|\cos\alpha,\quad b_h=|b|\cos\beta,\quad a_\sigma=|a|\sin\alpha,$$

$b_\sigma=|b|\sin\beta$ *և* (II 13) *բանաձևը կտա*

$$|ab|\cos\psi=|ab|\cos\alpha\cos\beta+|ab|\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi,$$

կամ

$$\cos\psi=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi\quad\ldots\quad(\text{II }24)$$

Ստացված ֆորմուլը հանդիսանում է սֆերիկ եռանկյունաչափության հիմնական ֆորմուլներից մեկը։

2°. Թող $\bar{a}$-ն, $\bar{b}$-ն և $\bar{c}$-ն լինեն երեք ոչ կոպլանար վեկտորներ, իսկ λ վեկտորի վերաբերյալ թող միայն տրված լինի, որ

$$\bar{a}\cdot\bar{\lambda}=0,\quad \bar{b}\cdot\bar{\lambda}=0,\quad \bar{c}\cdot\bar{\lambda}=0\qquad(\text{II }25)$$

Ապացուցել, որ $\lambda=0$։

Եվ իրոք, քանի որ $\bar{a}$ $\bar{b}$, $\bar{c}$ վեկտորներից ոչ մեկը հավասար չէ զրոյի, ապա (II 25)*-ից հետևում է.*

կամ	$\bar{a}\perp\bar{\lambda}$,	*կամ*	$\lambda=0$
	$\bar{b}\perp\bar{\lambda}$,		$\lambda=0$
	$\bar{c}\perp\bar{\lambda}$,		$\lambda=0$

Բայց քանի որ $\bar{\lambda}$-ն չի կարող միաժամանակ ուղղահայաց լինել երեք ոչ կոպլանար վեկտորների, ապա մնում է եզրակացնել, որ $\lambda=0$։

Այս թեորեմով հաճախ են օգտվում։

3°. Որոշել A կետով անցնող և $\hat{n}$ միավոր վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը։

Թող A, B ... կետերը պատկանեն հարթությանը։ Կամայորեն ընտրված O կետից (նկ. 61) տանենք A, B ... կետերի շառավիղ վեկտորները և իմանանք ON ուղղահայացը մեր հարթության վրա։ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ... $\overline{ON}$ շառավիղ վեկտորները համապատասխանաբար նշանակենք $\bar{r}_A$-ով, $\bar{r}_B$-ով, ... $\bar{r}_N$-ով։ Այդ վեկտորների պրոեկցիաները $\hat{n}$-ի ուղղության վրա կլինեն. $\bar{r}_A\cdot\hat{n}$, $\bar{r}_B\cdot\hat{n}$, ... $\bar{r}_N\cdot\hat{n}$, ընդ որում, քանի որ $\bar{r}_N=\hat{n}$, ապա $\bar{r}_N\cdot\hat{n}=r_N$; $r_N>0$, եթե $\bar{r}_N\uparrow\uparrow\hat{n}$, $r_N<0$, եթե $\bar{r}_N\uparrow\downarrow\hat{n}$։ Ակնհայտ է, որ հարթության բոլոր կետերի շառավիղ վեկտորների պրոեկցիաները $\hat{n}$-ի ուղղության վրա

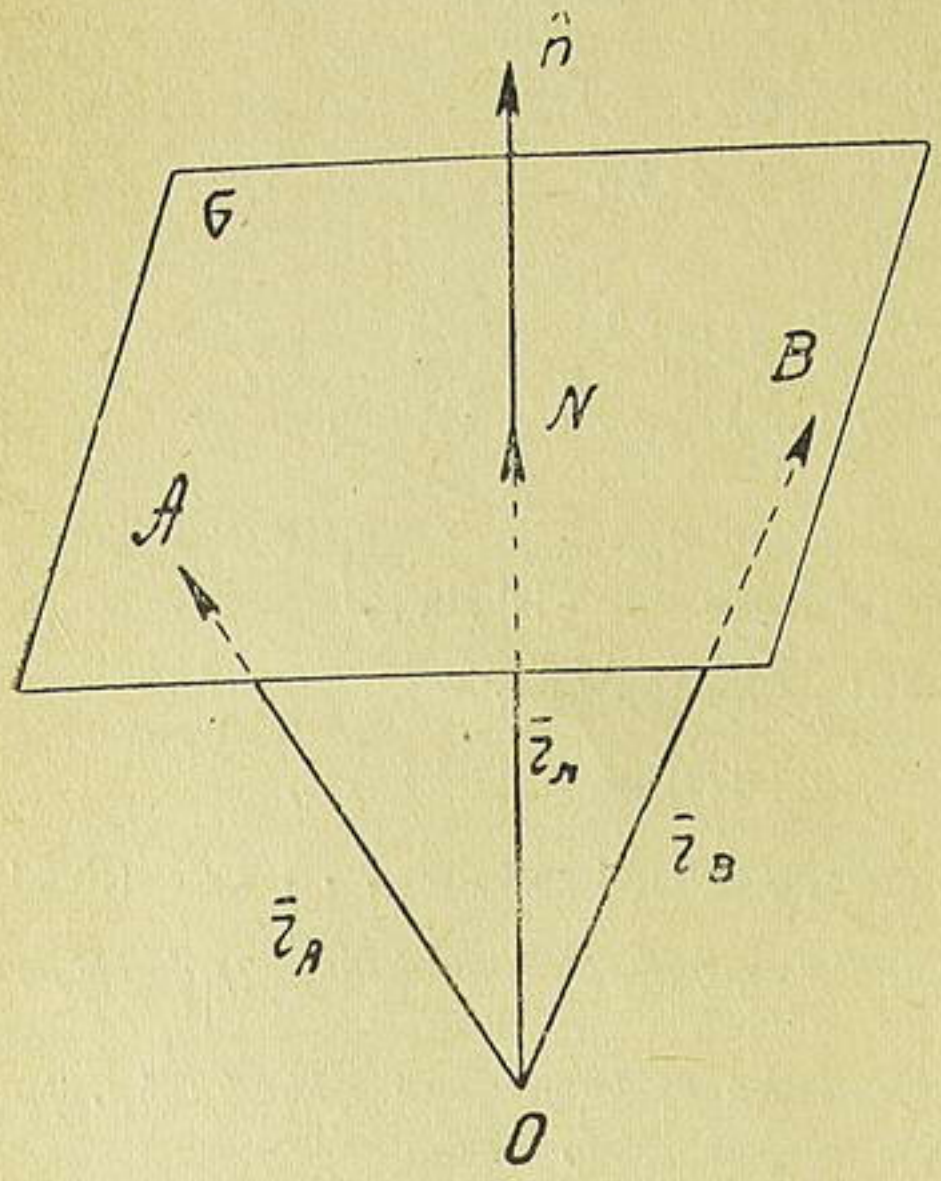
իրար հավասար են։ Օրինակ՝ $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$, *ուստի* $\bar{r}_B \cdot \hat{n} = (\bar{r}_A + \overline{AB}) \cdot \hat{n} = \bar{r}_A \cdot \hat{n}$, *որովհետև* $\overline{AB} \perp \hat{n}$, $\overline{AB} \cdot \hat{n} = 0$։ *Այսպիսով, մեր հարթության կամայրեն վերցված որևէ կետի շառավիղ վեկտորը նշանակելով* $\bar{r}$*-ով, կունենանք.*

$$\bar{r} \cdot \hat{n} = \bar{r}_A \cdot \hat{n} = r_N = \text{cons t} \qquad (11\ 26)$$

Հարթության բոլոր կետերը բավարարում են (11 26)*-ին, իսկ այն կետերը, որոնք չեն բավարարում* (11 26)*-ին, չեն պատկանում մեր հարթությանը (օրինակ՝ D կետի համար,* $\bar{r}_D \cdot \hat{n} > r_N$)։

Այսպիսով (11 26) *հավասարումը հանդիսանում է հարթության հավասարումը։*

Եթե O կետը վերցված է հարթության վրա, ապա $\bar{r} \perp \hat{n}$, $\bar{r} \cdot \hat{n} = 0 = \text{const}$։



Նկ. 61

Թող O-ն լինի OX YZ *ուղղանկյան կոորդինատային սիստեմի սկզբնակետը։ Այն ժամանակ՝* $\bar{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$, $\hat{n} = \hat{i}\cos\alpha + \hat{j}\cos\beta + \hat{k}\cos\gamma$, *ընդ որում* $\alpha = (\hat{n}, OX)$, $\beta = (\hat{n}, OY)$, $\gamma = (\hat{n}, OZ)$։

Տեղադրելով $\bar{r}$*-ի և* $\hat{n}$*-ի արժեքները* (11 26) *հավասարման մեջ, կստանանք հարթության հավասարումը հետևյալ տեսքով.*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = r_N = \text{const}, \quad \ldots \qquad (11\ 27)$$

որ հայտնի է վերլուծական երկրաչափության դասընթացից։

Եթե $\bar{n}$ *միավոր վեկտորի փոխարեն տրված է* $\bar{n}$ *վեկտորը, որին ուղղահայաց պետք է լինի մեր հարթությունը, ապա, քանի որ* $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}$, $\bar{r}_N = \bar{r}_A + \overline{AN}$ *և այլն և* $\overline{AB} \cdot \bar{n} = 0$, $\overline{AN} \cdot \bar{n} = 0$, *մենք կունենանք.*

$$\bar{r} \cdot \bar{n} = \bar{r}_A \cdot \bar{n} = \bar{r}_N \cdot \bar{n} = \text{const} = r_N n \quad \ldots \qquad (11\ 28)$$

Այս հավասարումը համապատասխանում է (11 26)*-ին և նույնպես հանդիսանում է հարթության հավասարում։ Այստեղ* $r_N n > 0$, *եթե* $\bar{r} \uparrow\uparrow \bar{n}$ *և* $r_N \cdot n < 0$, *եթե* $\bar{r}_N \uparrow\downarrow \bar{n}$։

Այժմ (11 27)*-ի փոխարեն մենք կստանանք*

$$xn_x + yn_y + zn_z = r_N n = \text{cons t}$$

Դրա համար (11 28)*-ի մեջ* $\bar{n}$*-ը պետք է փոխարինել նրա* $\hat{i}n_x + \hat{j}n_y + \hat{k}n$ *արտահայտությամբ։*

(11 26) *և* (11 28) *հավասարումները կարող են դիտվել նաև որպես ուղիղ գծի հավասարում, այն պայմանով, որ O-ից դուրս եկող շառավիղ*

վեկտորները միշտ գտնվեն միևնույն (Σ) հարթության վրա։ Այս դեպքում $\bar{r} \cdot \bar{n} = \text{const}$ *կլինի այն ուղիղ գծի հավասարումը, որ ստացվում է, երբ* $\sigma \perp \bar{n}$ *հարթությունը հատվում է* Σ *հարթության հետ։*

Ընդունելով Σ *հարթությունը որպես* XOY *կոորդինատային հարթություն, կստանանք,* $\bar{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$, $\bar{n} = \hat{i}n_x + \hat{j}n_y$ *(նկ. 62), ուստի և*

$$xn_x + yn_y = an_x = bn_y = \text{const} = \bar{r}_N n \cdot \ldots \quad (\text{II } 29)$$

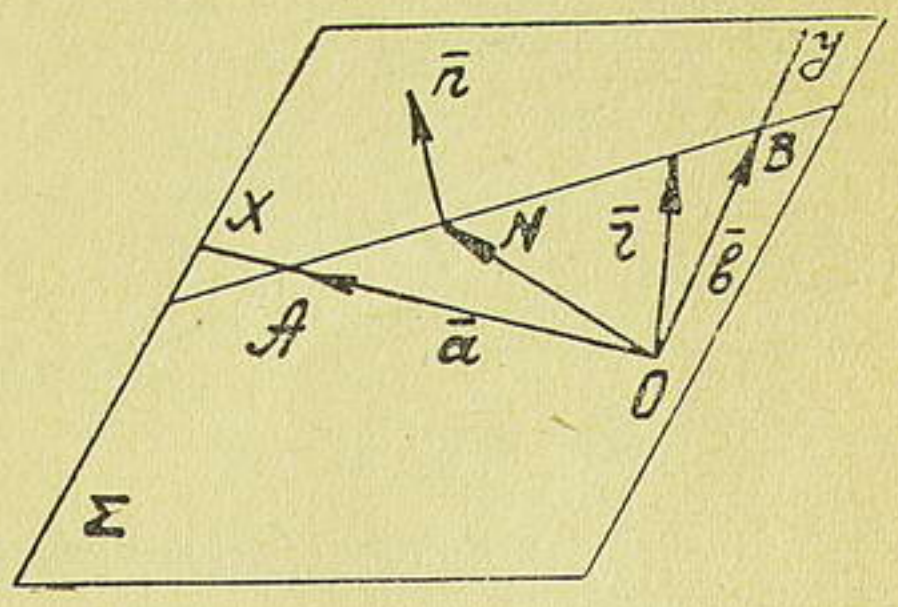
Այստեղ a*-ն և* b*-ն հատվածներ են, որոնք հատում են ուղիղի կողմից* OX *և* OY *առանցքների վրա։*

Դժվար չէ համոզվել, որ

$$\frac{xn_x}{an_x} + \frac{yn_y}{bn_y} = 1$$

կամ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Նկ. 62

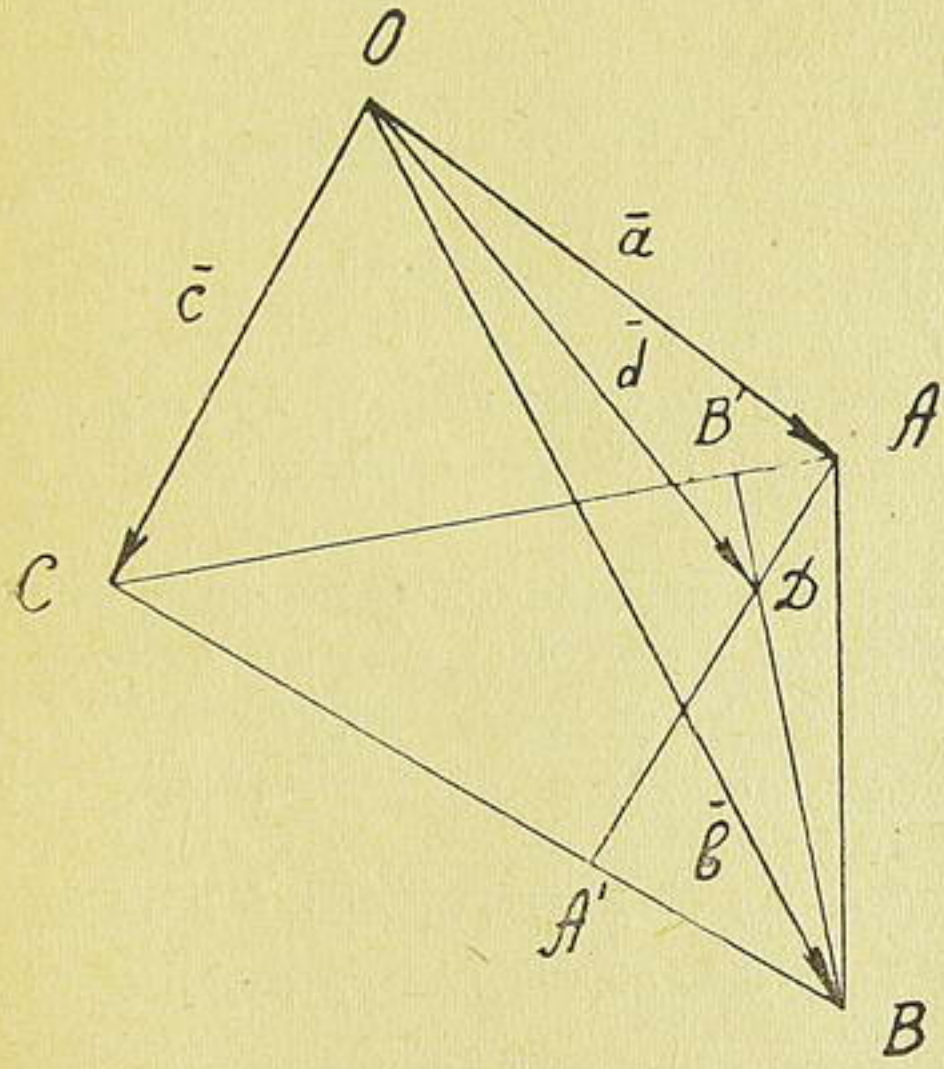
§ 21. Խնդիրներ։ *Ապացուցել, որ եռանկյան երեք բարձրությունները հատվում են մի կետում։*

Թող (նկ. 63) A, B, C *կետերը լինեն եռանկյան գագաթները, իսկ* $\overline{AA'}$*-ը,* $\overline{BB'}$*-ը և* $\overline{CC'}$*-ը՝ բարձրությունները։* D*-ն թող լինի* $\overline{AA'}$ *և* $\overline{BB'}$ *բարձրությունների հատման կետը։ Թեորեմն ապացուցված կլինի, եթե մենք ցույց տանք, որ* $\overline{CD} \perp \overline{AB}$*։* ā, b̄, c̄, d̄*-ով նշանակենք* A, B, C *և* D *կետերի հեռավորությունները մի կամայորեն ընտրված* O *կետից (որն ընդհանուր առմամբ չի գտնվում եռանկյան հարթության մեջ։* $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$ ....*): Այն ժամանակ* $\overline{AD} = \bar{d} - \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$*։ Քանի որ* $\overline{AA'} \perp \overline{BC}$*, ապա նաև* $\overline{AD} \perp \overline{BC}$*, հետևաբար* $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$*, այսինքն՝*

$$(\bar{d} - \bar{a})(\bar{c} - \bar{b}) = 0 \ \ldots \ (\text{II } 30)$$

Այդ նույն եղանակով, քանի որ $\overline{BB'} \perp \overline{CA}$*, մենք ունենք*

$$(\bar{d} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{c}) = 0 \ \ldots \ (\text{II } 30a)$$



Նկ. 63

Գումարելով (II 30) *և* (II 30*ա*) *հավասարումները և բանալով փակագծերը, կստանանք.*

$$-\bar{d} \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{d} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{c} = 0,$$

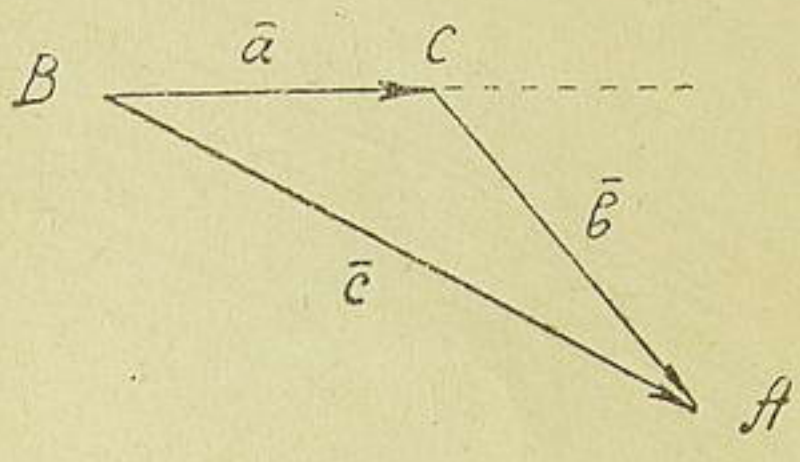
կամ որովհետև $\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{c}\cdot\bar{a}$, $\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{c}\cdot\bar{b}$

$$(\bar{d}-\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=0$$

Բայց $\bar{d}-\bar{c}=\overline{CD}$, $\bar{a}-\bar{b}=\overline{BA}$, *հետևաբար* $\overline{CD}\cdot\overline{BA}=0$, *այսինքն,* $\overline{CD}\perp\overline{BA}$, *ինչ որ ուզում էինք ապացուցել:*

2. Ապացուցել, որ 1°. ուղղանկյուն եռանկյան մեջ ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին.

$$2^\circ.\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos BCA\ \textit{(նկ. 64)}$$



Նկ. 64

[տվյալ դեպքում պետք է նախ ապացուցել, որ $(\bar{a},\bar{b})=\pi-\angle BCA$*]:*

3. Ո՞ր դուրսհեռապծի մեջ անկյունագծերը փոխադարձ ուղղահայաց են:

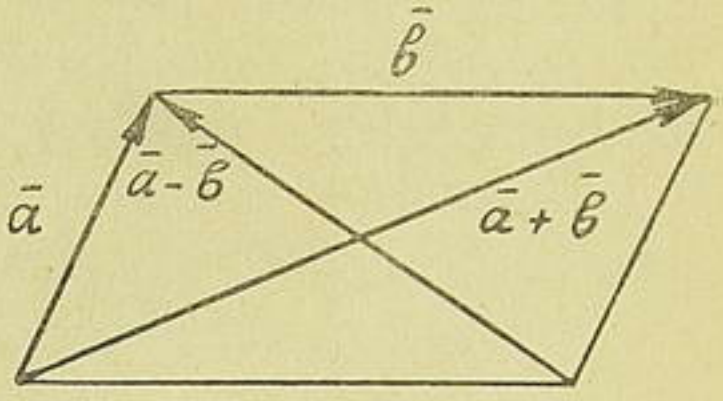
4. Ո՞ր դուրսհեռապծի մեջ անկյունագծերի երկարությունները հավասար են (նկ. 65):

5. Ապացուցել, որ եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են մի կետում:

6. Գտնել գնդի հավասարումը, երբ տրված են

1°. Գնդի կենտրոնը և նրա շառավիղը:

2°. Գնդի երկու կետեր, որոնք պատկանում են միևնույն տրամագծին:



Նկ. 65

7. Տրված են A և B կետերը: Ապացուցել, որ բոլոր այն կետերի (O) երկրաչափական տեղը, որոնց համար $(OA)^2-(OB)^2=\text{const}$ *հանդիսանում է մի հարթություն, որ ուղղահայաց է AB-ին: Որոշել այն կետը, որտեղ այդ հարթությունը հատվում է AB հատվածի հետ:*

8. σ հարթության վրա վերցված է PQ ուղիղը: Հարթության չպատկանող O կամայական կետից իջեցրել են ON ուղղահայացը σ հարթության վրա և OM ուղղահայացը PQ ուղիղի վրա: Ապացուցել, որ $MN\perp PQ$:

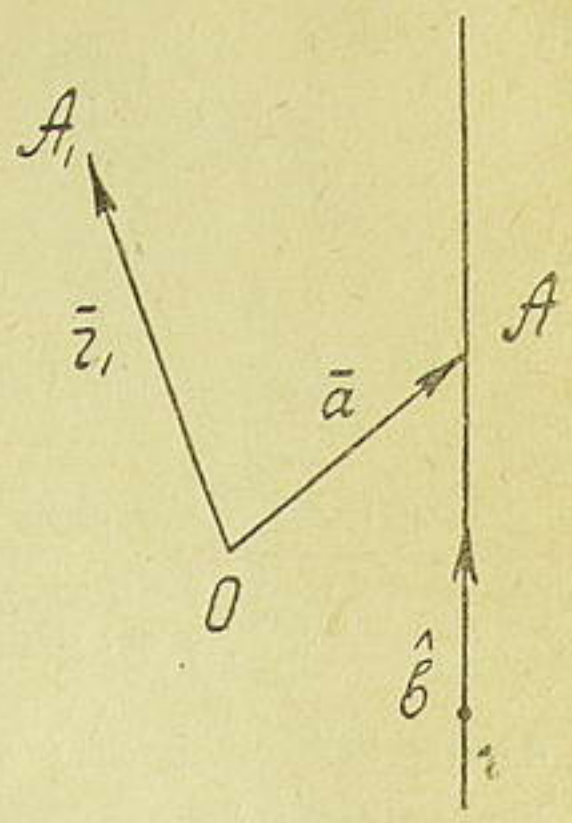
9. Տրված են $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորները, որոշել* α, β *գործակիցների այն հարաբերությունը, որի ժամանակ* $(\alpha\bar{a}-\beta\bar{b})\perp\bar{c}$:

10. Գտնել, թե ինչ պայմանի պետք է բավարարեն $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորները, որպեսզի* $(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b})\perp(\beta\bar{a}-\alpha\bar{b})$, α, β *գործակիցների բոլոր արժեքների դեպքում:*

11. Տրված են՝ A_1 *կետը, որի շառավիղ վեկտորը հավասար է* $\bar{r}_1$ *և* $\bar{r}=\bar{a}+\hat{b}t$ *ուղիղը (նկ. 66): Գտնել* A_1*-ին ամենամոտ ուղիղի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորություն ունեցող* A_2 *կետի շառավիղ վեկտորը:*

Ցուցմունք. A_1 և A_2 *կետերը կոչվում են սիմետրիկ* λ *ուղիղի նկատմամբ, եթե* $A_1A_2 \perp \lambda$ *և հատում է* λ *ուղիղը մի այնպիսի* A *կետում, որ* $\overline{AA_1} + \overline{AA_2} = 0$:

12. Տրված են՝ A_1 *կետը, որի շառավիղ վեկտորը հավասար է* $\bar{a}_1$*-ի, և* σ *հարթությունը, որի հավասարումն է՝* $\bar{r} \cdot \hat{n} = c$: *Գտնել այն* A_2 *կետի շառավիղ վեկտորը, որ սիմետրիկ է* A_1*-ին,* σ *հարթության նկատմամբ:*



Ցուցմունք. A_1 և A_2 *կետերը սիմետրիկ են համարվում* σ *հարթության նկատմամբ, եթե* $A_1A_2 \perp \sigma$ *և այն կետով, որում նա հատվում է հարթության հետ, բաժանվում է երկու հավասար մասերի:*

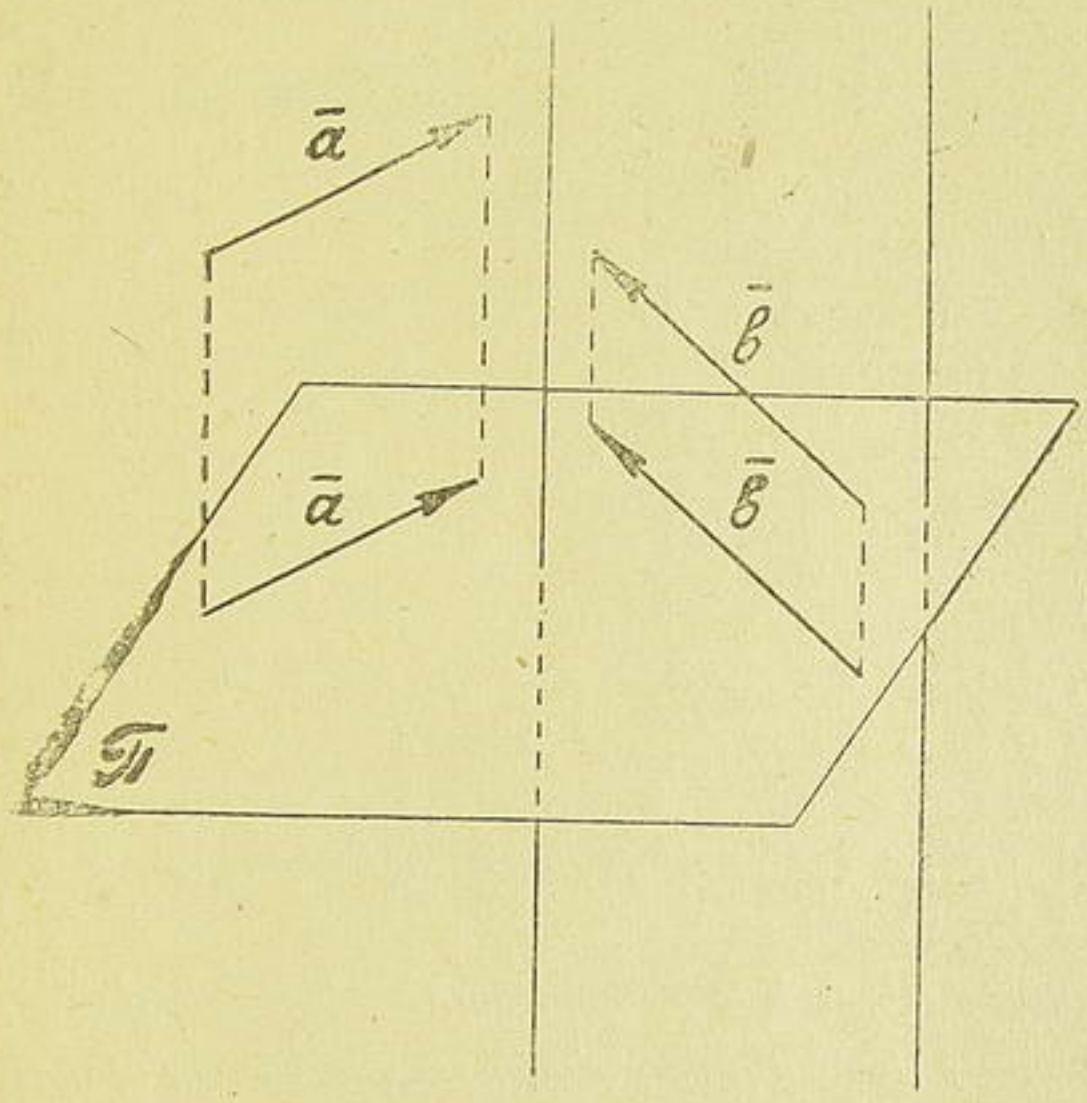
13. Տրված է ուղղանկյան կոօրդինատային սիստեմ, որի կոօրդինատային հարթություններն են, դիցուք σ, w, ν:

Ապացուցել որ $\bar{r}_\sigma + \bar{r}_w + \bar{r}_\nu = 2\bar{r}$, *ուր* $\bar{r}$*-ը մի կամայական վեկտոր է:*

Նկ. 66

ԵՐԿՈՒ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ

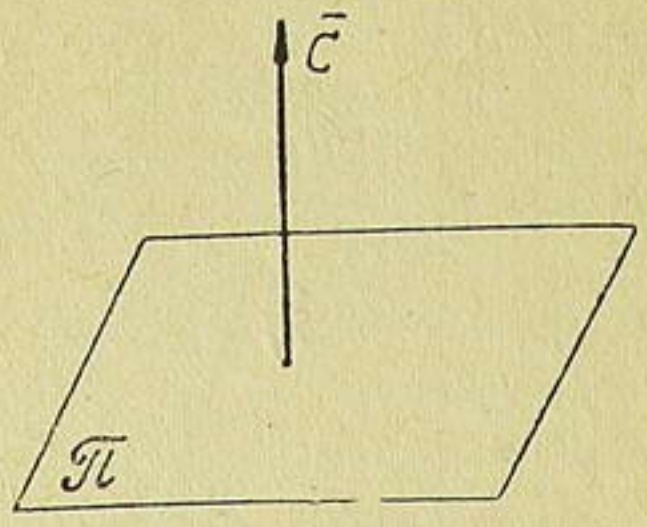
§ 22. Տվյալ երկու վեկտորներից ուղղահայաց վեկտորի իմաստը որոշելու տարբեր կաոնոնները: *Բոլոր այն ուղիղները, որոնք միաժամանակ ուղղահայաց են երկու ոչ զուգահեռ* $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորներին, զուգահեռ են իրար (նկ. 67): Եթե* $\bar{a}$*-ն և* $\bar{b}$*-ն գտնվում են մի հարթության վրա* (π), *ապա այն ուղիղները, որոնք միաժամանակ ուղղահայաց են այդ երկու վեկտորներին էլ, ուղղահայաց կլինեն նաև* π *հարթությանը:*



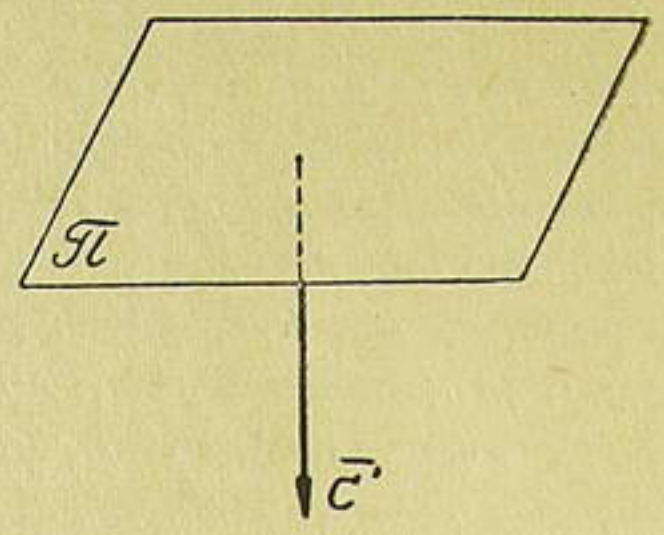
Նկ. 67

Հետագայում մենք կնշանակենք, որ $\bar{a}$*-ն և* $\bar{b}$*-ն տեղափոխված են իրենք իրենց զուգահեռ այնպես, որ գտնվում են մի և նույն* π *հարթության վրա: Այդ դեպքում, ինչպես ասվեց, միաժամանակ և՛* $\bar{a}$*-ին և՛* $\bar{b}$*-ին ուղղահայաց ուղիղը ուղղահայաց կլինի նաև* π *հարթությանը: Աստծնելից հետևում է, որ երկու ոչ զուգահեռ վեկտորներ* ($\bar{a}$ *և* $\bar{b}$) *միանգամայն որոշում են մի-*

երրորդ վեկտորի ուղղությունը, որ ուղղահայաց է իրենց։ Այդ այն ուղղությունն է, որ ուղղահայաց է π հարթությանը։ $\bar{c}$ և $\bar{c}'$ վեկտորները (նկ. 68, 69),



Նկ. 68

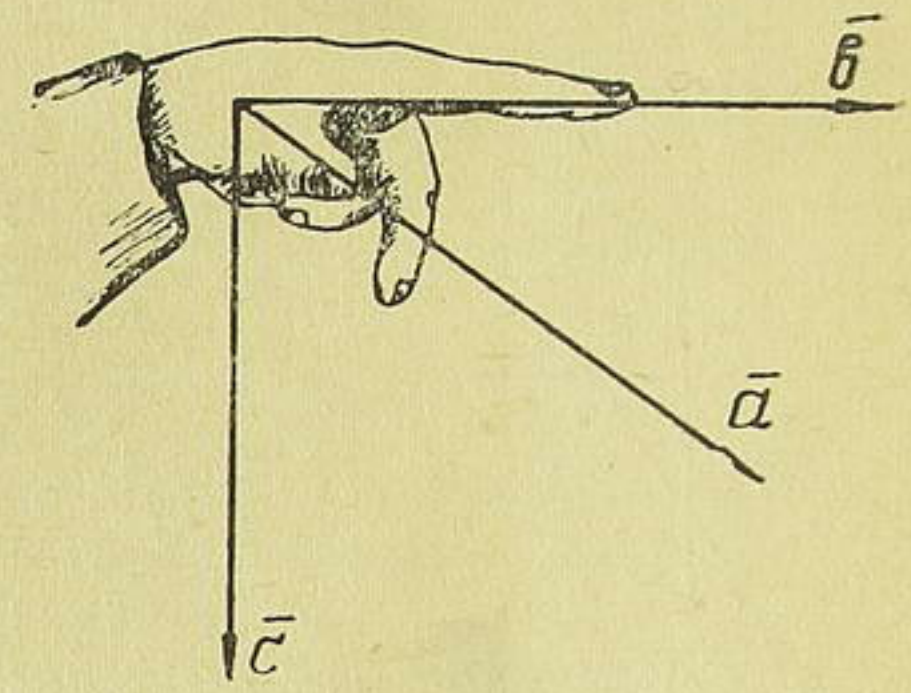


Նկ. 69

որոնք ուղղահայաց են π հարթությանը, միևնույն ուղղությունն ունեն, բայց $\bar{c}\uparrow\downarrow\bar{c}'$, ուստի նրանց իմաստը տարբեր է։

Եթե պայմանավորվենք ավյալ $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորներին վերագրել մի որոշ հաջորդականություն, օրինակ՝ $\bar{a}$-ն համարենք առաջին, իսկ $\bar{b}$-ն երկրորդ վեկտորը, ապա կարելի կլինի որոշել նրանց ուղղահայաց $\bar{c}$ և $\bar{c}'$ վեկտորների ոչ միայն ուղղությունը, այլ և իմաստը։

Եվ իրոք, ձեռքի բթամատը, ցուցամատը և միջամատը համապատասխանաբար նշանակենք I, II, III. Ձախ ձեռքի բթամատին տանք առաջին վեկտորին համապատասխան ուղղություն (I$\uparrow\uparrow\bar{a}$), իսկ նույն ձեռքի ցուցամատին՝ երկրորդ վեկտորին համապատասխան ուղղություն (II$\uparrow\uparrow$b)։ Այժմ եթե միջնամատին I և II մատների հարթությանն ուղղահայաց ուղղություն տանք, նա կլինի համապատասխան $\bar{c}$-ին (III$\uparrow\uparrow$c) (նկ. 70)։



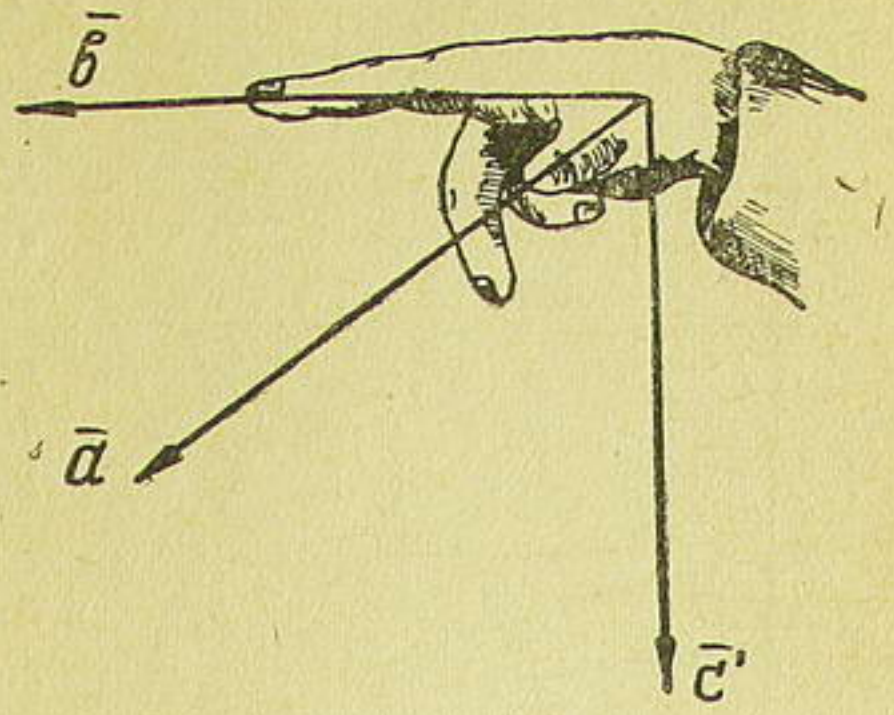
Նկ. 70

Իսկ $\bar{c}'$ վեկտորն համապատասխան կլինի այ ձեռքի միջնամատին, եթե այդ ձեռքի բթամատին տրված է առաջին ($\bar{a}$) վեկտորին համապատասխան ուղղություն, իսկ ցուցամատին՝ երկրորդ ($\bar{b}$) վեկտորին համապատասխան ուղղություն (նկ. 71)։

Սրանից հետևում է, որ եթե $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորների հաջորդականությունն արդեն որոշված է, ապա $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորներին ուղղահայաց վեկտորի իմաստը միանգամայն որոշված կլինի, եթե մատնանշված լինի, թե ո՞ր ձեռքի միջնամատին համապատասխան է այդ վեկտորը։

Նախապես տրված երկու վեկտորներին ($\bar{a}$ և $\bar{b}$) ուղղահայաց վեկտորի իմաստը որոշելու այս կանոնը կոչվում է «ձեռքի կանոն»։

Օգտվում են ինչպես «ձախ ձեռքի», այնպես և «աջ ձեռքի» կանոնով։



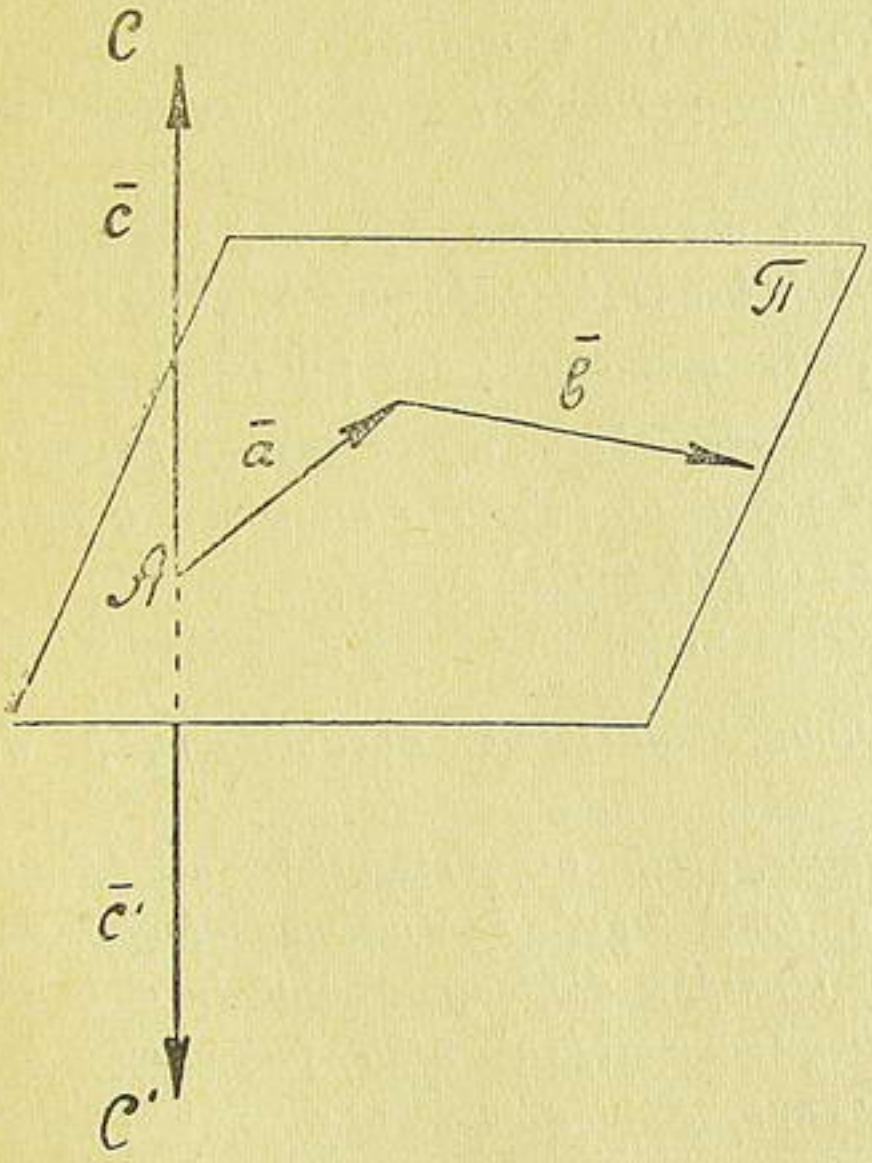
Նկ. 71

ā և b̄ վեկտորների տվյալ հաջորդականության ժամանակ «ձախ ձեռքի կանոնով» որոշվող վեկտորը հակազուգահեռ է «աջ ձեռքի կանոնով» որոշվող վեկտորին։

Փոխենք ā և b̄ վեկտորների հաջորդականությունը, այսինքն՝ b̄-ն ընդունենք որպես առաջին վեկտորը, իսկ ā-ն՝ որպես երկրորդը։ Կիրառենք ձախ ձեռքի կանոնը, այսինքն՝ ձախ ձեռքի բթամատին տանք b̄-ին համազուգահեռ ուղղություն, իսկ ցուցամատին՝ ā-ին համազուգահեռ։ Այժմ առաջին երկու մատներին ուղղահայաց միջնամատը կլինի համազուգահեռ c̄′ վեկտորին։

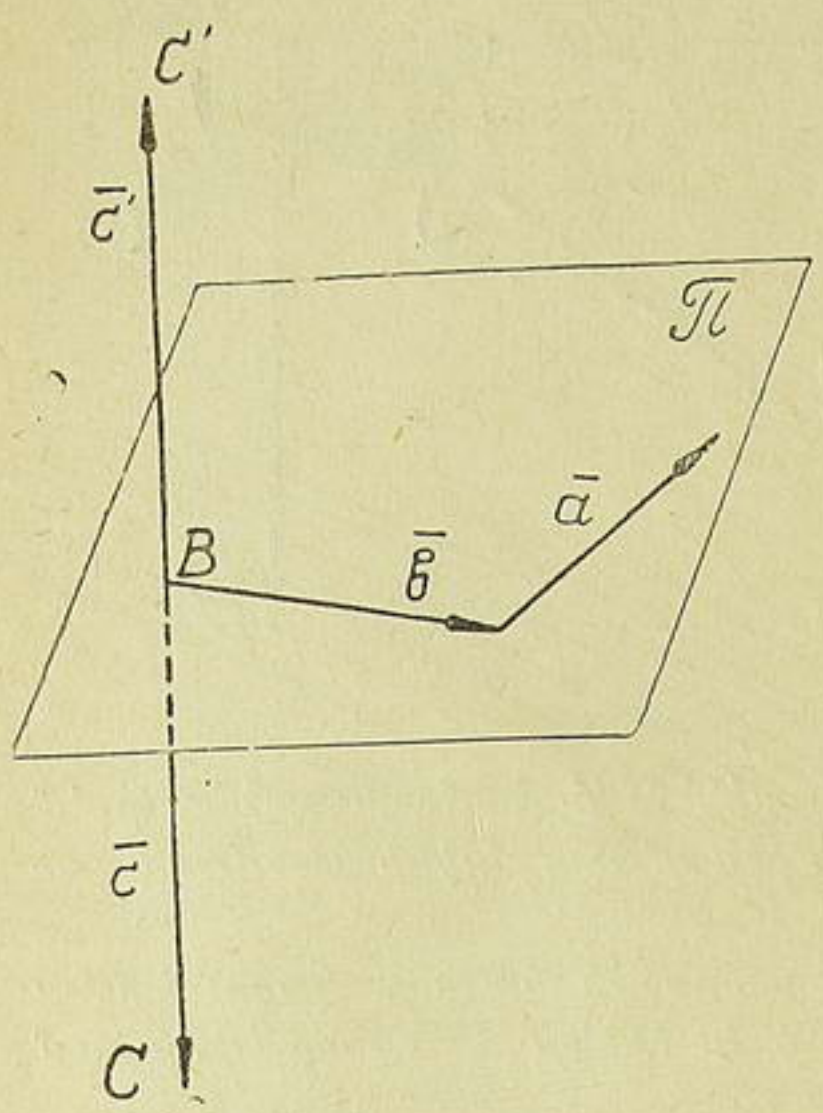
Սրանից հետևում է, որ ā և b̄ վեկտորների հաջորդականությունը փոխելուց, վեկտորի իմաստը, որ որոշվում է ձեռքի կանոնով, փոխվում է հակադիր ուղղությամբ։

c̄ վեկտորի ուղղությունը որոշելու համար, երբ c̄ միաժամանակ ուղղահայաց է երկու ոչ զուգահեռ վեկտորների (ā և b̄), օգտվում են և ուրիշ կանոններով։ Բոլոր այդ կանոնների մեջ c̄ վեկտորի իմաստը կախված է այն բանից, թե ինչպես է ընտրվում ā և b̄ վեկտորների հաջորդականությունը։ Օրինակ, կանոն տանք այն դեպքի համար, երբ π հարթության մեջ ā և b̄ վեկտորները դասավորված են այնպես, որ երկրորդ վեկտորի (b̄) սկիզբը համընկնում է առաջին վեկտորի (ā) վերջի հետ (նկ. 72)։ Թող A կետը լինի ā վեկտորի սկիզբը π հարթության մեջ։ Այնպես պատկերացնենք, թե դիտողի ոտքերը գտնվում են A կետում, իսկ գլուխը՝ C-ում կամ C′-ում։ «AC» դիտողի համար, որ նայում է երկրորդ (b̄) վեկտորին, այդ վեկտորն ուղղված կլինի ձախից դեպի աջ։ Իսկ «AC′» դիտողին այդ նույն վեկտորը կպատկերանա աջից դեպի ձախ։



Նկ. 72

Մինչդեռ, եթե $\bar{b}$-ն ընդունենք որպես առաջին, իսկ $\bar{a}$-ն որպես երկրորդ վեկտոր (նկ. 73) և կրկին այդ վեկտորները π հարթության մեջ դասավորենք այնպես, որ երկրորդ վեկտորի ($\bar{a}$) սկիզբը համընկնի առաջին վեկտորի ($\bar{b}$) վերջի հետ, ապա «BC» դիտողի համար (B-ն $\bar{b}$, վեկտորի սկիզբն է) $\bar{a}$ վեկտորը կպատկերանա ձախից-աջ, իսկ «BC'» դիտողի համար այդ նույն վեկտորը կպատկերանա աջից-ձախ:



Նկ. 73

Պայմանավորվենք ընդունել, թե $\bar{c}$ և $\bar{c}'$ վեկտորները (որոնք ուղղահայաց են $\bar{a}$-ին և $\bar{b}$-ին) ուղղված են դիտողի ոտքից դեպի գլուխ, այնպես որ 72-րդ նկարում $\bar{c} \uparrow\uparrow \overline{AC}$, $\bar{c}' \uparrow\uparrow \overline{AC'}$-ին, իսկ 73-րդ նկարում $\bar{c} \uparrow\uparrow BC$-ին, իսկ $C' \uparrow\uparrow \overline{BC}$:

Եթե այս դեպքում դիտողին, որի ոտքերը գտնվում են առաջին վեկտորի սկզբում, պատկերացնենք այնպիսի դիրքում, որ երկրորդ վեկտորը նրան թվա ուղղված ձախից դեպի աջ, ապա դրանով ամբողջովին որոշված կլինի $\bar{c}$ վեկտորի իմաստը:

Դիտողի այս դիրքի վոխարեն կարելի է պատկերացնել նրա այն դիրքը, որի ժամանակ երկրորդ վեկտորը նրան թվում է ուղղված աջից դեպի ձախ:

Երկու ոչ զուգահեռ վեկտորներին ուղղահայաց երկրորդ վեկտորի իմաստը որոշելու այս եղանակը կարելի է կոչել «դիտողի եղանակ»:

§ 23. Վեկտորական արտադրյալի սահմանումը և հատկությունները: Երկու վեկտորների ($\bar{a}$ և $\bar{b}$) վեկտորական արտադրյալը կոչվում է մի երրորդ $\bar{c}$ վեկտոր, որի ուղղությունն ու իմաստը որոշվում է նախորոք ընտրված «ուղղության կանոնով», իսկ չափը՝

$$c = |ab \sin(\bar{a}, \bar{b})|$$

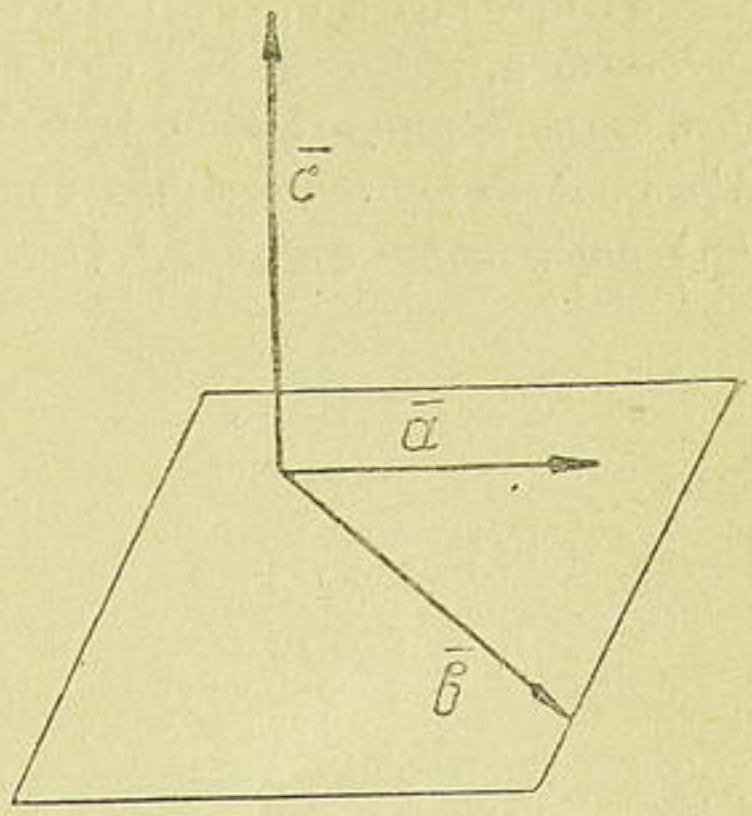
հավասար է $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսին:

Այս դրքում վեկտորական արտադրյալի ուղղությունն ու իմաստը որոշվում է «ձախ ձեռքի կանոնով» կամ նրան համապատասխան՝ «դիտողի կանոնով», ընդ որում որպես առաջին վեկտոր ընդունվում է վեկտորական արտադրյալի առաջին բազմապատկիչը՝ $\bar{a}$-ն, իսկ որպես երկրորդ վեկտոր՝ նույն արտադրյալի երկրորդ բազմապատկիչը՝ $\bar{b}$-ն (նկ. 74):

Պայմանավորվենք $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը նշանակել $\bar{a} \times \bar{b}$: Այսպիսով՝

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}.$$

Այս սահմանումից երևում է, որ երկու վեկտորների վեկտորական բազմապատկումը բոլորովին տարբերվում է երկու վեկտորների սկալար բազմապատկումից։ Սկալար բազմապատկումը հանդիսանում է երկու թվերի թվաբանական և հանրահաշվական բազմապատկման ընդհանրացումը։ Մինչդեռ վեկտորական բազմապատկումը նոր գործողություն է վեկտորների նկատմամբ, որ իր նշանը չունի թվաբանության կամ հանրահաշվի մեջ։



Նկ. 74

Ուստի հետաքրքիր է պարմանալ, որ գոյություն ունեն վեկտորների բազմապատկման երկու տարբեր գործողություններ, այլ պետք է հիշել, որ վեկտորների սկալար և վեկտորական բազմապատկման գործողությունները, թեպետ անունով նման, բայց էությամբ միանգամայն տարբեր գործողություններ են վեկտորների նկատմամբ։

Վեկտորական արտադրյալի սահմանումից անմիջականորեն բղխում է հետևյալը.

ա) արտադրիչները տեղափոխելուց վեկտորական արտադրյալն ստանում է հակադիր իմաստը, իսկ նրա չափը մնում է անփոփոխ, այսինքն, եթե $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, իսկ $\bar{c}' = \bar{b} \times \bar{a}$, ապա $\bar{c} \uparrow\downarrow \bar{c}$ և $\bar{c}' + \bar{c} = 0$։

Եվ իրոք։ $c' = |ba \sin(\bar{b}, \bar{a})| = |ab \sin(\bar{a}, \bar{b})| = c$։ Ինչ վերաբերում է $\bar{c}'$-ի իմաստին, ապա $\bar{c}' \uparrow\downarrow \bar{c}$ համաձայն «ուղղության կանոնի»։

Այսպիսով

$$\bar{b} \times \bar{a} = -\bar{a} \times \bar{b}$$

բ) Եթե $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորները զուգահեռ են իրար, նրանց վեկտորական արտադրյալը հավասար է զերոյի։

Եվ իրոք, եթե $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, $\sin(\bar{a}, \bar{b}) = 0$։ Իսկ եթե $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ $(\bar{a}, \bar{b}) = 180^\circ$ $\sin(\bar{a}, \bar{b}) = 0$։ Հետևաբար այս երկու դեպքերում և վեկտորական արտադրյալի չափը՝

$$c = ab \sin(\bar{a}, \bar{b}) = 0$$

Այսպիսով երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալը դառնում է 0, եթե բազմապատկիչները զուգահեռ են, կամ եթե $|ab| = 0$, այսինքն՝ վեկտորներից մեկը կամ երկուսն էլ զերո վեկտոր են։

գ) Եթե վեկտորական արտադրյալի բազմապատկիչները միավոր վեկտորներ են ($\hat{a}$ և $\hat{b}$), ապա վեկտորական արտադրյալի չափը հավասար է $\sin(\hat{a}, \hat{b})$-ի բացարձակ արժեքին, այսինքն՝ $|\hat{a} \times \hat{b}| = |\sin(\hat{a}, \hat{b})|$։

դ) Ամեն մի $\bar{d}$ վեկտոր, որ ուղղահայաց է միաժամանակ և՛ $\bar{a}$-ին և՛ $\bar{b}$-ին կարող է արտահայտվել $\bar{a} \times \bar{b}$ վեկտորական արտադրյալի միջոցով։

Եվ իրոք, $\bar{a} \times \bar{b}$ արտադրյալն էլ ուղղահայաց է ինչպես $\bar{a}$-ին, այն-

պես և $\bar{b}$-ին, հետևաբար $\bar{d} \parallel (\bar{a} \times \bar{b})$. ուստի միշտ կարելի է գտնել մի այնպիսի δ գործակից, որ $\bar{d} = \delta (\bar{a} \times \bar{b})$:

ե) Եթե $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots \bar{b}_n$ *վեկտորները կոպլանար են, այն ժամանակ* $\bar{a}_1 \times \bar{b}_1$, $\bar{a}_2 \times \bar{b}_2$, $\dots$ $\bar{a}_n \times \bar{b}_n$, $\bar{a}_1 \times \bar{b}_2 \dots \bar{a}_n \times \bar{b}_k$ *վեկտորական արտադրյալները զուգահեռ կլինեն իրար: Եվ ընդհակառակը, եթե մի քանի վեկտորական արտադրյալներ զուգահեռ են իրար, ապա այդ արտադրյալների բոլոր արտադրիչները կոպլանար վեկտորներ են:*

զ) Թող $\hat{i}$-*ն,* $\hat{j}$-*ն և* $\hat{k}$-*ն լինեն* OX, OY, OZ *ձախ-ձեռնային կոօրդինատային սիստեմի առանցքների միավոր վեկտորները (նկ. 75), այսինքն՝*

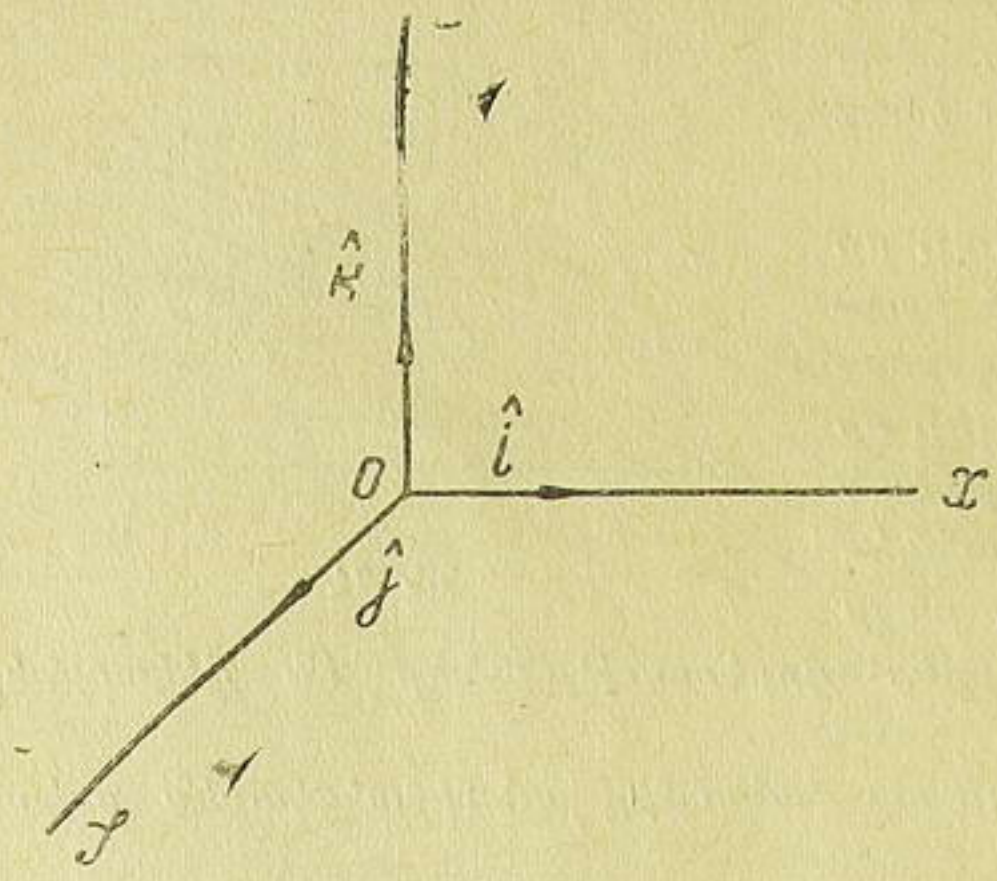
$$\hat{i} \uparrow\uparrow OX, \quad \hat{j} \uparrow\uparrow OY, \quad \hat{k} \uparrow\uparrow OZ$$

քանի որ

$$\sin(\hat{i}, \hat{j}) = 1, \quad \sin(\hat{j}, \hat{k}) = 1, \quad \sin(\hat{k}, \hat{i}) = 1,$$

ապա օգտվելով «ձախ ձեռքի կանոնով», անմիջականորեն գտնում ենք

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad (\text{II } 31)$$



Նկ. 75

Այստեղից հետևում է, որ

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \qquad (\text{II } 31\text{ա})$$

Պետք է հիշել նույնպես, որ բ) հատկության հիման վրա

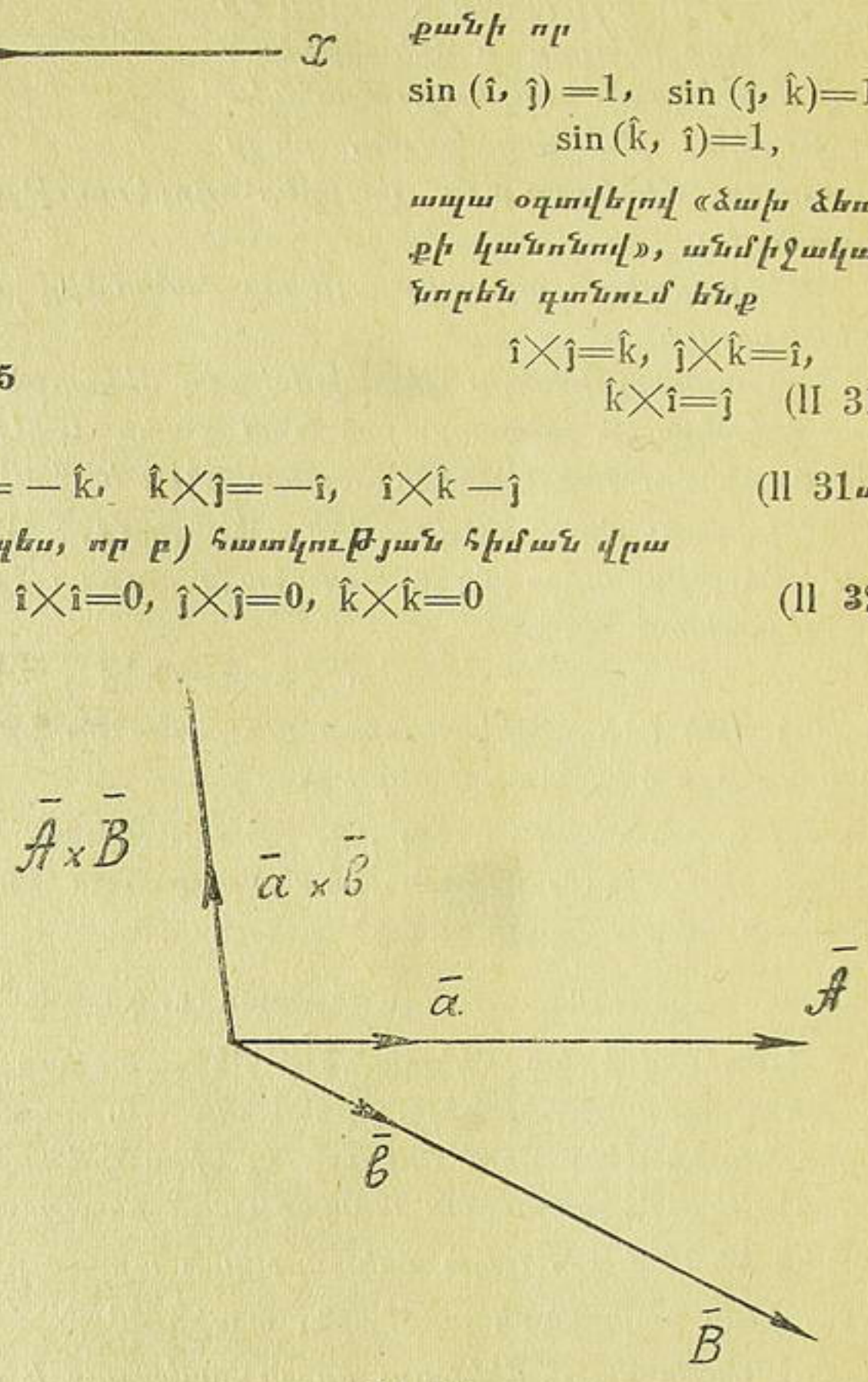
$$\hat{i} \times \hat{i} = 0, \quad \hat{j} \times \hat{j} = 0, \quad \hat{k} \times \hat{k} = 0 \qquad (\text{II } 32)$$

§ 24. Վեկտորական կամ արտադրյալի հատկությունները (շարունակություն): *Նախորդի հիման վրա մենք կարող ենք ապացուցել հետևյալ թեորեմները.*

1°. Եթե $\bar{A} = m\bar{a}$, $\bar{B} = n\bar{b}$ *(նկ. 76), ապա* $\bar{A} \times \bar{B} = mn\,(\bar{a} \times \bar{b})$:

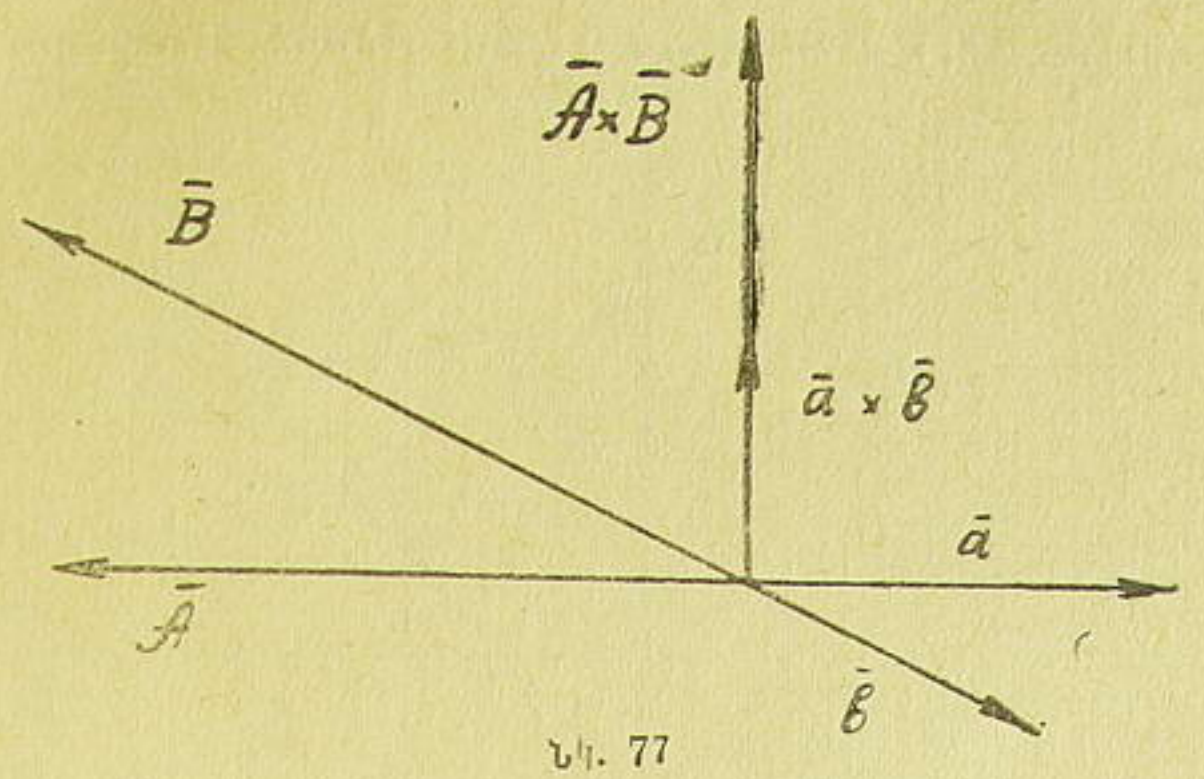
Այստեղ m-*ը և* n-*ը կամայորեն վերցված գործակիցներ են:*

Քանի որ $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ *վեկտորները կոպլանար են, ապա (համաձայն ե-ի)* $\bar{A} \times \bar{B} \parallel \bar{a} \times \bar{b}$: *Ուստի միշտ կարելի է* δ *գործակից ընտրել*



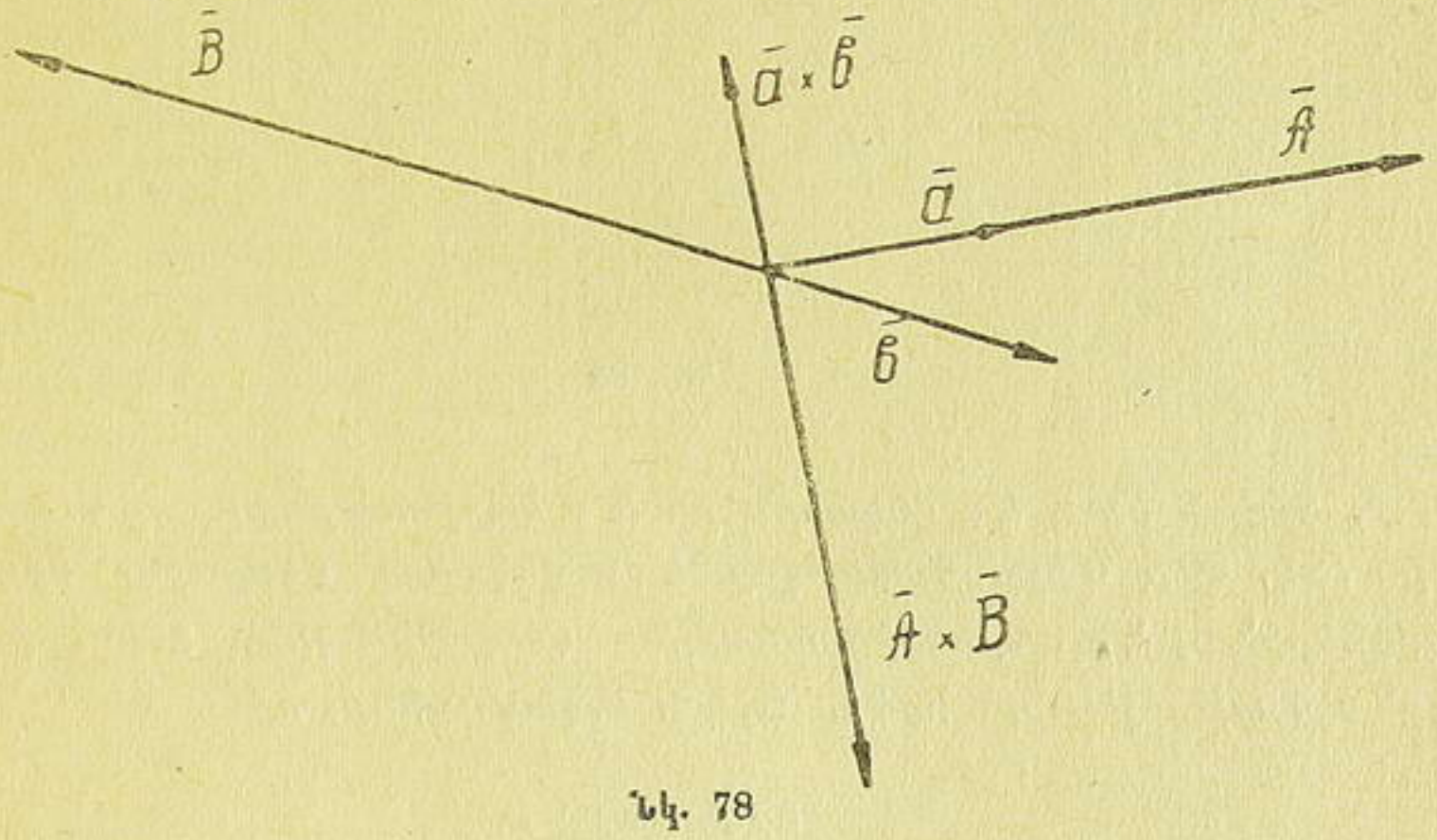
Նկ. 76

այնպես, որ բավարարի $\bar{A}\times\bar{B}=\delta\,(\bar{a}\times\bar{b})$ *պայմանին։ Ցույց տանք, որ* $\delta=mn$։ *Եվ իրոք, կիրառելով ձախ ձեռքի կանոնը, համոզվում ենք, որ այն*

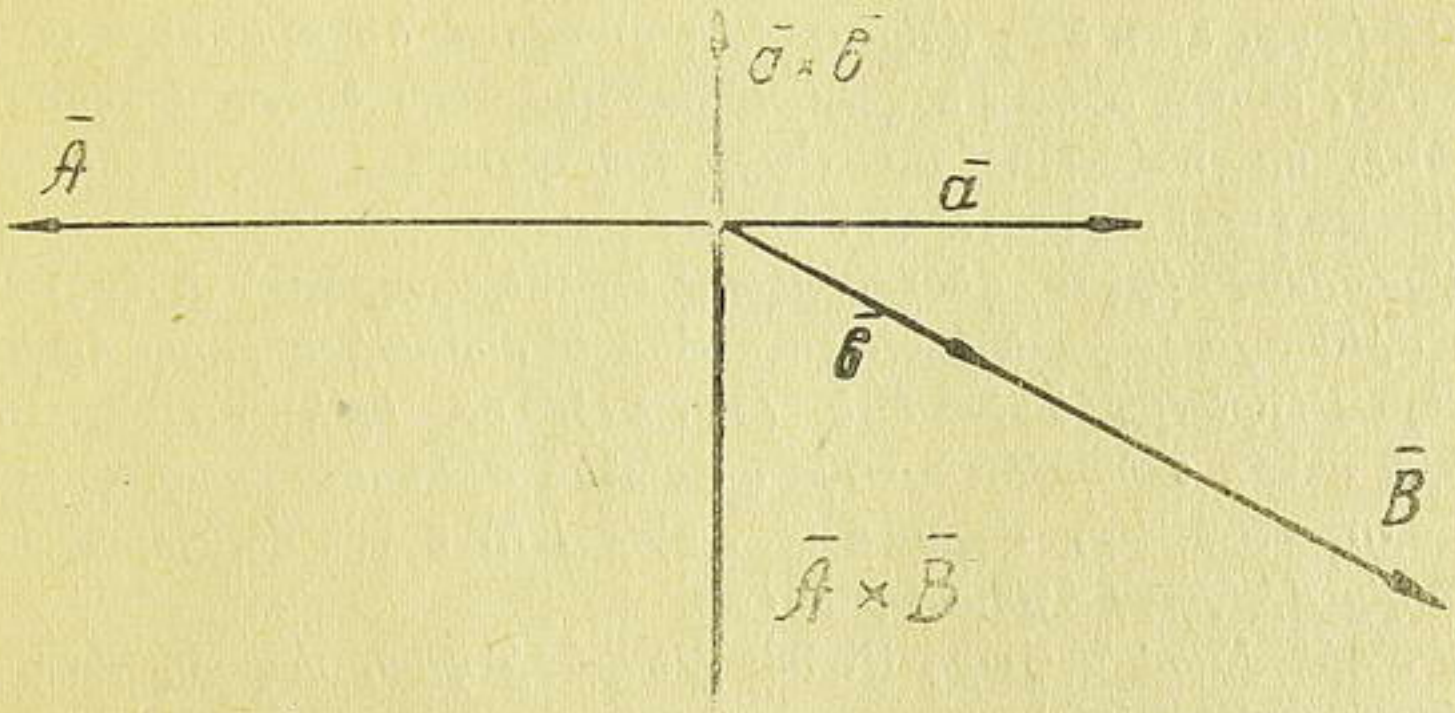


Նկ. 77

դեպքերում, երբ $mn>0$ *(նկ. 76 և 77)* $\bar{A}\times\bar{B}\uparrow\uparrow(\bar{a},\ \bar{b})$։ *Այսինքն՝* $\delta>0$։ *իսկ այն դեպքերում, երբ* $mn<0$ *(նկ. 78, 79),* $\bar{A}\times\bar{B}\uparrow\downarrow\bar{a}\times\bar{b}$, *այսինքն՝*

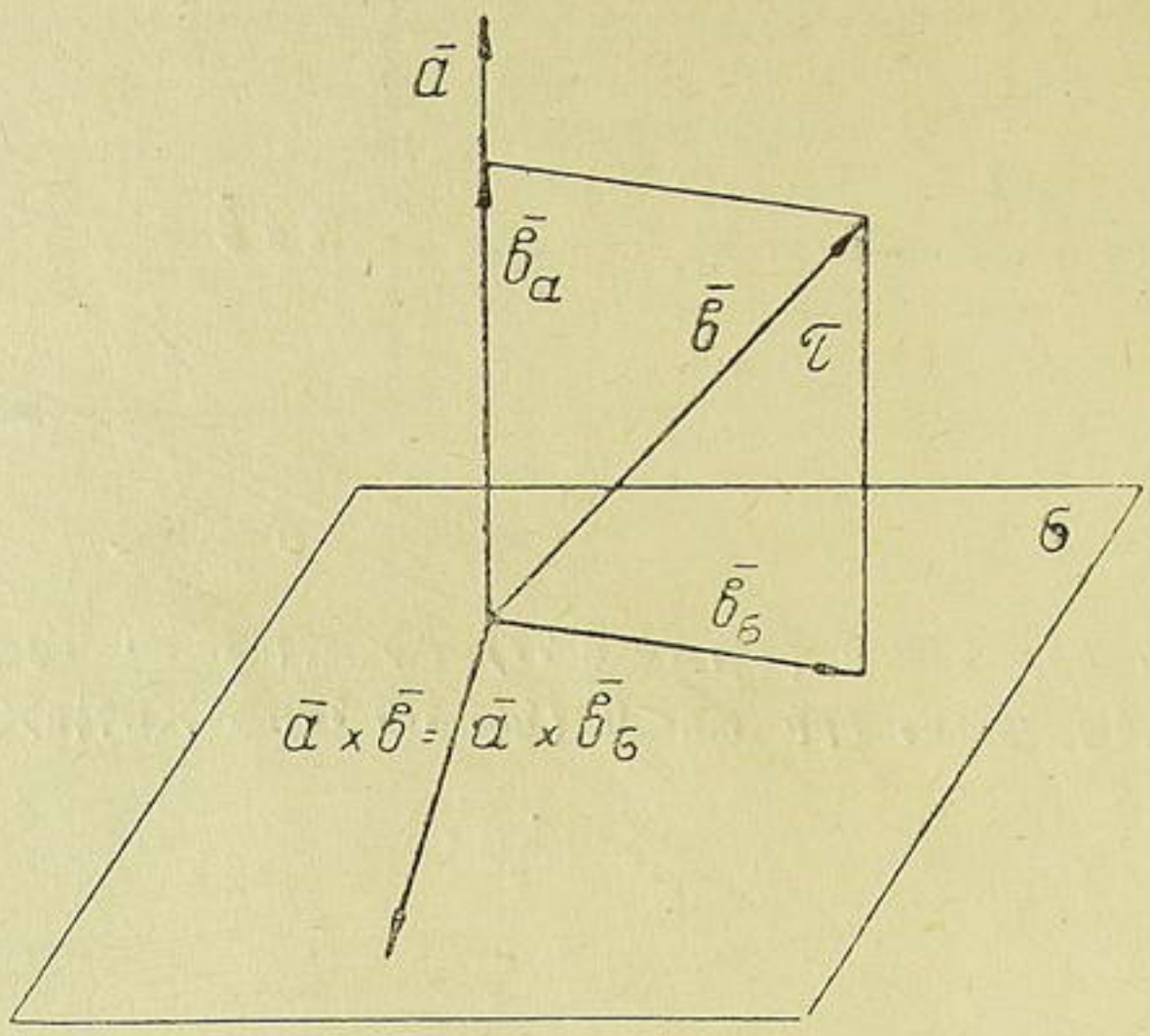


Նկ. 78



Նկ. 79

$\delta<0$: *Այսպիսով* δ-*ն և* mn-*ը միշտ միևնույն նշանն ունեն: Բացի դրանից* $|\delta|=|mn|$, *որովհետև* $|\bar{A}\times\bar{B}|=|AB\sin(\bar{A},\bar{B})|=|ma\,n\,b\sin(\bar{A},\bar{B})|=$ $=|mn|\,|a\,b\sin(\bar{A},\bar{B})|$: *Հետևաբար* $\delta=mn$: *Թեորեմն ապացուցված է:*



Նկ. 80

2°. Տրված են ā *և* b̄ *վեկտորները և* σ *հարթությունը, որ ուղղահայաց է* ā-*ին (նկ. 80): Միշտ հնարավոր է* b̄ *վեկտորը վերլուծել երկու բաղադրիչների՝* $\bar{b}_a$ *և* $\bar{b}_\sigma$, *որոնցից առաջինը զուգահեռ լինի* ā-*ին, իսկ երկրորդը՝* σ *հարթությանը.* $\bar{b}_a\parallel\bar{a}$, $\bar{b}_\sigma\parallel\sigma$: *Ապացուցենք, որ*

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\bar{b}_\sigma \qquad (II\ 33)$$

Եվ իրոք, ā, b̄ *և* $\bar{b}_\sigma$ *վեկտորները գտնվում են միևնույն* (τ) *հարթության մեջ, ուստի* $\bar{a}\times\bar{b}\parallel\bar{a}\times\bar{b}_\sigma$: *Կիրառելով ձախ ձեռքի կանոնը, համոզվում ենք, որ* $\bar{a}\times\bar{b}\uparrow\uparrow\bar{a}\times\bar{b}_\sigma$: *Բացի դրանից,* $|\bar{b}_\sigma|=|\bar{b}\sin(\bar{a},\bar{b})|$, *ուստի* $|\bar{a}\times\bar{b}_\sigma|=|ab\sin(\bar{a},\bar{b})|=|\bar{a}\times\bar{b}|$:

Այսպիսով երկու վեկտորական արտադրյալները՝ $(\bar{a}\times\bar{b}_\sigma)$ *և* $(\bar{a}\times\bar{b})$ *ունեն միևնույն չափը և համազուգահեռ են, ուստի և իրար հավասար են:*

Այս թեորեմից հետևում է (նկ. 81), որ եթե b_1, b_2, … b_n *վեկտորներն ունեն* σ *հարթությանը զուգահեռ միևնույն բաղադրիչը,* $(b_1=b_{2\sigma}=\dots=\bar{b}_{n\sigma}=\bar{b}_\sigma)$, *ապա* $\bar{a}\times\bar{b}_1$, $\bar{a}\times\bar{b}_2$, … $\bar{a}\times\bar{b}_n$ *վեկտորական արտադրյալները միմյանց հավասար են:*

3°. Հիմնվելով նախորդ (II 33) *թեորեմի վրա, ապացուցենք հետևյալ շատ կարևոր թեորեմը՝*

$$\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}\ \dots\qquad (II\ 34)$$

$\bar{b}+\bar{c}$ գումարը նշանակենք $\bar{e}$ տառով և տանենք (նկ. 82) σ հարթությունն ուղղահայաց $\bar{a}$-ին։ Այնուհետև $\bar{b}$, $\bar{c}$ և $\bar{e}$ վեկտորների յուրաքանչյուրը վերլուծենք երկուական բաղադրիչների, որոնցից մեկն $\bar{a}$-ին, իսկ մյուսը σ հարթությանը զուգահեռ.

$$\bar{b}=\bar{b}_a+\bar{b}_\sigma,\quad \bar{c}=\bar{c}_a+\bar{c}_\sigma,$$
$$\bar{e}=\bar{e}_a+\bar{e}_\sigma$$

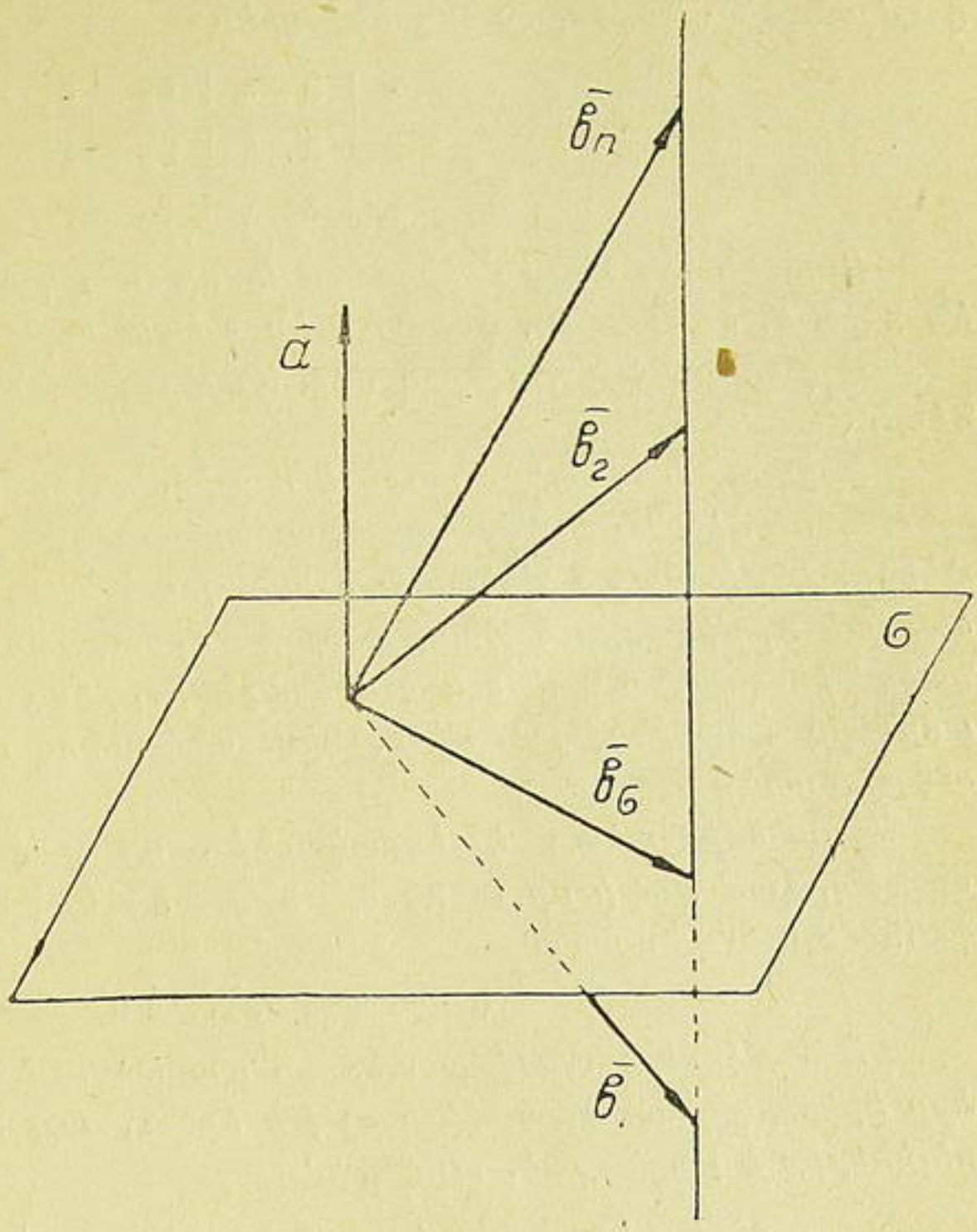
Ֆանի որ $\bar{e}=\bar{b}+\bar{c}$, ապա

$$\bar{e}_\sigma=\bar{b}_\sigma+\bar{c}_\sigma$$

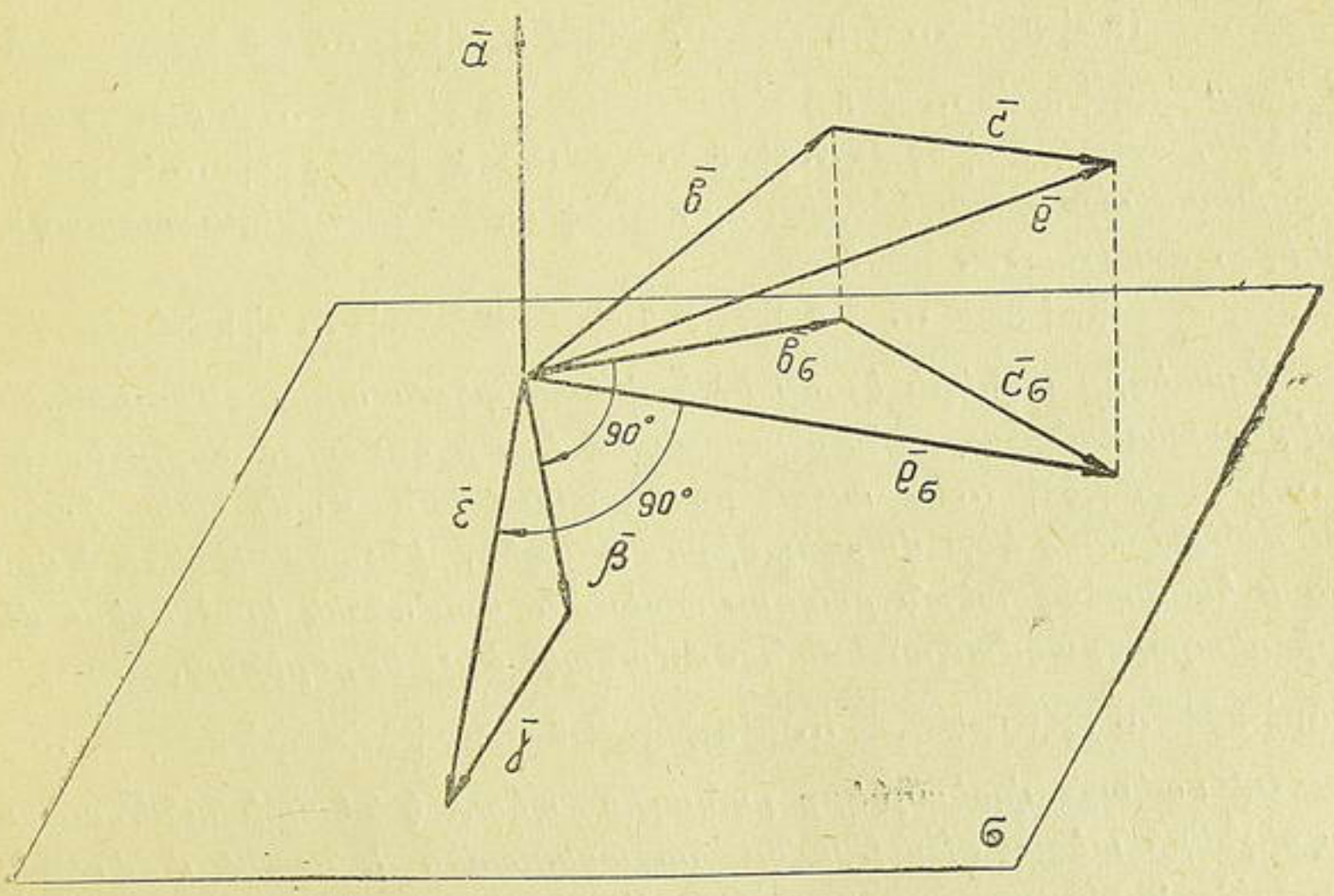
Համաձայն (II 33) բանաձևի

$$\bar{a}\times\bar{e}=\bar{a}\times\bar{e}_\sigma,$$
$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\bar{b}_\sigma$$
և $$\bar{a}\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}_\sigma$$

Ուսաի թեորեմն ապացուցված կլինի, եթե հաշվովի ցույց տալ որ



$$\bar{a}\times\bar{e}_\sigma=\bar{a}\times\bar{b}_\sigma+\bar{a}\times\bar{c}_\sigma$$



Նկ. 82

Հարմարության համար այս վեկտորական արտադրյալները համապատասխանաբար նշանակենք $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$: Վեկտորական արտադրյալի հատկության հիման վրա կարող ենք գրել.

$$\bar{\varepsilon} \perp \bar{a} \quad \bar{\varepsilon} \perp \bar{e}_\sigma \quad |\varepsilon| = |a||e_\sigma|$$
$$\bar{\beta} \perp \bar{a} \quad \bar{\beta} \perp \bar{b}_\sigma \quad |\beta| = |a||b_\sigma|$$
$$\bar{\gamma} \perp \bar{a} \quad \bar{\gamma} \perp \bar{c}_\sigma \quad |\gamma| = |a||c_\sigma|$$

Առաջին այուսակից հետևում է, որ $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ վեկտորներն ուղղահայաց են $\bar{a}$-ին և, հետևաբար, գտնվում են σ հարթության վրա:

Այդ նույն հարթության վրա են գտնվում նաև $\bar{e}_\sigma$, $\bar{b}_\sigma$ և $\bar{c}_\sigma$ վեկտորները:

Երրորդ այուսակը ցույց է տալիս, որ $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ վեկտորների չափերն $|a|$ անգամ մեծ են իրենց համապատասխան $\bar{e}_\sigma$ $\bar{b}_\sigma$ և $\bar{c}_\sigma$ վեկտորների չափերից: Հետևաբար $\bar{\varepsilon}$ վեկտորն ստանալու համար պետք է $|a|$ անգամ մեծացրած $\bar{e}_\sigma$ վեկտորը σ հարթության վրա պտտեցնել 90^0-ով: Նույն եղանակով կստանանք նաև $\bar{\beta}$ և $\bar{\gamma}$ վեկտորները, ընդ որում $\bar{e}_\sigma$, $\bar{b}_\sigma$ և c_σ վեկտորները σ հարթության մեջ ուղիղ անկյունով պտտեցվում են միևնույն ուղղությամբ:

Այստեղից պետք է եզրակացնել, որ քանի որ $\bar{e}_\sigma = \bar{b}_\sigma + \bar{c}_\sigma$, ապա և $\bar{\varepsilon} = \beta + \bar{\gamma}$, կամ քանի որ $\bar{\varepsilon} = \bar{a} \times \bar{e}_\sigma = \bar{a} \times \bar{e} = \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c})$, իսկ $\bar{\beta} = (\bar{a} \times \bar{b}_\sigma) = \bar{a} \times b$, $\bar{\gamma} = (\bar{a} \times c_\sigma) = \bar{a} \times \bar{c}$, ապա

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} \qquad (\text{II } 34)$$

Այս թեորեմն անմիջականորեն տարածվում է նաև այն դեպքի վրա, երբ երկրորդ բազմապատկիչը ոչ թե երկու, այլ ցանկացած թվով գումարելիներից է բաղկացած. այսինքն՝

$$\bar{a} \times (\bar{b}_1 + b_2 + \cdots + \bar{b}_n) = \bar{a} \times b_1 + \bar{a} \times \bar{b}_2 + \cdots + \bar{a} \times \bar{b}_n \quad \ldots \quad (\text{II } 35)$$

Ելնելով (II 35)-ից, հեշտ է ապացուցել, որ

$$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n) \times b = \bar{a}_1 \times b + \bar{a}_2 \times b + \cdots + \bar{a}_n \times b \qquad (\text{II } 35ա)$$

Եվ իրոք $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n) \times \bar{b} = -\bar{b} \times (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n)$. բայց, ըստ (II 35)-ի, $-\bar{b} \times (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n) = -(\bar{b} \times \bar{a}_1 + \bar{b} \times \bar{a}_2 + \cdots + \bar{b} \times \bar{a}_n)$: Տեղափոխելով այս փակագծերի մեջ մտնող արտադրյալների արտադրիչների տեղերը, կստանանք.

$$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n) \times \bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{b} + \bar{a}_2 \times \bar{b} + \cdots + \bar{a}_n \times \bar{b}$$

Այստեղից ակնհայտ է, որ եթե վեկտորական արտադրյալի արտադրիչներից յուրաքանչյուրը ներկայացնում է մի գումար, օրինակ, $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots) \times (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \cdots)$, ապա բազմապատկման ժամանակ փակագծերի հետ մենք կարող ենք վարվել ճիշտ այնպես, ինչպես թվերի թվաբանական և հանրահաշվական բազմապատկման ժամանակ կամ երկու վեկտորների սկալար բազմապատկման ժամանակ: Ինչպես, օրինակ,

$$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots) \times (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \cdots) = \bar{a}_1 \times \bar{b}_1 + \bar{a}_1 \times \bar{b}_2 + \bar{a}_2 \times \bar{b}_1 + \bar{a}_2 \times \bar{b}_2 \quad \ldots \quad (\text{II } 36)$$

Եվ սակայն փակագծերը բանալիս պետք է նկատի ունենալ, որ արտադրիչների տեղափոխությունը հավասարազոր է նշանի փոփոխությանը (օրինակ՝ $\bar{a}_1 \times \bar{b}_2 = -\bar{b}_2 \times \bar{a}_1$): Օգտվելով (II 36)-ից, երկու վեկտորների

վեկտորական արտադրյալը կարելի է արտահայտել այդ վեկտորների պրոեկցիաներով՝ OX, OY, OZ կոորդինատային առանցքների վրա։

Դիցուք, $\bar{a}=\hat{i}a_x+\hat{j}a_y+\hat{k}a_z$, $\bar{b}=\hat{i}b_x+\hat{j}b_y+\hat{k}b_z$։

Այն ժամանակ $(\bar{a}\times\bar{b})=(\hat{i}a_x+\hat{j}a_y+\hat{k}a_z)\times(\hat{i}b_x+\hat{j}b_y+\hat{k}b_z)$։

Բանանք վեկտորները և հիշենք, որ $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$, $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$, $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$, $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ *և* $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$։ *Այսպիսով կստանանք՝*

$$\bar{a}\times\bar{b}=\hat{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\hat{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\hat{k}(a_xb_y-a_yb_x) \quad \ldots\ldots \quad (\text{II } 37)$$

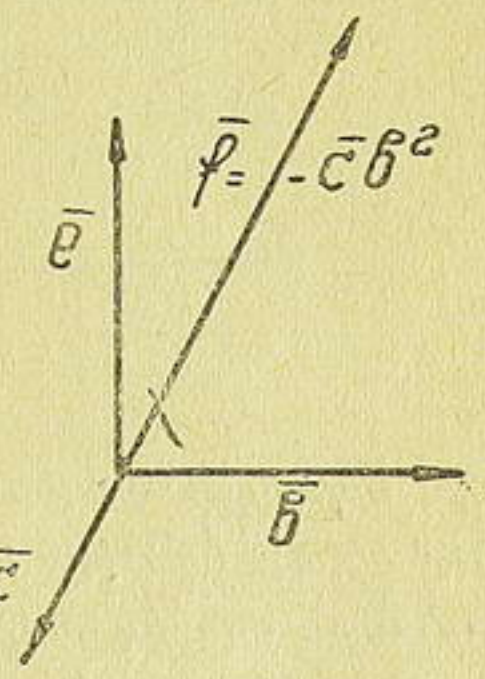
Այստեղ $\hat{i}(a_yb_z-a_zb_y)$*-ը հանդիսանում է* $\bar{a}\times\bar{b}$ *արտադրյալի այն բաղադրիչը, որ զուգահեռ է* OX *առանցքին (կամ* $\hat{i}$*-ին), իսկ* $(a_yb_z-a_zb_y)$*-ը հանդիսանում է* $\bar{a}\times\bar{b}$ *արտադրյալի պրոեկցիան* OX *առանցքի վրա։ Նման խնդիր ունեն նաև* (II 37)*-ի մյուս երկու անդամները։*

Վեկտորական արտադրյալը բարձրացնելով քառակուսի, կստանանք՝

$$(\bar{a}\times\bar{b})^2=(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2 \quad \ldots\ldots \quad (\text{II } 38)$$

§ 25. Խնդիրներ։ *Նկատի ունենալով վեկտորական արտադրյալի կարևորությունը, քննության առնենք մի քանի դեպքեր, որոնց մեջ արտադրիչներից մեկն իր հերթին դարձյալ վեկտորական արտադրյալ է հանդիսանում։*

1°. Որոշել $\bar{f}=\bar{b}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ *վեկտորը, եթե* $\bar{b}\perp\bar{c}$։ *Ունենալով* $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորները (նկ. 83), ձախ ձեռքի կանոնի օգնությամբ որոշում ենք* $\bar{b}\times\bar{c}$ *արտադրյալի ուղղությունն ու իմաստը։ Այդ արտադրյալը նշանակենք* $\bar{e}$*-ով։ Այն ժամանակ* $\bar{e}=\bar{b}\times\bar{c}$ *և որովհետև* $\bar{b}\perp\bar{c}$, $\hat{e}=\hat{b}\times\hat{c}$, $e=bc$։ *Մի անգամ ևս կիրառելով ձախ ձեռքի կանոնը* $\bar{f}=\bar{b}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}\times\bar{e}$ *վեկտորական արտադրյալի նկատմամբ, կունենանք՝*



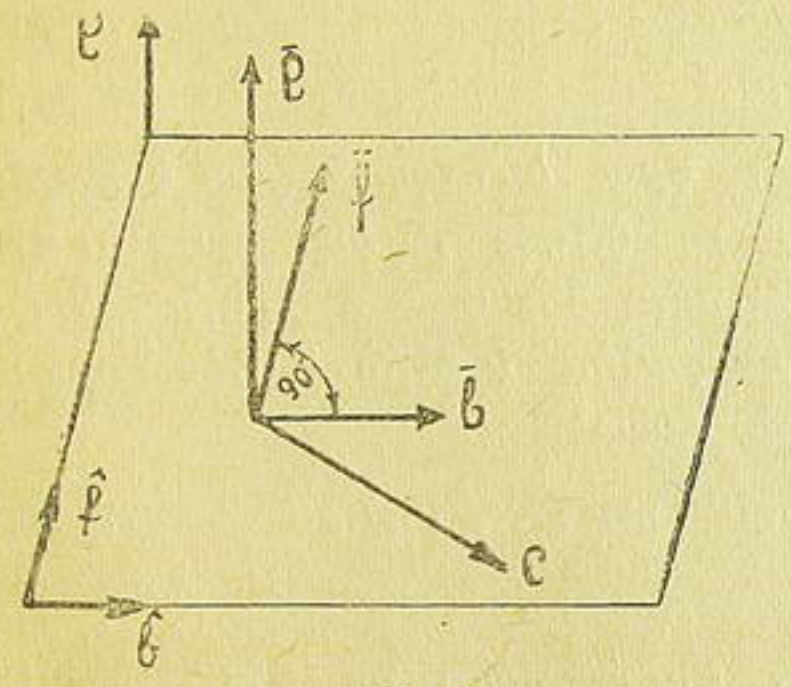
Նկ. 83

$$\bar{b}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{f}=\hat{f}f=be(\hat{b}\times\hat{e})=-\hat{c}be=$$
$$=-\hat{c}b^2c=-\bar{c}b^2 \quad \ldots\ldots \quad (\text{II } 39)$$

Կատարելապես նույն եղանակով մենք կարող էինք ստանալ

$$\bar{c}\times(\bar{b}\times\bar{c})=+\bar{b}c^2 \quad \ldots\ldots \quad (\text{II } 40)$$

2°. Որոշել $\bar{f}=\bar{b}\times(\hat{b}\times\bar{c})$ *վեկտորն այն դեպքում, երբ* $\varphi=(\hat{b},\hat{c})$ *անկյունը կամայական արժեք ունի (նկ. 84)։*



Նկ. 84

Այս դեպքում $\hat{b}\times\hat{c}=\hat{e}\sin\varphi$, *ուր* $\hat{e}\perp\hat{b}$, $\hat{e}\perp\hat{c}$ *և ուղղված է ըստ ձախ ձեռքի կանոնի։ Այսպիսով՝*

$$\bar{b}\times\bar{c}=\hat{e}bc\sin\varphi, \text{ իսկ } \bar{b}\times(\bar{b}\times\bar{c})=$$
$$\hat{b}\times\hat{e}b^2c\sin\varphi$$

Քանի որ $\hat{b}\perp\hat{e}$, *ապա* $\hat{b}\times\hat{e}$ *մի միավոր վեկտոր է, որ գտնվում է* $\bar{b}$ *և* $\bar{c}$ *վեկտորների հարթության մեջ և ուղղահայաց է* $\bar{b}$ *վեկտորին։ Այդ միավոր վեկտորը նշանակենք* $\hat{f}$*-ով։ Այն ժամանակ*

$$\bar{f}=\hat{f}f=\hat{f}b^2c\sin\varphi \ldots. \quad (\text{II } 41)$$

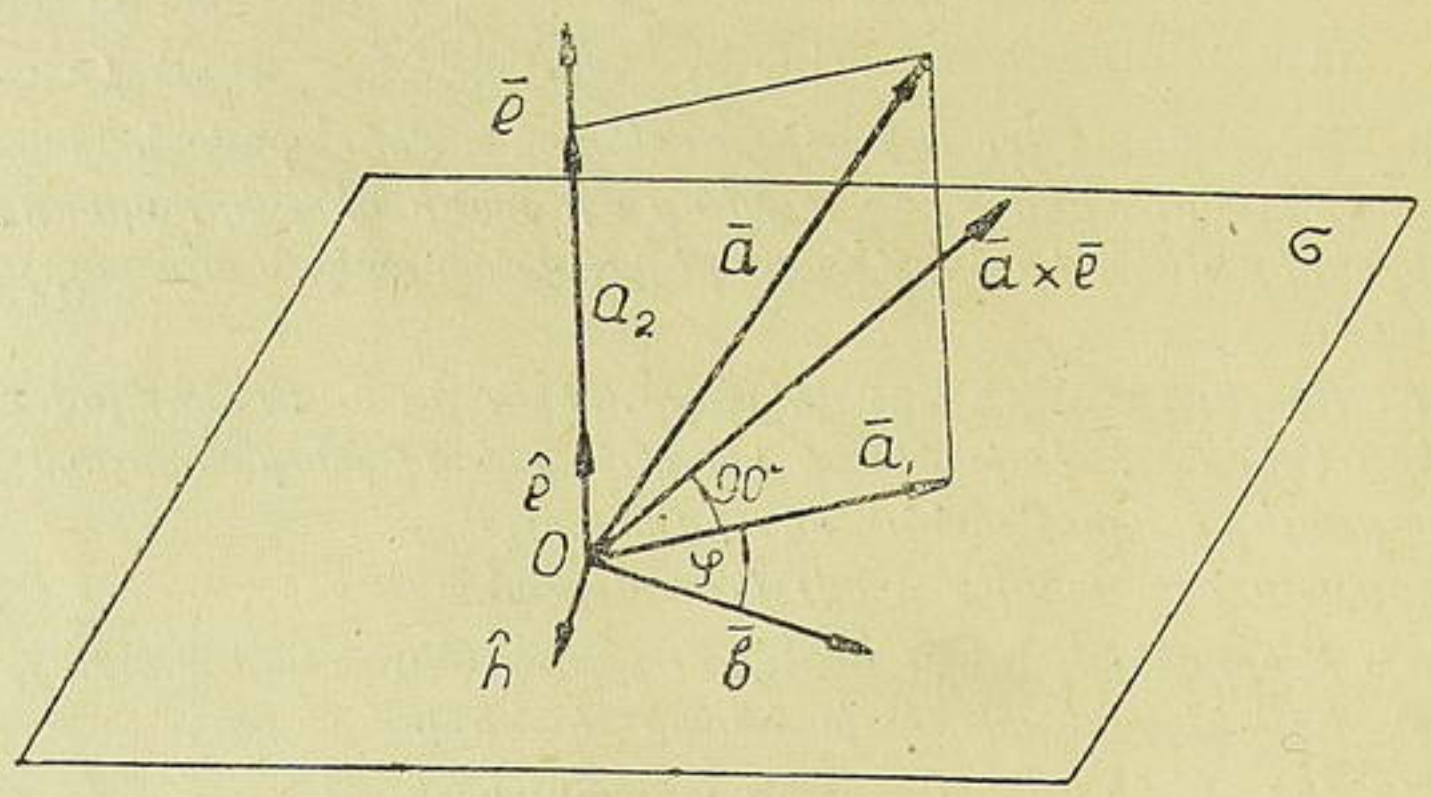
Երբ $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\bar{b}\perp\bar{c}$ *և* $\bar{f}=-\bar{c}b^2$: *Այս այն դեպքն է, որ քննության առնվեց 1° խնդրում:*

Դժվար չէ համոզվել, որ երբ $(\bar{b},\ \bar{c})=\varphi$,

$$\bar{c}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\hat{h}c^2b\sin\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II\ 42)$$

ուր $\hat{h}=\hat{c}\times\hat{e}$:

3°. Ցույց տալ, որ եթե $\bar{e}\perp\bar{b}$, *իսկ* $\bar{a}$*-ն կամայորեն ընտրված մի վեկտոր է, ապա* $(\bar{a}\times\bar{e})\times\bar{b}=\bar{e}(\bar{b}\cdot\bar{a})$, *այսինքն՝ թե* $(\bar{a}\times\bar{e})\times\bar{b}$ *վեկտորական արտադրյալը հավասար է* $\bar{e}$ *վեկտորին, բազմապատկած մի գործակցով, որ հավասար է* $\bar{b}$ *և* $\bar{a}$ *վեկտորների սկալար արտադրյալին (նկ. 85):*



նկ. 85

Ենթադրենք, թե O*-ն հանդիսանում է* $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\bar{b}$ *վեկտորների ընդհանուր սկիզբը: O-ից տանենք* σ *հարթությունը՝* $\bar{e}$*-ին ուղղահայաց. այն ժամանակ* $\bar{b}$*-ն կգտնվի* σ *հարթության վրա:* $\bar{a}$*-ն վերլուծենք* $\bar{a}_1$ *և* $\bar{a}_2$ *բաղադրիչների այնպես, որ* $\bar{a}_1$*-ը լինի զուգահեռ* σ*-ին, իսկ* $\bar{a}_2$*-ը՝* $\bar{e}$*-ին: Այն ժամանակ* $\bar{a}\times\bar{e}=\bar{a}_1\times\bar{e}+\bar{a}_2\times\bar{e}$: *Վերջին արտադրյալը հավասար է զերոյի, որովհետև* $\bar{a}_2\parallel\bar{e}$: *Այսպիսով* $\bar{a}\times\bar{e}=\bar{a}_1\times\bar{e}$: *Նշանակենք* $\hat{a}_1\times\hat{e}$ *արտադրյալը* $\hat{h}$*-ով, կունենանք՝*

$$\bar{a}\times\bar{e}=\hat{h}a_1e$$

$\hat{h}$*-ը նույնպես գտնվում է* σ *հարթության վրա և ուղղահայաց է* $\bar{a}_1$*-ին: Ասած է* $\hat{h}\times\bar{b}\uparrow\uparrow\hat{e}$, $\hat{h}\times\bar{b}=\hat{e}b\sin(90+\varphi)=\hat{e}b\cos\varphi$, *ուր* $\varphi=(\bar{b},\ \bar{a}_1)$, $(\bar{a}\times\bar{e})\times\bar{b}=\hat{h}\times\bar{b}a_1e=\hat{e}a_1eb\cos\varphi=ea_1b\cos\varphi=\bar{e}(\bar{b}\cdot\bar{a}_1)$: *Բայց* $(\bar{b}\cdot\bar{a}_1)=\bar{b}\cdot\bar{a}$, *քանի որ* $\bar{a}_2$ *բաղադրիչը զուգահեռ է* $\bar{e}$*-ին և, հետևաբար, ուղղահայաց է* $\bar{b}$*-ին: Այսպիսով, եթե* $\bar{e}\perp\bar{b}$, *ապա՝*

$$(\bar{a}\times\bar{e})\times\bar{b}=\bar{e}(\bar{b}\cdot\bar{a}): \quad \ldots\ldots \quad (II\ 43)$$

1. խնդիր.

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորները կոպլանար են: Ցույց տալ, որ* $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=0$:

[$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ *նշանակում է* $\bar{a}$ *և* $(\bar{b}\times\bar{c})$ *վեկտորների սկալար արտադրյալը*]:

Եվ իրոք, $\bar{b}\times\bar{c}$ *վեկտորական արտադրյալը նշանակենք* $\bar{e}$*-ով։* $\bar{e}$*-ն ուղղահայաց է* $\bar{b}$*-ին և* $\bar{c}$*-ին։ Քանի որ* $\bar{a}$*-ն,* $\bar{b}$*-ն և* $\bar{c}$*-ն կոպլանար են, ապա* $\bar{a}\perp\bar{e}$*։ Ուստի* $\bar{a}\cdot\bar{e}=0$ *կամ*

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=0 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (II\ 44)$$

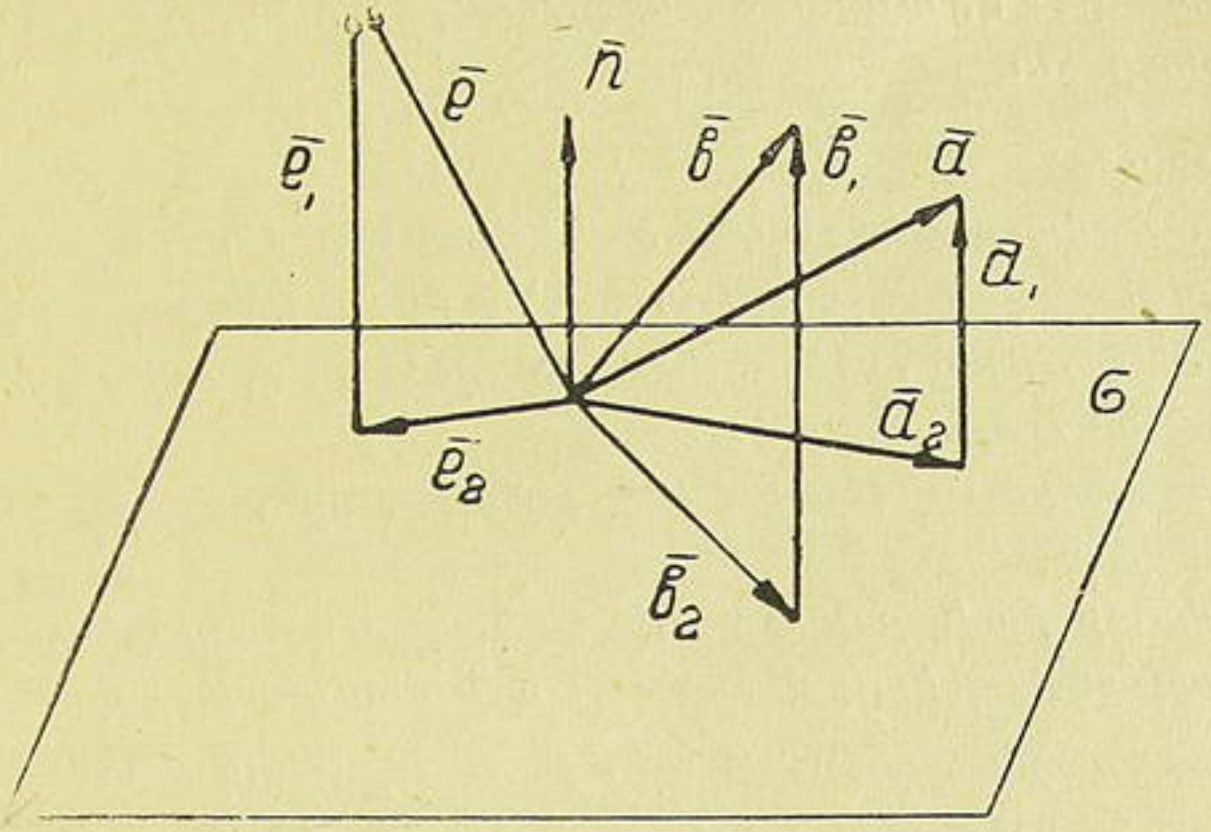
Մառնավոր դեպքում

$$\left.\begin{aligned}\bar{b}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})&=0.\\ \bar{c}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})&=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (II\ 45)$$

վերջին հավասարումներն անմիջականորեն բղխում են այն բանից, որ $\bar{b}\perp(\bar{b}\times\bar{c})$*,* $\bar{c}\perp(\bar{b}\times\bar{c})$*։*

2. Խնդիր.

Տրված են. $\bar{e}=\bar{a}\times\bar{b}$ *վեկտորական արտադրյալը,* $\bar{n}$ *վեկտորը և նրան ուղղահայաց* σ *հարթությունը* $(\sigma\perp\bar{n})$ *(նկ. 86)։*



Նկ. 86

$\bar{e}$*,* $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորները վերլուծված են* $\bar{e}_1$*,* $\bar{a}_1$*,* $\bar{b}_1$ *բաղադրիչների, որոնք զուգահեռ են* $\bar{n}$ *վեկտորին, և* $\bar{e}_2$*,* $\bar{a}_2$*,* $\bar{b}_2$ *բաղադրիչների, որոնք զուգահեռ են* σ *հարթությանը։* $\bar{e}_1$*-ը և* $\bar{e}_2$*-ն արտահայտել* $\bar{a}_1$*,* $\bar{a}_2$*,* $\bar{b}_1$*,* $\bar{b}_2$ *վեկտորների միջոցով։*

Քանի որ $\bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2$*,* $\bar{b}=\bar{b}_1+\bar{b}_2$*, ապա*

$$\bar{e}=(\bar{a}_1+\bar{a}_2)\times(\bar{b}_1+\bar{b}_2)$$

Բանաձով փակագծերը, կստանանք. $\bar{e}=\bar{a}_1\times\bar{b}_1+\bar{a}_1\times\bar{b}_2+\bar{a}_2\times\bar{b}_1+\bar{a}_2\times\bar{b}_2$*։ Բայց* $\bar{a}_1\parallel\bar{n}$*,* $\bar{b}_1\parallel\bar{n}$*. ուստի* $\bar{a}_1\times\bar{b}_1=0$*։ Իսկ* $\bar{a}_2$ *և* $\bar{b}_2$ *վեկտորները զուգահեռ են* σ *հարթությանը, բայց, ընդհանրապես զուգահեռ չեն իրար, այնպես որ,* $\bar{a}_2\times\bar{b}_2\neq0$*։*

Այսպիսով $\bar{e}=\bar{a}_1\times\bar{b}_2+\bar{a}_2\times\bar{b}_1+\bar{a}_2\times\bar{b}_2$*։ Այլ մասում* $\bar{a}_2\times\bar{b}_2\parallel\bar{n}$*։ Քանի որ* $\bar{a}_1\parallel\bar{n}$ *և* $\bar{b}_1\parallel\bar{n}$*, ապա* $\bar{a}_1\times\bar{b}_2\perp\bar{n}$ *և* $\bar{a}_2\times\bar{b}_1\perp\bar{n}$*, այսինքն՝* $\bar{a}_1\times\bar{b}_2$ *և* $\bar{a}_2\times\bar{b}_1$ *արտադրյալները զուգահեռ են* σ *հարթությանը։ Ուստի ունենք*

$$\bar{e}_1=\bar{a}_2\times\bar{b}_2;\ \bar{e}_2=\bar{a}_1\times\bar{b}_2+\bar{a}_2\times\bar{b}_1 \quad \ldots\ldots \qquad (II\ 46)$$

ընդ որում՝ $\bar{e}=\bar{e}_1+\bar{e}_2$*։*

Ստացված արդյունքը թույլ է տալիս պատասխանել հետևյալ հարցին.

Եթե վեկտորական արտադրյալի մի արտադրիչը զուգահեռ է ο հարթությանը, իսկ մյուս արտադրիչը զուգահեռ չէ այդ հարթությանը, ապա ո՞ր դեպքում վեկտորական արտադրյալը զուգահեռ կլինի ο հարթությանը։

Այսպես ուրեմն

$$\bar{a} \parallel \sigma,\ \bar{b} \not\parallel \sigma \text{ և } \bar{a} \times \bar{b} = \bar{e}$$

արտադրյալը զուգահեռ է ο հարթությանը։

Այս դեպքում $\bar{a}_1 = 0$, $\bar{a} = \bar{a}_2$։ $\bar{b}_1 \neq 0$, $\bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2$ *և ըստ* (II 46)-*ի* $\bar{e}_1 (= \bar{a} \times \bar{b}_2)$ *ուղղահայաց պիտի լինի ο հարթությանը,* $\bar{e}_2 (= \bar{a} \times \bar{b}_1)$ *զուգահեռ պիտի լինի ο հարթությանը և* $\bar{e} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$։

Պարզ է, որ $\bar{e}$*-ն զուգահեռ կլինի ο հարթությանն այն ժամանակ, երբ* $\bar{e}_1 = 0$, *իսկ այս հնարավոր է այն դեպքում, երբ* $\bar{b}_2 = 0$, *այսինքն՝* $\bar{b} = \bar{b}_1 \parallel \bar{n}$, *կամ* $\bar{b}_2 \parallel \bar{a}$, *այսինքն՝ հարթության* $\bar{n}$ *նորմալը,* $\bar{a}$ *և* $\bar{b}$ *վեկտորները կոպլանար են։*

3. Խնդիր.

Ուղիղի հավասարումը տրված է $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}t$ *ձևով, ուր* $\bar{r}$*-ն ուղղի ընթացիկ կետի շառավիղ-վեկտորն է,* $\bar{a}$*-ն՝ այն A կետի շառավիղ-վեկտորը, որով անցնում է տվյալ ուղիղը,* $\bar{b}$*-ն՝ մի վեկտոր է, որին զուգահեռ է մեր ուղիղը, իսկ* t*-ն՝ պարամետր է։*

Այս հավասարումը ձևափոխենք այնպես, որ նա չպարունակի t *պարամետրը։*

Դրա համար բավական է $\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}t$ *հավասարման երկու մասերը վեկտորաբար բազմապատկել* $\bar{b}$ *վեկտորով։ Այն ժամանակ կունենանք*

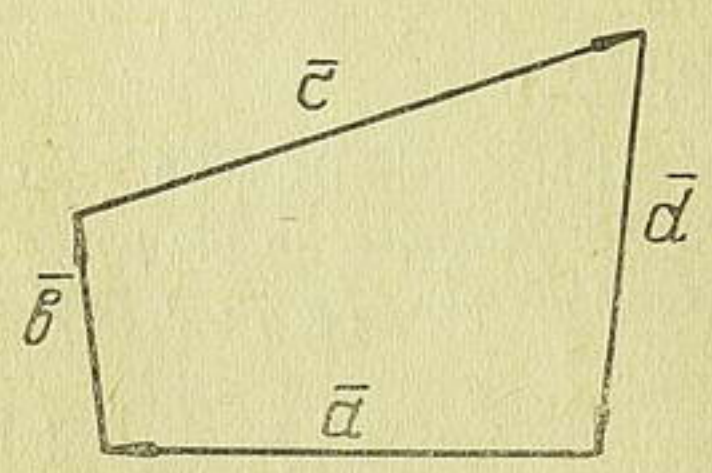
$$\bar{r} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b} + t\bar{b} \times \bar{b}.$$

Բայց $\bar{b} \times \bar{b} = 0$, *ուստի բոլոր անդամները հավաքելով ձախ մասում, կստանանք*

$$(\bar{r} - \bar{a}) \times \bar{b} = 0. \qquad \text{(II 47)}$$

Հենց այս է ուղղի հավասարման այն ձևը, որ t *պարամետրը չի պարունակում։*

§ 26. Խնդիրներ։ *Փակ քառանկյունը (նկ. 87) դիտելով որպես վեկտորական շղթա, ցույց տալ, որ* $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{d} = 0$ *հավասարությունը ճիշտ է միայն սեղանի և նրա մասնավոր դեպքերի համար, եթե* $\bar{a}$*-ն սեղանի հիմքերից մեկն է.*



Նկ. 87

2. Տրված են $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ *վեկտորները։ Ցույց տալ, որ, եթե* $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d}$ *և* $\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d}$, *ապա* $(\bar{a} - \bar{d}) \parallel (\bar{b} - \bar{c})$։

3. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ *վեկտորներն այնպես են, որ* $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d}$, $\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d}$ *և* $\bar{a} \times \bar{d} = \bar{b} \times \bar{c}$։ *Ցույց տալ, որ այս դեպքում* $\bar{c} = \gamma_1 \bar{a} + \gamma_2 \bar{b}$ *և* $\bar{d} = \delta_1 \bar{a} + \delta_2 \bar{a}$, *ուր* γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 *գործակիցներ են։ Գտնել այդ գործակիցների միջև գոյություն ունեցող կապը։*

4. Որոշել այն անկյան կիսողի հավասարումը, որի գագաթն է C կետը, իսկ կողմերը զուգահեռ են $\bar{a}$ և $\bar{b}$ միավոր վեկտորներին:

5. Ցույց տալ, որ $(\bar{a}\cdot\bar{b})^2+(\bar{a}\times\bar{b})^2=\bar{a}^2\bar{b}^2$ . . . . . (II 48)

6. Օգտվելով (II 19 և II 37)-ից, ապացուցել Լագրանժի նույնությունը՝

$$(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2=(xy'-yx')^2+$$
$$+(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2,$$

որ x, y, z, x′, y′, z′ միանգամայն կամայական (դրական կամ բացասական) թվեր են:

7. Իմանալով, որ $\bar{b}\perp\bar{c}$ և օգտվելով $\bar{b}\times(\bar{b}\times\bar{c})=-\bar{c}b^2$ հավասարումից, որոշել հետևյալ վեկտորական արտադրյալները.

ա) $\bar{b}\times[\bar{b}\times(\bar{b}\times\bar{c})]$, բ) $\bar{b}\times\{\bar{b}\times[\bar{b}\times(\bar{b}\times\bar{c})]\}$

8. Գրել այն ուղղի հավասարումը, որ անցնում է A կետով և ուղղահայաց է $\bar{b}$ և $\bar{c}$ վեկտորներին: [Օգտվել (II 47)-ից]:

9. Գրել այն հարթության հավասարումը, որ անցնում է A կետով և զուգահեռ է $\bar{b}$ և $\bar{c}$ վեկտորներին:

10. Տրված են $\bar{a}$ և $\bar{c}$ վեկտորները: Գտնել մի $\bar{b}$ վեկտոր, որ բավարարի հետևյալ պայմաններին. $(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2$, $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}$:

ԳԼՈՒԽ III

ԵՐԵՔ ԵՎ ԱՎԵԼԻ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ: ԽԱՌՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ

§ 27. Վեկտորների ձախ եվ աջ եռյակներ: Եթե յուրաքանչյուր ձեռքի բթամատը (I), ցուցամատը (II) և միջնամատը (III) գտնվում են ձեռքի ափի հարթության մեջ, ապա կարելի է երկու ձեռքերն այնպես դասավորել, որ նրանց նույնանուն մատներն համազուգահեռ լինեն իրար՝

$$\text{I}_{\text{աջ}}\uparrow\uparrow\text{I}_{\text{ձախ}},\ \text{II}_{\text{աջ}}\uparrow\uparrow\text{II}_{\text{ձախ}},\ \text{III}_{\text{աջ}}\uparrow\uparrow\text{III}_{\text{ձախ}}:$$

Դրա համար անհրաժեշտ է, որպեսզի ափերի հարթությունները զուգահեռ լինեն իրար, իսկ ափերն իրանք ուղղված լինեն մեկը մյուսին:

Այժմ ենթադրենք, թե յուրաքանչյուր ձեռքի բթամատը և ցուցամատը դասավորված են ափերի հարթության մեջ, իսկ միջնամատները չեն գտնվում այդ հարթության մեջ: Այդ դեպքում, երբ իրար զուգահեռ ափերը ուղղված են դեպի իրար, իսկ բթամատերն ու ցուցամատերը իրար զուգահեռ են ($\text{I}_{\text{աջ}}\uparrow\uparrow\text{I}_{\text{ձախ}}$, $\text{II}_{\text{աջ}}\uparrow\uparrow\text{II}_{\text{ձախ}}$), երկու ձեռքերի միջնամատները կարող են միայն հակազուգահեռ լինել, ($\text{III}_{\text{աջ}}\uparrow\downarrow\text{III}_{\text{ձախ}}$) կամ կազմել կամայական մի անկյուն. այդ մատների համազուգահեռությունն աննշան է:

Ինդուկցիայի առնենք երեք ոչ կոպլանար վեկտորներ՝ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, որոնք մի ընդհանուր սկիզբ ունեն և տրված են որոշ հաջորդականությամբ, օրինակ՝ $\bar{a}$—առաջին վեկտոր, $\bar{b}$—երկրորդ և $\bar{c}$—երրորդ վեկտոր:

Քանի որ երկու ձեռքերի բթամատները, ցուցամատները և միջնամատները միաժամանակ միմյանց համազուգահեռ լինել չեն կարող, ապա այստեղից հետևում է, որ հնարավոր է միայն ձեռքերից մեկը (կամ ձախը,

կամ աջը) դասավորել այնպես, որ նրա բթամատը, ցուցամատը և միջնամատը համապատասխանաբար համազուգահեռ լինեն ā, b̄, c̄ վեկտորներին։

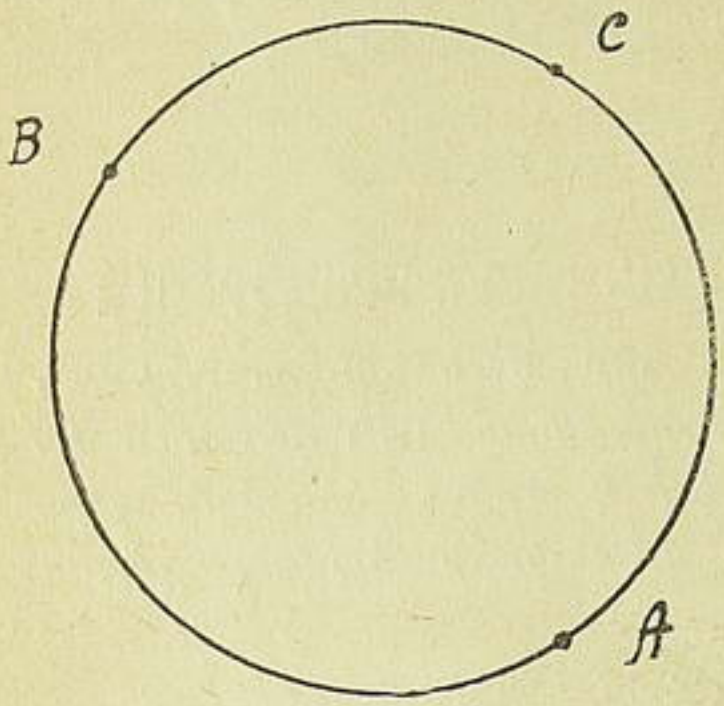
I ↑↑ ā, II ↑↑ b̄, III ↑↑ c̄։ . . . . . (III 1)

Ենթադրենք, թե ā, b̄, c̄ վեկտորներն այնպիսի վեկտորներ են, որ

I ↑↑ ā, II ↑↑ b̄, III ↑↑ c̄

պայմանին բավարարում են ձախ ձեռքի բթամատը, ցուցամատը և միջնամատը։ Այն ժամանակ այդ վեկտորները, տվյալ հաջորդականության դեպքում (ā—I, b̄—II, c̄—III) կոչվում են ձախ ձեռքի եռյակ վեկտորներ։ Իսկ եթե վերոհիշյալ պայմանին բավարարում են աջ ձեռքի բթամատը, ցուցամատը և միջնամատը, այն ժամանակ ā, b̄, c̄, վեկտորները մատնանշված հաջորդականությամբ կոչվում են աջ ձեռքի վեկտորներ։

Հետագայում մեզ հարկավոր կլինի «շրջանային տեղափոխության» գաղափարը։ Շրջանագծի վրա A, B, C տառերով նշենք երեք կամայորեն ընտրված կետեր (նկ. 88)։ Որևէ այդ կետերին հանդիպենք հետևյալ հաջորդականություններից մեկն ու մեկում՝ ABC, BCA, CAB, հարկավոր կլինի շրջանագծի վրայով շարժվել ամեն անգամ նույն ուղղությամբ, սկսելով առաջին կետից (նկարի վրա ըստ ժամացույցի սլաքի)։ Իսկ որևէ այդ նույն տառերին մենք հանդիպենք մի անգամ ABC, իսկ մի ուրիշ անգամ BAC հաջորդականությամբ, անհրաժեշտ է յուրաքանչյուր դեպքում շրջանագծի վրայով շարժել տարբեր ուղղություններով (ըստ ժամացույցի սլաքի՝ ABC հաջորդականության դեպքում, և ժամացույցի սլաքին հակառակ՝ BAC հաջորդականության դեպքում)։

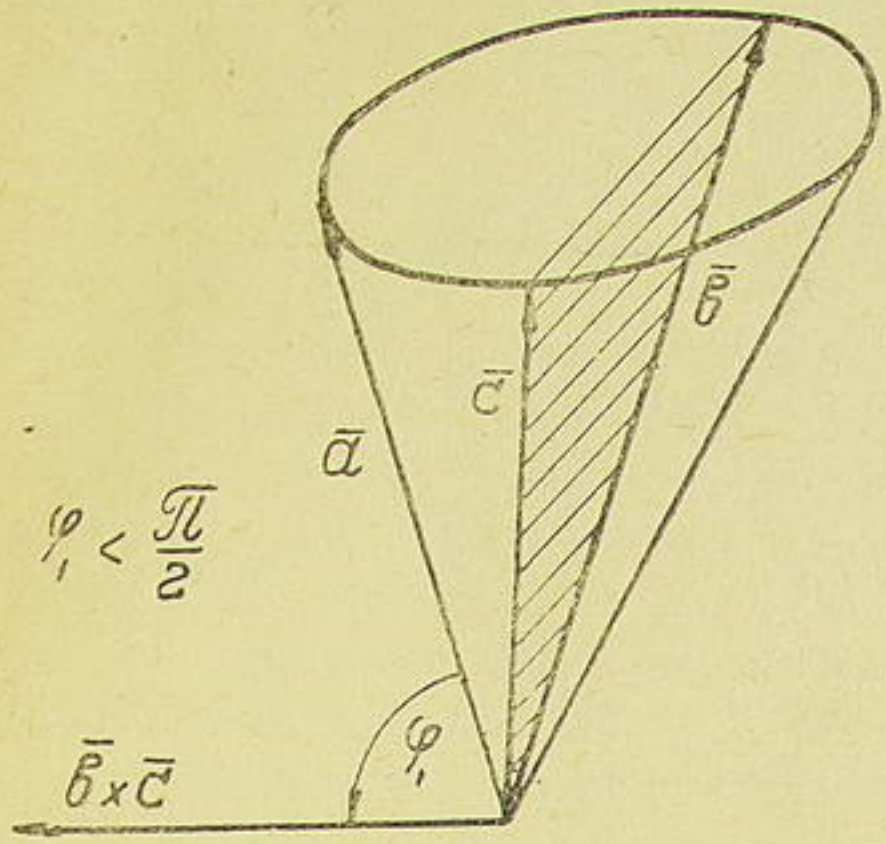


նկ 88

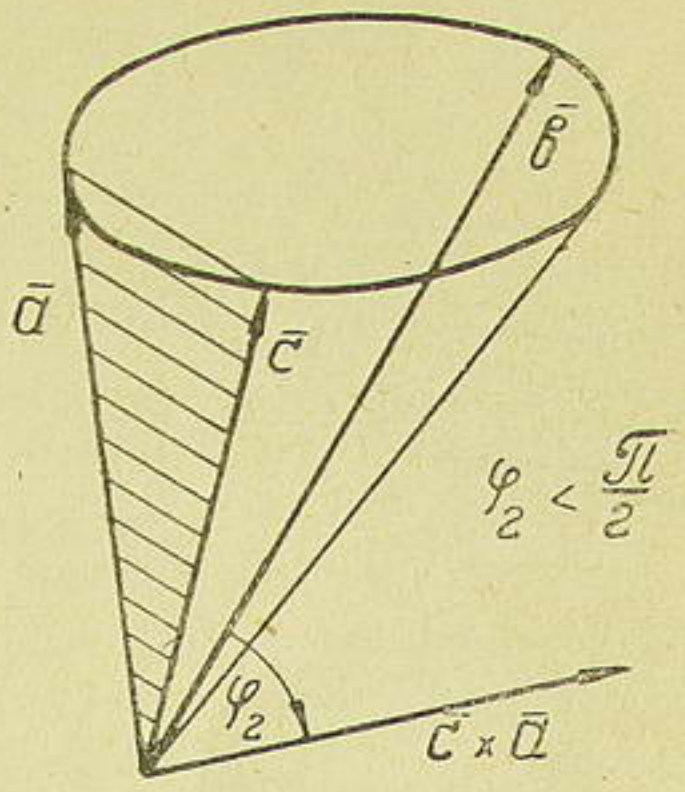
Շրջանային կոչվում են այն տեղափոխությունները, որոնք փոփոխելով կարգը, պահպանում են շրջանցման ուղղությունը։ Այսպես, օրինակի համար, այն տեղափոխությունները, որոնց հետևանքով ABC, BCA, CAB, հաջորդականություններից որևէ մեկը փոխարինվում է մյուս երկուսով, հանդիսանում են շրջանային տեղափոխություններ։ Այն տեղափոխությունները, որոնց շնորհիվ ACB, CBA, BAC հաջորդականություններից մեկն ու մեկը փոխարինվում է ծնացած երկուսից որևէ մեկով, նույնպես շրջանային են։ Իսկ այն փոփոխությունները, որոնց հետևանքով ABC, BCA, CAB հաջորդականություններից որևէ մեկը փոխարինվում է ACB, CBA, BAC հաջորդականություններից մեկն ու մեկով, շրջանային տեղափոխություն չեն հանդիսանում։

Դժվար չէ համոզվել, որ շրջանային տեղափոխությունները չեն փոփոխում վեկտորների եռյակի բնույթը. եթե ā, b̄, c̄ վեկտորները ներկայացնում են վեկտորների ձախ եռյակ, ապա այդպիսին կլինեն նաև b̄, c̄, ā և c̄, ā, b̄ վեկտորները։ Ոչ շրջանային տեղափոխությունները, ընդհակառակը, փոխում են վեկտորների եռյակի բնույթը, այսպես օրինակ. եթե ā, b̄, c̄ եռյակը ձախ է, ապա ā, c̄, b̄ եռյակն աջ կլինի։

Շատ կարևոր է այն հարցը, թե եռյակի վեկտորներից մեկն ինչպիսի անկյուն է կազմում մյուս երկուսի վեկտորական արտադրյալի հետ, ասենք,



Նկ. 89



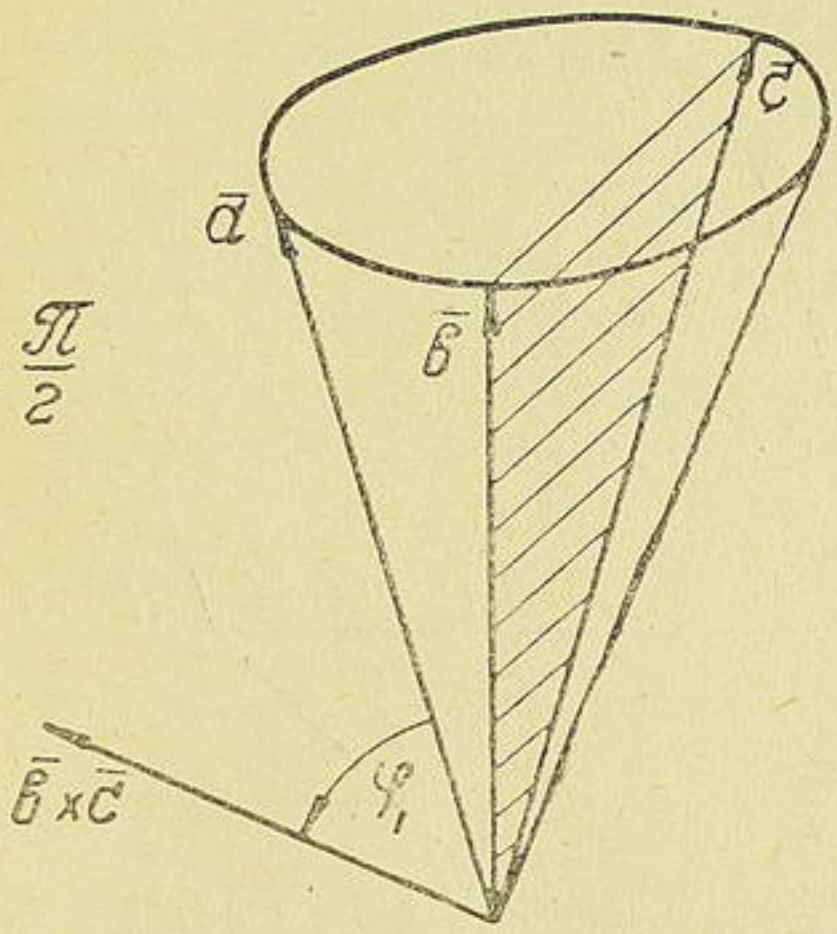
Նկ. 90

թե՝ բութ. օրինակ՝ ինչպիսի՞ անկյուններ են $\varphi_1=(\bar{a}, \bar{b}\times\bar{c})$, $\psi_1=(\bar{c}, \bar{b}\times\bar{a})$ և այլն։

89. 90, 91ա, 91բ նկարներից դժվար չէ տեսնել, որ եթե $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ վեկտորների եռյակը և վեկտորական արտադրյալի «ուղղության կանոնը» նույնանուն են (այսինքն՝ եթե աջ եռյակի դեպքում վեկտորական արտադրյալի իմաստը որոշվում է աջ ձեռքի կանոնով, իսկ ձախ եռյակի դեպքում վեկտորական արտադրյալի իմաստը որոշվում է ձախ ձեռքի կանոնով), ապա

$\varphi_1=(\bar{a}, \bar{b}\times\bar{c})$, $\varphi_2=(\bar{b}, \bar{c}\times\bar{a})$, $\varphi_3=(\bar{c}, \bar{a}\times\bar{b})$

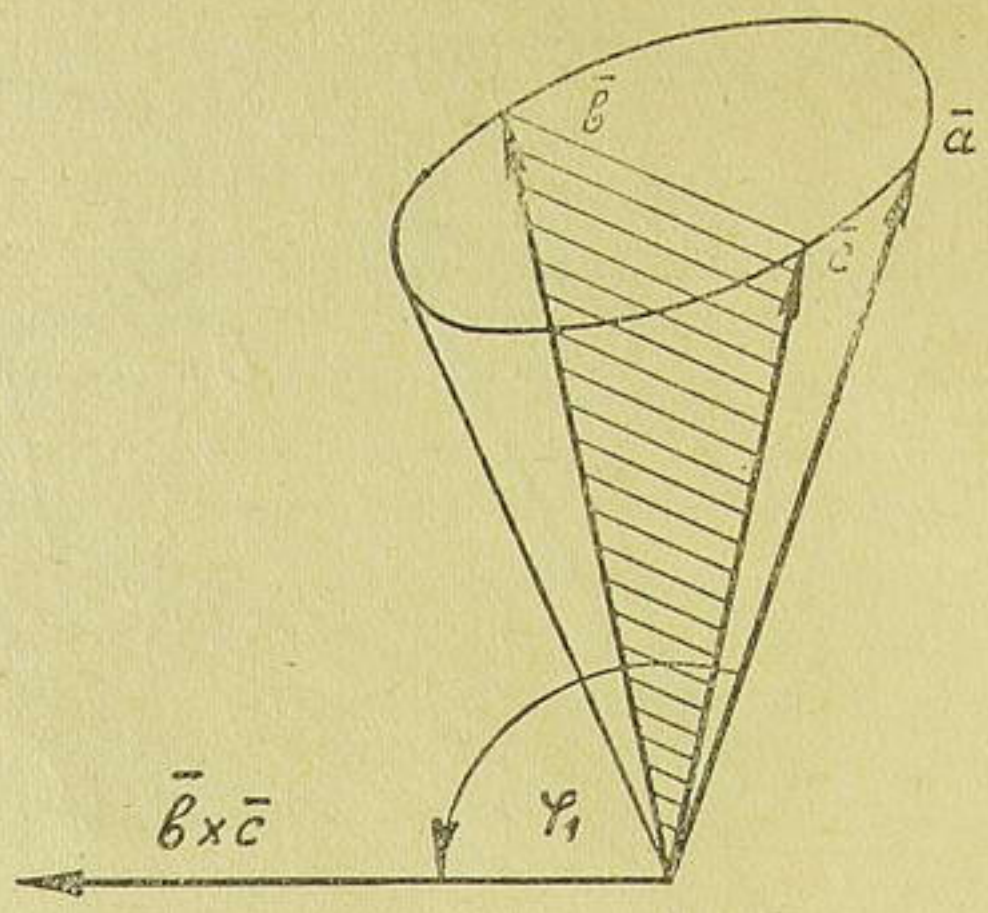
անկյունները սուր կլինեն։



Նկ. 91ա

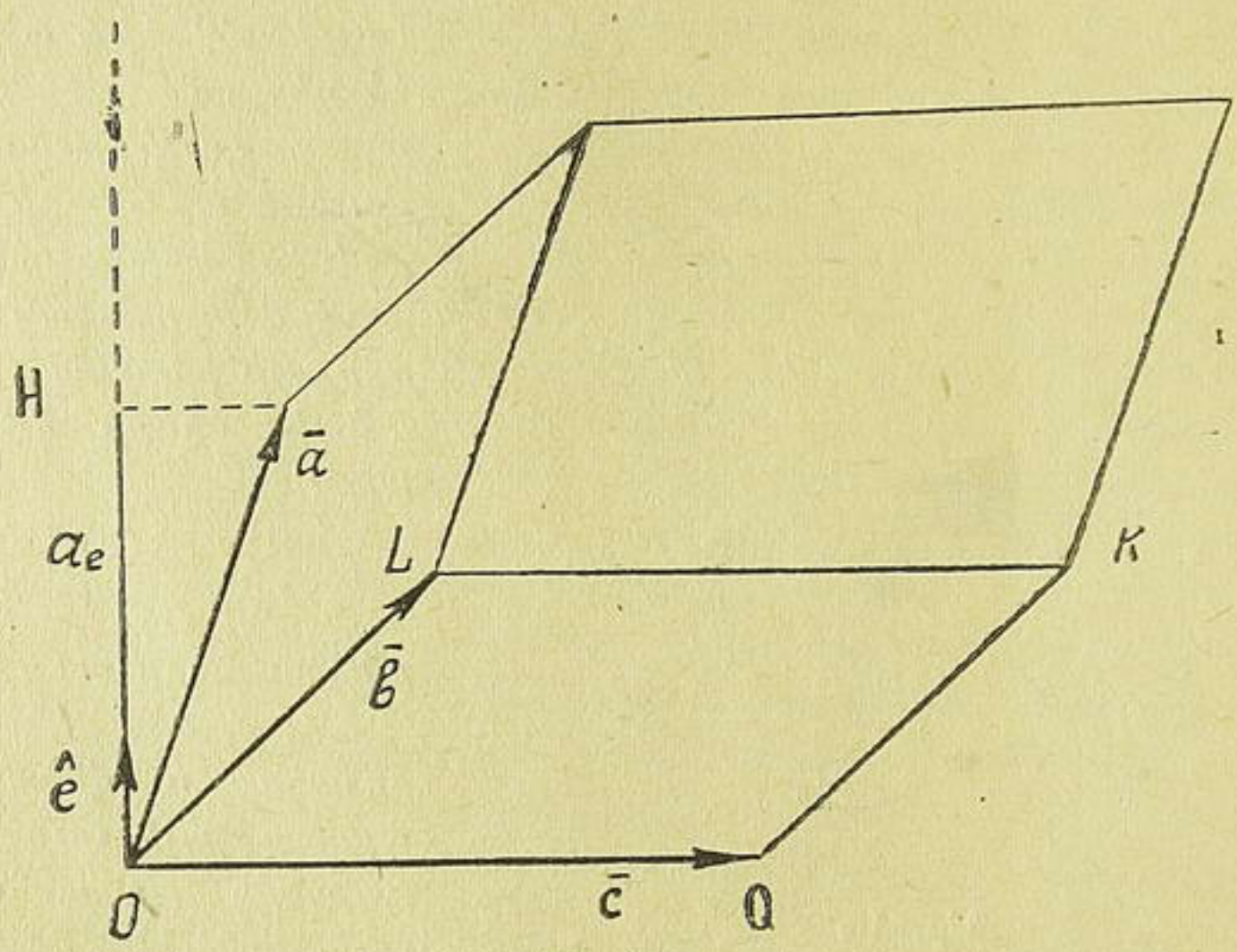
Իսկ եթե վեկտորների եռյակը և վեկտորական արտադրյալի «ուղղության կանոնը» տարբեր են (այսինքն՝ եթե վեկտորների եռյակն աջ է, իսկ վեկտորական արտադրյալի իմաստը որոշվում է ձախ ձեռքի կանոնով, կամ ընդհակառակը), ապա φ_1, φ_2, φ_3 անկյունները բութ կլինեն։

Ակնհայտ է նույնպես, որ եթե անկյուն $\varphi_1=(\bar{a}, \bar{b}\times\bar{c})$, *ապա* $\psi_1=(\bar{a},\bar{c}\times\bar{b})$ *անկյունը հավասար կլինի* $\pi-\varphi_1$:



Նկ. 91բ

§ **28. Երեք վեկտորների խառը արտադրյալը:** $q=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a}$ *սկալար արտադրյալը, որի մեջ բազմապատկիչներից մեկը հանդիսանում է երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալ կոչվում է* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորների խառն արտադրյալ:*



Նկ. 92

Սկալար արտադրյալը՝ $q>0$, *եթե* $\varphi_1=(\bar{a}, \bar{b}\times\bar{c})$ *անկյունը սուր է: Այն ամենի հիման վրա, ինչ ասվեց նախորդ պարագրաֆում,* φ_1, φ_2, φ_3 *անկյուններից մասին, մենք գալիս ենք հետևյալ եզրակացությանը.*

$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ *խառն արտադրյալը կլինի դրական թիվ, եթե* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *եռյակը և այն «ուղղության կանոնը», որով որոշվում է* $\bar{b}\times\bar{c}$ *վեկտորական արտադրյալի իմաստը, նույնանուն են: Հակառակ դեպքում խառն արտադրյալը կլինի բացասական:*

Հետևաբար ստորև բերած վեց խառն արտադրյալներից՝

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}),\quad \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a}),\quad \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}),$$
$$\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{b}),\quad \bar{c}\cdot(\bar{b}\times\bar{a}),\quad \bar{b}\cdot(\bar{a}\times\bar{c}),$$

որոնք կարելի է կազմել $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորներից, երեքը դրական են, իսկ երեքը՝ բացասական, ընդ որում միևնույն տողում գրված արտադրյալները միևնույն նշան պետք է ունենան, քանի որ «ուղղության կանոնը» միևնույնն է բոլոր վեց վեկտորական արտադրյալների համար, իսկ յուրաքանչյուր տողի վեկտորական եռյակները նույնանուն լինելով, երկու տարբեր տողերի պատկանող եռյակները տարանուն են:*

Դժվար չէ ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր տողի երեք արտադրյալները ոչ միայն միատեսակ նշան ունեն, այլև հավասար են իրար: Դրա համար վերցնենք այն երեք արտադրյալները, որոնք դրական են: Թող, օրինակի համար, $q=\bar{a}\cdot(b\times\bar{c})>0$, *այսինքն՝* $\varphi_1=(\bar{a},\ \bar{b}\times\bar{c})<\frac{\pi}{2}$: *Ցույց տանք, որ* q*-ն հավասար է մի զուգահեռանիստի ծավալին, որի նույն կետից սկիզբ առնող կողմերը համապատասխանաբար հավասար են* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորներին (նկ. 92): Կարճության համար ընդունենք* $\bar{e}=\bar{b}\times\bar{c}$: *Այն ժամանակ* $|e|$*-ն հավասար կլինի զուգահեռանիստի* OLKQ *հիմքի մակերեսին:* $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{e}=a_e|e|$, *ուր* a_e *հավասար է* $\bar{a}$ *վեկտորի պրոեկցիային* $\bar{e}$*-ի ուղղության վրա: Բայց* $\bar{e}$*-ն ուղղահայաց է* OLKQ *հիմքին և* a_e*-ն հավասար է զուգահեռանիստի* OH *բարձրությանը: Ուստի* $\bar{a}\cdot\bar{e}=a_e|e|$ *հանդիսանում է զուգահեռանիստի ծավալը (V): Վերցնենք* $\bar{c}\times\bar{a}$ *վեկտորական արտադրյալը նշանակելով* $\bar{f}$*-ով, մենք տեսնում ենք, որ* $b\cdot(\bar{c}\times\bar{a})=\bar{b}\cdot\bar{f}=b_f|f|$, *ուր* $\bar{f}$*-ը հանդիսանում է այդ նույն զուգահեռանիստի մեկ ուրիշ նիստի մակերեսը: Այդ նիստն ընդունենք որպես զուգահեռանիստի հիմք, այդ ժամանակ* b_f*-ը կլինի բարձրությունը, իսկ* $b\cdot(\bar{c}\times\bar{a})=b\cdot f$ *կհանդիսանա նույն զուգահեռանիստի ծավալը (V): Միևնույն եղանակով կարելի է ցույց տալ նաև, որ* $\bar{c}\cdot\bar{a}\times\bar{b})=V$:

Այսպիսով՝

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})=\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=V: \quad (\text{III } 2)$$

Քանի որ

$$\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{b})=-\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$
$$b\cdot(\bar{a}\times\bar{c})=-\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})$$

և

$$\bar{c}\cdot(b\times\bar{a})=-\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}),$$

ապա

$$\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{b})=\bar{c}\cdot(\bar{b}\times\bar{a})=\bar{b}\cdot(\bar{a}\times\bar{c})=-V: \quad (\text{III } 3)$$

(III 2)*-ն և* (III 3)*-ն ցույց են տալիս, որ բազմապատկիչների շրջանային տեղափոխությունից խառն արտադրյալը փոփոխության չի ենթարկվում, մինչդեռ ամեն այլ ոչ շրջանային տեղափոխությունների ժամանակ խառն արտադրյալը փոխում է իր նշանը:*

Այդ նույն բանաձևերից կարելի է հանել մի եզրակացություն ևս.

Սկալար և վեկտորական բազմապատկման գործողությունների (III 4) նշանների տեղափոխության դեպքում խառն արտադրյալը փոփոխության չի ենթարկվում, այսինքն՝

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III\ 5)$$

Եվ իրոք, քանի (III 2)-ի, $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$. բայց $\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, նույն կերպ $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$:

Խառն արտադրյալի այս հատկությամբ շատ հաճախ են օգտվում:

Սրա հետ միասին ակնհայտ է, որ եթե սկալար և վեկտորական բազմապատկման նշանների տեղերը չեն ազդում խառն արտադրյալի վրա, ապա այդ նշանները կարելի է բոլորովին չդնել, այսինքն՝ փոխանակ գրելու $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ կամ $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot c$, կարելի է պարզապես գրել $(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$: Տվյալ դեպքում (III 2) և (III 3) պայմանները կգրվեն այսպես.

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=(\bar{b}\bar{c}\bar{a})=(\bar{c}\bar{a}\bar{b}), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III\ 6)$$

$$(\bar{a}\bar{c}\bar{b})=(\bar{c}\bar{b}\bar{a})=(\bar{b}\bar{a}\bar{c}); \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (III\ 7)$$

§ 29. Խառն արտադրյալի հատկությունները (շարունակություն): Բացի այն դեպքից, երբ բազմապատկիչներից մեկը հավասար է զերոյի, $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ խառն արտադրյալը դառնում է զերո երկու ուրիշ դեպքերում ևս.

1°. Եթե $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ վեկտորներից երկուսը զուգահեռ են իրար.

2°. երբ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ բազմապատկիչները կոպլանար են:

Այս թեորեմներից առաջինն ապացուցելու համար, ենթադրենք, օրինակի համար, թե $\bar{a}\parallel\bar{b}$: Այն ժամանակ $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=0$, որովհետև մենք կարող ենք գրել $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$: Եթե տրված է, որ $\bar{a}\parallel\bar{c}$, ապա օգտվելով (III 6)-ով, կգրենք $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})$. այստեղ աջ մասը հավասար է զերոյի, որովհետև $\bar{c}\times\bar{a}=0$:

Վեկտորների հավասարությունը հանդիսանում է զուգահեռության մասնավոր դեպքը, հետևաբար, այն խառն արտադրյալը, որի մեջ երկու բազմապատկիչներն իրար հավասար են, հավասար է զերոյի: Օրինակ՝ $(\bar{a}\bar{a}\bar{b})=0$, $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{a})=0$ և այլն:

Երկրորդ թեորեմի ապացուցման համար ընդունենք $\bar{b}\times\bar{c}=\bar{e}$ և գրենք՝ $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{e}$: Եթե արտադրիչների մեջ իրար զուգահեռ վեկտորներ չկան, ապա $\bar{e}\neq0$, և $\bar{a}\cdot\bar{e}$ կդառնա զերո այն միակ պայմանով, որ $\bar{a}\perp\bar{e}$: Բայց $\bar{e}=\bar{b}\times\bar{c}$, ուստի $\bar{b}\perp\bar{e}$ և $\bar{c}\perp\bar{e}$: Այդպիսով $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ արտադրիչներն ուղղահայաց կլինեն միևնույն $\bar{e}$ վեկտորին, այսինքն $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ վեկտորները կոպլանար են:

Մեր ստացած արդյունքը կարելի է այսպես ձևակերպել.

Եթե արտադրիչների մեջ չկան իրար զուգահեռ վեկտորներ, սակայն խառն արտադրյալը հավասար է զերոյի, ապա նրա երեք արտադրիչները կոպլանար են:

Ճիշտ է նաև սրա հակադարձը՝

եթե արտադրիչները կոպլանար են, ապա խառն արտադրյալը հավասար է զերոյի:

Պետք է նկատել, որ երեք վեկտորներ կոպլանար են, եթե նրանցից երկուսը զուգահեռ են իրար: Հետևաբար 1°-ը հանդիսանում է 2°-ի մասնավոր դեպքը:

Մինչև այժմ մենք երկու եղանակ ունեինք երեք վեկտորների ($\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$) *կոպլանարությունն արտահայտելու համար, այն է*

$$\bar{a}=\beta\bar{b}+\gamma\bar{c},\quad \bar{a}\times\bar{b}=\alpha(\bar{a}\times\bar{c}):$$

Այժմ շնորհիվ 2° թեորեմի, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորների կոպլանարությունը մենք կարող ենք արտահայտել խառն արտադրյալի միջոցով.*

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=0:$$

3°. Եթե $\bar{A}=\alpha\bar{a}$, $\bar{B}=\beta\bar{b}$, $\bar{C}=\gamma\bar{c}$, *ապա* $(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=\alpha\beta\gamma(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ .... (III 8)

Այս հատկությունն անմիջականորեն բղխում է սկալար և վեկտորական արտյադրյալների համապատասխան հատկություններից

$$\bar{A}\cdot\bar{E}=\alpha\varepsilon\bar{a}\cdot\bar{e};\quad \bar{E}=\bar{B}\times\bar{C}=\beta\gamma(\bar{b}\times\bar{c})=\varepsilon\bar{e}:$$

Մասնավոր դեպքում, եթե $\bar{a}=a\hat{a}$, $\bar{b}=b\hat{b}$, $\bar{c}=c\hat{c}$, *ապա*

$$(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})=abc(\hat{a}\hat{b}\hat{c}):$$

4°. Սկալար և վեկտորական արտադրյալների հատկություններից հետևում է նույնպես, որ, եթե արտադրիչներից մեկը վերլուծված է n *բազադրիչների, ապա խառն արտադրյալը բաժանվում է* n *խառն արտադրյալների գումարի: Օրինակ, եթե* $\bar{b}=\bar{b}_1+\bar{b}_2+\dots+b_n$, *ապա*
$(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})=(\bar{a}\,\bar{b}_1\,\bar{c})+(\bar{a}\,\bar{b}_2\,\bar{c})+\dots+(\bar{a}\,\bar{b}_n\,\bar{c})$:

Այստեղից հնարավորություն է ստեղծվում արտահայտել խառն արտադրյալը իր արտադրիչների պրոեկցիաների միջոցով: Իրոք, դիցուք

$$\bar{a}=\hat{\imath}a_x+\hat{\jmath}a_y+\bar{a}a_z,$$

$$\bar{b}+\hat{\imath}b_x+\hat{\jmath}b_y+\bar{k}b_z,$$

$$\bar{c}=\hat{\imath}c_x+\hat{\jmath}c_y+\hat{k}c_z:$$

Այն ժամանակ

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=(\hat{\imath}a_x+\hat{\jmath}a_y+\hat{k}a_z)\cdot[(\hat{\imath}b_x+\hat{\jmath}b_y+\hat{k}b_z)\times(\hat{\imath}c_x+\hat{\jmath}c_y+\hat{k}c_z)]:$$

Բանալով փակագծերը վեկտորական արտադրյալի մեջ և դրանից հետո հատարելով սկալար բազմապատկումը, ստանում ենք.

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=a_x(b_yc_z-b_zc_y)+a_y(b_zc_x-b_xc_z)+a_z(b_xc_y-b_yc_x)\ \dots\dots \quad \text{(III 9)}$$

Վերջին արտահայտությունը սովորաբար գրում են հետևյալ դետերմինանտի ձևով,

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\ \dots\dots\dots \quad \text{(III 10)}$$

§ **30. Կիրառումներ: Խցդիր:** *Տրված է* σ *հարթությունը և* $\hat{h}$ *միավոր վեկտորը, որ* σ *հարթության հետ կազմում է որևէ* δ *անկյուն:* $(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$ *խառն արտադրյալն արտահայտել նրա բազմապատկիչների* $\bar{a}_h$, $\bar{a}_\sigma$, $\bar{b}_h$, $\bar{b}_\sigma$, $\bar{c}_h$, $\bar{c}_\sigma$ *բազադրիչների միջոցով (նկ. 93):*

Ընդունելով

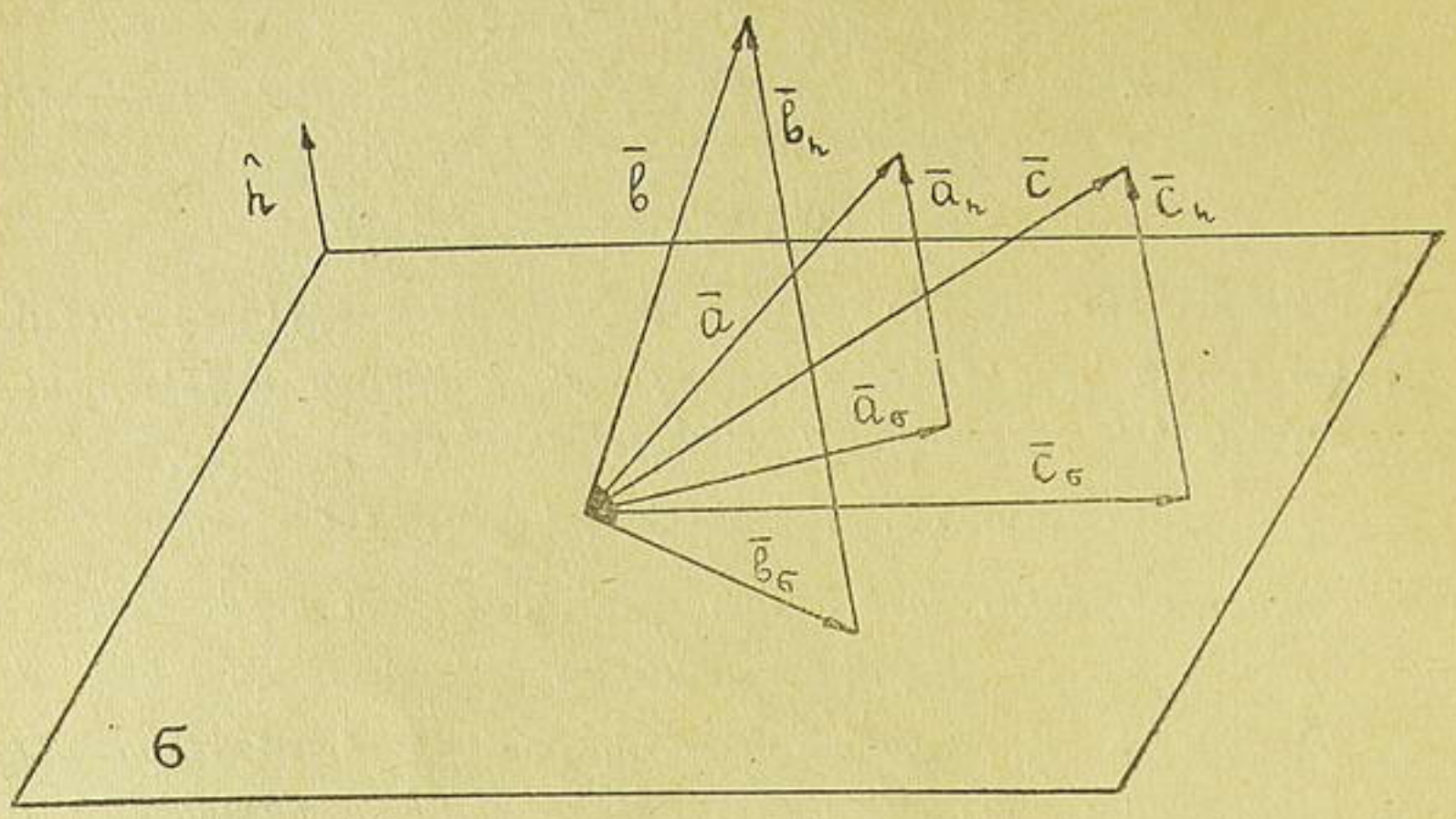
$$\bar{a}=\bar{a}_h+\bar{a}_\sigma,\ \bar{b}=\bar{b}_h+\bar{b}_\sigma,\ \bar{c}=\bar{c}_h+\bar{c}_\sigma,$$

կունենանք

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}_h+\bar{a}_\sigma)\cdot[(\bar{b}_h+\bar{b}_\sigma)\times(\bar{c}_h+c_\sigma)]\ \dots\dots \quad \text{(III 11)}$$

Բանաձև միջակ վեկտորը.

$$[(\bar{b}_h+b_\sigma)\times(\bar{c}_h+\bar{c}_\sigma)]=b_h\times\bar{c}_\sigma+\bar{b}_\sigma\times\bar{c}_h+\bar{b}_\sigma\times\bar{c}_\sigma.$$



Նկ. 93

Տեղադրելով այս արտահայտությունը (III 11)-ի մեջ և նորից բանալով վեկտորները, կստանանք

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{a}_h\cdot(\bar{b}_h\times\bar{c}_\sigma)+\bar{a}_\sigma\cdot(b_h\times c_\sigma)+\bar{a}_h\cdot(\bar{b}_\sigma\times\bar{c}_h)+\bar{a}_\sigma\cdot(\bar{b}_\sigma\times\bar{c}_h)+$$
$$+\bar{a}_h\cdot(\bar{b}_\sigma\times\bar{c}_\sigma)+\bar{a}_\sigma\cdot(b_\sigma\times\bar{c}_\sigma).$$

Քանի որ $\bar{a}_h\parallel\bar{b}_h\parallel\bar{c}_h$, *ապա 1° հատկության հիման վրա.*

$$\bar{a}_h\cdot(\bar{b}_h\times\bar{c}_\sigma)=0,\quad \bar{a}_h\cdot(\bar{b}_\sigma\times\bar{c}_h)=0.$$

Մյուս կողմից նկատի ունենալով, որ $\bar{a}_\sigma$, $\bar{b}_\sigma$, $\bar{c}_\sigma$ *վեկտորները կոպլանար են, 2°-ի հիման վրա*

$$\bar{a}_\sigma\cdot(\bar{b}_\sigma\times\bar{c}_\sigma)=0.$$

Այսպիսով աջ մասում բաց թողնելով սկալար և վեկտորական բազմապատկումների նշանները, ստանում ենք՝

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{a}_\sigma\bar{b}_h\bar{c}_\sigma+\bar{a}_\sigma\bar{b}_\sigma\bar{c}_h+\bar{a}_h\bar{b}_\sigma\bar{c}_\sigma. \quad\ldots\ldots \quad \text{(III 12)}$$

Հարկ ենք համարում մի անգամ ևս ընդգծել, որ ĥ *մխավոր վեկտորի և* σ *հարթության կազմած δ անկյունը կամայական մեծություն ունի,* (III 12) *բանաձևը ճիշտ է δ անկյան բոլոր արժեքների համար (որոնք տարբեր են 0-ից և π-ից): Եթե* ĥ*-ը զուգահեռ է արտադրիչներից մեկին, ապա* (III 12) *բանաձևի աջ մասում գումարելիներից երկուսը կդառնան զերո: Դիցուք, օրինակի համար,* $\hat{h}\parallel\bar{a}$, *այն ժամանակ* $\bar{a}_h=\bar{a}$, $\bar{a}_\sigma=0$ *և*

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=\bar{a}\,\bar{b}_\sigma\,\bar{c}_\sigma. \quad\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III 13)}$$

Խնդիր.

$\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ *վեկտորները տարված են մի ընդհանուր սկզբից (նկ. 94) և իրար հետ կազմում են այսպիսի անկյուններ՝*

$$(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2)=\varphi_{12},\ (\bar{a}_1,\ \bar{a}_3)=\varphi_{13},\ (\bar{a}_2,\ \bar{a}_3)=\varphi_{23}.$$

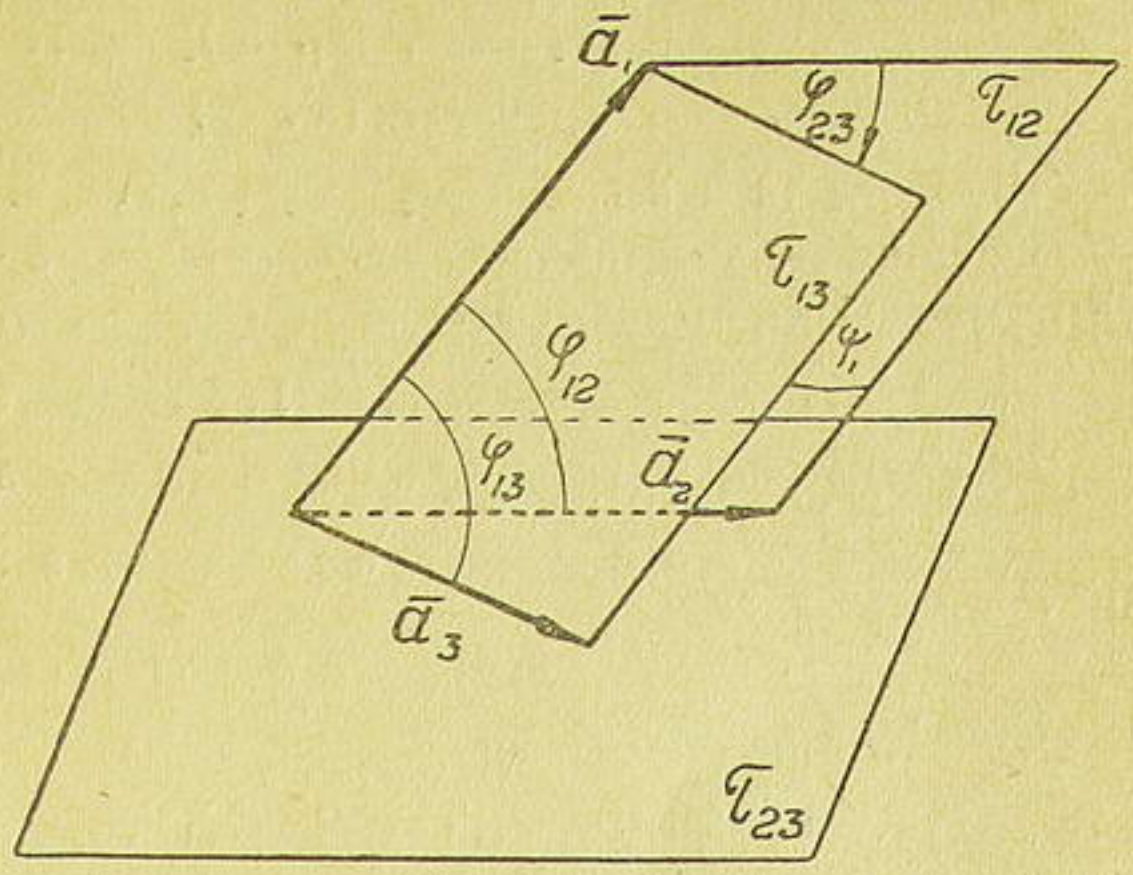
Երեք հարթություններ՝ τ_{12}, τ_{13} և τ_{23}, որոնք անցնում են համապատասխանաբար հետևյալ վեկտորներին զուգահեռ՝ $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$; $\bar{a}_1$, $\bar{a}_3$ և $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, կազմում են հետևյալ երկնիստ անկյուններ.

$(\tau_{12}, \tau_{13}) = \psi_1$, $(\tau_{12}, \tau_{23}) = \psi_2$, $(\tau_{13}, \tau_{32}) = \psi_3$:

Ապացուցել, որ

$$\frac{\sin\psi_1}{\sin\varphi_{23}} = \frac{\sin\psi_2}{\sin\varphi_{31}} = \frac{\sin\psi_3}{\sin\varphi_{12}}; \quad \ldots. \text{(III 14)}$$

Սա սֆերիկ եռանկյունաչափության հիմնական բանաձևերից մեկն է. նրա ապացուցման համար կարելի է օգտվել (III 13) *բանաձևից: Տանենք (նկ. 95) σ հարթությունը $\bar{a}_1$-ին ուղղահայաց, ընդունենք $\hat{h} \parallel \bar{a}_1$: $\bar{a}_2$ և $\bar{a}_3$ վեկտորները վերլուծենք համապատասխանաբար՝ $\bar{a}_{2h}$, $\bar{a}_{2\sigma}$; $\bar{a}_{3h}$, $\bar{a}_{3\sigma}$ բաղադրիչների: Այն ժամանակ ըստ* (III 12)*-ի*

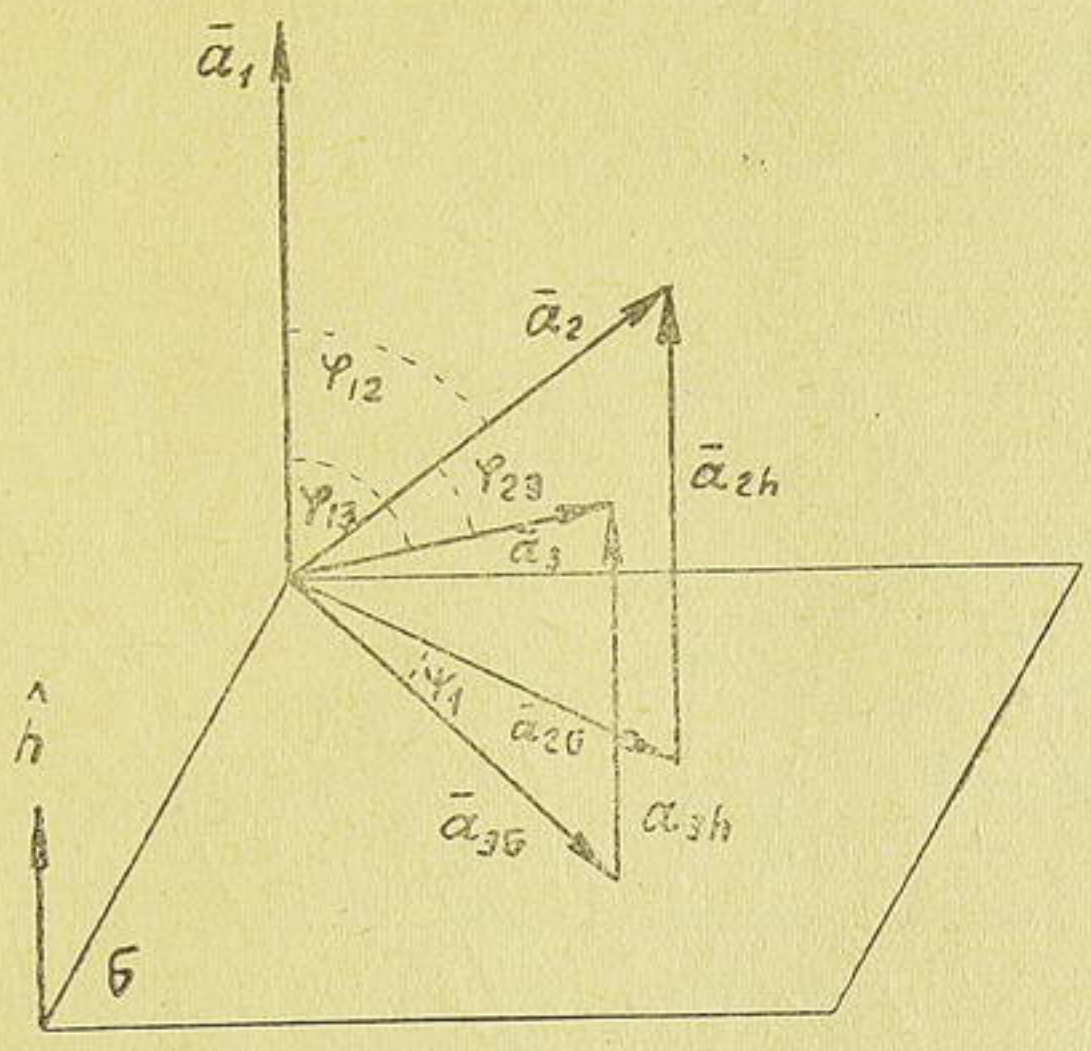


Նկ. 94

$$\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3 = \bar{a}_1\,\bar{a}_{2\sigma}\,\bar{a}_{3\sigma} = \bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_{2\sigma} \times \bar{a}_{3\sigma}):$$

Քանի որ $\sigma \perp \bar{a}_1$, ապա $(\bar{a}_{2\sigma} \times \bar{a}_{3\sigma}) \parallel \bar{a}_1$, ուստի և

$$\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_{2\sigma} \times \bar{a}_{3\sigma}) = a_1\, a_{2\sigma}\, a_{3\sigma} \sin(\bar{a}_{2\sigma}, \bar{a}_{3\sigma}):$$



Նկ. 95

Բայց $\bar{a}_{2\sigma} \perp \bar{a}_1$, $\bar{a}_{3\sigma} \perp \bar{a}$, *հետևաբար* $(\bar{a}_{2\sigma}, \bar{a}_{3\sigma})$ *գծային անկյունը հավասար է* ψ_1 *երկնիստ անկյանը։ Միաժամանակ*

$$a_{2\sigma} = a_2 \sin(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = a_2 \sin \varphi_{12}$$

$$a_{3\sigma} = a_3 \sin(\bar{a}_1, \bar{a}_3) = a_3 \sin \varphi_{13}:$$

Այսպիսով $(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3) = \bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_{2\sigma} \times \bar{a}_{3\sigma}) = a_1 a_2 a_3 \sin \varphi_{12} \sin \varphi_{13} \sin \psi_1$:

Տանելով σ *հարթությունն ուղղահայաց* $\bar{a}_2$*-ին և ընդունելով* $\bar{h} \parallel \bar{a}_2$, *մենք կատարելապես նույն եղանակով կգտնենք ստանալ*

$$\bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_1 = a_2 a_3 a_1 \sin \varphi_{23} \sin \varphi_{12} \sin \psi_2:$$

Եվ վերջապես, համարելով $\sigma \perp \bar{a}_3$ *և* $\bar{h} \parallel \bar{a}_3$, *մենք պիտի գտնենք*

$$\bar{a}_3 \bar{a}_1 \bar{a}_2 = a_3 a_1 a_2 \sin \varphi_{23} \sin \varphi_{13} \sin \psi_3:$$

Բայց

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_1 = \bar{a}_3 \bar{a}_1 \bar{a}_2:$$

Այստեղից ստանում ենք

$$\sin \varphi_{12} \sin \varphi_{13} \sin \psi_1 = \sin \varphi_{23} \sin \varphi_{12} \sin \psi_2 = \sin \varphi_{13} \sin \varphi_{23} \sin \psi_3:$$

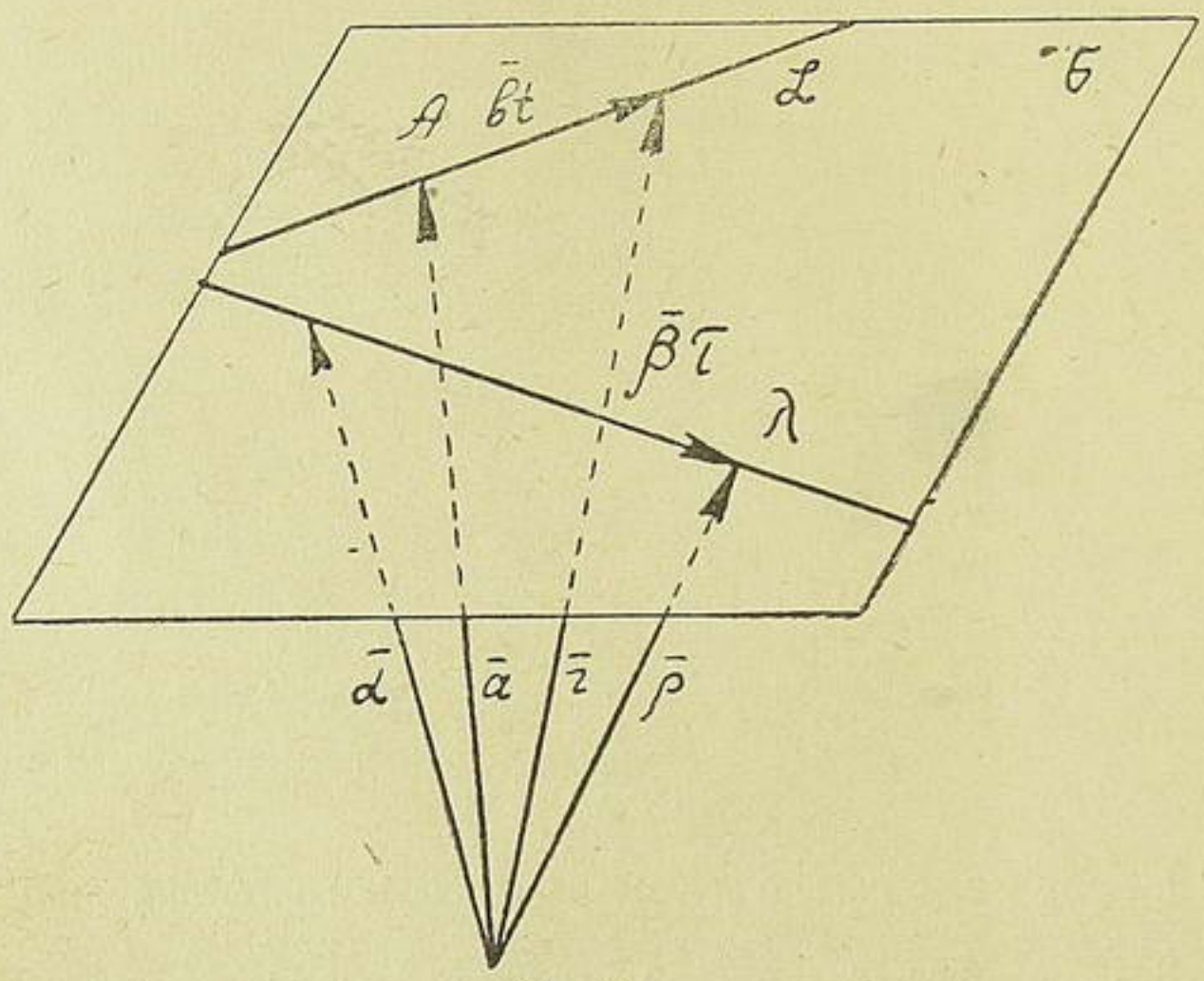
Բաժանելով այս արտահայտությունը $\sin \varphi_{12} \sin \varphi_{13} \sin \varphi_{23}$*-ի վրա, մենք կհանգենք* (III 14) *բանաձևին։*

Խնդիր

Տրված են երկու ուղիղներ.

$$\bar{r} = \bar{a} + \bar{b}t \text{ և } \bar{\rho} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}\tau,$$

որ $\bar{r}$*-ը և* $\bar{\rho}$*-ն ընթացիկ կետերի շառավիղ վեկտորներն են,* $\bar{a}$*-ն,* $\bar{b}$*-ն,* α*-ն և* β*-ն հաստատուն վեկտորներ են, իսկ* t*-ն և* τ*-ն՝ պարամետրեր (նկ. 96)։*



Նկ. 96

Ինչ պայմանի պետք է բավարարեն $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{\alpha}$ *և* $\bar{\beta}$ *վեկտորները, որպեսզի այս ուղիղները գտնվեն մեկ հարթության վրա։*

Այդ հարթությունն անվանենք σ։ Ակնհայտ է, որ տվյալ դեպքում Lλ հատվածը, որ միացնում է ուղիղներից մեկի կամայական L կետը մյուս ուղիղի կամայական λ կետի հետ, նույնպես կգտնվի σ հարթության վրա, այսինքն՝ $\overline{L\lambda}$, $\bar{b}$, $\bar{\beta}$ *վեկտորները կոպլանար են, ուստի և*

$$(\overline{L\lambda}\ \bar{b}\ \bar{\beta})=0 \ldots \qquad \text{(III 15)}$$

Բայց $\overline{L\lambda}-\bar{r}--\bar{\rho}=(\bar{a}+\bar{b}t)-(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\tau)=(\bar{a}-\bar{\alpha})+(\bar{b}t-\bar{\beta}\tau)$։

Տեղադրելով այս արտահայտությունը (III 15)*-ի մեջ, կստանանք.*

$$[(\bar{a}-\bar{\alpha})+(\bar{b}t+\bar{\beta}\tau)]\cdot(\bar{b}\times\bar{\beta})=0.$$

Բաններ մի քանի վերագծերը և ուշադրության առնենք, որ $\bar{b}\cdot(\bar{b}\times\bar{\beta})=0$, $\beta\cdot(\bar{b}\times\bar{\beta})=0$։ *Այն ժամանակ կհանգենք հետևյալ պայմանին՝*

$$(\bar{a}-\bar{\alpha})\cdot(\bar{b}\times\bar{\beta})=0. \ldots \qquad \text{(III 16)}$$

որ անհրաժեշտ է, որպեսզի $\bar{r}=\bar{a}+\bar{b}t$ *և* $\rho=\bar{\alpha}+\bar{\beta}\tau$ *ուղիղները գտնվեն մեկ հարթության մեջ։*

Նկատենք, որ երկու զուգահեռ ուղիղներով միշտ կարելի է հարթություն տանել։ Հետևաբար, (III 16)-ը միշտ պետք է բավարարվի այն դեպքում, երբ կողմերը զուգահեռ են։ Եվ իրոք, ուղիղների զուգահեռության դեպքում $\bar{b}\parallel\bar{\beta}$, *հետևաբար* $\bar{b}\times\bar{\beta}=0$, *և (III 16)-ի ձախ մասը գառնում է զերո։*

Խնդիրներ

1. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորների կոպլանարության պայմանը կարող է արտահայտվել հետևյալ երեք հղանակներով՝*

$$\bar{a}=\beta\bar{b}+\gamma\bar{c} \ldots \qquad \text{(III 17)}$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\delta(\bar{a}\times\bar{c}) \ldots \qquad \text{(III 18)}$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0. \ldots \qquad \text{(III 19)}$$

Ստանալ (III 19)-ը, (III 17)-ից և (III 18)-ից։

2. Գրել այն հարթության հավասարումը, որ զուգահեռ է $\bar{b}$ *և* $\bar{c}$ *վեկտորներին և անցնում է* $\bar{a}$ *շառավիղ-վեկտոր ունեցող A կետով։*

3. Ցույց տալ, որ A,B,C կետով անցնող հարթության հավասարումը կարող է գրվել այսպես.

$$\bar{r}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b})=\bar{a}\bar{b}\bar{c},$$

ուր $\bar{r}$*-ը հարթության ընթացիկ կետի շառավիղ-վեկտորն է, իսկ* $\bar{a}$*-ն,* $\bar{b}$*-ն և* $\bar{c}$*-ն A, B, C կետերի շառավիղ-վեկտորներն են։*

4. Գրել այն հարթության հավասարումը, որ պարունակում է $\bar{r}=\bar{a}+\bar{b}t$ *ուղիղը և զուգահեռ է* $\bar{c}$ *վեկտորին։*

5. Ապացուցել, որ ինչպիսին էլ լինեն m, n *և* p *գործակիցները,*

$$m\bar{a}\times\bar{b}+n\bar{b}\times\bar{c}=p(\bar{a}\times\bar{c})$$

հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն ժամանակ, երբ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորները կոպլանար են, որի հետևանքով* $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{c}\times\bar{a}$ *արտադրյալները ոչ միայն կոպլանար կլինեն, ինչպես այդ ընդհանուր առմամբ տեղի ունի երկու զումարելիների դեպքում, այլև զուգահեռ կլինեն իրար։*

ԿՐԿՆԱԿԻ ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼ

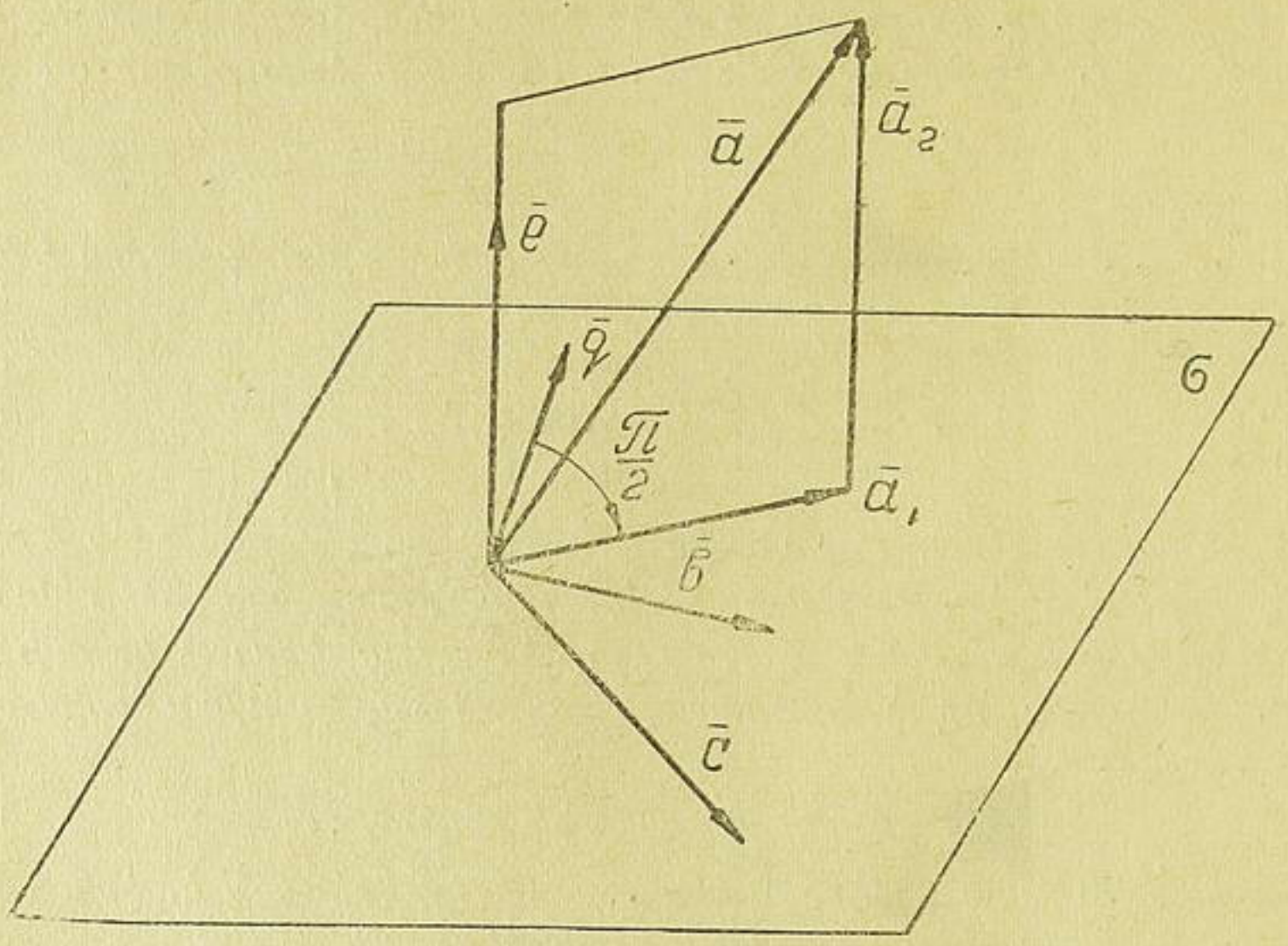
§ 31. Երեք վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալը: *Վեկտորական այն արտադրյալը, որի արտադրիչներից մեկը նույնպես վեկտորական արտադրյալ է, կոչվում է կրկնակի վեկտորական արտադրյալ: Օրինակ,* $\bar{q}=\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ *հանդիսանում է կրկնակի վեկտորական արտադրյալ, որովհետև* $\bar{a}$*-ն վեկտորական կերպով բազմապատկված է* $(\bar{b}\times\bar{c})$ *վեկտորական արտադրյալով:*

Նշանակենք $\bar{b}\times\bar{c}$ *վեկտորական արտադրյալն* $\bar{e}$ *վեկտորով. այն ժամանակ* $\bar{q}=\bar{a}\times\bar{e}$*: Ունենք՝* $\bar{q}\perp\bar{e}$, $\bar{b}\perp\bar{e}$, $\bar{c}\perp\bar{e}$*: Հետևաբար* $\bar{q}$, $\bar{b}$ *և* $\bar{c}$ *վեկտորները կոպլանար են, ուստի և* $\bar{q}$ *վեկտորը կարելի է արտահայտել* $\bar{b}$*-ի և* $\bar{c}$*-ի միջոցով,*

$$\bar{q}=\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III } 20)$$

Ակնհայտ է, որ β *և* γ *գործակիցները պետք է կախված լինեն* $\bar{a}$ *վեկտորից, որ հանդիսանում է* $\bar{q}$*-ի արտադրիչներից մեկը:*

β և γ գործակիցները որոշելու համար վարվում ենք այսպես (նկ. 97): Թող σ*-ն լինի մի հարթություն, որ պարունակում է* $\bar{b}$ *և* $\bar{c}$ *վեկտորները.*



Նկ. 97

այն ժամանակ $\sigma\perp\bar{e}$*: Վերլուծենք* $\bar{a}$ *վեկտորը երկու բաղադրիչների, որոնցից մեկը՝* $\bar{a}_1\parallel\sigma$*, իսկ երկրորդը՝* $\bar{a}_2\parallel\bar{e}$*: Այն ժամանակ* $\bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2$*:*

Այժմ կարող ենք գրել՝

$$(\text{III } 21)\quad \begin{cases} \bar{a}\times\bar{e}=\bar{a}_1\times\bar{e}, \text{ քանի որ } \bar{a}_2\times\bar{e}=0; \\ \bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{a}_1\cdot\bar{b}, \text{ քանի որ } \bar{a}_2\perp\bar{b},\ \bar{a}_2\cdot\bar{b}=0; \\ \bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{a}_1\cdot\bar{c}, \text{ քանի որ } \bar{a}_2\perp\bar{c},\ \bar{a}_2\cdot\bar{c}=0; \end{cases}$$

(III 20)-ի երկու մասերը վեկտորական կերպով բազմապատկելով $\bar{c}$-ով, կունենանք.

$$\bar{q}\times\bar{c}=\beta\bar{b}\times\bar{c}+\gamma\bar{c}\times\bar{c},$$

Քանի որ $\bar{c}\times\bar{c}=0$, $\bar{b}\times\bar{c}=\bar{e}$ *և* $\bar{q}=\bar{a}\times\bar{e}=\bar{a}_1\times\bar{e}$,

ապա

$$(\bar{a}_1\times\bar{e})\times\bar{c}=\beta\bar{e}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III 22)}$$

(III 22)-ից հետևում է, որ $(\bar{a}_1\times\bar{e})\times\bar{c}\parallel\bar{e}$: Եվ իսկապես (նկ. 97) $\bar{a}_1\times\bar{e}\parallel\sigma$, իսկ քանի որ նաև $\bar{c}\parallel\sigma$, ապա $(\bar{a}_1\times\bar{e})\times\bar{c}\perp\sigma$ (կամ $\parallel\bar{e}$):

Ունանք

$$\bar{q}\times\bar{c}=\hat{e}qc\sin(\bar{q},c):$$

Քանի որ $\bar{q}=\bar{a}_1\times\bar{e}$, ապա $\bar{q}\perp\bar{a}_1$, և $(\bar{q},\bar{c})=\frac{\pi}{2}+(\bar{a}_1,\bar{c})$, և $\sin(\bar{q},\bar{c})=$ $=\cos(\bar{a}_1,\bar{c})$: $q=a_1e$, քանի որ $\sin(\bar{a}_1,\bar{c})=1$: Հետևաբար $\bar{q}\times\bar{c}=\hat{e}a_1ec\cos(\bar{a}_1,\bar{c})$: Բայց $\hat{e}e=\bar{e}$, $a_1c\cos(\bar{a}_1,\bar{c})=\bar{a}_1\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}$ ըստ (III 21)-ի:

Այսպիսով ունենք

$$\beta\bar{e}=\bar{e}\bar{a}\cdot\bar{c},$$

որտեղից

$$\beta=\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{c}\cdot\bar{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III 23)}$$

(III 20)-ի երկու մասերը վեկտորական կերպով բազմապատկելով $\bar{b}$-ով, մենք կատարելապես նույն եղանակով պիտի ստանայինք

$$\gamma=-(\bar{a}\cdot\bar{b}): \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III 24)}$$

Եվ իրոք, $\bar{q}\times\bar{b}=\gamma(\bar{c}\times\bar{b})=-\gamma(\bar{b}\times\bar{c})=-\gamma\bar{e}$:

Բայց $\bar{q}\times\bar{b}=\hat{e}qb\sin(\bar{q},\bar{b})=\hat{e}a_1eb\cos(\bar{a}_1,\bar{b})$,

կամ $-\gamma\bar{e}=\bar{e}(\bar{a}_1\cdot\bar{b})=\bar{e}(\bar{a}\cdot\bar{b})$,

որտեղից և ստացվում է (III 24) արտահայտությունը:

Զուգադրելով (III 20), (III 21) և (III 24) բանաձևերը, գտնում ենք

$$\bar{q}=\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}(\bar{c}\cdot\bar{a})-\bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b}): \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III 25)}$$

Այս բանաձևով շատ հաճախ են օգտվում և պետք է հիշել այն: Այդ հեշտ է անել, եթե ուշադրություն դարձվի այն բանի վրա, որ կարգը, որով հանդիպում են բազմապատկիչները ձախ մասում, և աջ մասի նվազելի ու հանելիի մեջ ներկայացնում է հետևյալ երեք հաջորդական շրջանային տեղափոխությունները՝ abc, bca, cab:

(III 25) բանաձևը ճիշտ է այն դեպքում, երբ կրկնակի վեկտորական արտադրյալի մեջ երկրորդ արտադրիչն է վեկտորական արտադրյալը: Իսկ եթե վեկտորական արտադրյալը լինի առաջին արտադրիչը, օրինակ, եթե $\bar{p}=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$, ապա պետք է նկատի ունենալ, որ $\bar{p}=-\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})$ կամ, տեղափոխելով արտադրիչները փակագծի մեջ, $\bar{p}=\bar{c}\times(\bar{b}\times\bar{a})$: Այսպիսով մենք հանգեցինք առաջին դեպքին, և (III 25) բանաձևը տալիս է

$$\bar{p}=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{c}\times(\bar{b}\times\bar{a})=\bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{c})-\bar{a}(\bar{c}\cdot\bar{b}) \ldots \quad \text{(III 26)}$$

(III 25) և (III 26) բանաձևերի համեմատությունից անմիջականորեն բղխում է, որ $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ հավասար չէ $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$. և իրոք, $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ կոպլանար է $\bar{b}$ և $\bar{c}$ վեկտորներին, իսկ $(\bar{a}\times b)\times\bar{c}$ կոպլանար է $\bar{a}$ և $\bar{b}$ վեկտորներին: Հետևաբար $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ և $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$ արտադրյալների հավասարությունը հնարավոր է միայն այն ժամանակ, երբ $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ վեկտորները կոպլանար են:

§ 32. Կրկնակի վեկտորական արտադրյալի հատկությունները: *Վեկտորական արտադրյալի հատկություններից և (III 25) բանաձևից բղխում են կրկնակի վեկտորական արտադրյալի հետևյալ հատկությունները.*

1°. $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=0$, *եթե*

ա) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *բազմապատկիչներից մեկը հավասար է զերոյի,*

բ) $\bar{b}$ *և* $\bar{c}$ *վեկտորները զուգահեռ են իրար,*

գ) $\bar{a}\parallel\bar{b}\times\bar{c}$ *(այսինքն՝* $\bar{a}\perp\bar{b}$, $\bar{a}\perp\bar{c}$*):*

2°. Եթե $\overline{A}=\alpha\bar{a}$, $\overline{B}=\beta\bar{b}$, $\overline{C}=\gamma\bar{c}$, *ապա*

$$\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})=\alpha\beta\gamma\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}): \quad \text{(III 27)}$$

Մասնավոր դեպքում,

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=abc\hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c}) \quad \text{(III 28)}$$

3°. Եթե երեք արտադրիչներից մեկը վերլուծված է n բազդրիչների, ապա կրկնակի վեկտորական արտադրյալը վեր է ածվում n կրկնակի վեկտորական արտադրյալների գումարին:

Օրինակ, եթե $\bar{c}=\bar{c}_1+\bar{c}_2+\ldots+\bar{c}_n$, *ապա*

$$\bar{a}\times(b\times\bar{c})=\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}_1)+\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}_2)+\ldots+\bar{a}\times(b\times\bar{c}_n): \quad \text{(III 29)}$$

Այստեղից բղխում է կրկնակի վեկտորական արտադրյալը կոօրդինատային առանցքներին զուգահեռ բաղադրիչների վերլուծելու հնարավորությունը (տես 5-րդ խնդիրը):

Խնդիրներ

1. $(\hat{a}, \hat{b})$, $(b, \hat{c})$, $(\hat{c}, \hat{a})$ *անկյունների որ արժեքների ժամանակ* $\hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c})$ *կրկնակի վեկտորական արտադրյալի չափը դառնում է ամենամեծը: Ինչի՞ է հավասար այդ չափի ամենամեծ արժեքը:*

2. Օգտվելով (III 25) բանաձևի կամ կրկնակի վեկտորական արտադրյալի 2⁰ հատկությունից, ցույց տալ, որ

եթե $\bar{a}\parallel\bar{b}$, *ապա* $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}\times(\bar{a}\times\bar{c})$:

3. Ե՞րբ $\bar{a}\times(b\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$:

4. Ապացուցել հետևյալ նույնությունը.

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=0:$$

5. Իմանալով $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորների պրոեկցիաների* OX, OY, OZ *ուղղանկյուն կոօրդինատային առանցքների վրա, այդ պրոեկցիաների միջոցով արտահայտել* $\bar{a}\times(b\times\bar{c})$ *կրկնակի արտադրյալը:*

6. Ո՞ր պայմաններում $\bar{a}\times(b\times\bar{c})=b$:

§ 33. Վեկտորի վերլուծման երկու կարեվոր դեպքեր:

1⁰. Տրված է $\bar{r}$ *վեկտորը և երեք ոչ կոպլանար վեկտորներ՝* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: *Պահանջվում է վերլուծել* $\bar{r}$*-ը երեք բաղադրիչների, որոնք զուգահեռ լինեն* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *վեկտորներին:*

Քանի որ $\bar{a}$, $\bar{b}$, c *վեկտորները կոպլանար չեն, ապա այս վերլուծումը հնարավոր է, այսինքն՝ միշտ գոյություն ունեն երեք այնպիսի գործակիցներ՝* α, β, γ, *որ*

$$\bar{r}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}: \quad \text{(III 30)}$$

Այդ գործակիցները որոշելու համար օգտվենք այն հանգամանքից, որ երկու միևնույն բազմապատկիչ ունեցող խառն արտադրյալը հավասար է զերոյի, այսինքն՝

$$(\bar{b}\,\bar{b}\,\bar{c})=0,\ (\bar{c}\,\bar{b}\,\bar{c})=0 \text{ և այլն:}$$

(III 30)-ի երկու մասերն սկալար կերպով բազմապատկենք $\bar{b}\times\bar{c}$-ով.

$$\bar{r}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\alpha\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})+\beta\bar{b}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})+\gamma\bar{c}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$

կամ, քանի որ աջ մասի երկու վերջին գումարելիները հավասար են զերոյի,

$$(\bar{r}\,\bar{b}\,\bar{c})=\alpha(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}):$$

Այժմ (III 30)-ի *երկու մասերն սկալար կերպով բազմապատկենք* $\bar{c}\times\bar{a}$-*ով: Կստանանք*

$$\bar{r}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})=\beta\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})=\beta(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}):$$

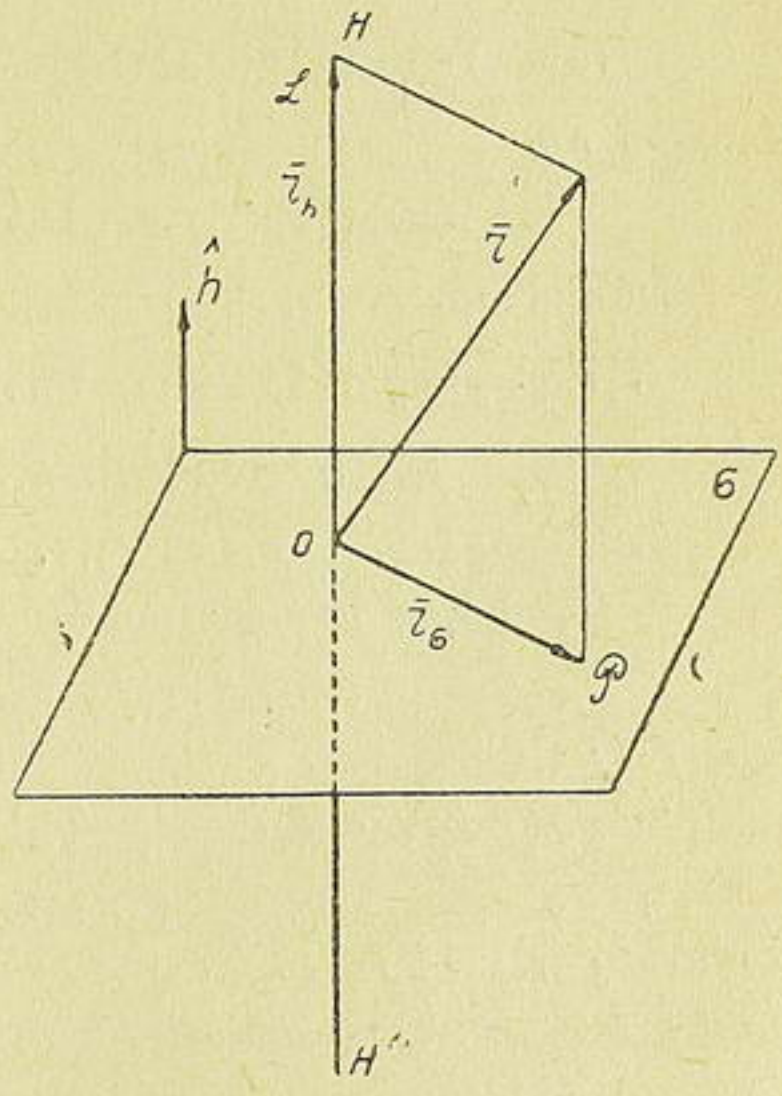
Վերջապես նույն արտահայտությունը (III 30) *բազմապատկելով* $\bar{a}\times\bar{b}$-*ով, ստանում ենք*

$$\bar{r}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=\gamma\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})=\gamma(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}):$$

Մեր ստացած այս երեք հավասարություններից գտնում ենք

$$\alpha=\frac{(\bar{r}\,\bar{b}\,\bar{c})}{(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})};\ \beta=\frac{(\bar{r}\,\bar{c}\,\bar{a})}{(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})};\ \gamma=\frac{(\bar{r}\,\bar{a}\,\bar{b})}{(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})};\ \ldots\ldots\ldots \qquad \text{(III 31)}$$

2°. Վերլուծել $\bar{r}$ *վեկտորը երկու բաղադրիչների՝* $\bar{r}_h$ *և* $\bar{r}_\sigma$, *որոնցից մեկը զուգահեռ լինի* $\bar{h}$-*ին, իսկ մյուսն ուղղահայաց՝* $\bar{h}$-*ին: Թող* (նկ. 98) HH-*ը մի առանցք լինի զուգահեռ* $\bar{h}$-*ին, իսկ σ-ն մի հարթություն, ուղղահայաց* $\bar{h}$-*ին:* $\bar{r}=\bar{r}_h+\bar{r}_\sigma$: $\bar{r}_h=\overline{OL}$, $\bar{r}_\sigma=\overline{OP}$, *ուր* OL-*ը* $\bar{r}$-*ի պրոեկցիան է* HH-*ի վրա, ուստի* $OL=\bar{r}\cdot\bar{h}$, *իսկ* $\bar{r}_h=\overline{OL}=\bar{h}(\bar{r}\cdot\bar{h})$: *Ինչ վերաբերում է երկրորդ բաղադրիչին, ապա* $\bar{r}_\sigma=\bar{r}-\bar{r}_h=\bar{r}-\bar{h}(\bar{r}\cdot\bar{h})$: *Այս արտահայտության մեջ աջ մասը կարող է և այսպես գրվել՝* $\bar{h}\times(\bar{r}\times\bar{h})$: *Դրանում կարելի է համոզվել օգտագործելով* (III 25)-*ը: Իրոք՝*



նկ. 98

$$\bar{h}\times(\bar{r}\times\bar{h})=\bar{r}(\bar{h}\cdot\bar{h})-\bar{h}(\bar{r}\cdot\bar{h}),$$

քանի որ $\bar{h}\cdot\bar{h}=1$: *Հետևաբար,*

$$\bar{r}_\sigma=\bar{h}\times(\bar{r}\times\bar{h}):\ \ldots\ldots\ldots \qquad \text{(III 32)}$$

(III 32) *արտահայտությունն* $\bar{r}_\sigma\perp\bar{h}$ *բաղադրիչի համար հաճախ շատ հարմար է լինում:*

§ **34. Զուգ եվ ավելի վեկտորների արտադրյալներ:** *Երբեմն պատահում են չորս և ավելի վեկտորների արտադրյալներ: Օրինակ.* $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d})$, $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})$, $\bar{a}\times[\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{d})]$, $(\bar{a}\times\bar{b})\times[\bar{c}\times(\bar{d}\times\bar{e})]$ *և այլն:*

Բոլոր այսպիսի արտադրյալները պարզ ձևափոխությունների միջոցով կարելի է վերածել կրկնակի վեկտորական կամ խառն արտադրյալների։ Հետևաբար չորս և ավելի վեկտորների արտադրյալները կարող են արտահայտվել երեք վեկտորների խառն արտադրյալի և երկու վեկտորների վեկտորական և սկալար արտադրյալների միջոցով։

Ինչպես ասինք մի քանի դեպքեր. $\bar{a}\times\bar{b}$ *նշանակենք* $\bar{e}$*-ով։ Այն ժամանակ*

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d})=\bar{e}\cdot(\bar{c}\times\bar{d})=(e\times\bar{c})\cdot\bar{d}=[(\bar{a}\times d)\times\bar{c}]\cdot\bar{d}=[c\times(\bar{b}\times\bar{a})]\cdot\bar{d}=$$
$$=[\bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{c})-\bar{a}(\bar{c}\cdot b)]\cdot\bar{d}=(b\cdot\bar{d})(\bar{a}\cdot\bar{c})-(\bar{a}\cdot d)(\bar{c}\cdot b)\text{։}$$

Այսպիսով

$$(\bar{a}\times b)\cdot(\bar{c}\times\bar{d})=(\bar{b}\cdot\bar{d})(\bar{a}\cdot\bar{c})-(\bar{a}\cdot\bar{d})(\bar{c}\cdot b)\quad\ldots\ldots\quad(\text{III }33)$$

Մենք պիտի ստանայինք նույն արդյունքը, եթե ընդունեինք $\bar{c}\times\bar{d}=\bar{m}$։ *Այն ժամանակ*

$$(\bar{a}\times b)\cdot(\bar{c}\times\bar{d})=(\bar{a}\times b)\cdot\bar{m}=\bar{a}\cdot(b\times\bar{m})=\bar{a}\cdot[b\times(\bar{c}\times\bar{d})]\text{։}$$

Բանալով կրկնակի վեկտորական արտադրյալը, մենք կրկին կհանդենք (III 33)*-ին։*

Միանգամայն նույն կերպ կարելի է վարվել նաև այն դեպքում, երբ տրված է $(\bar{a}\times\bar{b})\times(c\times\bar{d})$ *արտադրյալը։ Կրկին ընդունենք* $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{e}$.

$$(\bar{a}\times b)\times(\bar{c}\times\bar{d})=\bar{e}\times(\bar{c}\times d)=\bar{c}(\bar{d}\cdot\bar{e})-\bar{d}(\bar{e}\cdot\bar{c})=\bar{c}(d\,\bar{a}\,\bar{d})-\bar{d}(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})\text{։}$$

Եթե $\bar{c}\times\bar{d}$ *փոխարինենինք* $\bar{m}$*-ով, պիտի ստանայինք*

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{m}=\bar{m}\times(\bar{b}\times\bar{a})=\bar{b}(\bar{a}\cdot\bar{m})-\bar{a}(\bar{m}\cdot\bar{b})\text{։}$$

Այնպես որ,

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=\bar{c}(d\,\bar{a}\,\bar{b})-\bar{d}(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})=\bar{b}(\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b})-\bar{a}(\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{b})$$

Խնդիրներ.

1. Ապացուցել հետևյալ նույնությունը՝

$$\bar{a}\times[b\times(\bar{c}\times\bar{d})]=(\bar{b}\cdot\bar{d})(\bar{a}\times\bar{c})-(\bar{b}\cdot\bar{c})(\bar{a}\times\bar{d})\text{։}$$

2. Ապացուցել, որ $(\bar{a}\times b)\cdot(\bar{c}\times d)+(\bar{b}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}\times\bar{d})+(\bar{c}\times\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d})=0$։

3. Օգտվելով հետևյալ նույնությունից,

$$(\bar{l}\times\bar{m})\cdot(\bar{l}\times\bar{n})=(l\cdot l)(\bar{m}\cdot\bar{n})-(\bar{l}\cdot\bar{n})(\bar{l}\cdot\bar{m})$$

արտածել (II 24)

4. Տրված է նույնությունը՝

$$(\bar{l}\times\bar{m})\times(\bar{l}\times\bar{n})=\bar{l}(\bar{l}\bar{m}\bar{n})$$

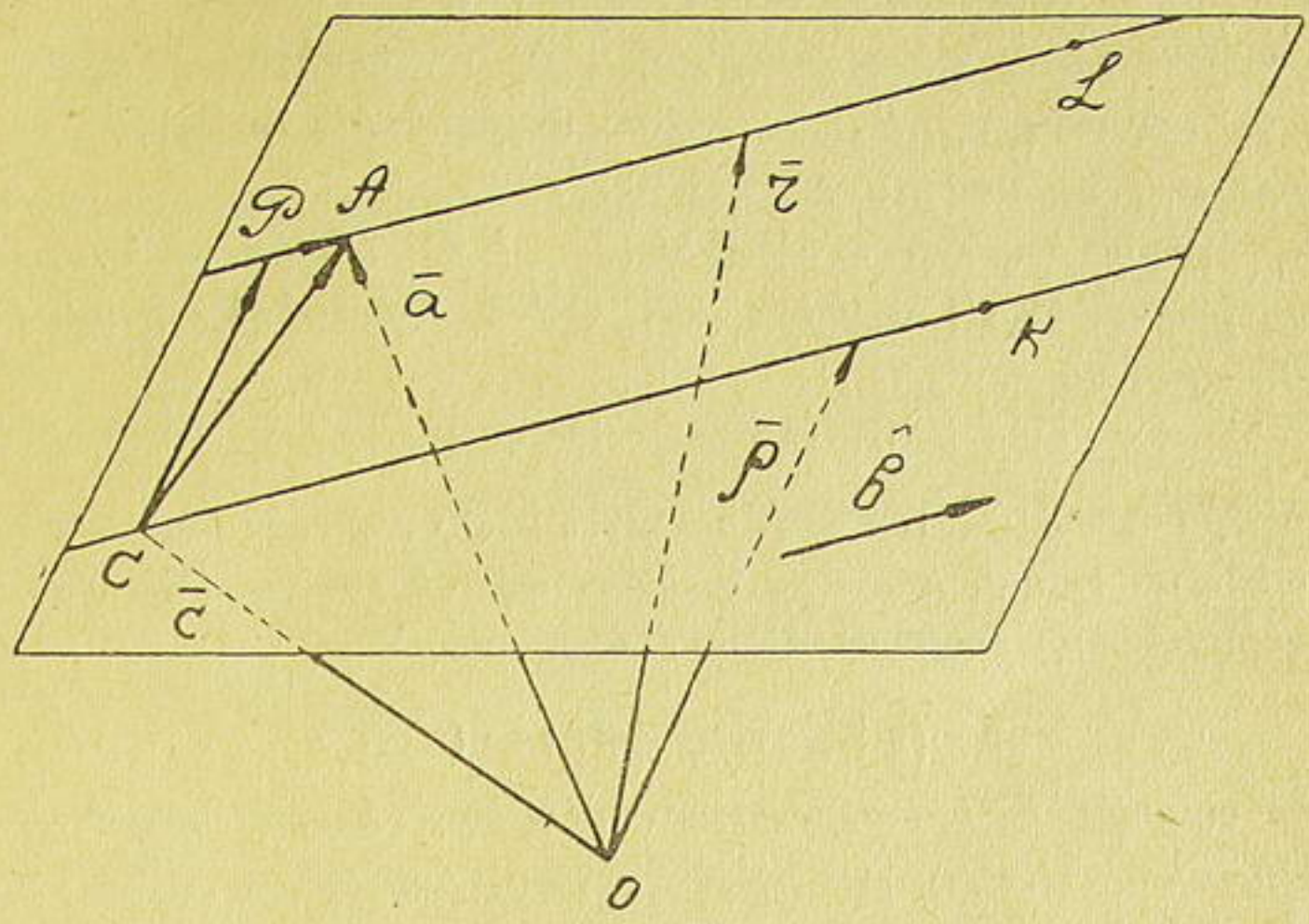
արտածել (III 14)։

§ **35. Խնդիր։** *Տրված են երկու զուգահեռ ուղիղներ.*

$$\bar{r}=\bar{a}+\hat{b}t\quad\text{և}\quad\bar{\rho}=\bar{c}+\hat{b}\tau,$$

որ $\bar{r}$ *և* $\bar{\rho}$ *այդ ուղիղների ընթացիկ կետերի շառավիղ-վեկտորներն են,* $\bar{a}$ *և* $\bar{c}$*—այն A և C կետերի շառավիղ-վեկտորները, որոնցով անցնում են այդ ուղիղները (նկ. 99). իսկ* $\hat{b}$*-ն մի վեկտոր է, որին զուգահեռ են երկու ուղիղները։ Որոշել AL-ի հեռավորությունը CK ուղղից։*

AL *ուղղի* $\bar{q}$ *հետավորությունը* CK *ուղղից հավասար է* AL*-ի հետավորությանը* CK*-ի մի որևէ կետից, այնպես որ, եթե* $\overline{CP} \perp AL$, *ապա*



Նկ. 99

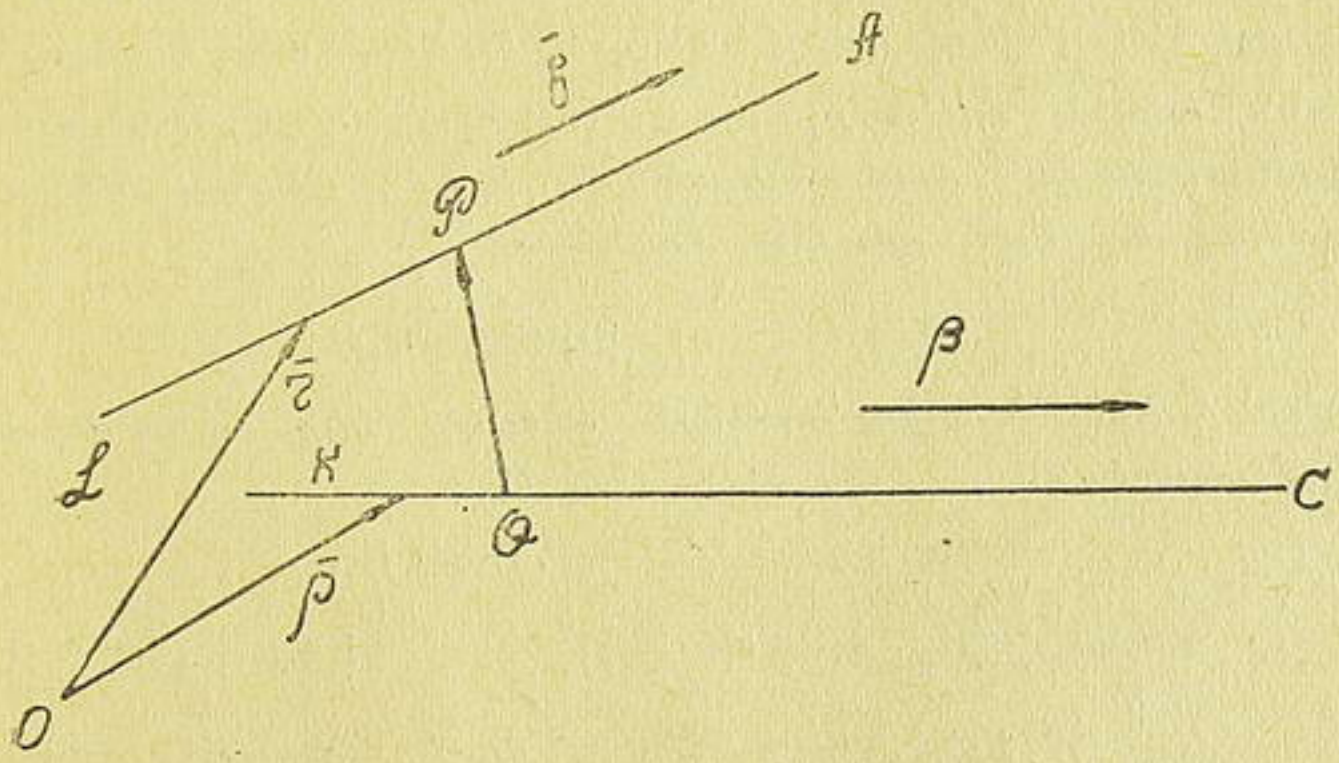
$\bar{q}=\overline{CP}$: *Բայց* $\overline{CP}+\overline{PA}=\overline{CA}$: *Այս դեպքում* $\overline{CA}=\bar{a}-\bar{c}$: *Կարճության համար* $\bar{a}-\bar{c}$ *տարբերությունը նշանակենք* $\bar{m}$*-ով: Այն ժամանակ* $\overline{CA}=\bar{m}$, $\overline{PA} \parallel \hat{b}$, *հետևաբար* $PA=\hat{b}PA$, *ուր* PA*-ն* $\overline{CA}$*-ի պրոեկցիան է* $\hat{b}$*-ի վրա. ուստի* $\overline{PA}=\hat{b}(\bar{m}\cdot\hat{b})$ *և* $\overline{CP}=\bar{q}=\bar{m}-\hat{b}(\bar{m}\cdot\hat{b})=\hat{b}\times(\bar{m}\times\hat{b})$ [(III 32)*-ի հիման վրա*]:

$q=0$, *եթե* $\bar{m} \parallel \hat{b}$. *այսինքն՝ եթե* $\bar{a}-\bar{c}=\overline{CA} \parallel b$: *Այս դեպքում* AL *և* CK *ուղիղները համընկնում են:*

Խնդիր.

Տված են երկու ոչ զուգահեռ ուղիղներ՝ AL *և* CK *(նկ. 100), որոնց հավասարումները են՝*

$\bar{r}=\bar{a}+bt$ *և* $\bar{\rho}=\bar{\alpha}+\beta\tau$:



Նկ. 100

$\overline{AL} \parallel \bar{b}$, $\overline{CK} \parallel \bar{\beta}$: Տառերի նշանակությունները երևում են նկարից:

Որոշել. 1^0. AL *ուղղի ամենափոքր* $\overline{QP}$ *հեռավորությունը* CK *ուղղից:*

2^0. t *և* τ *պարամետրերի արժեքները* P *և* Q *կետերում:*

1^0. *Ամենափոքր հեռավորությունը երկու ուղիղների միջև, ինչպես հայտնի է, ուղղահայաց է այդ երկու ուղիղներին. այնպես որ,* $\overline{QP} \perp \bar{b}$, $\overline{QP} \perp \bar{\beta}$, *իսկ այդ նշանակում է* $\overline{QP} \parallel \bar{b} \times \bar{\beta}$:

t *և* τ *պարամետրերի արժեքները* P *և* Q *կետերում համապատասխանաբար նշանակենք* t_1*-ով և* τ_1*-ով,* $\overline{QP}$*-ն նշանակենք* $\bar{n}$*-ով: Այն ժամանակ մի կողմից*

$$\bar{n} = (\bar{a} + \bar{b}t_1) - (\bar{\alpha} + \bar{\beta}\tau_1):$$

Մյուս կողմից $\bar{n} = u(\bar{b} \times \bar{\beta})$, *քանի որ* $\overline{QP} \parallel \bar{b} \times \bar{\beta}$. *այստեղ* u*-ն դրծակից է, որ դեռ անհայտ է: u-ն որոշելու նպատակով* $\bar{n}$*-ի համար մեր գտած երկու անհայտությունները հավասարեցնում ենք իրար՝*

$$\bar{n} = (\bar{a} + \bar{b}t_1) - (\bar{\alpha} + \bar{\beta}\tau_1) = u(\bar{b} \times \bar{\beta}):$$

Այս հավասարության երկու մասերն սկալար կերպով բազմապատկենք $\bar{b} \times \bar{\beta}$*-ով: Քանի որ* $\bar{b} \cdot (\bar{b} \times \bar{\beta}) = 0$, $\bar{\beta} \cdot (\bar{b} \times \bar{\beta}) = 0$, *իսկ* $(\bar{b} \times \bar{\beta}) \cdot (\bar{b} \times \bar{\beta}) = (\bar{b} \times \bar{\beta})^2$, *ապա կստանանք՝*

$$(\bar{a} - \bar{\alpha}) \cdot (\bar{b} \times \bar{\beta}) = u(\bar{b} \times \bar{\beta})^2,$$

որտեղից

$$u = \frac{(\bar{a} - \bar{\alpha}) \cdot (\bar{b} \times \bar{\beta})}{(\bar{b} \times \bar{\beta})^2},$$

իսկ

$$\bar{n} = \frac{[(\bar{a} - \bar{\alpha}) \cdot (\bar{b} \times \bar{\beta})]}{(b \times \bar{\beta})^2} (\bar{b} \times \bar{\beta}): \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III 34)}$$

Քանի որ ենթադրվում է, թե AL *և* CK *ուղիղները զուգահեռ չեն, ապա* $\bar{b} \times \bar{\beta}$ *արտադրյալը չի կարող դառնալ զերո:*

Եթե AL *և* CK *ուղիղները դասավորված են մի հարթության վրա, ապա, ըստ* (III 16)*-ի* $(\bar{a} - \alpha) \cdot (\bar{b} \times \bar{\beta}) = 0$ *և* $\bar{n} = 0$, *ինչպես և պետք է լիներ: Եվ իրոք, ոչ զուգահեռ ուղիղները մի հարթության վրա հատվում են, ուստի ամենափոքր հեռավորությունը նրանց միջև հավասար է զերոյի:*

2^0. *Մենք արդեն տեսանք, որ* $\bar{n} = (\bar{a} + \bar{b}t_1) - (\bar{\alpha} + \bar{\beta}\tau_1)$: *Որոշենք* t_1*-ը:* τ_1*-ն արտաքսելու համար հավասարության երկու մասերը վեկտորական կերպով բազմապատկենք β-ով: Այն ժամանակ*

$$\bar{n} \times \bar{\beta} = (\bar{a} - \bar{\alpha}) \times \bar{\beta} + (\bar{b} \times \bar{\beta})t_1:$$

Վերջին հավասարության երկու մասերն սկալար կերպով բազմապատկելով $\bar{n}$*-ով, ստանում ենք.*

$$0 = \bar{n} \cdot [(\bar{a} - \bar{\alpha}) \times \bar{\beta}] + \bar{n} \cdot (\bar{b} \times \bar{\beta})t_1:$$

Քանի որ $\bar{n} = u(\bar{b} \times \bar{\beta})$, *և* $\bar{n} \cdot [(\bar{a} - \bar{\alpha}) \times \bar{\beta}] = -[(\bar{a} - \bar{\alpha}) \cdot (\bar{n} \times \bar{\beta})]$, *ապա ունենք՝*

$$t_1 = \frac{u(\bar{a} - \bar{\alpha}) \cdot [(\bar{b} \times \bar{\beta}) \times \bar{\beta}]}{u(\bar{b} \times \bar{\beta}) \cdot (\bar{b} \times \beta)} \text{ կամ } t_1 = \frac{(\bar{a} - \bar{\alpha}) \cdot [(\bar{b} \times \bar{\beta}) \times \beta]}{(\bar{b} \times \bar{\beta})^2}, \quad \text{(III 35)}$$

Մասնավոր դեպքում, երբ AL *և* CK *ուղիղները փոխադարձ ուղղահայաց են,* $\bar{b}\cdot\bar{\beta}=0$, *ուստի* $(\bar{b}\times\bar{\beta})\times\bar{\beta}=\bar{\beta}\times(\bar{\beta}\times\bar{b})=-\bar{b}\beta^2$; $(\bar{b}\times\bar{\beta})^2=b^2\beta^2$ *և* t_1*-ի արտահայտությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝*

$$t_1=-\frac{(\bar{a}-\bar{\alpha})\cdot\bar{b}\beta^2}{b^2\beta^2}=\frac{(\bar{a}-\bar{\alpha})\cdot\bar{b}}{b^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (\text{III } 36)$$

Նման եղանակով կարելի է գտնել նաև Q *կետին համապատասխանող պարամետրի* τ_1 *արժեքը։*

Խնդիր.

Օգտվելով (III 31)*-ից, որոշել*

$$\bar{r}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma(\bar{a}\times\bar{b})$$

հավասարության α, β, γ *գործակիցները։*

[*Քանի որ* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *և* $\bar{a}\times\bar{b}$ *վեկտորները կոպլանար չեն, ապա այս վերլուծումը միշտ հնարավոր է*]։

ԲԱԺԻՆ ԵՐԿՐՈՐԴ

Մ Տ Ա Տ Ի Կ Ա

ԳԼՈՒԽ IV

ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ. ա ԱԶԴՄԱՆ ԵՎ ՀԱԿԱԶԴՄԱՆ ՕՐԵՆՔԸ· բ ՀԱՄԱՁՈՐԸ

§ 36. Մեխանիկայի ստորաբաժանումը. մարմինների փոխազդումը: *Մեխանիկա է կոչվում ֆիզիկայի այն բաժինը, որն ուսումնասիրում է շարժումը և նրա պատճառները:*

Մեխանիկայի այն բաժինը, որն ուսումնասիրում է շարժումը, անկախ այդ շարժումն առաջացնող պատճառներից, կոչվում է կ ի ն ե մ ա տ ի կ ա:

Իսկ մեխանիկայի այն բաժինը, որն ուսումնասիրում է շարժումը նրան առաջացնող պատճառների հետ շաղկապված, կոչվում է դ ի ն ա մ ի կ ա:

Դինամիկայի հիմք է ծառայում այն փաստը, որ՝

(IV 1) *երկու որևէ մարմիններ ազդում են միմյանց վրա, ըստ որում փոխվում են այդ մարմինների միջև եղած հեռավորությունը և նրանց արագությունները:*

Օրինակ. երկու էլեկտրականացված գնդիկներ հեռանում են միմյանցից, կամ մոտենում իրար, նայած թե համանուն են նրանց լիցքերը, թե համանուն չեն, ըստ որում հեռավորությունը փոխվելու հետ միաժամանակ փոխվում են նաև գնդիկների արագությունները:

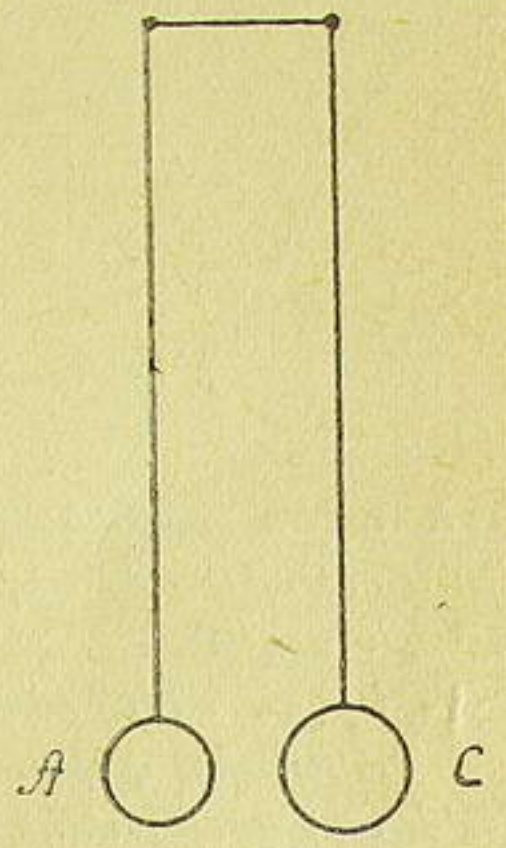
Երկրագնդի և քարի միջև եղած փոխազդեցության հետևանքով, փոխվում է նրանց միջև եղած հեռավորությունը, այդ դեպքում նույնպես քարի արագությունը փոխվում է: (Մենք ասում ենք, քարը ձգվում է երկրագնդի կողմից, քարն ընկնում է գետին: Մինչդեռ ավելի ճիշտ կլիներ ասել՝ քարը և երկրագունդը ձգվում են միմյանց, մոտենում են միմյանց):

Մագնիսն ու երկաթը ձգում են միմյանց: Այդպիսի օրինակների թիվը շատ մեծ է: Բայց եթե մենք այնուամենայնիվ ճիշտ չենք նկատում երկու որևէ մարմինների փոխազդեցությունը, ապա դա կարող է տեղի ունենալ հետևյալ պատճառներով՝

1⁰. Կարող է պատահել, որ միմյանց վրա փոխազդող երկու մարմիններից մեկը գտնվում է մեզնից շատ հեռու, և մեզ համար աննկատելի է: Այսպես օրինակ, եթե արեգակը չլուսավորեր և մեզ համար աննկատելի լիներ, ապա մենք գուցե չհանգեինք այն մտքին, թե երկրագնդի շարժումը արեգակի և երկրագնդի փոխազդեցության արդյունքն է:

2⁰. Յուրաքանչյուր A մարմին փոխազդում է ոչ միայն մեկ, այլ բազմաթիվ մարմինների հետ: Կարող է պատահել, որ A մարմնի վրա այդ մարմինների ներգործումները չեզոքացնում են միմյանց: Այդ դեպ-

քում մեզ կթվա, որA-ին շրջապատող մարմինները չեն ազդում նրա վրա։ Օրինակ, աեղանին դրած գրքի վրա ազդում են և՛ երկրագունդը, և՛ սեղանը, բայց երկրագունդը ձգում է դեպի իրեն, իսկ սեղանը խանգարում է գրքի վայր ընկնելուն։ Մեզ կարող է թվալ, որ գիրքը չի փոխազդում ոչ սեղանի և ոչ էլ երկրագնդի հետ։ Վերջապես կարող է պատահել, որ մի որևէ B մարմնի ազդեցությունը A մարմնի վրա շատ ավելի ուժեղ է, քան ուրիշ մարմինների ազդեցությունները։ Այդ դեպքում մեզ կթվա, որ A և B ազդում են միմյանց վրա, իսկ A և մնացած մարմինները ընդհանուր չեն փոխազդում։



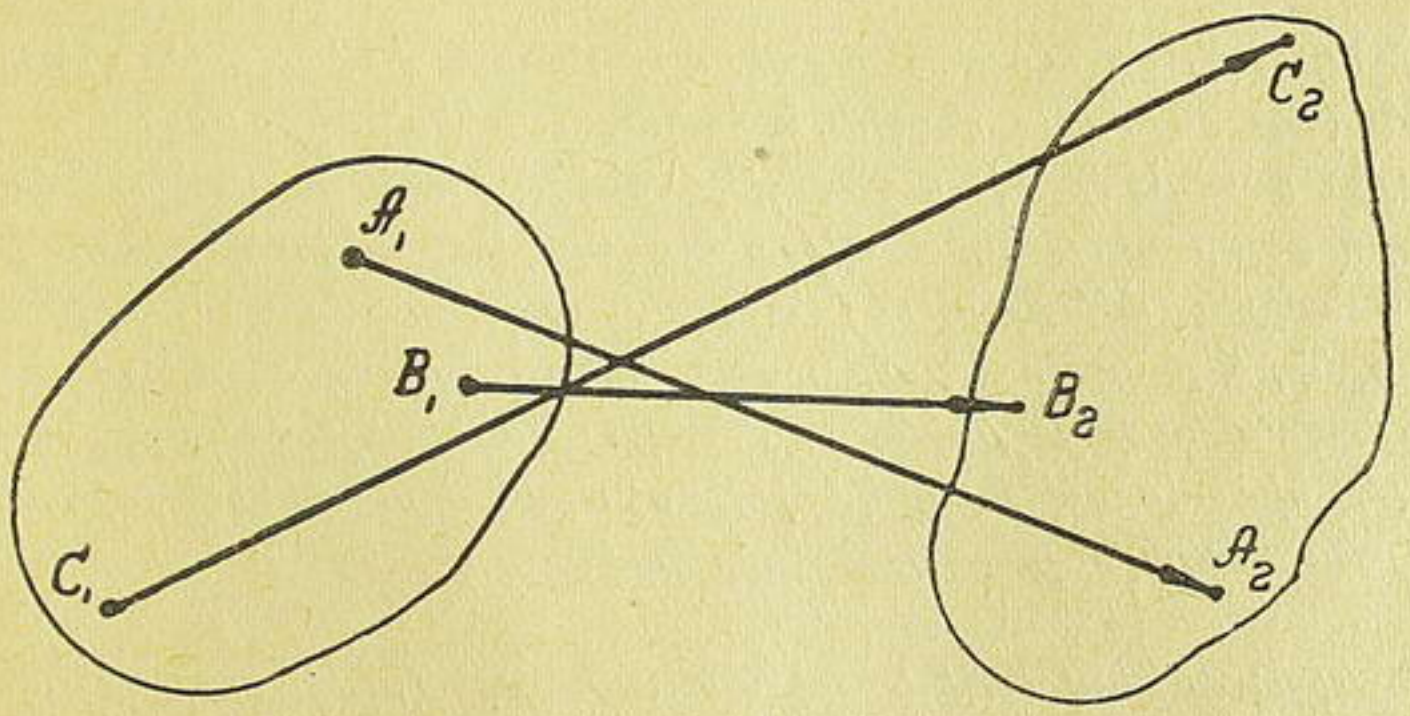
Նկ. 101

Այսպես, օրինակ, եթե A և C երկու գնդերը կախենք թելի վրա (նույնիսկ միմյանցից մոտ հեռավորության վրա), ապա մենք չենք նկատի նրանց միջև եղած ձգողությունը շնորհիվ այն բանի, որ յուրաքանչյուր գնդի և երկրագնդի միջև եղած ձգողությունը շատ ավելի մեծ է, քան A և C գնդերի միջև եղած ձգողությունը (նկ. 101)։

(Ներկայումս կան գործիքներ, որոնք թույլ են տալիս ընդհանուր պարզ կերպով հայտնաբերել երկու համեմատաբար ոչ մեծ հեռավորության վրա գտնվող մարմինների փոխադարձ ձգողությունը)։

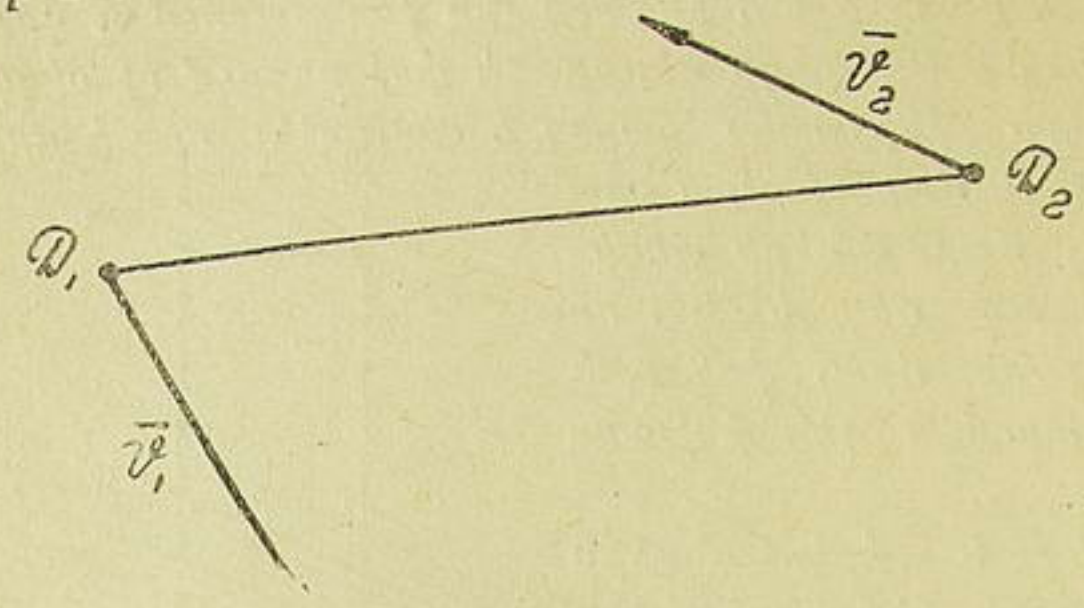
Թեզ (IV1) կարելի է ձևակերպել ավելի ճշգրիտ, եթե վերջավոր չափեր ունեցող մարմինների փոխարեն դիտարկենք խիստ փոքր մարմիններ, որոնց կարելի է ընդունել որպես կետեր։

Եվ իսկապես, վերջավոր չափեր ունեցող երկու մարմինների կետերի միջև գտնվող հեռավորություններից մեր պետք է ընդունել որպես այդ մարմինների միջև եղած հեռավորություն։ $\overline{C_1C_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{A_1A_2}$ *(նկար 101) հեռավորությունները զգալիորեն տարբերվում են միմյանցից։ Նույնպես զգալիորեն տարբերվում են միմյանցից մարմնի տարբեր կետերի արագություն-*



Նկ. 102

նները: Իսկ եթե վերցնենք երկու կետեր (նկ. 103), ապա հեռավորությունը նրանց միջև և նրանց արագությունները միանգամայն որոշակի վեկտորներ են:



Նկ. 103

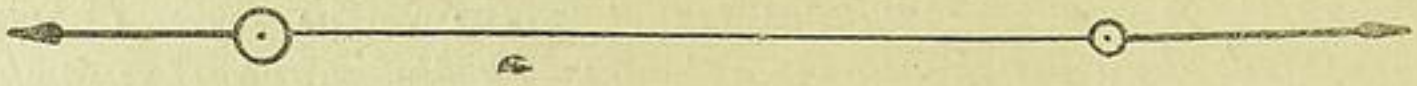
Այն մարմինները, որոնց չափերը կարելի է արհամարհել, կոչվում են նյութական կետեր[1]):

Նյութական կետերը ֆիզիկական մարմիններ լինելով, պարունակում են նյութի որոշ քանակ և փոխազդում են բոլոր այլ նյութական կետերի և ամեն տեսակ չափեր ունեցող ֆիզիկական մարմինների հետ:

Նյութական կետերին կիրառած հիմնական (IV 1) թեզը ձևակերպվում է այսպես՝

(IV 1) + Երկու նյութական կետեր ազդում են միմյանց վրա. դրա հետևանքով փոխվում են հեռավորությունը նրանց միջև և նրանց արագությունները: Արագությունների ակնթարթային (անսահման փոքր) փոփոխությունները հակազուգահեռ են միմյանց և տվյալ մոմենտում ղուգահեռ են կետերի միջև եղած հեռավորությանը:

Եթե, օրինակ, մենք բռնած ունենք երկու էլեքտրականացված գնդիկներ, ապա ձեռքերը այնպես բաց թողնելով, որ գնդիկները հրումներ չստանան, մենք նրանց կթողնենք իրենք իրենց: Փոխադարձ ազդման հետևանքով գնդիկները կսկսեն մոտենալ (կամ հեռանալ) ածող արագություններով, ամբողջ ժամանակ մնալով այն ուղղի վրա, որն անցել է նրանց կենտրոններով սկզբնական ժամանակամոմենտում (նկ. 104 ա):



Նկ. 104 ա.

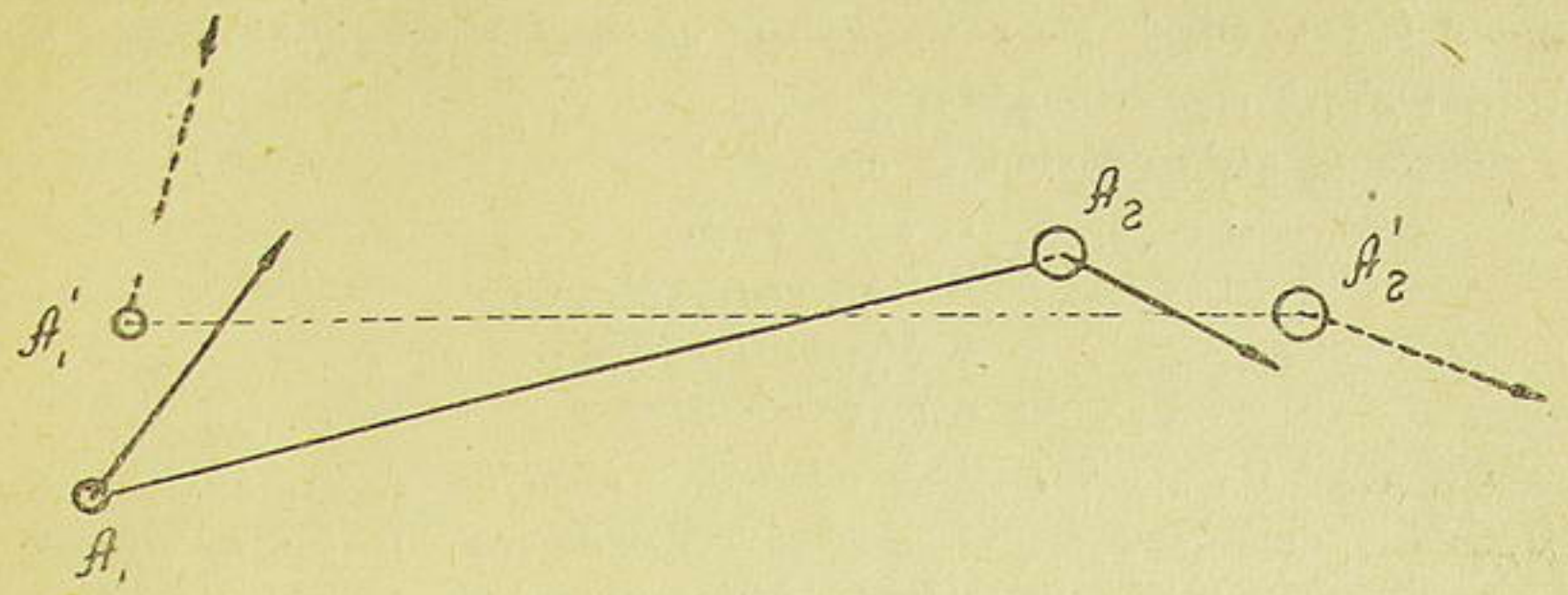
Ակնհայտ է, որ այստեղ արագությունների փոփոխությունները ղուգահեռ են (նկ. 104) այդ ուղղին և հակազուգահեռ՝ միմյանց:

Բայց ըստ (IV 1') արագությունների ակնթարթային փոփոխությունները բոլոր դեպքերում պետք է ղուգահեռ լինեն գնդիկների կենտրոններով տվյալ ակնթարթում անցնող ուղղին: Այսպես, օրինակ, եթե մենք ձեռքերից բաց թողնելուց առաջ հրենք էլեքտրականացված գնդիկները զանազան ուղղություններով, ապա գնդիկների կենտրոնների միջև եղած A_1A_2 հեռավորությունը կփոխվի ոչ միայն ըստ մեծության, այլև ըստ ուղղության: Սակայն յուրաքանչյուր տվյալ մոմենտում արագություն-

---

[1]) Նյութական կետի ավելի լրիվ սահմանումը կտրվի դինամիկայի դասընթացում:

նրբի փոփոխությունները դարձյալ ղուգահեռ կլինեն գնդիկների միջև եղած հեռավորությանը և հակազուգահեռ՝ միմյանց (նկ. 104 բ)։

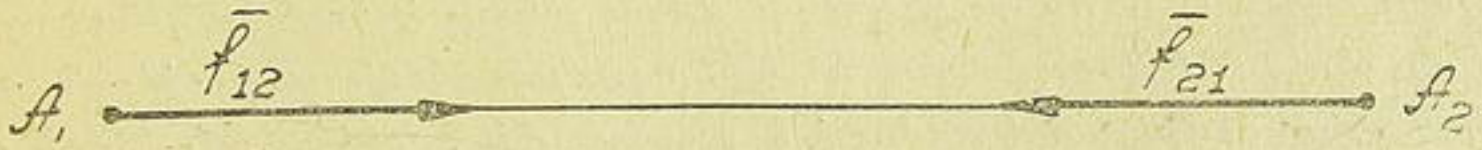


Նկ. 104 բ.

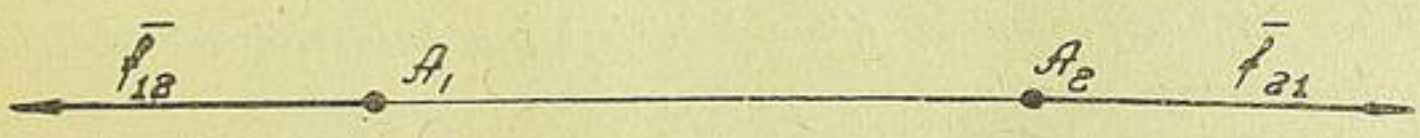
§ **37. Ուժ. ազդման եվ հակազդման հավասարության օրենքը։** *Դիտարկենք երկու նյութական կետեր A_1 և A_2։ Այդ կետերը փոխազդում են, այսինքն A_1 ազդում է A_2-ի վրա, իսկ A_2—A_1-ի վրա։ A_2 կետի ազդումը A_1-ի վրա, որի շնորհիվ A_1 կետի արագությունը փոխվում է (ըստ մեծության, ուղղության, կամ թե և ըստ մեծության և ըստ ուղղության) կոչվում է A_1-ին կիրառված (կամ A_1-ի վրա ազդող) և A_2-ից առաջացած ուժ։ Պայմանավորվենք այդ ուժը նշանակելու $\bar{f}_{12}$։ Այստեղ առաջի ինդեքսը ցույց է տալիս, թե որ կետին է ազդում ուժը, իսկ երկրորդը—թե որ կետից է առաջանում ուժը։ Այդպիսով այն ուժը, որով A_1 ազդում է A_2-ի վրա, կգրվի $\bar{f}_{21}$։ Այն կետը, որի վրա ազդում է, կամ որին կիրառված է ուժը, կոչվում է ուժի կիրառման կետ. A_1 կլինի $\bar{f}_{12}$ ուժի կիրառման կետը։*

Ասածից հետևում է, որ երկու նյութական A_1 և A_2 կետերի փոխազդեցության դեպքում միշտ առաջանում են երկու ուժեր՝ $\bar{f}_{12}$ և $\bar{f}_{21}$։

Ակնհայտ է, որ յուրաքանչյուր ուժ ունի որոշ մեծություն (չափ) (թե ինչպիսի միավորներով են արտահայտվում ուժերի չափերը, կասվի հետագայում)։ Բացի դրանից, ուժերն վերագրում են նաև որոշ ուղղություն, որը յուրաքանչյուր մոմենտում համընկնում է ուժի կիրառման կետի արագության ակնթարթային փոփոխության հետ։ Օրինակ, վերցնենք A_1 և A_2 նյութական կետերը. A_1-ի արագության ակնթարթային փոփոխությունը ղուգահեռ է A_1A_2. եթե այդ փոփոխությունը համազուգահեռ է $\overline{A_1A_2}$-ին, ապա և ուժը $\bar{f}_{12} \uparrow\uparrow \overline{A_1A_2}$ (նկ. 105 ա). իսկ եթե A_1-ի արագության ակնթարթային փոփոխությունը հակազուգահեռ է $\overline{A_1A_2}$-ին, ապա և ուժը $\bar{f}_{12} \downarrow\uparrow \overline{A_1A_2}$ (նկ. 105 բ)։ Ասածից հետևում է, որ ուժը վեկտոր է։



Նկ. 105 ա.



Նկ. 105 բ.

Այն անվերջ ուղիղը, որի մի մասի հետ համընկնում է ուժի վեկտորը, կոչվում է այդ ուժի ազդման գիծ։ Օրինակ (նկար 105 ա և բ) A_1A_2 հատվածը երկու կողմ շարունակելուց ստացված անվերջ ուղիղը կլինի $\bar{f}_{12}$ և $\bar{f}_{21}$ ուժերի ազդման գիծը։

Այսպիսով ուժը վեկտոր է, որ ունի՝

ա որոշ չափ.
բ » ուղղություն.
գ կիրառման կետ.
դ ազդման գիծ։

Դառնալով (IV 1′)-ին, մենք տեսնում ենք, որ A_1, A_2 կետերի արագությունների ակնթարթային փոփոխությունները, որոնք առաջացել են այդ կետերի փոխազդեցությունից, հակազուգահեռ են։ Հետևապես f_{12} և $\bar{f}_{21}$ ուժերը նույնպես հակազուգահեռ են։ Բացի դրանից, մենք նաև ընդունեցինք, որ $\bar{f}_{12}$ և $\bar{f}_{21}$ ուժերն ունեն միևնույն չափը։ Այժմ մենք արդեն ունենք երկու նյութական կետերի փոխազդեցության օրենքի հետևյալ վեկտորական ձևակերպումը։

Երկու նյութական կետերի (A_1, A_2) փոխազդեցությունից առաջացած ուժերը $\bar{f}_{12}$ և $\bar{f}_{21}$

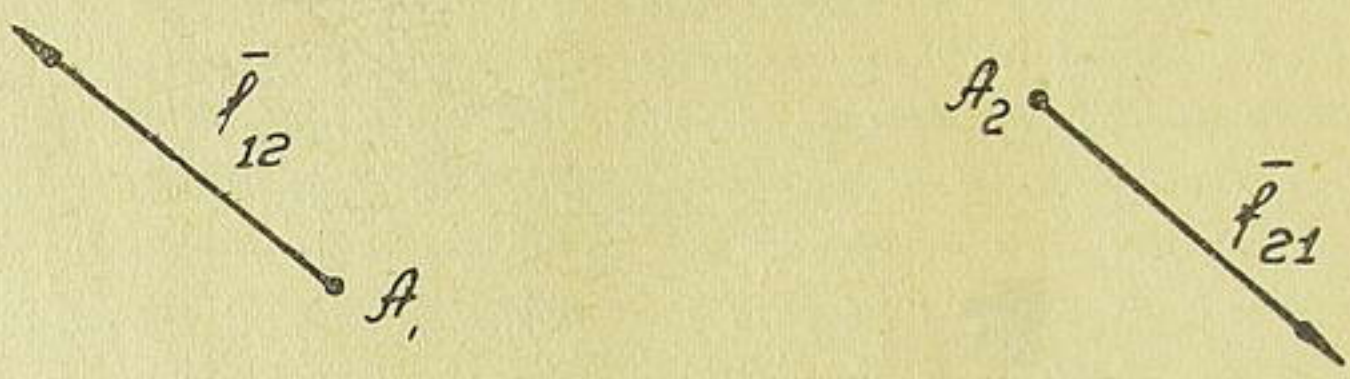
ա ունեն հավասար չափեր,

(IV 2) բ հակազուգահեռ են,

գ ունեն ազդման ընդհանուր գիծ—A_1A_2 ուղիղը,

$\bar{f}_{12}$ և $\bar{f}_{21}$ ուժերի ա և բ հատկությունները մաթեմատիկորեն արտահայտվում են $\bar{f}_{12}+\bar{f}_{21}=0$ հավասարությամբ։

Եթե այդ ուժերը բավարարեին միայն ա և բ պայմաններին, ապա նրանց ազդման գծերը կարող էին դասավորվել ինչպես կամենայինք, օրինակ, ինչպես ցույց է տված 106 նկարում։



Նկ. 106

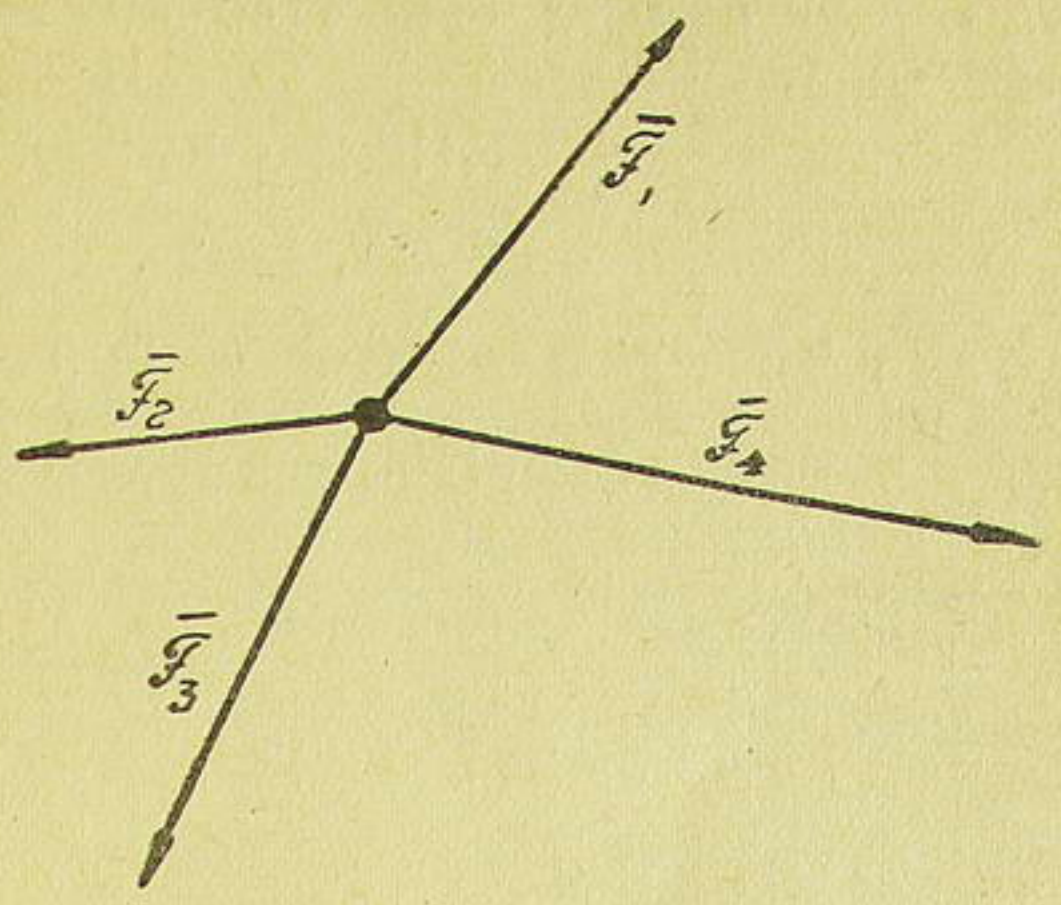
$\bar{f}_{12}$ և $\bar{f}_{21}$ ուժերի ազդման գծերի դասավորությունը լիովին որոշվում է այն պայմանով (գ), որ այդ գծերը միշտ պետք է համընկնեն։

(IV 2) կոչվում է ազդման և հակազդման հավասարության օրենք, ըստ որում ազդումը հասկացվում է որպես մի նյութական կետի ազդեցությունը մի ուրիշ կետի վրա, իսկ հակազդումը—երկրորդ կետի ազդեցությունը առաջինի վրա։ Օրինակ՝ եթե $\bar{f}_{12}$-ը համարվում է ազդում, ապա $\bar{f}_{21}$ կլինի հակազդում։

§ 38. Կետին կիրառված ուժերի համազորը: Այն դեպքերում, երբ մենք մեր ուշադրությունը կենտրոնացնում ենք միայն մի կետի վրա (A),

չհնարավորացրվելով, թե ինչ կետերից են առաջանում A կետին կիրառած ուժերը, ապա կարիք չկա ուժը նշելու երկու ինդեքսով։

Ենթադրենք A կետի վրա ազդում են երկու կամ մի քանի ուժեր $\bar{F}_1$ $\bar{F}_2$ ..... $\bar{F}_n$ (նկ. 107ա)։ Հնարավոր է արդյոք այդ n ուժերը փոխարինել մի ուժով։ Այլ խոսքերով կարելի է գտնել այնպիսի մի ուժ, որի ներգործումը նյութական A կետի վրա, լինի նույնը լինի, ինչ որ այդ կետին կիրառված n ուժերի ներգործումը։



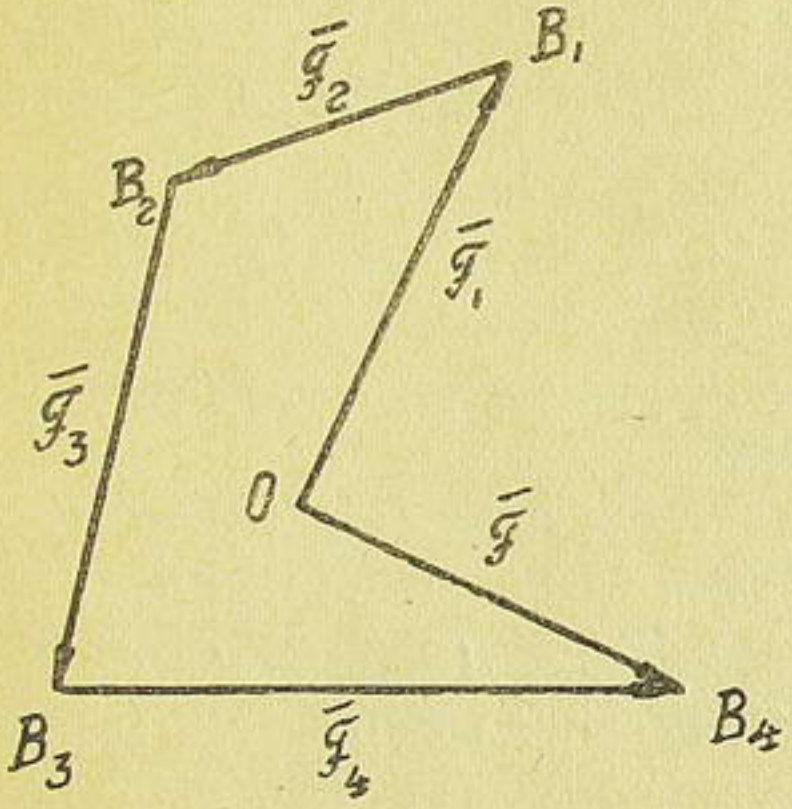
Նկ. 107ա.

Այն ուժը, որը միանակ փոխարինում է մի կետին կիրառած n ուժերին, կոչվում է նրանց համազորը։

Համազորի գոյությունը հաստատվում է հետևյալ ակսիոմայով՝

(IV 3) *Մի կետին կիրառած ուժերը միշտ ունեն համազոր, որը հավասար է այդ ուժերի վեկտորական գումարին (և իհարկե, կիրառված է նույն կետին)։*

Այստեղից պարզ է, որ մի կետին կիրառված n ուժերի համազորը գտնելու համար պետք է այդ ուժերը դասավորել շղթայական կարգով. այդ շղթան փակող վեկտորը կլինի հենց ինքը համազորը (նկ. 107բ)։



Նկ. 107 բ.

Այսպես վարվելով՝ պետք է ինքնատ ունենալ, որ ինչ կետից էլ սկսած լինի ուժերի շղթայի կառուցումը, համազորը միշտ էլ կիրառված է այն կետին, որի վրա ազդում են տվյալ ուժերը։

Ի նկատի ունենալով «համազոր» հասկացողության բացարիկ կարևորությունը, դիտարկենք մի քանի դեպքեր, թեև մենք միշտ պետք է կիրառենք վեկտորների գումարման լավ հայտնի կանոնը։

Համազորը մենք կնշանակենք $\bar{F}$.

1°. A կետին կիրառված են երկու համազուգահեռ ուժեր F_1 և $\bar{F}_2$, $F_1 \uparrow\uparrow \bar{F}_2$ (նկ. 108) $\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2$, $F=F_1+F_2$, $\bar{F}\uparrow\uparrow\bar{F}_1$;

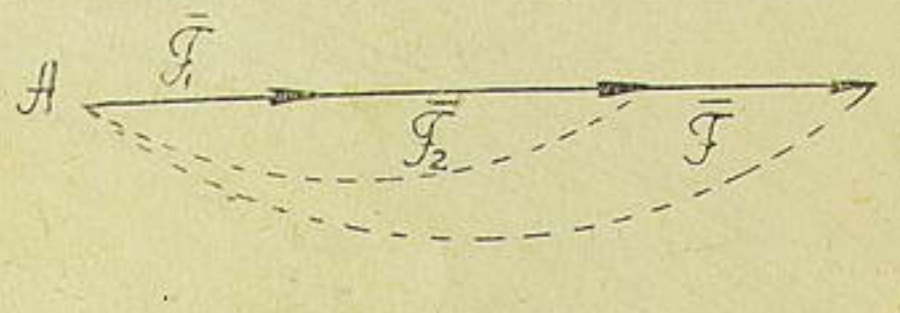
Երկու համազուգահեռ ուժերի համազորի իմաստը համընկնում է այդ ուժերի իմաստին. համազորի չափը հավասար է տվյալ երկու ուժերի չափերի գումարին: Նույնը տեղի է ունենում և n համազուգահեռ ուժերի դեպքում.

$$\overline{F}_1 \uparrow\uparrow \overline{F}_2 \uparrow\uparrow \overline{F}_3 \ldots\ldots \uparrow\uparrow \overline{F}_n \qquad (IV\ 4)$$

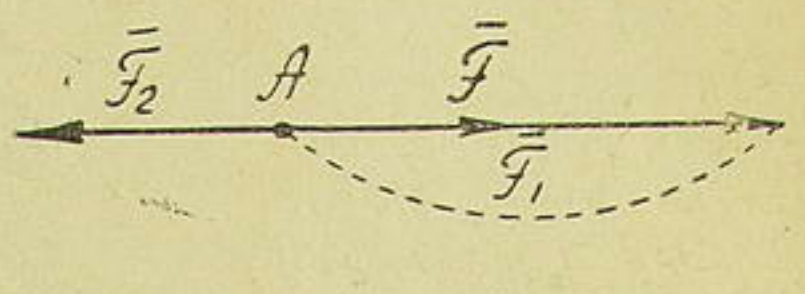
$$\overline{F}=\Sigma F_i,\ F=\Sigma F_i.$$

2°. Երբ $\overline{F}_1$ *և* $\overline{F}_2$ *ուժերը հակազուգահեռ են (նկ. 109), ապա*

$$\overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2,\ F=|F_1-F_2|, \ldots\ldots \qquad (IV\ 5)$$



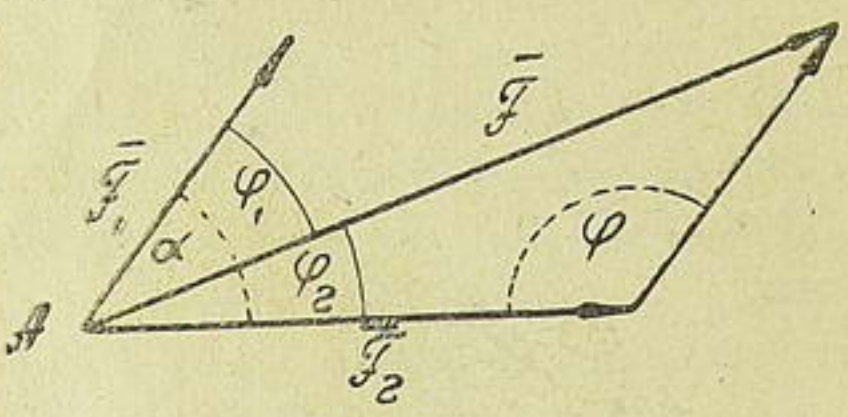
Նկ. 108



Նկ. 109

Երկու հակազուգահեռ ուժերի համազորի իմաստը համընկնում է այն ուժի իմաստին, որի չափը մեծ է. համազորի չափը հավասար է տվյալ ուժերի չափերի տարբերությանը բացարձակ արժեքին:

3°. Եթե A *կետին կիրառված* $\overline{F}_1$ *և* $\overline{F}_2$ *երկու ուժերը կազմում են* α *անկյունը (նկ. 110), ապա համազորի չափը որոշվում է* $F^2=F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha$ *հավասարությունից: $\overline{F}$-ը $\overline{F}_1$ և $\overline{F}_2$-ի հետ կազմում է* $\varphi_1=(F_1,\overline{F})$ *և* $\varphi_2=(\overline{F}_2,\overline{F})$ *անկյունները, որոնք բավարարում են*



Նկ. 110

$$\frac{F}{\sin\varphi}=\frac{F}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{F_1}{\sin\varphi_2}=\frac{F_2}{\sin\varphi_1} \ldots \qquad (IV\ 6)$$

պայմանին:

Այդ դեպքում համազորը և տվյալ երկու ուժերը գտնվում են մեկ հարթության վրա:

4°. Կառուցենք ուժերի շղթա, երբ նրանց թիվը երկուսից ավելի է: Օրինակ, ենթադրենք A *կետին կիրառված են չորս ուժեր, նկար 107 բ.* $O\,B_2\,B_3\,B_4$ *նրանց շղթան է, քանի որում* $\overline{OB}_1=\overline{F}_1$, $\overline{B_1B_2}=\overline{F}_2$, $B_2B_3=\overline{F}_3$ *և* $B_3B_4=\overline{F}_4$. $\overline{OB}_4=\overline{F}$ *կլինի այդ չորս ուժերի համազորը:*

ՀԱՄԱԶՈՐԻ ՊՐՈԵԿՑԻԱՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՑԱՆ ՎՐԱ

5°. Դիցուք LL*-ը կամավոր առանցք է, և σ կամավոր հարթություն.* F_i *և* $\overline{F}_i$ *ուժի պրոեկցիան է այդ առանցքի վրա. իսկ* $\overline{F}_{i\sigma}$ F_i *ուժի պրոեկ-*

ցիան է σ հարթության վրա։ Կետին կիրառված $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ . . . . $\bar{F}_n$ ուժերի համազորը հավասար է այդ ուժերի գումարին։

$$\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\ldots\ldots+\bar{F}_n=\Sigma\bar{F}_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (IV\ 7)$$

Ուստի

$$F_i=F_{i1}+F_{i1}+\ldots\ldots F_{ni}=\Sigma F_{i1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (IV\ 7')$$

$$\bar{F}_\sigma=\bar{F}_{1\sigma}+\bar{F}_{2\sigma}+\ldots\ldots \bar{F}_{n\sigma}=\Sigma\bar{F}_{i\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (IV\ 7'')$$

այսինքն՝ համազորի պրոեկցիան կամավոր առանցքի վրա հավասար է ուժյալ ուժերի՝ նույն առանցքի վրա վերցրած պրոեկցիաների գումարին։

Համազորի պրոեկցիան կամավոր հարթության վրա հավասար է ուժյալ ուժերի՝ նույն հարթության վրա վերցրած պրոեկցիաների վեկտորական գումարին։

Դիցուք OXYZ փոխադարձ ուղղահայաց առանցքների մի սիստեմ է։ X_i, Y_i, Z_i-ն $\bar{F}_i$-ի պրոեկցիաներն են OX, OY, OZ առանցքի վրա, իսկ X, Y, Z-ը համազորի պրոեկցիաներն են նույն առանցքի վրա։ Համաձայն (IV 7′)

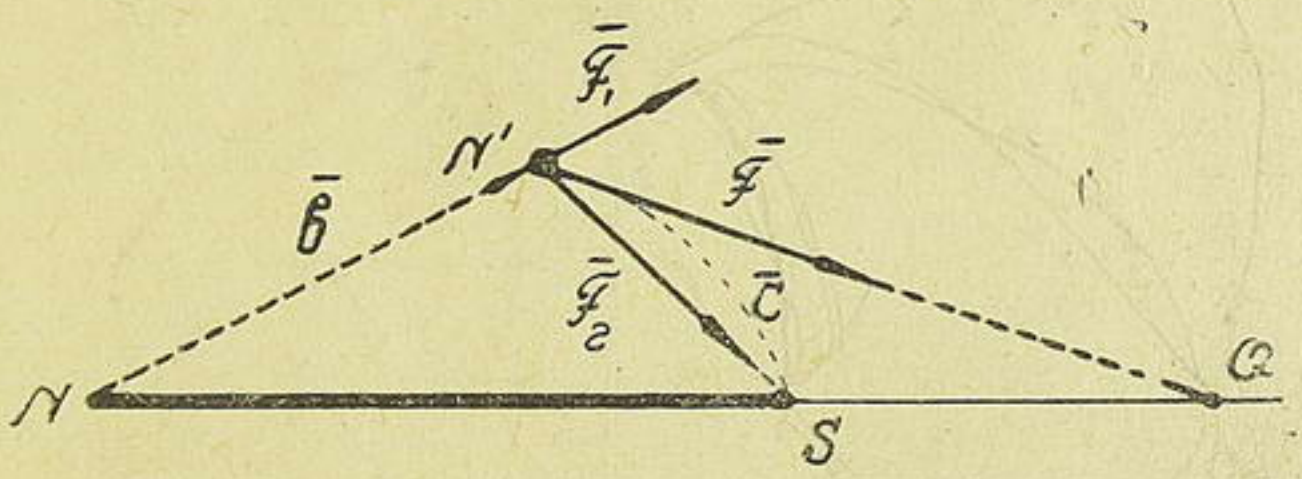
$$\left.\begin{aligned} X&=X_1+X_2+\ldots\ldots X_n=\Sigma X_i\\ Y&=Y_1+Y_2+\ldots\ldots Y_n=\Sigma Y_i\\ Z&=Z_1+Z_2+\ldots\ldots Z_n=\Sigma Z_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (IV\ 8)$$

և բացի դրանից

$$F^2=X^2+Y^2+Z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (IV\ 8')$$

Խնդիր.

NS *մագնիսի* N *բևեռը* $\bar{F}_1=\dfrac{k\hat{b}}{b^2}$ *ուժով վանում է մագնիսական* N *բևեռը, որտեղ* $\bar{b}=\overline{NN'}$, $\hat{b}\uparrow\uparrow\overline{NN'}$, k — *համեմատականության գործակիցն է, նկար 111։ Նույն մագնիսի* S *բևեռը ձգում է մագնիսական* N′ *բևեռը* $\bar{F}_2=\dfrac{k\hat{c}}{c^2}$ *ուժով, որտեղ* $\bar{c}=\overline{N'S}$, $\hat{c}\uparrow\uparrow\overline{N'S}$։



Նկ. 111

Ապացուցել, որ $\bar{F}_1$ *և* $\bar{F}_2$ *ուժերի համազորի ազդման գիծը հատում է* NS*-ի շարունակությունը մի այնպիսի* Q *կետում, որ*

$$NQ : SQ=b^3 : c^3.$$

Որովհետև $\overline{N'Q}\uparrow\uparrow\overline{F}$, *ապա կարող ենք գրել*

$\overline{N'Q}=u\overline{F}=u(\overline{F_1}+\overline{F_2})=uk\left(\frac{\hat{b}}{b^2}+\frac{\hat{c}}{c^2}\right)$. *Մյուս կողմից* $\overline{N'Q}=\overline{NQ}-\overline{NN'}=$

$=z\overline{NS}-\overline{NN'}$. *բայց* $\overline{NS}=\hat{b}b+\hat{c}c$, *այնպես որ*

$\overline{N'Q}=z(\hat{b}b+\hat{c}c)-\hat{b}b=(z-1)\hat{b}b+z\hat{c}c$. *հավասարեցնենք միմյանց* $\overline{N'Q}$*-ի երկու արտահայտությունները.*

$$uk\left(\frac{\hat{b}}{b^2}+\frac{\hat{c}}{c^2}\right)=(z-1)\hat{b}b+z\hat{c}c$$

Այստեղից $\hat{b}\left[\frac{uk}{b^2}-(z-1)\,b\right]=\hat{c}\left(zc-\frac{uk}{c^2}\right)$.

Որովհետև $\hat{b}$ *և* $\hat{c}$ *դուգահեռ չեն միմյանց, ապա արտահայտությունները ձախ և աջ մասերի փակագծերում պետք է դառնան 0։*

$$\text{Ուստի } z=\frac{uk}{c^3},\ (z-1)=\frac{uk}{b^3}.$$

$$\text{և } \frac{z}{z-1}=\frac{b^3}{c^3}$$

Բայց եթե $\overline{NQ}=z\overline{NS}$, *ապա* $\overline{SQ}=(z-1)\overline{NS}$ *և որովհետև* $\overline{NQ}\uparrow\uparrow\overline{SQ}$, *ապա*

$$\frac{\overline{NQ}}{\overline{SQ}}=\frac{NQ}{SQ}=\frac{-z}{z-1}$$

Այդպիսով

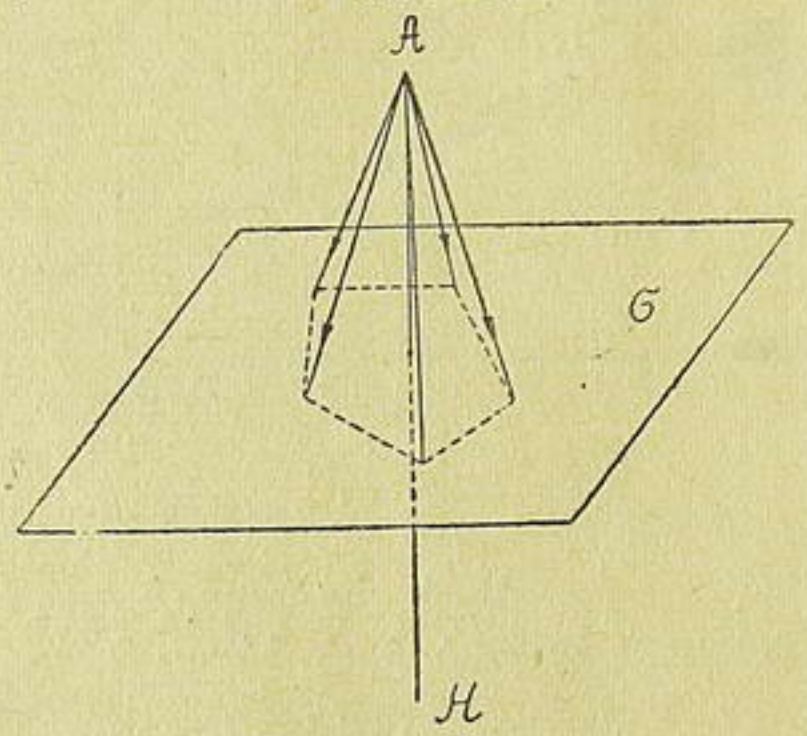
$$\frac{NQ}{SQ}=\frac{b^3}{c^3}.$$

Խնդիրներ.

1. A *կետին կիրառված* $\overline{F}_1$ *և* $\overline{F}_2$ *ուժերը կազմում են α անկյունը.* $\overline{F}$*-ը նրանց համազորն է, որոշել, թե α-ի, որ արժեքի դեպքում համազորի չափը հավասար է տվյալ ուժերից մեկի չափին, օրինակ* $F=F_1$*։*

2. $\overline{F}_1\ \overline{F}_2\ldots\overline{F}_n$ *ուժերի համազորի պրոեկցիաները* OL *և* OK *առանցքների վրա հավասար են* 0, $F_l=0$, $F_k=0$. *որոշել այն անկյունը, որը կազմում է համազորը* LOK *հարթության հետ։*

Որոշել $\overline{F}_1,\ldots\overline{F}_n$ *ուժերի պրոեկցիաների գումարը* LOK *հարթության վրա դասավորված* OP *առանցքի վրա։* LOK *և* LOP *անկյուններըը կամայական են։*



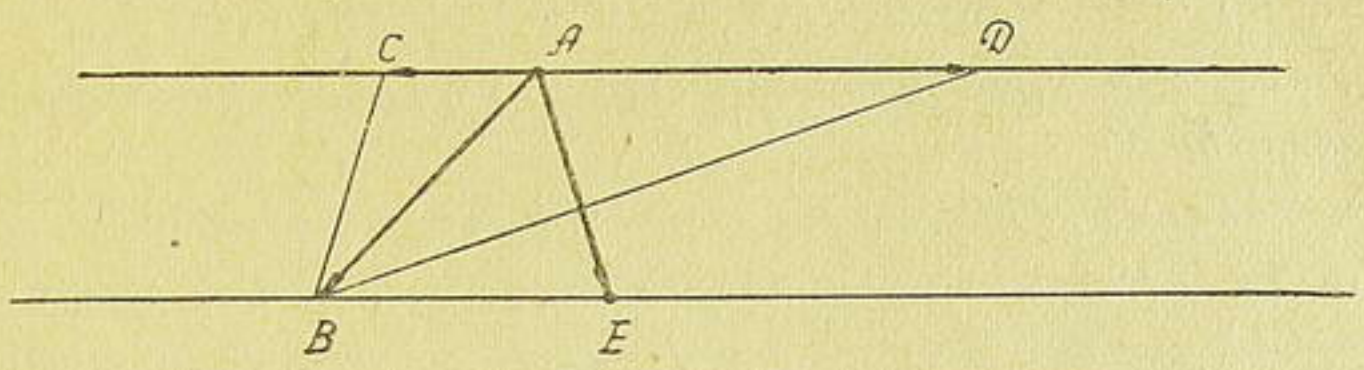
Նկ. 112

3. A կետին կիրառված են ըստ չափի հավասար և AH ուղղի հետ միևնույն անկյունը կազմող 4 ուժեր, նկար 112։ Այդ ուժերի ազդման գծերը հատվելիս $\sigma \perp AH$ հարթության հետ, տալիս են կանոնավոր հինգանկյունանու չորս գագաթներ։ Գիտենալով, որ AH=h, իսկ հինգանկյունու շառավիղը հավասար է r-ի, որոշել այդ չորս ուժերի համազորի ազդման կիծը (օրինակ, ցույց տալ, թե որ կետում է համազորի ազդման գիծը հատում σ)։

4. $B_1, B_2, \ldots B_n$ կամավոր (ընդհանուր առմամբ ոչ հարթ) փակ բազմանկյունանու գագաթներ են, $D_1, D_2, \ldots D_n$ այդ բազմանկյան կողմերի միջակետերը, իսկ A-ն կամայական կետ է։ Ապացուցել, որ $\overline{AB_1}\ \overline{AB_2} \ldots \overline{AB_n}$ ուժերը և $\overline{AD_1}\ \overline{AD_2} \ldots \overline{AD_n}$ ուժերն ունեն միևնույն համազորը։

5. $\overline{F}$-ը A կետին կիրառած $\overline{F_1}$, F_2 երկու փոխադարձ ուղղահայաց ուժերի համազորն է։ Եթե A-ին կիրառենք $\overline{F_1}'$ և $\overline{F_2}'$ ուժերը, որոնք բավարարում են $\overline{F_1}' \uparrow\uparrow \overline{F_1}$, $F_1' = \overline{F_1} + 3$. $\overline{F_2}' \uparrow\uparrow \overline{F_2}$, $F_2' = F_2 + 3$ պայմաններին, ապա նոր համազորի չափը $F' = F + 4 = F_1 + F_2$։ Որոշել F_1 և F_2։

6. BCD եռանկյան CD կողմի վրա վերցված է կամավոր A կետը։ A կետին կիրառված են $\overline{F_1}\ \overline{F_2}\ \overline{F_3}$ ուժերը, որոնք համապատասխանաբար հավասար են $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ (նկար 113)։ Այդ ուժերի $\overline{F}$ համազոր հավասար է $\overline{AE}$։ Ապացուցել, որ եթե A անընդհատ տեղափոխենք CD-ի վրայով, ապա E կետը կգծի CD-ին զուգահեռ մի ուղիղ։



Նկ. 113

ԳԼՈՒԽ V

ԿԵՏԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ. ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ. ՈՒԺԵՐԻ ՏԵՍԱԿՆԵՐԸ՝ ԿՇԻՌ, ԼԱՐՈՒՄ

§ 39. Հավասարակշռություն. Նյութական կետի հավասարակշռության պայմանները։ *Երբ նյութական A կետին կիրառած ուժերի համազորը հավասար է զերոյի, A-ի արագությունը հաստատուն է (ըստ մեծության և ըստ ուղղության) և մասնավոր դեպքում կարող է հավասար լինել զերոյի։ Վերջին դեպքում կետը գտնվում է հանգստի մեջ։*

Նյութական կետի այն վիճակը, որում նրա արագությունը հաստատուն է (ըստ մեծության և ուղղության) կամ հավասար է զերոյի, կոչվում է հավասարակշռության վիճակ։

Այդ սահմանումը հեշտությամբ տարածվում է յուրաքանչյուր մարմնի վրա։ Եվ իրոք յուրաքանչյուր մարմին մտքով կարելի է բաժանել

այնքան մասերի, որ իրավունք ունենանք յուրաքանչյուր այդպիսի մասը համարել նյութական կետ։

Այստեղից պարզ է, որ յուրաքանչյուր մարմին հավասարակշռության մեջ կլինի, եթե հավասարակշռության մեջ են նրա բոլոր կետերը։

Մեխանիկայի այն բաժինը, որն ուսումնասիրում է նյութական կետերի և առհասարակ ֆիզիքական մարմինների հավասարակշռությունը, կոչվում է ստատիկա։

Շնորհիվ այն հանգամանքի, որ հաստատուն արագություն ունեցող շարժումը մի որևէ արագություն ունեցող շարժման մասնավոր դեպք է, ստատիկան կարող է համարվել դինամիկայի մի մասը։

Մենք արդեն գիտենք, որ երբ կետին կիրառված ուժերի համազորը հավասար է 0-ի, այդ կետի արագությունը հաստատուն է, իսկ եթե ուժերի համազորը զերո չէ, կետի արագությունը չի կարող հաստատուն լինել։

Այստեղից անմիջապես բղխում են հետևյալ թեորեմները՝

(V 1) *Երբ նյութական կետը հավասարակշռության մեջ է, նրան կիրառված ուժերի համազորը հավասար է զերոյի.*
այսինքն՝ $\overline{F} = \Sigma \overline{F}_k = 0$։

(V 1′) *Եթե նյութական կետին կիրառված ուժերի համազորը հավասար է զերոյի, ապա այդ կետը գտնվում է հավասարակշռության մեջ։*

Զերո վեկտորի պրոեկցիաները որևէ առանցքի կամ հարթության վրա հավասար են 0։

Այդ պատճառով էլ եթե $\overline{F}_k$ *ուժի պրոեկցիաները կամավոր* LL *առանցքի և կամավոր σ հարթության վրա նշանակենք* F_{kl}, $\overline{F}_{k\sigma}$, *իսկ այդ նույն ուժի պրոեկցիաները* OX, OY, OZ *փոխադարձ ուղղահայաց առանցքների վրա նշանակենք* X_k, Y_k, Z_k, (V 1), (IV 7), (IV 7′), (IV 8)-ի *հիման վրա կստանանք՝*

Եթե նյութական կետը n *ուժերի ազդեցության տակ գտնվում է հավասարակշռության մեջ, ապա՝*

$$\Sigma F_{kl} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V\ 2)$$

$$\Sigma F_{k\sigma} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V\ 2')$$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X_k &= 0 \\ \Sigma Y_k &= 0 \\ \Sigma Z_k &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V\ 2'')$$

Թվենք մի քանի դեպքեր։

1⁰. Եթե նյութական կետի վրա ազդում է միայն մի ուժ, ապա կետը չի կարող հավասարակշռության մեջ լինել։

2⁰. Եթե նյութական կետի վրա ազդում են երկու ($\overline{F}_1$ *և* $\overline{F}_2$) *ուժեր, ապա հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է, որ այդ ուժերը հակազուգահեռ լինեն և ունենան միևնույն չափը։*

Եվ իսկապես $\overline{F}_1 + F_2 = 0$ *պայմանից հետևում է* $F_1 = F_2$, $\overline{F}_1 \uparrow\downarrow \overline{F}_2$.

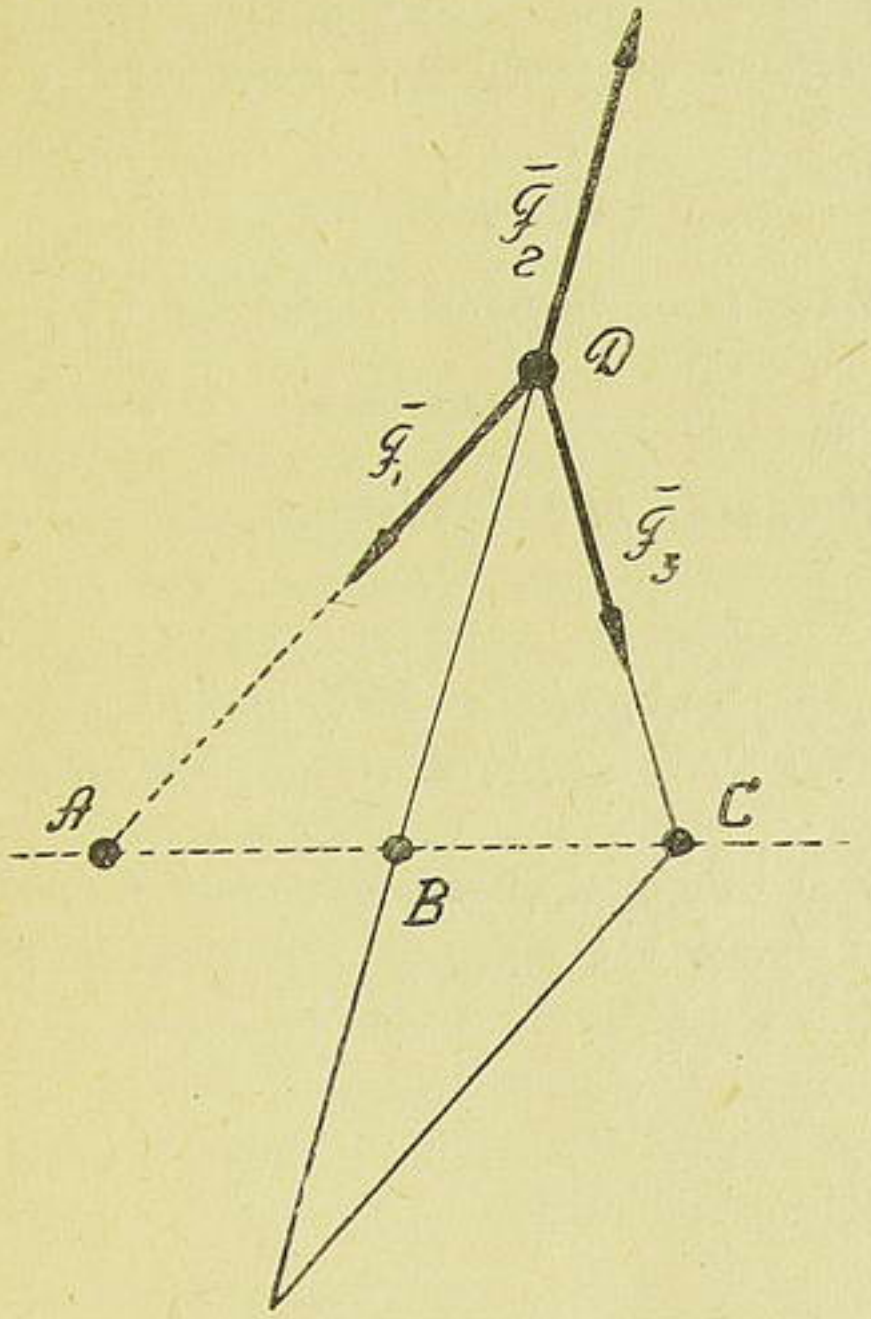
3⁰. Եթե նյութական կետին կիրառված են երեք ուժեր, ապա կետի հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է, որ այդ ուժերը (ղեկայական

դասավորության մեջ, կազմեն (փակ) եռանկյուն: Դա անմիջապես բղխում է հավասարակշռության $\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3=0$ հավասարումից և հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ այդ երեք ուժերը դասավորված են մի հարթության վրա:

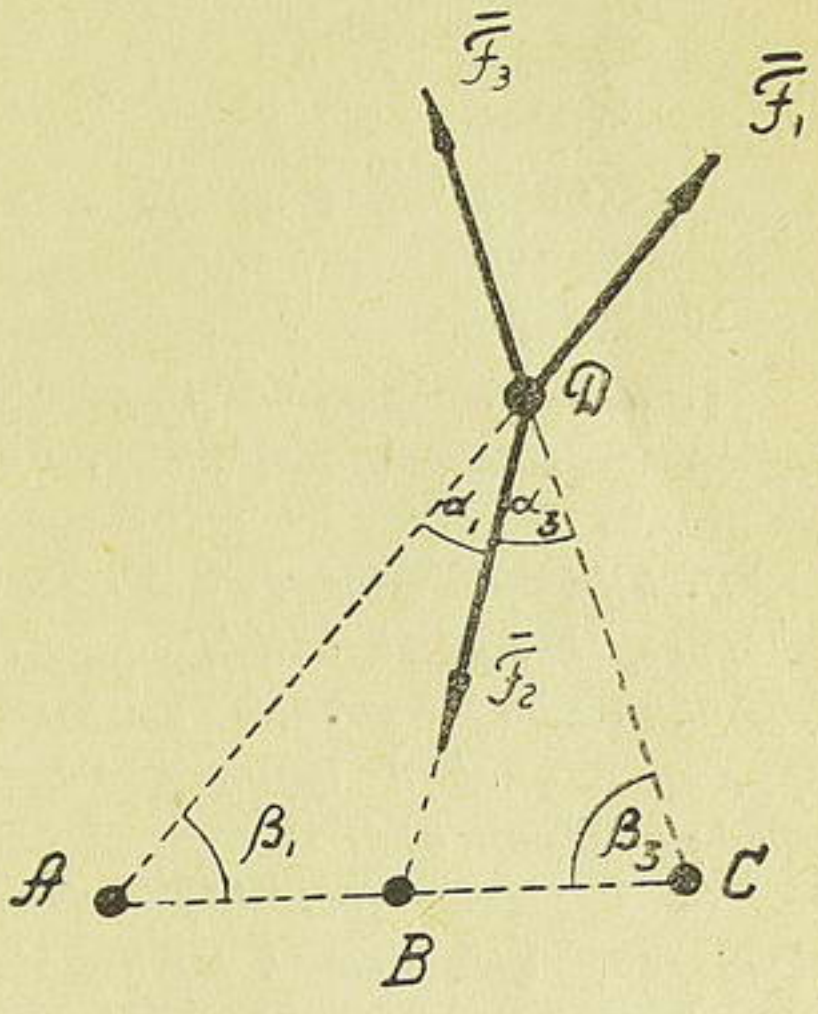
4°. Ընդհանուր առմամբ երբ կիրառված են երեքից ավելի ուժեր, ապա կետի հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է, որ ուժերի բազմանկյունն փակ լինի:

Խնդիր.

Էլևկտրականացված A, B, C, D *չորս գնդիկներից (նկար 114 ա) առաջին երեքը գտնվում են մեկ ուղղի վրա, ըստ որում* AB=BC, *իսկ* D *գնդիկը՝ այդ ուղղից դուրս: A և C գնդիկների լիցքերը հավասար են միմյանց և համանուն: B գնդիկի լիցքն ունի հակառակ նշան: Ցույց տալ, որ D գնդիկի հավասարակշռությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ* DB⊥AC:



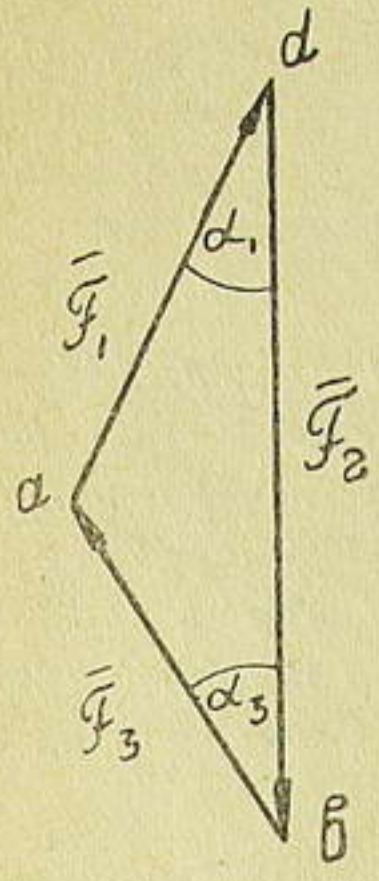
Նկ. 114 ա.



Նկ. 114 բ.

Նայած D-ի լիցքի նշանին, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ ուժերն ուղղված կլինեն կամ ինչպես ցույց է տրված 114 ա. նկարում, կամ 114 բ. նկարում: Ենթադրենք, որ տեղի ունի վերջին դեպքը (նկ. 114բ): Թող $\bar{d}\bar{b}$ ներկայացնի մի որևէ մասշտաբով $\bar{F}_2$ ուժը: Հավասարակշռության դեպքում երեք ուժերը պետք է կազմեն եռանկյուն: Ուստի, (նկ. 114 գ.) $\bar{d}$-ից անցկացնելով $\bar{F}_1$-ին (կամ DA-ին) զուգահեռ ուղիղը, իսկ $\bar{b}$-ից $\bar{F}_3$-ին (DC-ին) զուգահեռ ուղիղը

կստանանք, որ հավասարակշռության դեպքում $\overline{F_1}=\overline{ad}$, *իսկ* $\overline{F_3}=\overline{ba}$, *որտեղից* $\frac{F_1}{F_3}=\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_1}$. *Սակայն (տես նկար 114 բ)*



Նկ. 114 գ.

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}=\frac{AB}{DB}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3}=\frac{BC}{DB}=\frac{AB}{DB},$$ *հետևապես*

$$\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_1}=\frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_1}=\frac{DA}{DC},\quad \text{և}\quad \frac{F_1}{F_3}=\frac{DA}{DC}.$$

Մյուս կողմից քանի որ A և C գնդիկների լիցքերը միևնույնն են, ապա նրանցից յուրաքանչյուրը նշանակելով m, իսկ D գնդիկի լիցքը՝ M, կստանանք $F_1=\frac{kmM}{(DA)^2}$, $F_3=\frac{kmM}{(DC)^2}$, *որտեղ k-ն համեմատականության գործակիցն է. այստեղից*

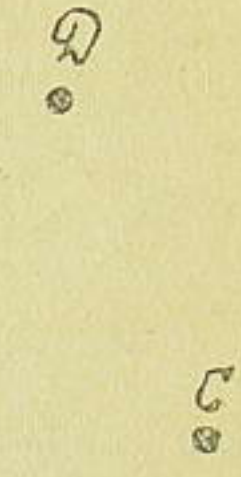
$$\frac{F_1}{F_3}=\left(\frac{DC}{DA}\right)^2.$$

Համեմատելով այս հավասարությունը նախկինի հետ, $\left(\frac{F_1}{F_3}=\frac{DA}{DC}\right)$ *կստանանք* $DA=DC$, *իսկ այդ հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ* $DB\perp AC$.

Խնդիրներ.

1. Որոշել, հնարավո՞ր է արդյոք նախընթաց խնդրում բերած D գնդիկի հավասարակշռությունը, եթե A, B, C գնդիկների լիցքերը լինեն համանուն:

2. Էլեկտրականացված A, B, C, D գնդիկները դասավորված են ինչպես ցույց է տրված 115 նկարում: Հնարավո՞ր է արդյոք այնպես ընտրել լիցքերի մեծությունները և նշանները, որ B գնդիկը գտնվեր հավասարակշռության մեջ:

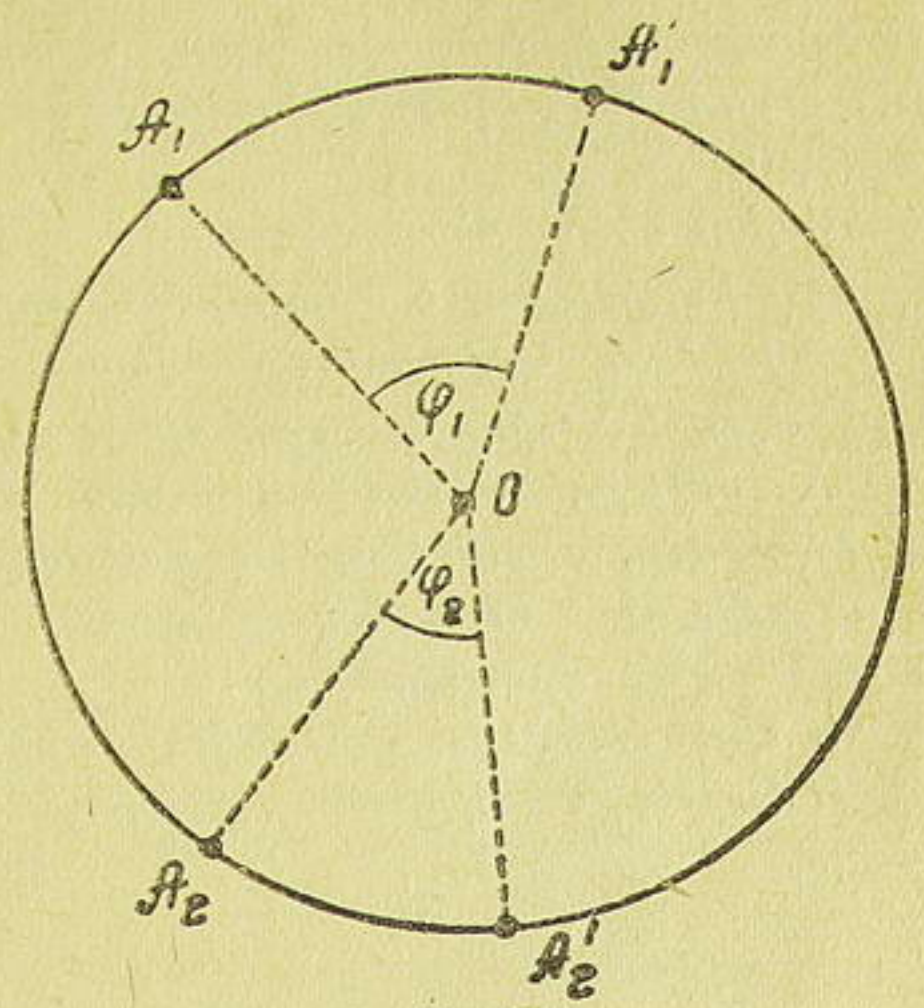


Նկ. 15

3. Շրջանագծի կենտրոնում (նկար 116) գտնվում է 0 գնդիկը, որի լիցքը=+m, իսկ շրջանագծի վրա դասավորված են A_1, A'_1, A_2, A'_2 *գնդիկները, որոնց լիցքերը բացասական են, ըստ որում* $m_1=m_1'$, $m_2=m_2'$ $\angle A_1OA'_1=\varphi_1$, $\angle A_2OA'_2=\varphi_2$: *Որոշել* A_1OA_2 *անկյունը և* $\frac{m_1}{m_2}$ *հարաբերությունը, ենթադրելով, որ O գնդիկը հավասարակշռության մեջ է:*

§ 40. Ուժերի տեսակները: *Մեխանիկայի օրենքները արդարացի են բոլոր ուժերի համար: Այսպես օրինակ, բոլոր ուժերն առանց բացառության ենթարկվում են ազդման և հակազդման հավասարության օրենքին:*

Սակայն կան տարբեր յուրահատկություններ ունեցող ուժերի զանազան տեսակներ: Այսպես, օրինակ, երկու նյութական կետերի կամ երկու մարմինների համան դեպքում նրանց միջև առաջ են գալիս ուժեր: Այդ ուժերը տեղ ունեն միայն այն ժամանակ, երբ կետերի կամ մարմինների միջև եղած հեռավորությունը զերո է: Իսկ եթե կետերի միջև եղած հեռավորությունը հավասար չէ զերոյի, ապա որքան էլ որ նա փոքր լինի, այդ ուժերն անհետանում են:



Նկ. 116

Երկնային մարմինների միջև եղած ձգողական ուժերը փոխվում են հակադարձ համեմատական հեռավորության քառակուսուն և հետևապես զանազանվում են առաջին տեսակի ուժերից:

Իսկ զսպանակների դիմադրության ուժերն ուղիղ համեմատական են զսպանակների երկարացմանը (կամ կարճացմանը) և այդպիսով տարբերվում են թե երկնային մարմինների միջև եղած ձգողական ուժերից և թե երկու մարմինների հպումից առաջացած ուժերից և այլն:

Անհրաժեշտ է ծանոթանալ ուժերի տեսակների մի քանիսի հետ:

§ **41. Կշիռ:** Նյութական կետի կշիռ է կոչվում այն ուժը, որով այդ կետը ձգվում է երկրագնդի կողմից: Այդ ուժը միշտ ուղղված է նյութական կետից դեպի երկրագնդի կենտրոնը: Կետը երկրագնդի կենտրոնի հետ միացնող ուղղի ուղղությունը կոչվում է ուղղաձիգ ուղղություն, իսկ ինքը ուղիղը—ուղղաձիգ: Ուղղաձիգի վրա տարբերում են երկու իմաստ՝ ներքև (այսինքն կետից դեպի կենտրոն) և վերև—կենտրոնից դեպի կետը:

Ասածից հետևում է, որ նյութական մասնիկի կշիռը ուղղաձիգ ուժ է, ուղղված ներքև:

Երբ մարմնի գծային չափերը փոքր են երկրագնդի շառավղի համեմատությամբ, ապա մարմնի զանազան կետերից տարած ուղղաձիգները կարելի է համարել միմյանց զուգահեռ: Հետևապես մարմին կազմող նյութական կետերի կշիռները կլինեն համազուգահեռ ուժեր: Մարմինը կազմող բոլոր նյութական կետերի (համազուգահեռ) կշիռների գումարը կոչվում է այդ մարմնի կշիռը:

XII գլխում ցույց կտրվի, որ յուրաքանչյուր մարմնում կա մի կետ, որին կարելի է հաշվել այդ մարմնի կշիռի կիրառման կետ: Այդ կետը կոչվում է մարմնի ծանրության կենտրոն[1]):

---

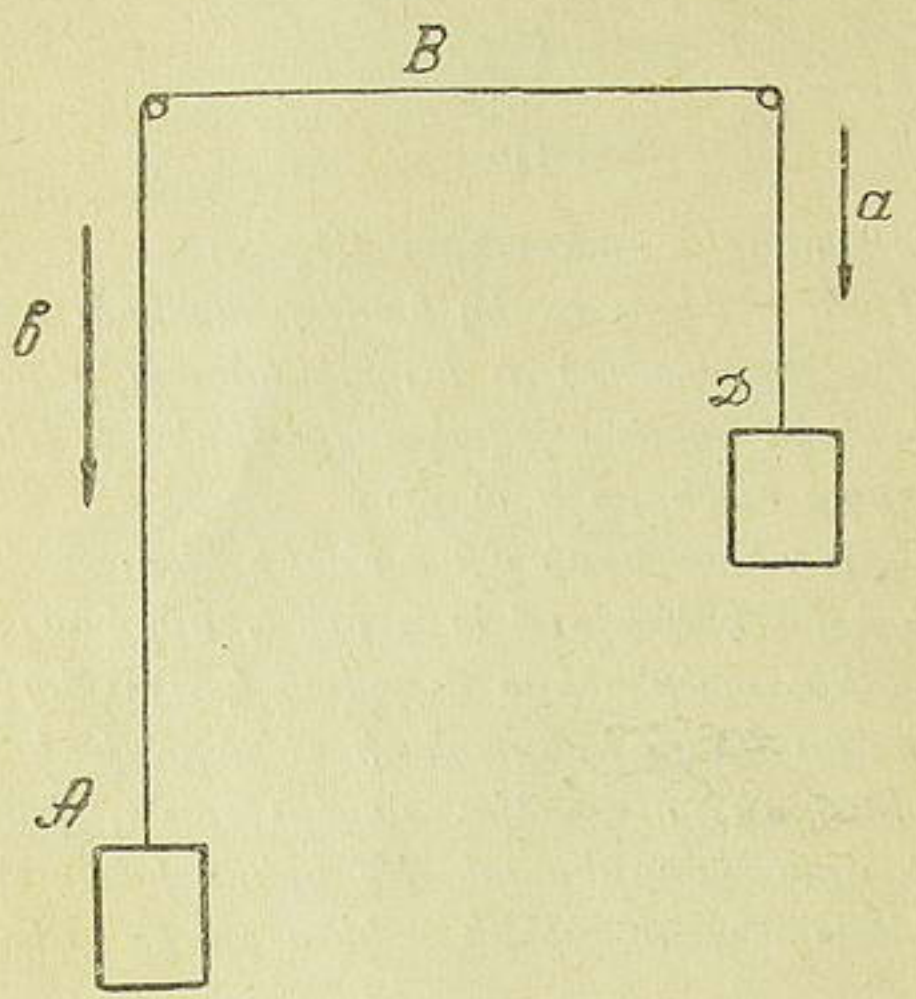
[1]) Ծանրության կենտրոնի ճիշտ սահմանումը կտրվի XII գլխում:

կշռի չափի միավորն է դրամը: Դա մեկ խորանարդ սանտիմետր մաքուր ջրի կշիռն է 4° C դեպքում: Գրամի փոխարեն հաճախ գործ են ածում ուրիշ միավորներ՝ կիլոգրամ = 1000 գր, տոննա = 1000 կգ և այլն:

Սովորաբար կշռի միավորներով արտահայտում են և ուրիշ ուժեր: Օրինակ, ասում են զսպանակի առաձգական դիմադրությունը հավասար է 20 կիլոգրամի:

Իսկապես, ենթադրենք զսպանակի վերին ծայրը ամրացված է, իսկ ներքևի ծայրին կախված է մի մարմին, որի կշիռն է $\overline{Q}$: Որովհետև մարմինը գտնվում է հավասարակշռության մեջ և նրա վրա ազդում են միայն երկու ուժեր՝ կշիռը և զսպանակի $\overline{R}$ դիմադրությունը, ապա $\overline{R}+\overline{Q}=0$: Այդ երկու ուժերը, հետևապես, ունեն միևնույն չափը՝ $R=Q$: Եթե $Q=10$ կիլոգրամի, ապա և զսպանակի դիմադրությունը հավասար է 10 կիլոգրամի: Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ, որ բոլոր տեսակի ուժերը կարելի է չափել կշռի միավորներով:

§ 42. **Լարում:** *Դիցուք ABD թելը անց է կացված երկու մեխերի վրայով և նրա ծայրերին կախված են ծանրոցներ (նկար 117): Ծանրոցների կշիռների հավասարության դեպքում թելը հավասարակշռության մեջ կլինի: Ենթադրենք, որ թելը այնքան է բարակ, որ նրա ընդլայնական կտրվածքը կարելի է դիտել որպես կետ:*



Նկ. 117

Եթե հեռացնենք թելի AB մասը (օրինակ, թելը կտրենք B կետում), ապա BD մասը կընկնի, ինչպես ցույց է տրված a սլաքով:

Այստեղից հետևում է, որ B կետում ազդում է մի ինչ որ $\overline{F_B}$ ուժ, որն առաջանում է թելի AB մասից և պահպանում է BD մասի հավասարակշռությունը:

Եթե հեռացնենք թելի BD մասը, ապա կընկնի AB-ն, ինչպես ցույց է տված b սլաքով: Հետևապես B կետում ազդում է մի $\overline{S_B}$ ուժ, որն առաջանում է թելի BD մասից և պահպանում է AB մասի հավասարակշռությունը:

Եթե թելի և ոչ մի մասը չի հեռացված, ապա B կետը գտնվում է հավասարակշռության մեջ $\overline{F_B}$ և $\overline{S_B}$ երկու ուժերի ազդեցության հետևանքով: Հետևապես $\overline{F_B}+\overline{S_B}=0$, $F_B \uparrow\downarrow S_B$, $F_B = S_B$, այսինքն $\overline{F_B}$ և $\overline{S_B}$ ուժերը հակազուգահեռ են և ունեն միևնույն չափը:

Նկատենք, որ B կետը պատկանում է թելի AB և BD երկու մասերին էլ:

Այն ուժը, որով թելի մասերից մեկն ազդում է մյուսի վրա նրանց ընդհանուր կետում, կոչվում է թելի լարում այդ կետում:

Ընդհանուր դեպքում թելի լարումը տարբեր է նրա տարբեր կետերում, դրա համար էլ նպատակահարմար է ցույց տալ, թե որ կետին է նա վերաբերում: Լարումը ընդունված է նշել $\overline{T}$ տառով: Այնպես, որ $\overline{T}_B$ նշանակում է թելի լարումը B կետում:

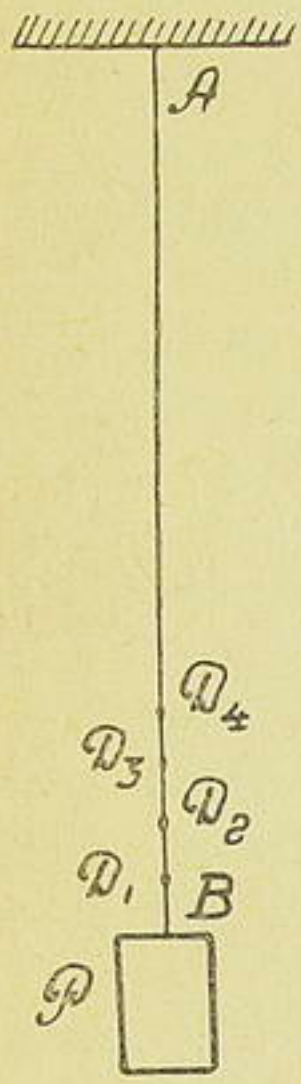
Օգտվելով «լարում» տերմինից, անհրաժեշտ է ի նկատի ունենալ, որ թելի երկու մասերը, իրենց ընդհանուր կետում, ազդում են միմյանց վրա ըստ չափի հավասար և հակազուգահեռ ուժերով, ինչպես մեր օրինակում բերած $\overline{F}_B$ և $\overline{S}_B$ ուժերը:

Հետևապես անհրաժեշտ է պարզ կերպով պատկերացնել, թե իսկապես թելի որ մասի ազդումն է B կետում նշանակվում $\overline{T}_B$-ով:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ թելի վերի ծայրն ամրացված է, իսկ ներքևի ծայրին կախված է $\overline{P}$ կշիռ ունեցող ծանրոցը (նկ. 118 ա):

Թելը բաժանենք (մտքով) այնպիսի BD_1, D_1D_2 .... փոքր մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրը կարելի լինի համարել նյութական կետ (նկար 118ա):

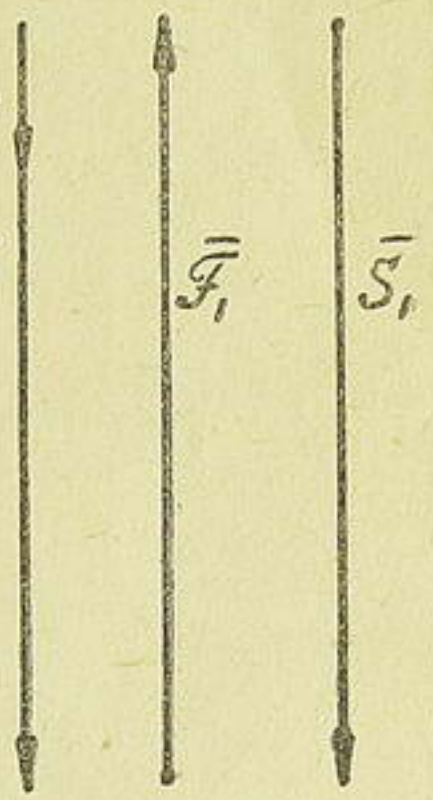
Անջատենք BD_1 մասը ծնացած թելից և դիտարկենք այդ մասի հավասարակշռության պայմանները:



Նկ. 118 ա

BD_1 *մասնիկին կիրառված են հետևյալ երեք ուժերը՝ ծանրոցի $\overline{P}$ կշիռը, մասնիկի սեփական $\overline{Q}$ կշիռը և $\overline{T}_1$ ուժը, (որով թելի վերին AD_1 մասը D_1 կետում ազդում է ներքևի D_1B մասի վրա): Եթե BD_1 մասնիկը հավասարակշռության մեջ է, ապա $\overline{P}+\overline{Q}_1+\overline{F}_1=0$ (V 3):*

Այդ հավասարությամբ լուծվին որոշվում է $\overline{F}_1$ ուժը: Քանի որ $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ ուղղված են ըստ ուղղաձիգի ներքև, ապա $\overline{F}_1$ նույնպես ուղղաձիգ է, բայց ուղղված է դեպի վերև (նկ. 118բ): $\overline{S}_1$ անվանենք այն ուժը, որով թելի BD_1 մասը D_1 կետում ազդում է AD_1 մասին. համաձայն վերևում ասածի $\overline{F}_1+\overline{S}_1=0$ (V 4):



Նկ. 118 բ

$\overline{F}_1$ և $\overline{S}_1$ ուժերից յուրաքանչյուրը կարելի է դիտարկել որպես թելի $\overline{T}_1$ լարումը D_1 կետում. լարումը հավասար է $\overline{F}_1$, երբ դիտարկվում է վերևի AD_1 մասի ազդումը ներքևի BD_1 մասի վրա: Լարումը հենց նույն D_1 կետում հավասար է S_1, եթե դիտարկենք թելի BD_1 մասի ազդումը նրա վերին AD_1 մասի վրա:

(V 3) և (V 4) *հավասարություններից հետևում է $\overline{S}_1=\overline{P}+\overline{Q}$ ... (V 4'):*

Պայմանավորվենք լարումը D_1, D_2 ..... D_k .... կետերում նշանակել $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ ..... F_k ..... երբ դիտարկվում է այն ուժը, որով թելի վերին մասն ազդում է նրա ներքևի մասի վրա: Նույն կետերում լարումը կլինի $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ .... S_k ...., եթե դիտարկելու լինենք թելի ներքևի մասի ազդեցությունը նրա վերևի մասի վրա:

Այժմ անջատենք (մտքով) թելի $D_1 D_2$ մասը։ Նրա վրա ազդում են երեք ուժեր՝ $\overline{S_1}$ D_1 կետում, իր սնիպական $\overline{Q}_2$ կշիռը և $\overline{F}_2$ D_2 կետում։ $D_1 D_2$ մասնիկի հավասարակշռության հետևանքով

$$\overline{S}_1+\overline{F}_2+\overline{Q}_2=0, \text{ բայց որովհետև ըստ (V 3)}$$

$$\overline{F}_2+\overline{S}_2=0, \qquad \text{ապա}$$

$$\overline{S}_2=\overline{S}_1+\overline{Q}_2, \qquad \text{կամ ըստ (V 4')}$$

$$\overline{S}_2=\overline{P}+\overline{Q}_1+\overline{Q}_2:$$

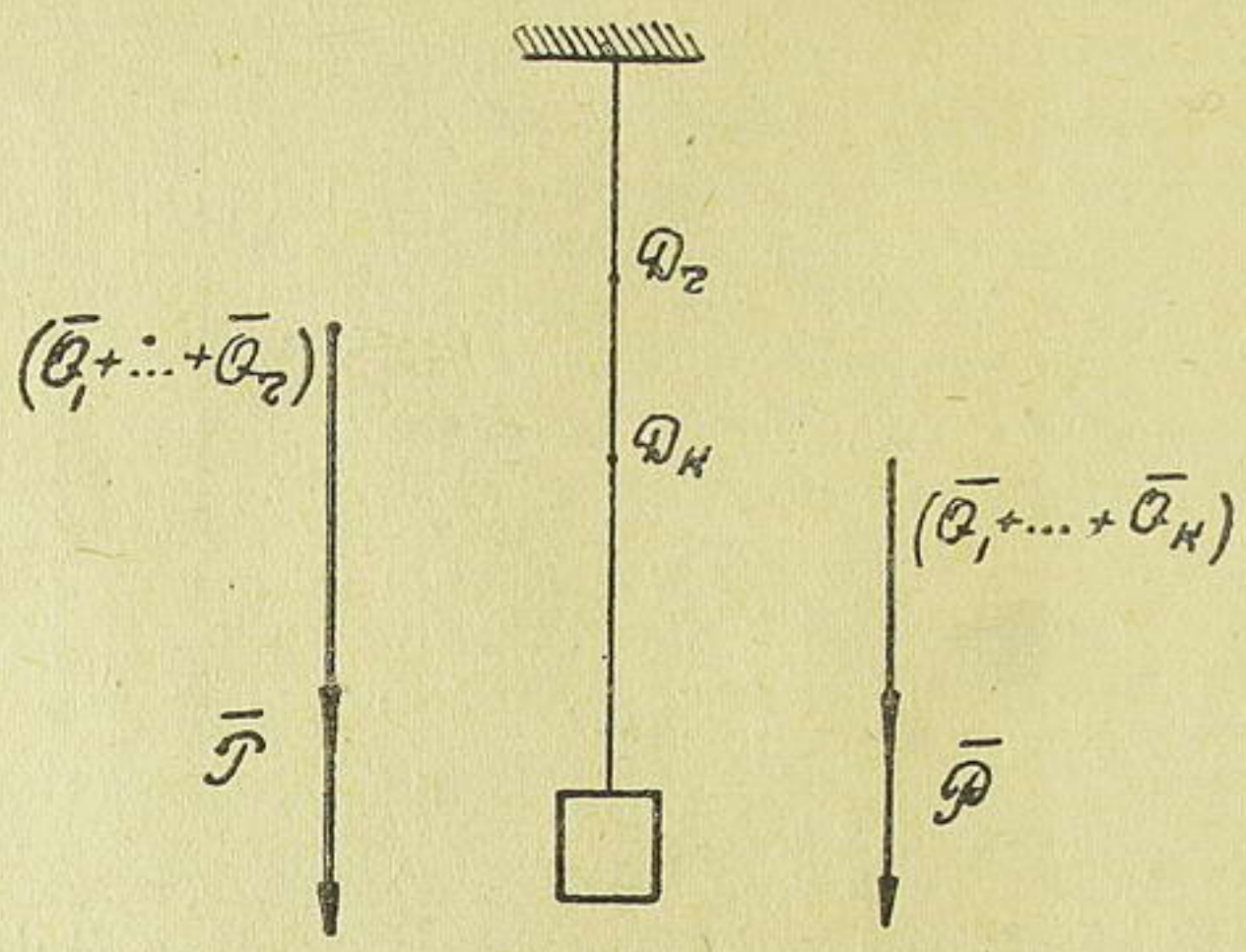
Ճիշտ այդպես դիտարկելով բոլոր D_2D_3, D_3D_4 ...., $D_{k-1}D_k$ մասնիկները, կստանանք (V4') նման հավասարություններ, այսինքն

$$\overline{S}_3=\overline{P}+\overline{Q}_1+\overline{Q}_2+\overline{Q}_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$S_k=P+Q_1+Q_2+Q_3+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot +Q_k \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (V5):$$

Այդ հավասարության մեջ $\overline{Q}_1+\overline{Q}_2+ \cdot \cdot \cdot \cdot +\overline{Q_k}$ գումարը հավասար է թելի BD_k ներքևի մասի կշռին։ Այդ պատճառով վերջին հավասարությունը նշանակում է հետևյալը՝ այն ուժը, որով թելի ներքևի (BD_k) մասը D_k կետում ազդում է վերևի մասի վրա, հավասար է ծանրոցի և թելի BD_k մասի կշիռների գումարին։ Կամ ավելի համառոտ՝

Թելի լարումը որևէ կետում հավասար է ծանրոցի և թելի ներքևի մասի կշռին։



Նկ. 118 գ

Համեմատենք լարումները D_k և D_r երկու կետերում, որոնցից D_r գտնվում է ավելի բարձր։

$$\overline{S}_k=\overline{P}+(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2+ \cdot \cdot \cdot \cdot \overline{Q}_k)$$

$$\overline{S}_r=\overline{P}+(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \overline{Q}_r):$$

$\overline{S}_r-\overline{S}_k=$ *թելի D_kD_r մասի կշռին։*

Այդպիսով թևի երկու կետերում լարումների տարբերությունը ամենևին էլ կախված չէ թևը ձգող ծանրոցի $\bar{P}$ կշռից։

Թևի համասեռության դեպքում ստացած հետևանքները հարմար է արտահայտել թևի երկարության միավորի $\bar{q}$ կշռի միջոցով։

Նշանակենք թևի ներքևի մասի BD_k երկարությունը l_k-ով, իսկ BD_r երկարությունը՝ l_r-ով. այն ժամանակ՝

$$\bar{S}_k=\bar{P}+l_k\bar{q},\ \bar{S}_r=\bar{P}+l_r\bar{q}$$

և $$\bar{S}_r-\bar{S}_k=(l_r-l_k)\,\bar{q}=D_rD_k\,\bar{q}:$$

Եթե $\bar{P}$ կշռի հետ համեմատած $\bar{q}$ այնքան է փոքր, որ թևը կարելի է համարել անկշիռ, այսինքն՝ ընդունել, որ $\bar{q}=0$, ապա

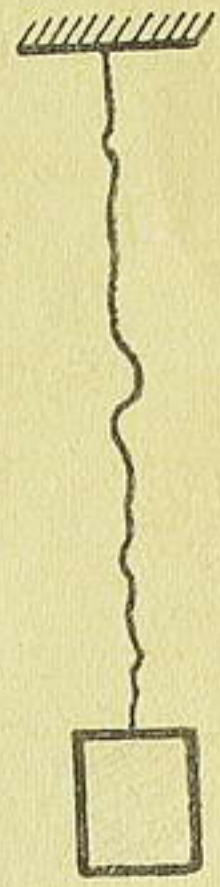
$$\bar{S}_k=\bar{P},\ \bar{S}_r=\bar{P},\ \bar{S}_r-S_k=0:$$

Ակնհայտ է, որ թևի լարումները կմնան նույնը, եթե $\bar{P}$ կշիռ ունեցող ծանրոց կախելու փոխարեն թևի ներքևի ծայրին կիրառենք թևը ձգող որևէ ուղղաձիգ P ուժ։

Այժմ վերջին հավասարությունը կարելի է ձևակերպել այսպես՝

Եթե անկշիռ թևի վերին ծայրն ամրացված է, ապա ներքին ծայրին կիրառված ուղղաձիգ $\bar{P}$ ուժը բոլոր կետերում կառաջացնի նույն լարումը, որը հավասար է P։ (V 6)

§ **43. Ճկուն եվ կոշտ թելեր ու ձողեր։** Իրոլոր ստացած արդյունքները ճիշտ են մնում և այն դեպքում, երբ ուղղաձիգ ուժը կիրառված է ոչ թե թևին, այլ լարին։ Սակայն լարը և թևը էապես տարբերվում են միմյանցից։ Ներքևի ծայրին կիրառված ուղղաձիգ ուժի ազդեցության տակ թևը ձգվում է և ստանում ուղղաձիգ ուղիղի ձև, մինչդեռ նույն դեպքում լարի վրա կմնան ծալվածքները (նկ. 119)։


Նկ. 119

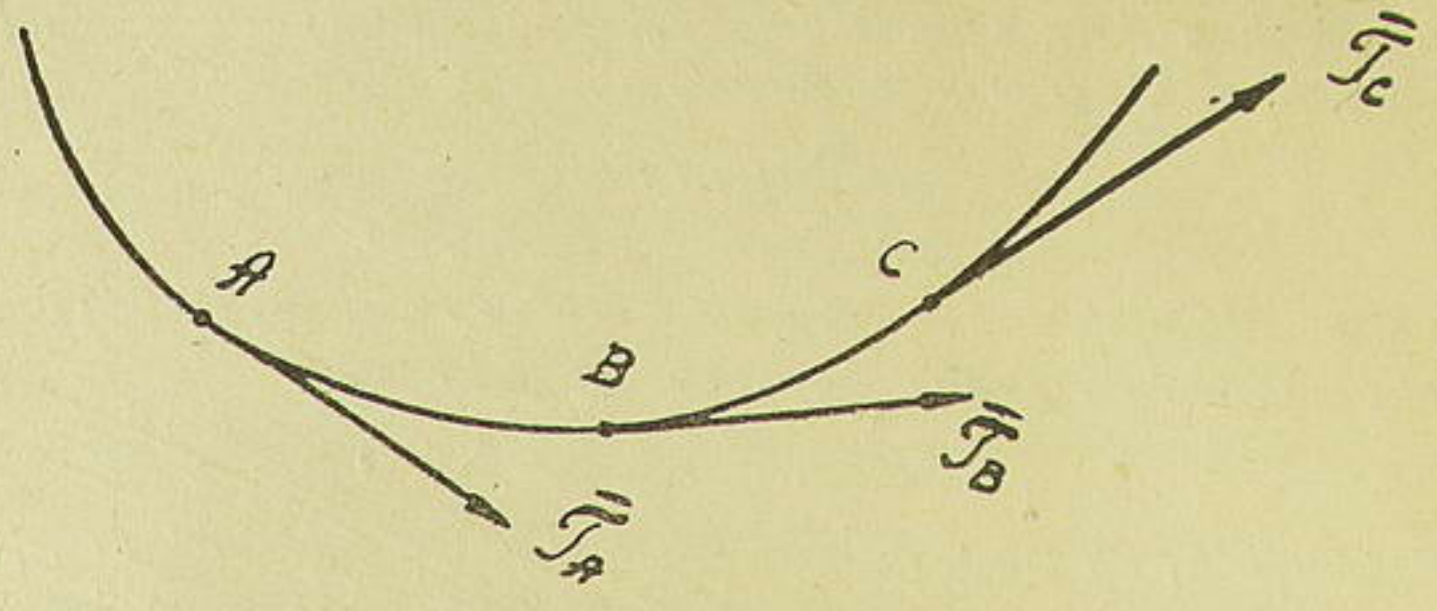
Առօրյայում լարն անվանում են կոշտ, իսկ թևը՝ ճկուն։ Տեսական մեխանիկայում օգտվում են հետևյալ սահմանումից՝

Թելը (լարը կամ ձողը) համարվում է ճկուն, երբ բոլոր դեպքերում լարումը թելի որևէ կետում ունի շոշափողի ուղղություն այդ կետում (նկ. 120)։

Ճկուն թելը, որի ծայրին կիրառված է ուղղաձիգ $\bar{P}$ ուժը, հավասարակշռության վիճակի մեջ պետք է ընդունի ուղղաձիգ ուղիղի ձև։ Եվ իսկապես, ըստ (V 5) թևի որևէ D_k կետում լարումը դուգահեռ է $(\bar{P}+\bar{Q}_1+\ldots\ldots\bar{Q}_k)$ ուժին, այսինքն լարուժն ուղղաձիգ է։ Իսկ ճկունության պատճառով լարումը պետք է ունենա թևի շոշափողի ուղղությունը D_k կետում։ Միակ գիծը, որի բոլոր կետերում շոշափողը ուղղաձիգ է—ուղղաձիգ ուղիղն է։

Դիտարկենք մի քանի դեպքեր, ըստ որում պայմանավորվենք մի անգամ ընդմիշտ անկշիռ անվանել այն մարմիններըը, որոնց կշիռը մենք արհամարհում ենք, իսկ ծանր՝ այն մարմինները, որոնց կշիռը չենք արհամարհում։

1°. Ցույց տանք, որ եթե ճկուն անկշիռ թելի մի ծայրն ամրացված է, իսկ մյուս ծայրին կիրառված է $\overline{F}$ ուժը (նկ. 121, 122), ապա թելը հա-



Նկ. 120

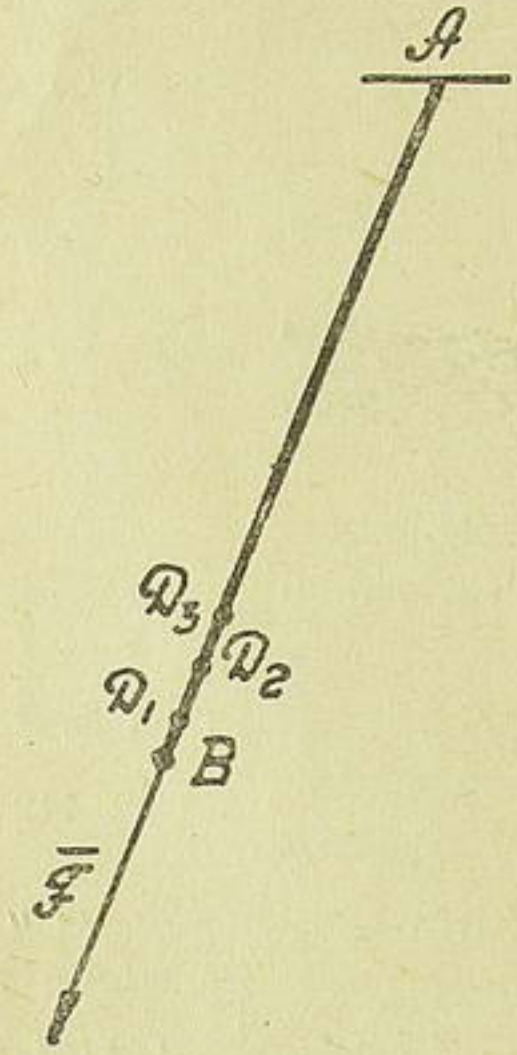
վասարակշիռ դրության մեջ ընդունում է $\overline{F}$-ին զուգահեռ ուղղի ձևը և նրա լարումը բոլոր կետերում նույնն է:

Դրա համար դարձյալ AB թելը բաժանենք շատ փոքր մասերի BD_1, D_1D_2 (նկ. 122): Այդ մասերից յուրաքանչյուրի հավասարակշռության հավասարումը կստանանք (V 3), (V 5) համապատասխան հավասարումներից, փոխարինելով նրանց մեջ $\overline{P}$-ն $\overline{F}$ ուժով և ընդունելով, որ $Q_1=Q_2=Q_3=\ldots 0$: Այստեղ մենք թելի BD_1, D_1D_2 .... մասերի կշիռն ընդունում ենք հավասար զերոյի, որովհետև թելն անկշիռ է: Այդպիսով կստանանք՝

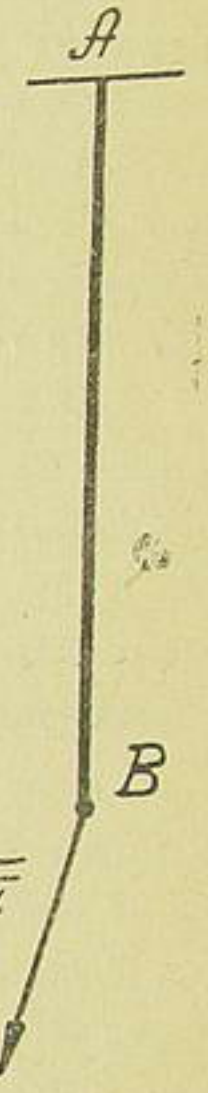
$$\overline{S}_1=\overline{F},\ \overline{S}_2=\overline{F},\ \overline{S}_k=\overline{F},$$

այսինքն, լարումը թելի բոլոր կետերում միևնույնն է և հավասար $\overline{F}$ ուժին:

Հետևապես, համաձայն ճկուն թելի սահմանման, թելի շոշափողները նրա բոլոր կետերում զուգահեռ են $\overline{F}$-ին: Ուստի թելը պետք է ընդունի $\overline{F}$ ուժի ազդման գծի հետ համընկնող ուղղի ձևը:



Նկ. 121

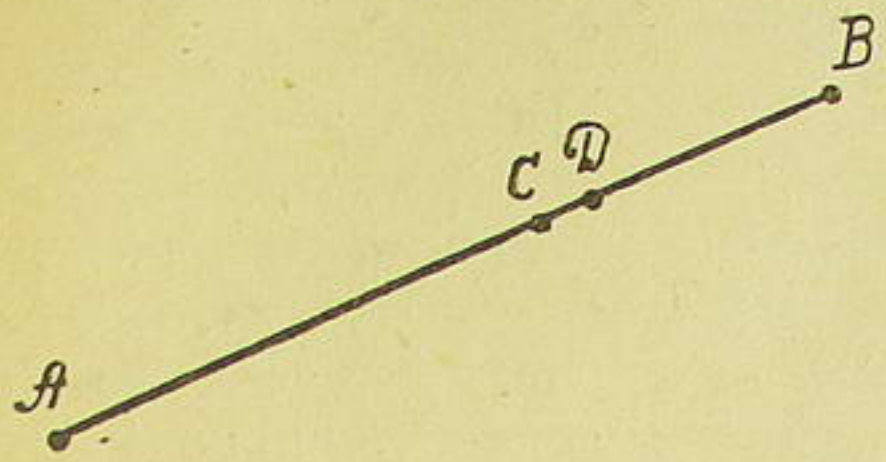


Նկ. 122

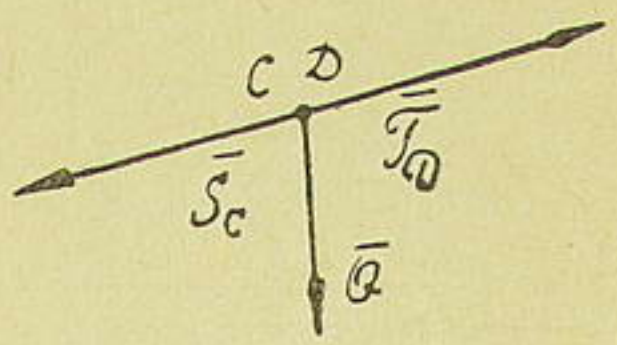
2°. Եթե ծանր ճկուն թելի A և B կետերն ընկած չեն մի ուղղաձիգի վրա (նկ. 123 ա), ապա թելի AB մասը հավասարակշռության դրության մեջ չի կարող ուղղագիծ լինել:

Այդ ապացուցելու համար ենթադրենք, որ AB մասն ուղղագիծ է և ցույց տանք, որ այդ դեպքում հավասարակշռությունն անհնարին է:

Անջատենք թելի շատ փոքր CD *մասն՝ ընդունելով այն որպես կետ: Նրան կիրառված են (նկ. 123 բ)* $\overline{S}_C$ *լարումը,* $\overline{T}_D$ *լարումը և նրա* $\overline{Q}$ *կշիռը: Որովհետև* AB *մասը ենթադրվում է ուղղագիծ, ապա բոլոր կետերում նրան շոշափող-*



Նկ. 123 ա

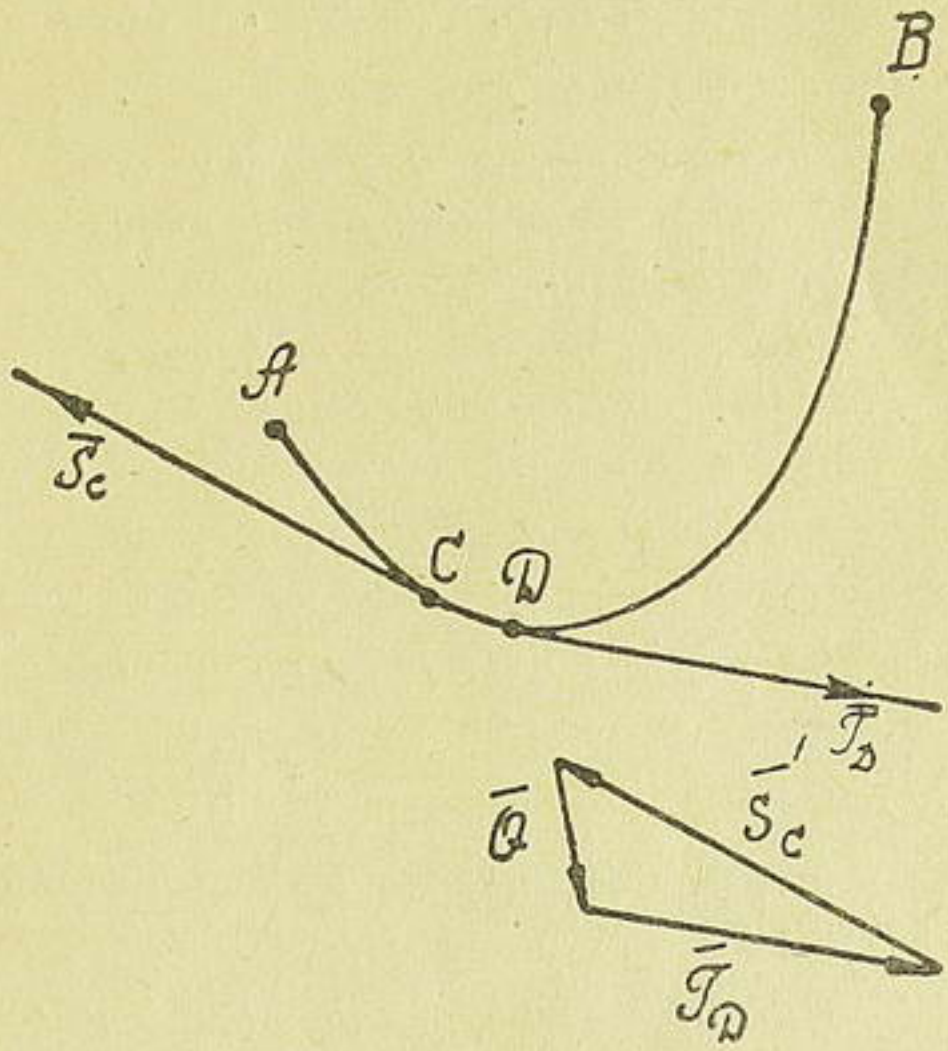


Նկ. 123 բ

ները կհամընկնեն AB*-ի հետ: Ուստի ճկունության հետևանքով* $\overline{S}_C$ *և* $\overline{T}_D$ *լարումի ազդման գիծը կհամընկնի* AB*-ի հետ: Մինչդեռ* $\overline{Q}$ *կշիռը ուղղաձիգ է: Այդպիսի երեք ուժերի ազդեցության տակ նյութական կետը չի կարող հավասարակշռության մեջ գտնվել: Այդ նույնը վերաբերում է և* AB *հատվածի յուրաքանչյուր շատ փոքր մասին: Հետևապես թելի* AB *հատվածը չի կարող հավասարակշռության մեջ լինել, եթե նա ունի ուղիղ գծի ձև:*

Այժմ ցույց տանք, որ թելի AB *հատվածի հավասարակշռությունը հնարավոր է, եթե* AB*-ն կոր գիծ է: Եվ իսկապես, այդ դեպքում (նկ. 123 գ)* C *և* D *կետերում շոշափողները զուգահեռ չեն, այլ կազմում են ինչ որ անկյուն:*

Թելի ճկունության հետևանքով $\overline{S}_C$ *և* $\overline{F}_D$ *լարումները պետք է կազմեն այդ նույն անկյունը:*



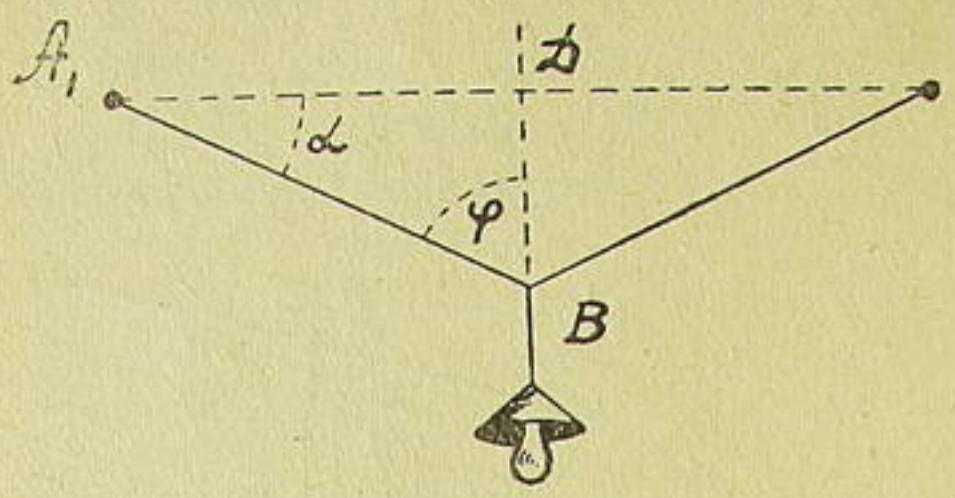
Նկ. 123 գ

Ակնհայտ է, որ միշտ էլ կարելի է AB *կորի ձևն ընտրել այնպես, որ* $\overline{S}_C$, $\overline{T}_D$ *և գծի* $\overline{CD}$ *մասի* $\overline{Q}$ *կշիռը տային միակ հատանկյուն: Այդ նույնը վերաբերում է* AB*-ի բոլոր փոքր մասերին, հետևապես* AB *կարող է ընդունել այնպիսի ձև, որի դեպքում նրա հավասարակշռությունը հնարավոր է:*

Խնդիրներ.

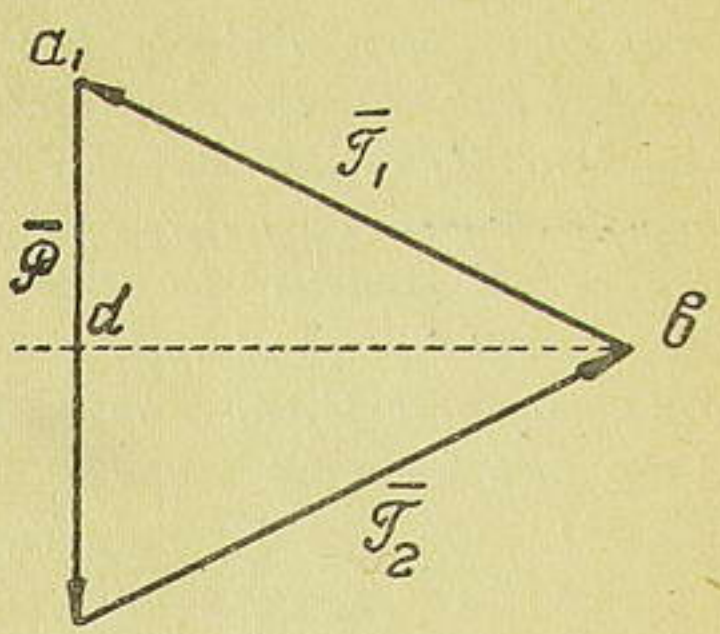
1. Մի հորիզոնականի վրա գտնվող A_1 *և* A_2 *կետերին ամրացված լարապարանի* B *միջակետից կախված է աղեղալապտերը (նկ. 124 ա).*

ընդունելով, որ լարապարանը ճկուն և անկշիռ է, որոշել նրա T_1 և T_2 լարումները BA_1 և BA_2 մասերում, եթե լապտերի կշիռը P=15 կգ, ամբողջ լարապարանի երկարությունը A_1BA_2=20 մետրի և նրա կախման DB ալքը=0,1 մետրի:



Նկ. 124 ա

Առանձնացնենք մոքով լարապարանի շատ փոքր մասը, որ իր մեջ պարունակում է B կետը: Այդ մասն ընդունենք, որպես նյութական կետ: Նրա վրա ազդում են երեք ուժեր՝ լապտերի $\overline{P}$ կշիռը և $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ լարումները: $\overline{T}_1$ այն ուժն է, որով լարապարանի A_1B մասն ազդում է B կետին, իսկ $\overline{T}_2$ այն ուժն է, որով լարապարանի A_2B մասն ազդում է B կետին: Լարապարանի անկշիռ լինելու հետևանքով A_1B և A_2B մասերն ուղղագիծ են: Լարապարանի ճկունության հետևանքով $T_1 \parallel A_1B$, $\overline{T}_2 \parallel A_2B$: B կետի հավասարակշռության դեպքում $\overline{P}$, $\overline{T}_1$ և $\overline{T}_2$ ուժերը պետք է կազմեն փակ եռանկյուն: Որովհետև կշիռը ուղղաձիգ է, և A_1B ու A_2B ուղղաձիգի հետ կազմում են հավասար անկյուններ (նկ. 124ա), ապա ուժերի եռանկյունին հավասարասրուն է:



Նկ. 124 բ.

Հեշտությամբ երկու լարումների չափերն էլ նույնն են՝ $T_1=T_2$: Այդ ընդհանուր չափը նշանակելով T և նկատի ունենալով a_1bd և A_1BD եռանկյունիների նմանությունը, կստանանք՝

$$T : A_1B = \frac{P}{2} : DB.$$

Դնելով A_1B, P և DB-ի տեղ նրանց արժեքները, կստանանք T=750 կգ:

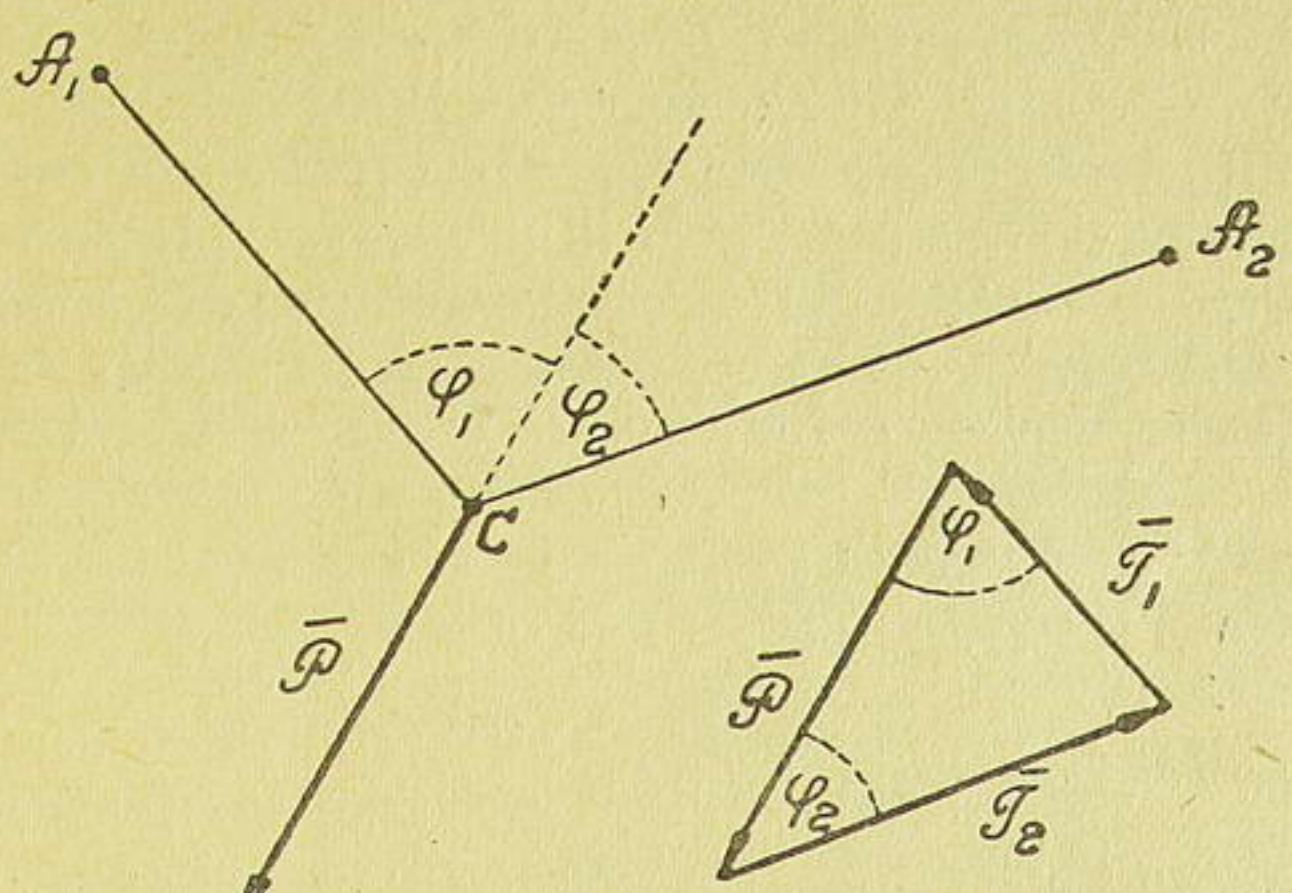
Ուժերի եռանկյունուց հետևում է, որ $T=\frac{P}{2\cos\varphi}=\frac{P}{2\sin\alpha}$, $\left(\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$:

Այստեղից եզրակացնում ենք, որ φ անկյան մեծացնելու դեպքում (կամ α անկյան փոքրացնելու դեպքում) լարապարանի T_1 և T_2 լարումների չափն ավելանում է:

2. Անկշիռ, ճկուն և անձգելի թելերը կապված են միմյանց C կետում և համապատասխանաբար ամրացված են A_1 և A_2 կետերին (նկ. 125ա): C կետում կիրառված է $\overline{P}$ ուժը: Որոշել T_1 և T_2 լարումները հավասարակշռության դրության մեջ: Թելի ճկուն և անկշիռ լինելու հետևանքով

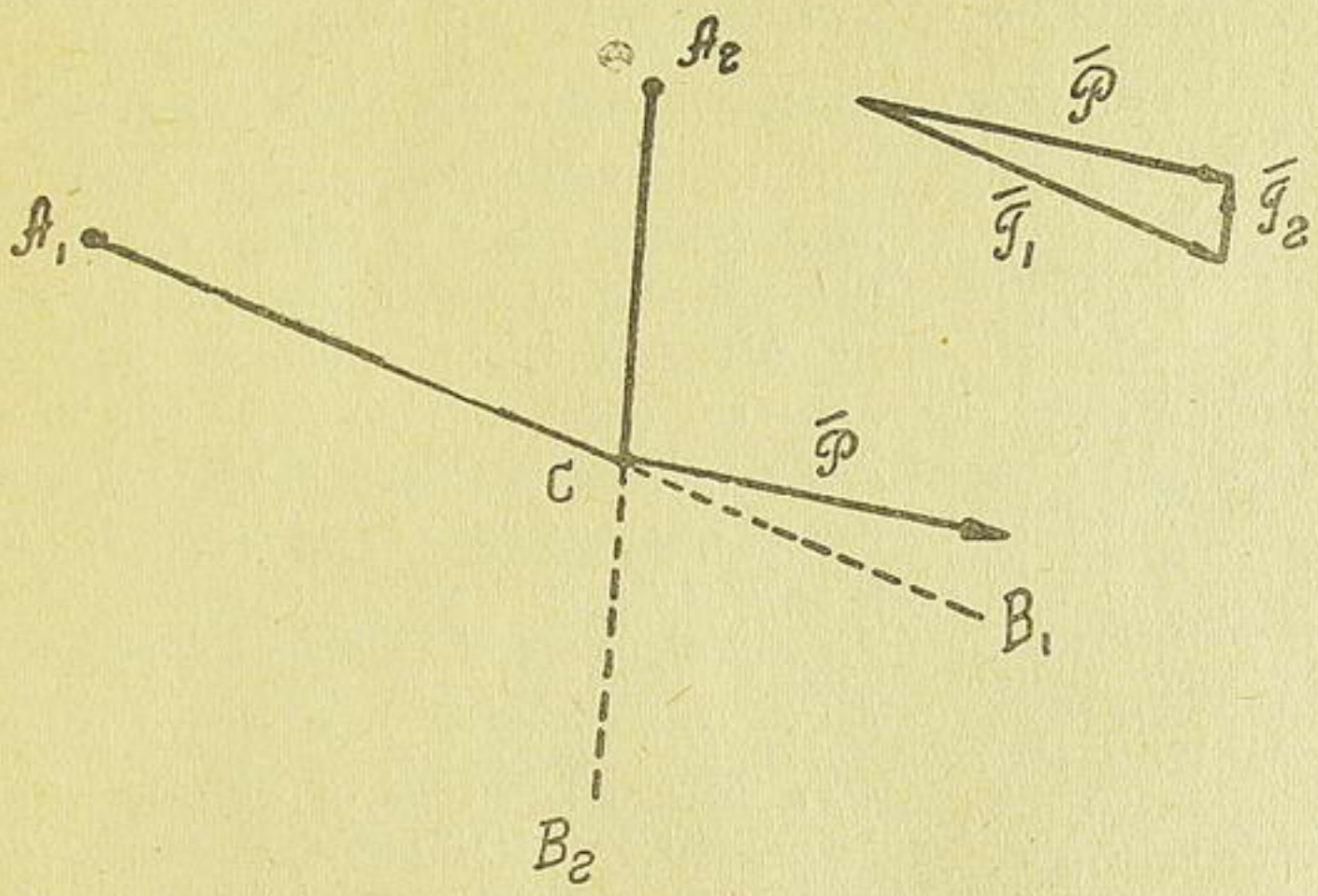
A_1C և A_2C ուղղափիծ են. $\overline{T}_1$ նույնն է A_1C-ի բոլոր կետերում, իսկ $\overline{T}_2$ նույնն է A_2C-ի բոլոր կետերում։

Սակայն թելերը չեն կարող դիմադրել սեղմող ուժերին և այդ պատճառով հավասարակշռությունը հնարավոր է $\overline{P}$ ուժի ոչ բոլոր ուղղությունների դեպքում։ Եվ իսկապես, թող P ուժն ուղղված լինի ինչպես ցույց է տված 125 բ նկարում։ Առանձնացնենք C կետը։ Այդ կետին կիրառված



Նկ. 125 ա

ներն դեպքում։ Եվ իսկապես, թող P ուժն ուղղված լինի ինչպես ցույց է տված 125 բ նկարում։ Առանձնացնենք C կետը։ Այդ կետին կիրառված



Նկ. 125 բ

են երեք ուժեր՝ $\overline{P}$ և $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ լարումները։ C-ի հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է, որ այդ ուժերը եռանկյունի կազմեն։ Քանի որ եռանկյունու մեջ ուժերը դասավորվում են շրջայական կարգով, ապա հավա-

սարակշռության դեպքում $\overline{T}_2$ պետք է ուղղված լինի A_2-ից դեպի C: Իսկ C-ն ազդում է CA_2-ի վրա $\overline{S}_2$ ուժով, որը համազուգահեռ է CA_2-ին: Բայց այդ դեպքում A_2C թելը չի կարող ձգված մնալ: Հետևապես հավասարակշռությունն անհնարին է:

Այդպիսով կարելի է ցույց տալ, որ հավասարակշռությունն անհնարին է, եթե $\overline{P}$ ուժը դասավորված լինի A_2CB_1, A_1CB_2 կամ A_1CA_2 անկյուններից մեկում, (նկ. 125 բ): Հավասարակշռությունը դեռ հնարավոր է, երբ $P\uparrow\uparrow\overline{CB}_1$ կամ $P\uparrow\uparrow\overline{CB}_2$: Թող օրինակ, $\overline{P}\uparrow\uparrow\overline{CB}_1$, այն ժամանակ լարումը $T_1\uparrow\downarrow P$ և $T_1+\overline{P}=0$, իսկ $\overline{T}_2=0$: Այդ դեպքում չխախտելով հավասարակշռությունը կարելի է A_2C թելը վերացնել: Այդ արդյունքը հետևում է այն թեորեմից, որ՝ երբ կետին կիրառված երեք ուժերից երկուսը մյուսից հակազուգահեռ են, իսկ երրորդը չի կարող նրանց զուգահեռ լինել, ապա հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է, որ այդ երրորդ ուժը հավասար լինի 0: Դիտենք այն դեպքը, երբ P դասավորված է B_2CB_1 անկյունում, ըստ որում (նկ. 125 ա) $(\overline{A_2C}, \overline{P})=\varphi_2$, $(P, \overline{A_1C})=\varphi_1$,

$$\varphi_1+\varphi_2=\varphi=<A_1CA_2:$$

Ուժերի հատկությունից գտնում ենք՝

$$\frac{T_1}{\sin\varphi_2}=\frac{T_2}{\sin\varphi_1}=\frac{P}{\sin[180-(\varphi_1+\varphi_2)]}=\frac{P}{\sin\varphi}:$$

Եթե P և երկու անկյունները (երեքից) տրված են, ապա դրանով լիովին որոշվում են T_1 և T_2:

Այդ հավասարություններից հետևում է, որ այն թելի լարումն է մեծ, որը $\overline{P}$ ուժի հետ կազմում է ավելի փոքր անկյուն:

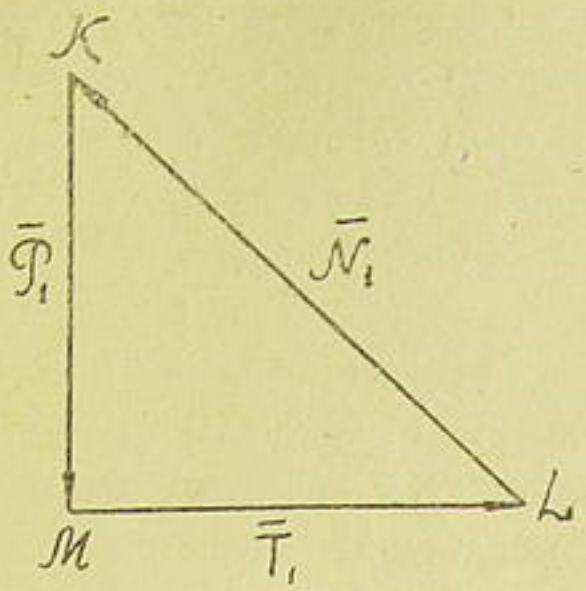
Ենթադրենք $\varphi_2=\varphi$, $\varphi_1=0$, այսինքն ենթադրենք, որ $\overline{P}$ ուժի ազդման գիծը համընկնում է A_1C ուղիղի հետ, այն ժամանակ $T_1=P$, իսկ $T_2=\dfrac{P\sin\varphi_1}{\sin\varphi}=0$: *Այդ արդյունքը մենք ստացել ենք քիչ առաջ:*

Նկ. 126 ա

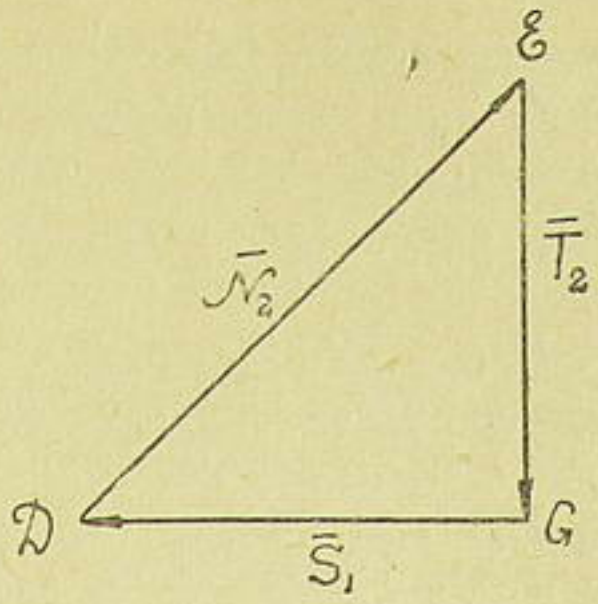
2. Ցեմենտի խորանարդը, նրա չորս նիստերի կողմից սեղմելու համար օգտվում են շարնիրային մեխանիզմով (նկ. 126 ա), որում AB, BC և CD ձողերը համընկնում են ABCD քառակուսու կողմերի հետ, իսկ 1, 2, 3, 4 ձողերը միմյանց հավասար են, և ունեն նույն քառակուսու անկյունագծերի ուղղությունները: Միևնույն P չափ ունեցող երկու հակազուգահեռ սեղմող ուժերը կիրառվում են A և D կետերում: Որոշել խորանարդը սեղմող $\overline{N}_1$, N_2, $\overline{N}_3$, N_4 ուժերը և AB, BC, CD ձողերի T_1, $\overline{T}_2$, T_3 լարումները, համարելով, որ բոլոր ձողերը ճկուն են և անկշիռ: Այդ պայմաններում յուրաքանչյուր ձողի լարումը միևնույնն է նրա բոլոր կետերում: Այստեղից պարզ է, որ խորանարդը սեղմող ուժերի չափերը հավասար են համապատասխան 1, 2, 3, 4 ձողերի լարումների չափերին:

Այդ մեխանիզմի ձողերի լարումները որոշելու համար ելնենք այն բանից, որ եթե ամբողջ մեխանիզմը հավասարակշռության մեջ է, ապա

A, B, C, D շարնիրները և բոլոր ձողերը նույնպես գտնվում են հավասարակշռության մեջ։



Նկ. 126 բ.



Նկ. 126 գ.

Դիտարկենք A կետը։ Նրան (նկ. 126 բ.) կիրառված են երեք ուժեր— P_1, $\bar{N}_1$ և $\bar{T}_1$ ($\bar{N}_1$—անկյունադծային ձողի լարումն է, $\bar{T}_1$ $\overline{AB}$-ի լարումն է)։ Ձողերի ճկուն և անկշիռ լինելու պատճառով յուրաքանչյուր լարումի ազդման գիծը համընկնում է համապատասխան ձողի հետ։

KLM *ուժային եռանկյան մեջ (նկ. 126 բ.)* $\overline{LK}=\bar{N}_1$, $\overline{ML}=\bar{T}_1$։ *Որովհետև եռանկյունին հավասարասրուն է, ապա* $T_1=P$, $N_1=P\sqrt{2}$։

Այժմ անցնենք B շարնիրին։ Նրան կիրառված են AB, 2 և BD ձողերի $\bar{S}_1$, $\bar{N}_2$ $\bar{T}_2$ *լարումները, ըստ որում ինչպես հայտնի է,* $\bar{S}_1+\bar{T}_1=0$ *(տես V 3), դրա համար էլ* $S_1=T_1$։ *B-ի հավասարակշռության հետևանքով* $\bar{S}_1+\bar{N}_2+\bar{T}_2=0$. *ուժերի* DEG *եռանկյունին (նկ. 126 գ.) կրկին ուղղանկյուն է, հավասարասրուն և հավասար* KLM*-ին, որովհետև* $S_1=T_1$։

Հետևապես $N_2=N_1$, $T_2=T_1$։

Դիտարկելով այդ նույն ձևով C և D կետերը, մենք կստանանք՝

$$N_4=N_3=N_2=N$$
$$T_3=T_2=T_1=P$$

ԳԼՈՒԽ VI

ԿԱՐԾՐ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱԿԱԶԴՈՒՄԸ. ՇՓՈՒՄ. ՃԱԽԱՐԱԿՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

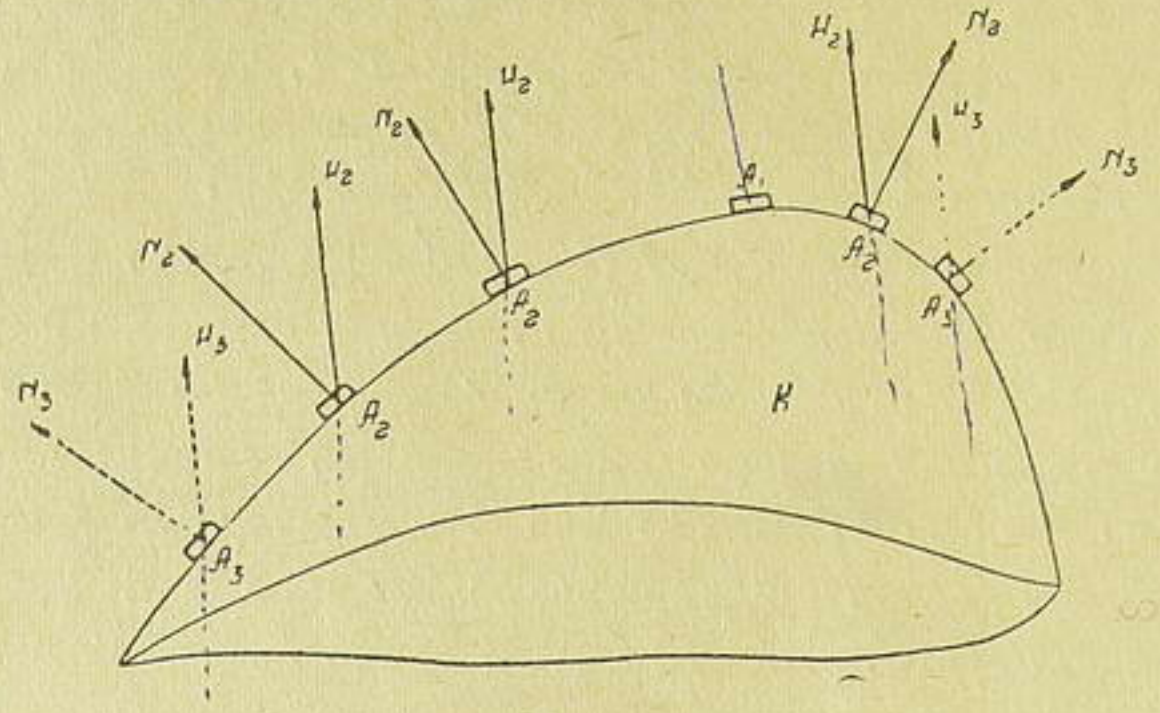
§ 44. Կարծր մարմնի սահմանումը և հատկությունները։ *Մեխանիկայում կարծր են կոչվում այն մարմինները, որոնց մասնիկների միջև եղած հեռավորությունները չեն կարող փոխվել։ Ակնհայտ է, որ կարծր մարմնի ոչ չափերը և ոչ էլ ձևը նույնպես չեն կարող ենթարկվել փոփոխության։*

Բնության մեջ այդպիսի մարմիններ չկան։ Բայց եթե մենք համեմատենք ուժերն եթերը և երկաթե ձողը, ապա կտեսնենք, որ եթերը համեմատաբար փոքր ուժով ձգելով, կարող ենք նշանավոր չափով մեծացնել նրա երկարությունը, օրինակ, 2 անգամ. մինչդեռ երկաթե ձողի երկա-

րությունը թեկուզ մի քիչ երկարացնելու համար, ձգող ուժը պետք է շատ մեծ լինի։ Հետևապես ոչ մեծ ուժ կիրառելու դեպքում երկաթե ձողը գործնականում անձգելի է։ Սակայն երկաթե բարակ ձողը կարելի է հեշտությամբ ծռել նրա հաստությանը զուգահեռ ուժով։ Այդպիսի ձողը նույնպես հեշտ է ոլորել։ Իսկ երկաթե հաստ կտորը, որը, օրինակ, խորանարդի ձև ունի, փոքր ուժերը կիրառելիս չի կարելի նկատելի չափով ոչ երկարացնել, ոչ ծռել և ոչ էլ ոլորել։ Այնպես որ երկաթե հաստ կտորը գործնականում կարելի է կարծր մարմին համարել։

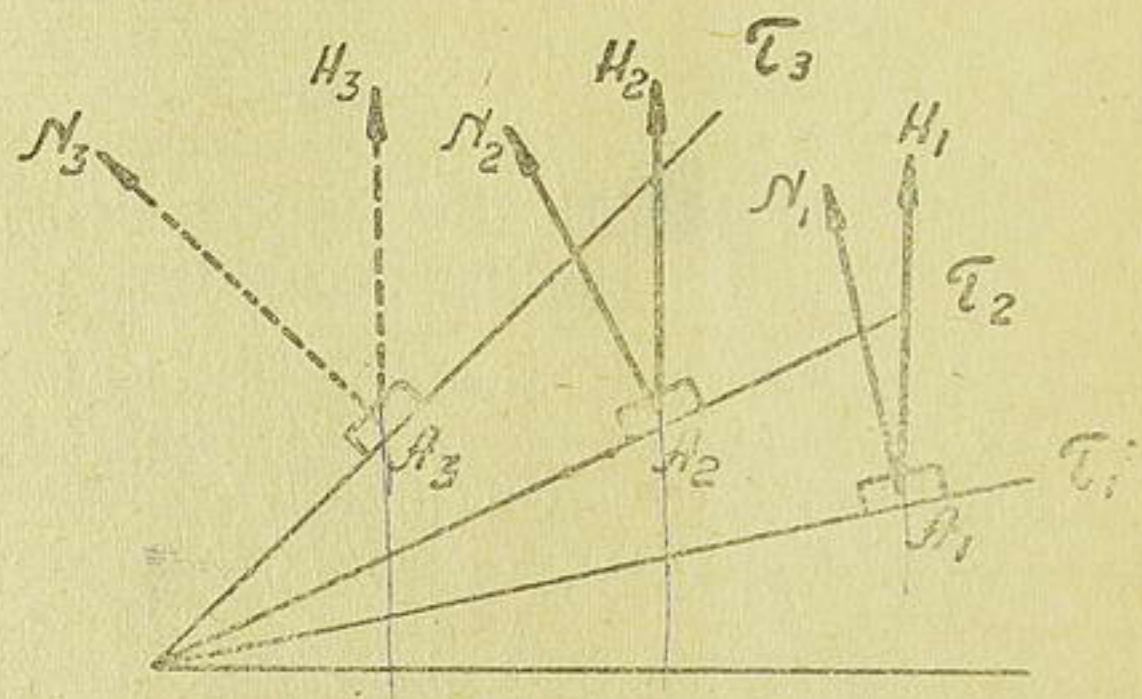
Յուրաքանչյուր մարմնի քայքայմանը նախընթանում է նրա դեֆորմացիան։ Այլանալու անընդունակ[1]) մարմիններն են կարող նույնպես և քայքայվել։ Այդպիսով մեխանիկայում դիտարկվող կարծր մարմինները պետք է համարել չքայքայվող մարմիններ։

§ 45. **Կարծր մարմնի հակազդումը։** Ամենօրյա դիտողությունները ցույց են տալիս, որ փոքր չափեր ունեցող ծանր և կարծր A մարմինը,



Նկ. 127

օրինակ, աղյուսը գտնվելով K կարծր մակերևույթի վրա, հավասարակշռության մեջ կլինի A_1 դիրքում (նկ. 127) և բոլոր այն A_2 դիրքերում, որոնցում մակերևույթի A_2N_2 նորմալով և A_2H_2 ուղղաձիգով կազմված անկյունը չի գերազանցում որոշ արժեք։ Օրինակ, աղյուսը հավասարակշռության մեջ կլինի ոչ այնքան խիստ թեք τ_1, τ_2 տանելիքների վրա (նկ. 128) և կսկսի սահել ներքև, դրված լինելով τ_3 տանելիքի վրա։



Նկ. 128

Եթե չլիներ K մարմինը, A-ն նրան

[1]) Դեֆորմացիայի չենթարկվող։

կիրառված մեկ ուժի՝ իր $\overline{P}$ կշռի ազդեցության տակ վայր կընկներ։ Եթե K-ի վրա հենվելով A չի ընկնում, այլ գտնվում է հավասարակշռության մեջ, դա նշանակում է, որ A-ին կիրառված է, բացի $\overline{P}$ կշռից, նաև ինչ որ $\overline{R}$ ուժ, որը բավարարում է $\overline{P}+\overline{R}=0$ պայմանին։ Այդ ուժը, որը երևան է գալիս միայն A-ն K-ի հետ հպվելու դեպքում և հետևապես բղխում է K-ից, կոչվում է K կարծր մարմնի հակազդում և նշանակվելու է միշտ $\overline{R}$-ով։

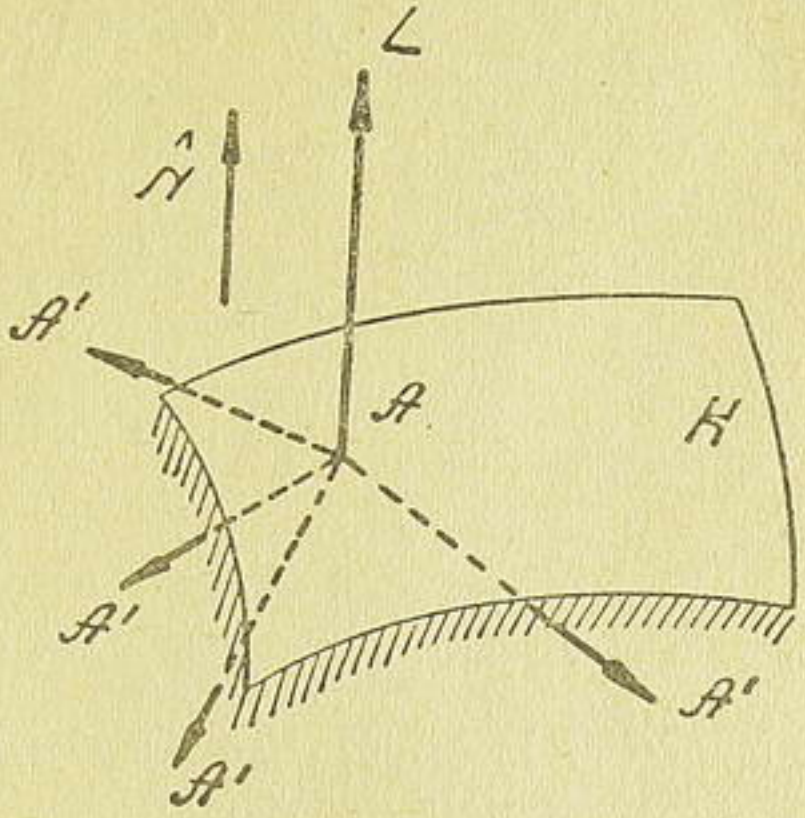
K-ի հակազդումը գոյություն ունի և այն ժամանակ, երբ A-ն որևէ A_3 դիրքում չի կարող մնալ հանգստի մեջ, այլ կսկսի շարժվել, մնալով K-ի վրա։ Եվ իսկապես, եթե չլիներ $\overline{R}$-ուժը, A-ն $\overline{P}$-ի ազդեցության տակ պետք է սկսեր ընկնել ուղղաձիգ. իսկ եթե շարժումը սկսվում է A_3 դիրքից շոշափողի ուղղությամբ դրա պատճառն այն է, որ $\overline{P}$ և $\overline{R}$ ուժերի համազորն այդ շոշափողի ուղղությունն ունի (և ոչ թե հավասար է զերոյի, ինչպես հավասարակշռության դեպքում)։

Հակազդման հատկությունները և նրա առաջացումը ավելի լավ ըմբռնելու համար ուշադրություն դարձնենք հետևյալին՝

1°. A մարմինը (կամ նյութական կետը), որը որևէ ակնթարթում գտնվում է հանգստի մեջ, $\overline{F}$ ուժի ազդեցության տակ կշարժվի $\overline{F}$-ին համազուգահեռ ուղղությամբ, այնպես որ վոքր $\overline{AA'}$ տեղափոխությունը համազուգահեռ է $\overline{F}$-ին, $\overline{AA'}\uparrow\uparrow\overline{F}$։

[Եթե A-ին կիրառված են մի քանի ուժեր՝ $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ .... $\overline{F}_n$, ապա մենք դիտարկում ենք նրանց $\overline{F}$ համազորը]։

2°. K կարծր մարմնի մակերևույթի վրա գտնվող վոքր չափեր ունեցող A մարմնի կամ նյութական կետի համար հնարավոր են ոչ բոլոր տեղափոխությունները։ K մակերևույթի նորմալը, որը տարված է K-ից դեպի A, նշանակենք AL-ով և անվանենք նրան արտաքին նորմալ։ Այժմ պարզ է, որ անհնար են այն բոլոր $\overline{AA'}$ վոքր տեղափոխությունները (նկ. 129), որոնք K-ի արտաքին $\overline{AL}$ նորմալի հետ կազմում են բութ անկյուններ։ Եվ իսկապես, այդ տեղափոխության հետևանքով A պետք է ընդունի A′-ի դիրքը։ Իսկ դրա համար կամ K պետք է ենթարկվի այնպիսի դեֆորմացիայի, որ A-ն շարժվելով մնա K-ի մակերևույթի վրա, կամ A-ն պետք է թափանցի K-ի ներսը և այդպիսով քայքայի K-ն։



Նկ. 129

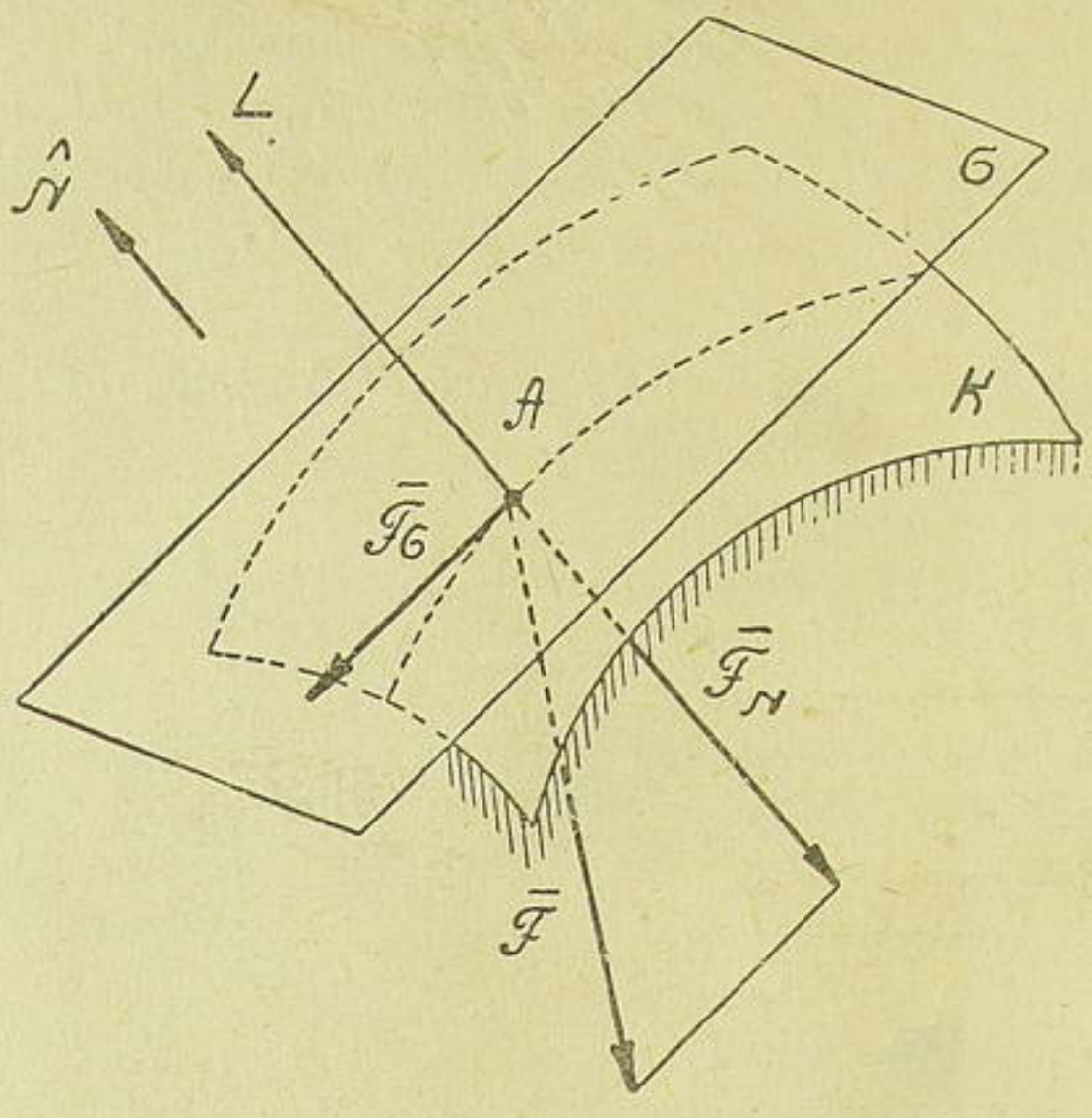
Բայց կարծր մարմնի անհամանուժից հետևում է, որ ոչ նրա դեֆորմացիան, ոչ էլ նրա քայքայումը չեն կարող տեղի ունենալ։

Այսպես ուրեմն $\overline{AA'}$ *տեղափոխումն անհնարին է, եթե* $(\overline{AL}, \overline{AA'})$ *անկյունը բութ է։ Ըստ* 1^0 *որևէ ակնթարթում հանգստի մեջ գտնվող A-ի տեղափոխումը գուգահեռ է* $\overline{F}$ *ուժին։ Այդ պատճառով էլ նախընթաց արդյունքը կարող ենք ձևակերպել այսպես՝* $\overline{F}$ *ուժին համազուգահեռ* $\overline{AA'}$ *տեղափոխումները անհնարին են, եթե* $(\overline{AL}, \overline{F})$ *անկյունը բութ է։ Անհնարին տեղափոխությունները չեն իրագործվում շնորհիվ K մարմնի հակազդման առաջանալուն։ Այդպիսով՝*

(VI 1) Երբ $(\overline{AL}, \overline{F})$ անկյունը բութ է, միշտ առաջ է գալիս կարծր մարմնի $\overline{R}$ հակազդումը։ Երբ այդ անկյունը ուղիղ կամ սուր է, հակազդումը չի առաջանում. $\overline{R}=0$։

AL արտաքին նորմալին համազուգահեռ միավոր վեկտորը նշանակենք $\hat{N}$, *իսկ* $\overline{F}$*-ի պրոեկցիան արտաքին նորմալի ուղղության վրա՝* F_N։

$\overline{F}$ *վեկտորը նրա բաղադրիչների՝* $\overline{F}_N \parallel \hat{N}$ *և* $\overline{F}_\sigma \perp \hat{N}$։ *Ակնհայտ է, որ երբ* $(\overline{AL}, \overline{F})$ *բութ է,* $F_N<0$, $\overline{F}_N \uparrow\downarrow \hat{N}$ *(նկ. 130 ա, բ)։*



Նկ. 130ա.

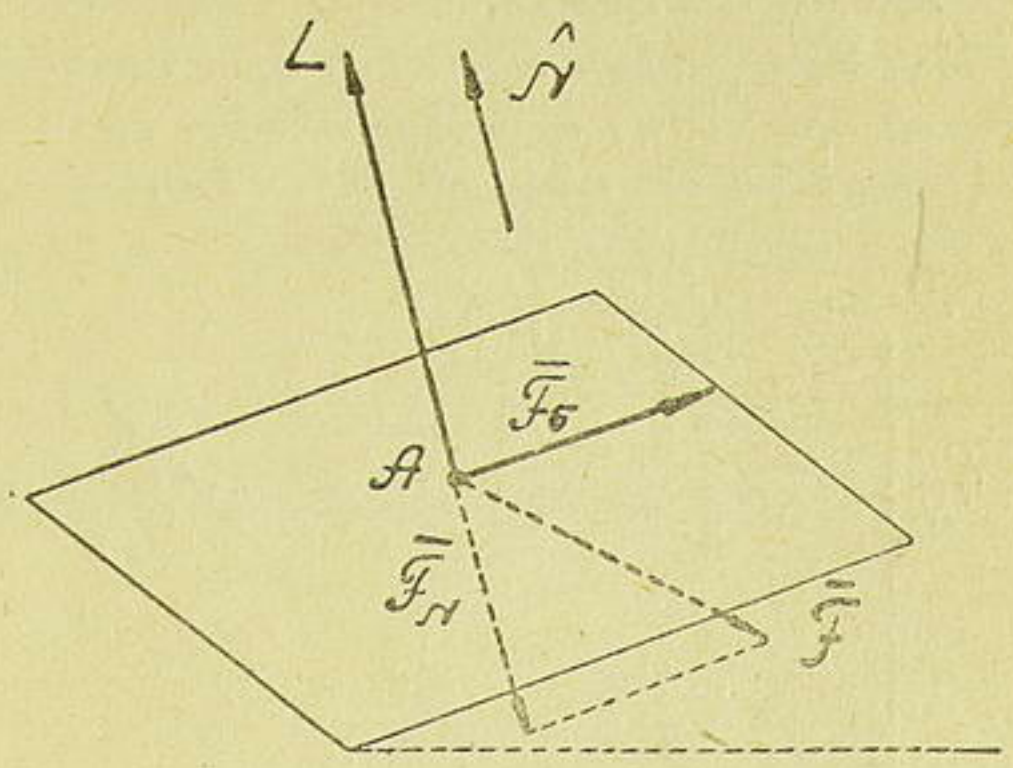
Այժմ (VI 1) *կարելի է արտահայտել և այսպես՝*

(VI 2)
$$\overline{R}\neq 0, \text{ եթե } F_N<0 \ (\overline{F}_N \uparrow\downarrow \hat{N})$$
$$R=0, \text{ եթե } F_N\geqslant 0 \ (\overline{F}_N \uparrow\uparrow \hat{N})$$

§ 46. Հակազդման բազադրիչները. Ճոռման հակազդման հատկությունները։ *1°. Ցուրաքանչյուր* $\overline{F}$ *ուժ կարելի է վերլուծել* $\overline{F}_N$ *և* $\overline{F}_\sigma$*-ի (նկ. 130 բ.) այնպես, որ* $\overline{F}=\overline{F}_N+\overline{F}_\sigma$։ *Ենթադրենք, որ A-ին կիրառած* $\overline{F}$ *ուժն այնպիսին է, որ* $F_N \uparrow\downarrow \hat{N}$։ *Այդ դեպքում ըստ* (VI 2) *նա կառաջացնի*

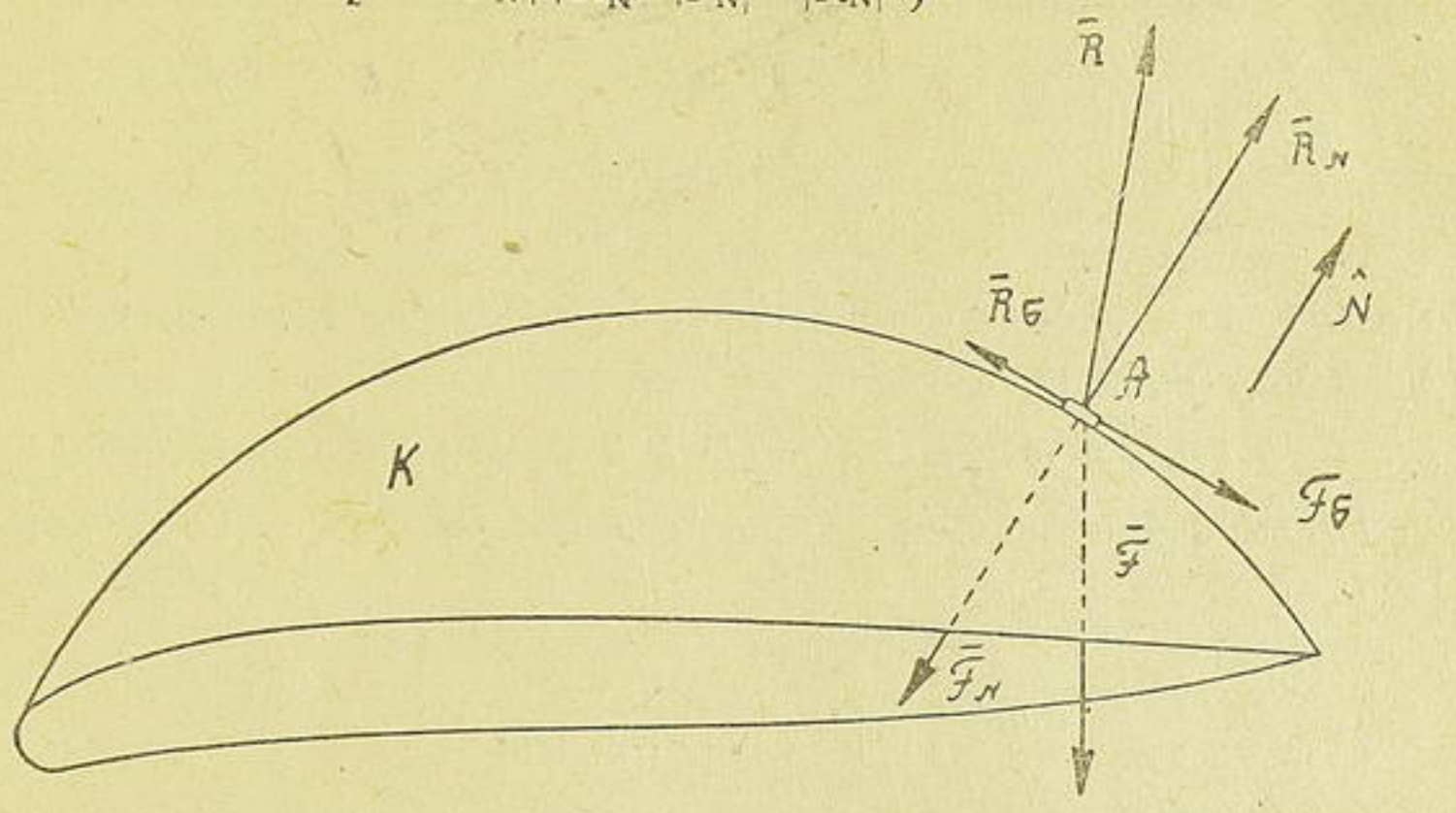
K կարծր մարմնի $\bar{R}$ հակազդումը (նկ. 131)։ $\bar{R}$ նույնպես վերլուծենք երկու բաղադրիչների՝ $\bar{R}_N \parallel \hat{N}$ և $\bar{R}_\sigma \perp \hat{N}$, այնպես որ $\bar{R}=\bar{R}_N+\bar{R}_\sigma$։ Ակնհայտ է, որ $\bar{F}_N$ և $\bar{R}_N$ զուգահեռ են միմյանց, իսկ $\bar{F}_\sigma$ և $\bar{R}_\sigma$ դասավորված են այն հարթության վրա, որը A կետում շոշափում է K մարմնի մակերևույթը և կոչվում է շոշափող հարթություն։

$\bar{F}_N$ բաղադրիչն ազդեցության տակ պետք է սկսվի շարժումը դեպի K մարմնի ներսը ըստ նորմալի, այսինքն (—$\hat{N}$) ուղղությամբ, բայց դա անհնարին է։ Հետևապես K մարմնի $\bar{R}$ հակազդումը պետք է այնպիսին լինի, որ $\bar{F}$ և $\bar{R}$ ուժերի համազորը չունենար $\hat{N}$-ին զուգահեռ բաղադրիչ, այսինքն՝



Նկ. 130բ

$$\left.\begin{array}{l} \bar{F}_N+\bar{R}_N=0 \\ \text{կամ } \bar{F}_N\uparrow\downarrow\bar{R}_N,\ |F_N|=|R_N| \end{array}\right\} \quad (\text{VI } 3)$$



Նկ. 131

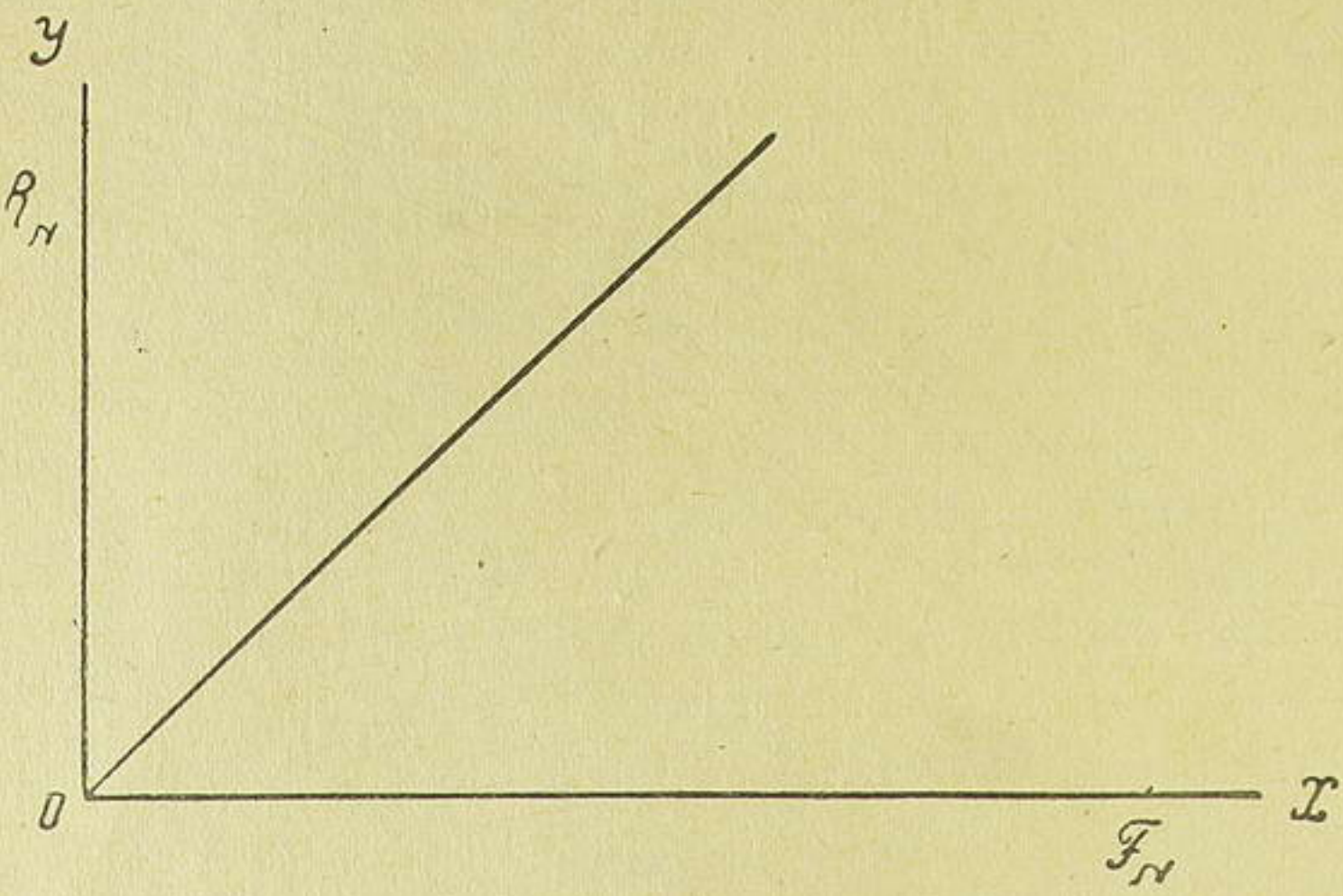
(VI 3)՝ արդարացի է ոչ միայն այն դեպքերի համար, երբ A կետը $\bar{F}$ և $\bar{R}$ ազդեցության տակ գտնվում է հավասարակշռության մեջ, այլ և այն դեպքերում, երբ A-ն որևէ ակնթարթում հանգստի մեջ լինելով, սկսում է շարժվել K մակերևույթի վրա[1])։

---

1) Պետք է նկատել, որ (VI 3) լինելով ճիշտ հավասարակշռության դեպքում և շարժումը նոր սկսվելու մոմենտի դեպքում, դառնում է սխալ, երբ շարժումը կատարվում է վերջավոր արագությամբ։ Այդ մասին՝ դինամիկայի դասընթացում։

$|F_N|=|R_N|$ *պայմանը նշանակում է թե, եթե* $(\bar{F}, \hat{N})$ *անկյունը բութ է և հետևապես հակազդումը զույգ ունի, ապա* $\overline{F}$ *ուժի նորմալ բաղադրիչի* F_N *չափը զերոյից մինչև անսահմանություն մեծացնելու դեպքում հակազդման նորմալ բաղադրիչի* $|R_N|$ *չափը նույնպես աճում է զերոյից մինչև անսահմանություն, միշտ հավասար* $|F_N|$*-ին:*

Եթե աբսցիսների առանցքի վրա նշանակենք $|F_N|$*, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝* $|R_N|$*, ապա կստանանք մի ուղիղ գիծ, որն* OX *առանցքի հետ կազմում է* 45^0 *անկյուն (նկ. 132):*



Նկ. 132

Համաուռուրթյան համար հակազդման նորմալ $\overline{R}_N$ *բաղադրիչը հաճախ կոչվում է նորմալ հակազդում:*

2°. Եթե $(\bar{F}, \hat{N})$ *անկյունը բութ է և A կետը K մարմնի մակերևույթի վրա գտնվում է համասարակշռության մեջ, ապա* $\bar{R}$ *հակազդումը բավարարում է*

$$\left.\begin{array}{l}\bar{F}+\bar{R}=0\\ \text{կամ}\ \ \bar{F}_N+\bar{F}_\sigma+\bar{R}_N+\bar{R}_\sigma=0\end{array}\right\} \quad (Vl\ 4)$$

Բայց, ինչպես մենք հենց նոր տեսանք, $\bar{F}_N+\bar{R}_N=0$*: Հետևապես K կարծր մարմնի մակերևույթի վրա գտնվող A կետի համասարակշռության պայմանն է*

$$\bar{F}_\sigma+\bar{R}_\sigma=0, \ldots\ldots\ldots \quad (Vl\ 5),$$

որտեղ σ-ն K մակերևույթի՝ A-ից տարած շոշափող հարթությունն է:

$\bar{F}_\sigma$ *և* $\bar{R}_\sigma$ *կոչվում են* $\bar{F}$ *ուժի և* $\bar{R}$ *հակազդման շոշափող բաղադրիչները: Երբեմն* $\bar{F}_\sigma$ *անվանում են շարժիչ ուժ, իսկ* $\bar{R}_\sigma$*՝ շոշափող հակազդում*

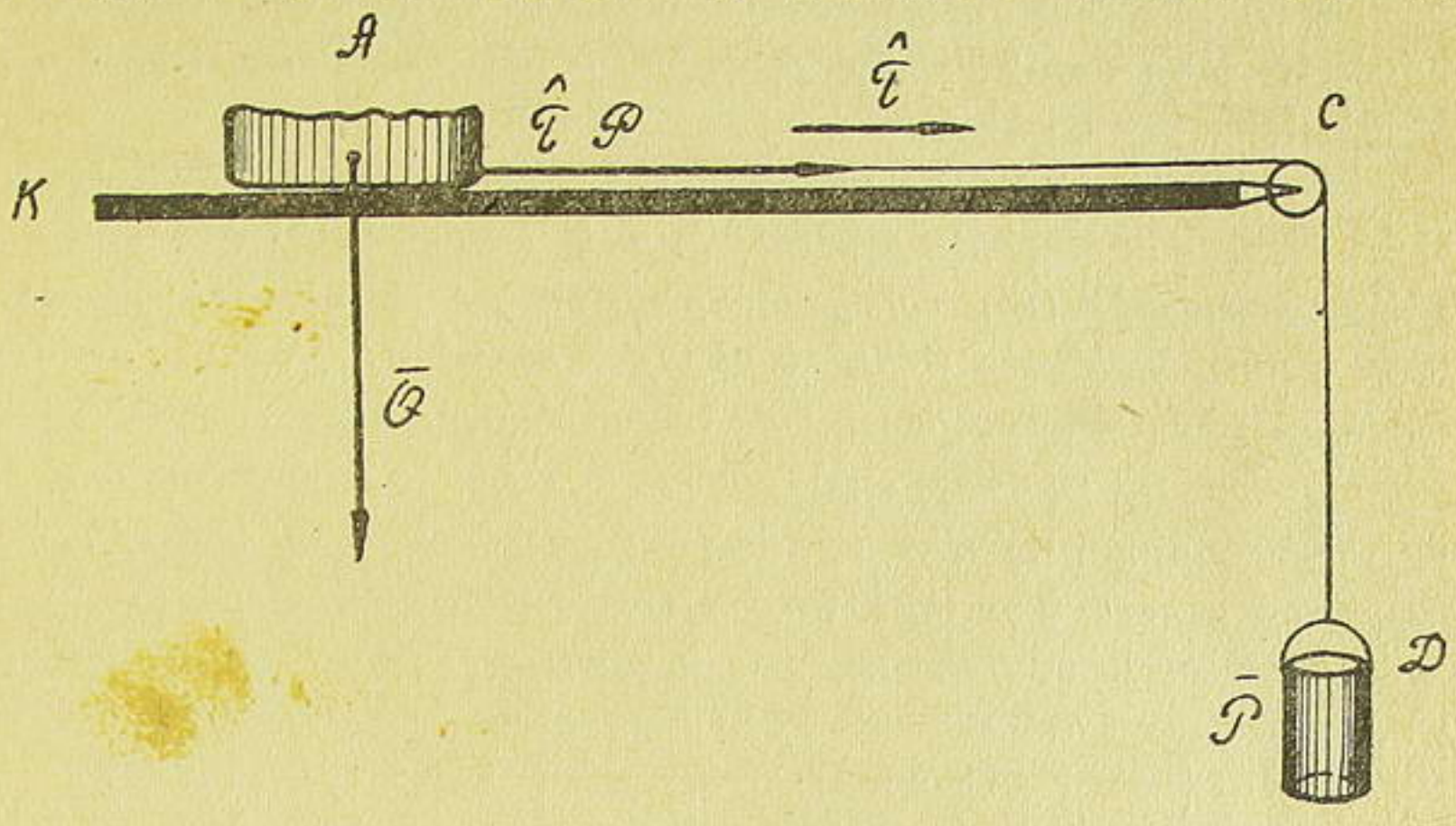
Իսկ էլ ավելի հաճախ $\bar{R}_\sigma$ կոչում են շփման ուժ։ Հետևապես (VI 5) *կարելի է արտահայտել այսպես՝*

$$\bar{F}_\sigma = \hat{\tau} P.$$

(VI 6) K մակերևույթի վրա գտնվող A կետի հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ շարժիչ և շփման ուժերի գումարը հավասար լինի զերոյի։

3°. Դժվար չէ այնպես անել, որ $\bar{F}$ ուժի նորմալ և շոշափող բաղադրիչները փոխվեն մեկը մյուսից անկախ։

Դիցուք K *մարմինը հորիզոնական տախտակ է (նկ. 133), իսկ* A*-ն՝ մի գատարկ տուփ, որը կարելի է լցնել թեփով, ավազով, արճիճային*



Նկ. 133

մանրացնդակներով, անդիկով .... Թող A*-ին ամրացված լինի թեւի մի ծայրը, որն անց է կացված* C *փոքրիկ ճախարակի վրայից։ Իսկ թեւի մյուս ծայրից կախենք* D *բաժակը, որի մեջ մենք ըստ մեր հայեցողության կլցնենք որոշ քանակի մանրացնդիկներ։ Մենք շուտով ցույց կտանք (§ 48), որ թեւի* AC *մասի լարման չափը հավասար է բաժակում լցրած մանրացնդակների $\bar{P}$ կշռի չափին։* AC*-ին զուգահեռ միասնոր վեկտորը նշանակելով $\hat{\tau}$, տեսնում ենք, որ* A*-ին կիրառված են երկու ուժեր՝ $\hat{\tau}P$ և տուփի բովանդակածի $\bar{Q}$ կշիռը։ Ընդ որում $\bar{Q}$ ուղղահայաց է σ հարթությանը, իսկ $\hat{\tau}P \parallel \sigma$։ Այդպիսով կարող ենք գրել՝*

$$\bar{F} = \bar{Q} + \hat{\tau}P, \quad F_N = Q, \quad \bar{F}_\sigma = \hat{\tau}P.$$

Պարզ է, որ փոխելով տուփի բովանդակածի քանակությունը, մենք փոխում ենք միայն $\bar{Q} = \bar{F}_N$, իսկ D *բաժակում փոխելով մանրացնդիկների քանակը, մենք փոխում ենք միայն* P*; և $\hat{\tau}P = \bar{F}_\sigma$։*

Թող A*-ն որևէ ակնթարթում գտնվի հանգստի մեջ, երբ $\bar{F}_\sigma = \hat{\tau}P = 0$։ Չփոխելով $\bar{F}_N = \bar{Q}_1$, առաջանաբար մեծացնենք F_σ (մանրացնդիկներ ավելացնելով* D*-ում)։ Մենք կնկատենք, որ $\bar{F}_\sigma$-ն 0-ից մինչև $\bar{F}_{1\sigma} = \hat{\tau}\bar{P}_1$ աճելու դեպքում* A*-ն կլինի հավասարակշռության մեջ։ Այդ հավասարակշռու-*

թյունը կխախտվի և A կակի սահել K-ով $\overline{AC}$-ի ուղղությամբ, երբ $\overline{F}_\sigma$ կզերադանցի $\overline{F}_{1\sigma}$ արժեքը։

Եթե այդ փորձը կրկնենք տալով $\overline{F}_N$-ին նոր $\overline{Q_2}$ արժեք, ապա $\overline{F}_\sigma$-ն դեռ կարող է մինչև $\overline{F}_{2\sigma}=\hat{\tau}P_2$ մեծացնելիս A-ն հավասարակշռության մեջ կգտնվի։ A-ն կակի սահել AC-ի ուղղությամբ, երբ $\overline{F}_\sigma$ կզերադանցի $\overline{F}_{2\sigma}$ արժեքը։

Պարզվում է, որ $\frac{|F_{1\sigma}|}{|F_{2\sigma}|}=\frac{P_1}{P_2}=\frac{Q_1}{Q_2}$։

§ 47. Շփման ուժի հատկություններ. շփման կոն։ *Փորձերը, որոնք նման են հենց նոր նկարագրածներին և մի շարք այլ փորձեր, բերում են հետևյալ եզրակացության՝*

1°. Եթե A մարմինը գտնվում է հանգստի մեջ և նրան կիրառած $\overline{F}$ ուժի նորմալ բաղադրիչը պահպանվում է հաստատուն, իսկ այդ ուժի շոշափող բաղադրիչ ($\overline{F}_\sigma$) աստիճանաբար աճում է զերոյից սկսած, ապա շփման ուժը նույնպես աճում է զերոյից սկսած մինչև $R_{\sigma\max}$ սահմանային արժեքը, շարունակ բավարարելով հավասարության պայմանին՝ $\overline{F}_\sigma+\overline{R}_\sigma=0$։ Հասնելով $R_{\sigma\max}$ արժեքին, շփման ուժն այլևս չի փոխվում, որքան էլ որ մեծանա $\overline{F}_\sigma$-ն, այնպես որ հավասարակշռությունը խախտվում է և A մարմինն սկսում է սահել $\overline{F}$-ին համազուգահեռ ուղղությամբ։

Բացի սահումից, A-ն կարող է սկսել գլորվել։ Գլորում սկսվելու համար նույնպես հարկավոր է շփման ինչ որ ուժ հաղթահարել։ Սակայն «գլորման շփումը» զգալիորեն ավելի փոքր է «սահումի շփումից» և «գլորումի շփման» դերը զգալիորեն ավելի փոքր է, քան «սահումի շփման» դերը։ Այստեղ քննարկվում է միայն «սահումի շփումը»։

2°. Շփման ուժի ամենամեծ R_σ չափին ուղիղ համեմատական է կիրառված ուժի նորմալ բաղադրիչի F_N չափին, կամ նորմալ հակազդման R_N չափին, այսինքն՝

$$R_{\sigma,\max}=kF_N=kR_N. \quad (VI\ 7)$$

[*քանի* (VI 3) $R_N=F_N$]։

Համեմատականության k գործակիցը կոչվում է շփման գործակից և կախված է A և K մարմինների հպվող մակերևույթների նյութերից և այդ մակերևույթների վիճակից։ k բոլորովին էլ կախված չէ ոչ կիրառված $\overline{F}$ ուժից, ոչ էլ A և K մակերևույթների հպման մակերեսից։

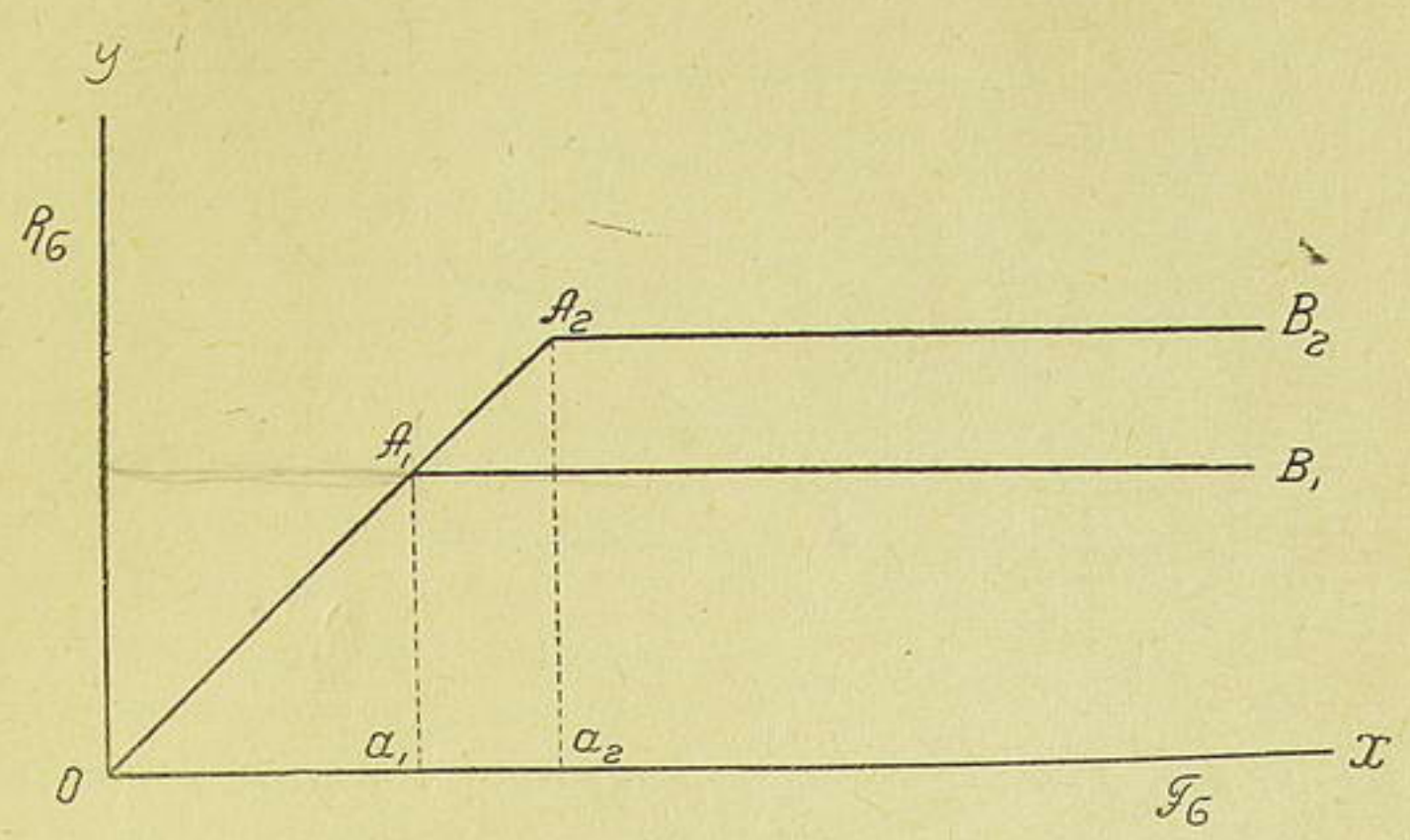
Որքան ավելի են հղկված հպվող մակերևույթները, այնքան փոքր է K, հետևապես այնքան էլ փոքր է շփման ուժի $R_{\sigma\max}$ չափը։ Դա թույլ է տալիս ենթադրելու, որ A և K մարմինների մակերևույթների իդեալապես հղկված լինելու դեպքում k գործակիցը հավասար կլինի զերոյի։ Այդ դեպքում շփման ուժի մեծագույն չափը՝

$$R_{\sigma\max}=kR_N=0.$$

Հետևապես այդ դեպքում շփման R_σ ուժը հավասար է զերոյի։ Իդեալապես հղկված մակերևույթները անիրագործելի են։

Մենք մակերևույթները իդեալապես հղկված կհամարենք բոլոր այն դեպքերում, երբ շփման գործակիցը այնքան է փոքր, որ շփման ամենամեծ ուժը կարելի է արհամարհել։

Շփման ուժի վերաբերմամբ 1^0 և 2^0 սահծների համար հետևում է, որ, նկար 134, եթե OX և OY առանցքների վրա նշանակենք շարժիչ և շփման



Նկ. 134

ուժերի F_σ և R_σ չափերը և փոխելով F_σ պահենք F_N (կամ նրան հավասար R_N) հաստատուն, ապա կստանանք OA_1B_1, OA_2B_2 ... բեկյալները, ըստ որում OA_1A_2 ուղիղը հանդիսանում է YOX անկյան կիսորդը: OA_1B_1 գիծը համապատասխանում է նորմալ հակազդման հաստատուն արժեք R_{1N}-ին, իսկ OA_2B_2 գիծը՝ նորմալ հակազդման R_{2N} հաստատուն արժեքին.

$\left(\text{նկարում } R_{2N}=\frac{3}{2}R_{1N}\right)$:

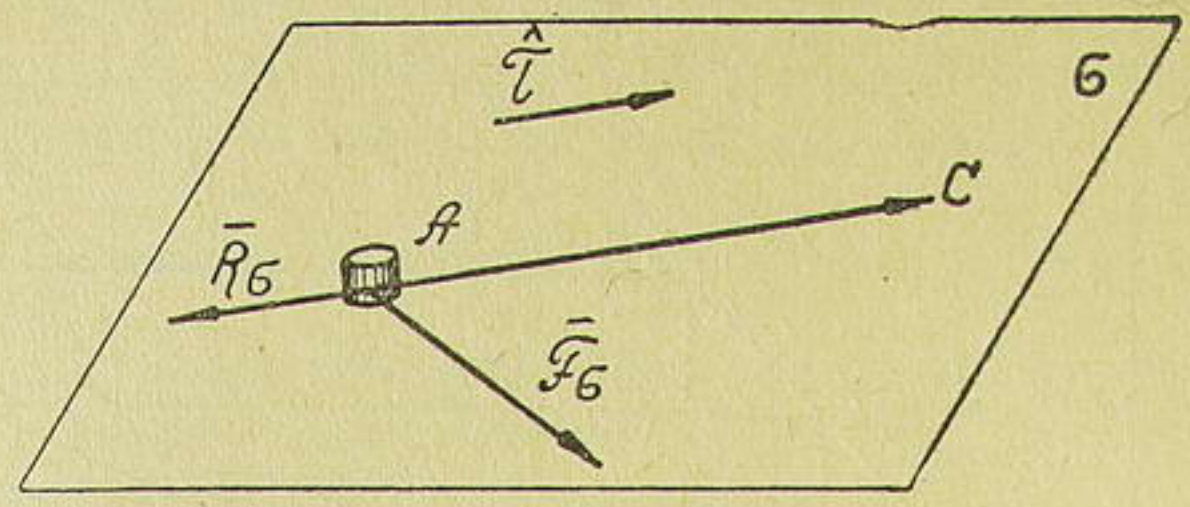
OA_1 հատվածի վրա շփման ուժի չափը հավասար ճնալով շարժիչ ուժի չափին, մեծանում է զերոյից մինչև $R_{\sigma\,max.}=k\,R_{1N}=a_1A_1$, որին համապատասխանում է F_σ-ի մեծացումը զերոյից մինչև $0a_1$: Շարժիչ ուժի հետագա մեծացումը չի առաջացնում շփման ուժի չափի փոփոխություն, ուստի A_1B_1 հատվածը զուգահեռ է OX առանցքին: Եթե նորմալ հակազդման չափը R_{1N}-ը չէ, այլ R_{2N}-նն է, ապա $R_{\sigma\,max.}=k\,R_{2N}=a_2A_2$: Այդ դեպքում շփման ուժը մեծանում է զերոյից մինչև a_2A_2, շարժիչ ուժը զերոյից մինչև $0a_2$ մեծանալու դեպքում: Շարժիչ ուժի հետագա մեծացման դեպքում, շփման ուժը չի փոխվում. A_2B_2 հատվածը զուգահեռ է OX-ին:

3°. Երբ K մարմնի մակերևույթի վրա A-ն գտնվում է հավասարակշռության մեջ, շփման ուժը հակազուգահեռ է A-ին կիրառած ուժի շոշափող բաղադրիչին: $\overline{R}_\sigma\uparrow\downarrow\overline{F}_\sigma$: Դա անմիջապես բղխում է հավասարակշռության $\overline{R}_\sigma+\overline{F}_\sigma=0$ հավասարումից:

$\overline{R}_\sigma\uparrow\downarrow\overline{F}_\sigma$ և այն դեպքում, երբ A-ն սկսում է սահել K-ով $\overline{F}_\sigma$-ին համազուգահեռ ուղղությամբ, իսկ եթե A-ն սահում է $\overline{F}_\sigma$-ի հետ որևէ անկյուն կազմող ուղղությամբ, ապա $\overline{R}_\sigma$ հակազուգահեռ է այն ուղղության, որով կատարվում է սահումը: Այս վերջին երկու դեպքում շփման ուժի չափը ամենամեծն է և հավասար է kR_N:

Թող օրինակ, (նկար 135) A-ն, հարված ստանալով, սկսում է սահել

$\hat{\tau}$-ին համապատասխան $\overline{AC}$ ուղիղով, $(\bar{F}_\sigma, \hat{\tau})$ անկյունը տարբեր է զերոյից։ Այն ժամանակ $\bar{R}_\sigma = \bar{R}_{\sigma\,max.} = -\hat{\tau}\,k\,R_N$։



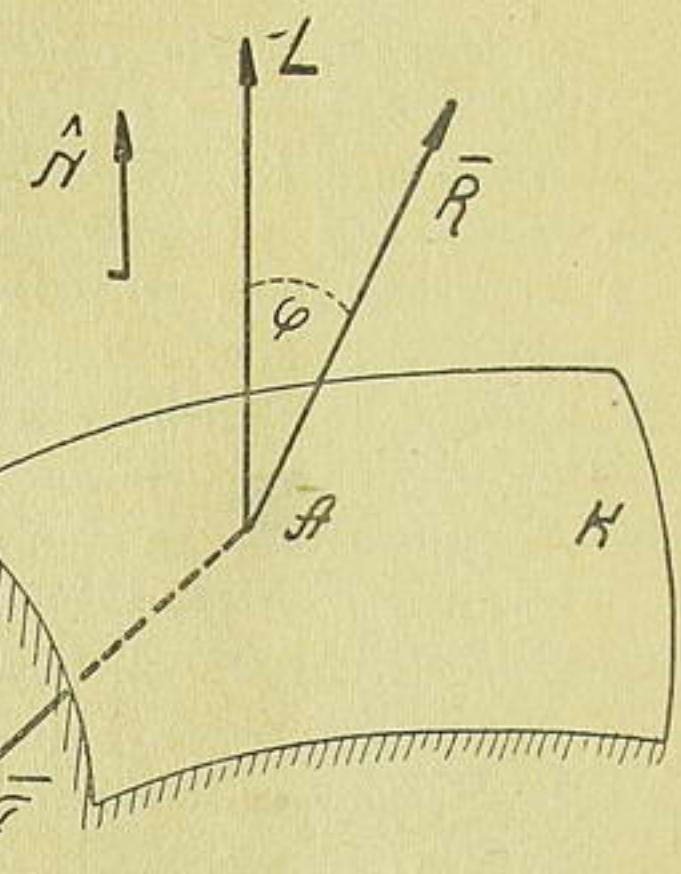
Նկ. 135

Միշտ, երբ A-ն սահում է K-ի վրայով $\hat{\tau}$ ուղղությամբ, շփման ուժ $\bar{R}_\sigma = \bar{R}_{\sigma\,max.} = -\hat{\tau}\,k\,R_N$։

Հետևապես A-ի սահումի դեպքում շփման ուժը հակազուգահեռ է $\bar{F}_\sigma$-ին միայն այն ժամանակ, երբ սահումի ուղղությունը զուգահեռ է $\bar{F}_\sigma$-ի ազդման գծին, իսկ մինչև սահումի սկսելը

$$\bar{R}_\sigma + \bar{F}_\sigma = 0 \text{ և } \bar{R}_\sigma \uparrow\downarrow \bar{F}_\sigma ։$$

4°. Հակազդումը միայն այն ժամանակ է առաջ գալիս, երբ $(\bar{F}, \hat{N})$ անկյունը բութ է $(\bar{F}_N \uparrow\downarrow \hat{N})$։ Ընդ որում միշտ $\bar{R}_N + \bar{F}_N = 0$ *և դրա համար էլ* $\bar{R}_N \uparrow\uparrow \hat{N}$։ *Հետևապես $\varphi = (\bar{R}, \hat{N})$ անկյունը սուր անկյուն է, (նկ. 136ա)։ Դժվար չէ ցույց տալ, որ φ կարող է փոխվել զերոյից մինչև որևէ δ արժեքը՝* $0 \leqq \varphi \leqq \delta$։



Նկ. 136ա.

Եվ իսկապես, եթե $R_{\sigma\,max.} = kR_N$, *ապա կարելի է գրել* $R_\sigma = uR_N$, *որտեղ u գործակիցը կարող է ընդունել զերոյից մինչև k արժեքները։ Ակնհայտ է,*

$R_\sigma : R_N = tg\varphi = u$, $\varphi = arctgu$:

$\varphi\,max$ *նշանակելով δ կունենանք*

$$R_{\sigma\,max.} : R_N = tg\delta = k.$$

$$\delta = arctgk։$$

δ-ն կոչվում է շփման անկյուն։

Կոնը, որի առանցքն է K մարմնի մակերևույթի AL նորմալը և որի բացման անկյունը հավասար է 2δ, կոչվում է շփման կոն (նկ. 136բ),

$\bar{R}$ հակազդման ազդման գիծն անցնում է շփման կոնի գագաթով և

դասավորվում է կամ այդ կոնի ներսում, կամ էլ համընկնում է նրա ծնիչներից մեկի հետ:

Հակազդման ազդման գիծը երբեք չի կարող դուրս գալ շփման կոնից դուրսը:

§ 48. Մակերեվույթի վրա գտնվող կետի հավասարակշռության պայմանները: *Դառնանք § 46 2° շրջած հավասարակշռության պայմաններին:*

Մենք արդեն գիտենք, որ $\bar{R}=0$, երբ $F_N=0$: Այստեղից հետևում է, որ՝ եթե A կետին կիրառած ուժերի $\bar{F}$ համազորը հավասար է զերոյի, A-ն գտնվում է հավասարակշռության մեջ անկախ նրանից, հպվում է արդյոք կարծր մարմնի հետ, թե ոչ:

Իսկապես, եթե $\bar{F}=0$, ապա $\bar{F}_N=0$ նույնպես, ուստի $\bar{R}=0$, և $\bar{F}+\bar{R}=0$:

§ 46 2° ցույց տված է եղել, որ K կարծր մարմնի վրա գտնվող A կետի հավասարակշռության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը արտահայտվում է՝

$$\bar{F}_\sigma+\bar{R}_\sigma=0$$

կամ

$$F_\sigma=R_\sigma,\ \bar{F}_\sigma\uparrow\downarrow\bar{R}_\sigma$$

հավասարությամբ:

Սակայն շփման ուժի սահմանային չափը

$$R_{\sigma\ max.}=kR_N=kF_N,$$

Հետևապես, եթե $F_\sigma < kF_N$

հավասարակշռությունը տեղի ունի:

Եթե $F_\sigma > kF_N$,

հավասարությունը անհնար է:

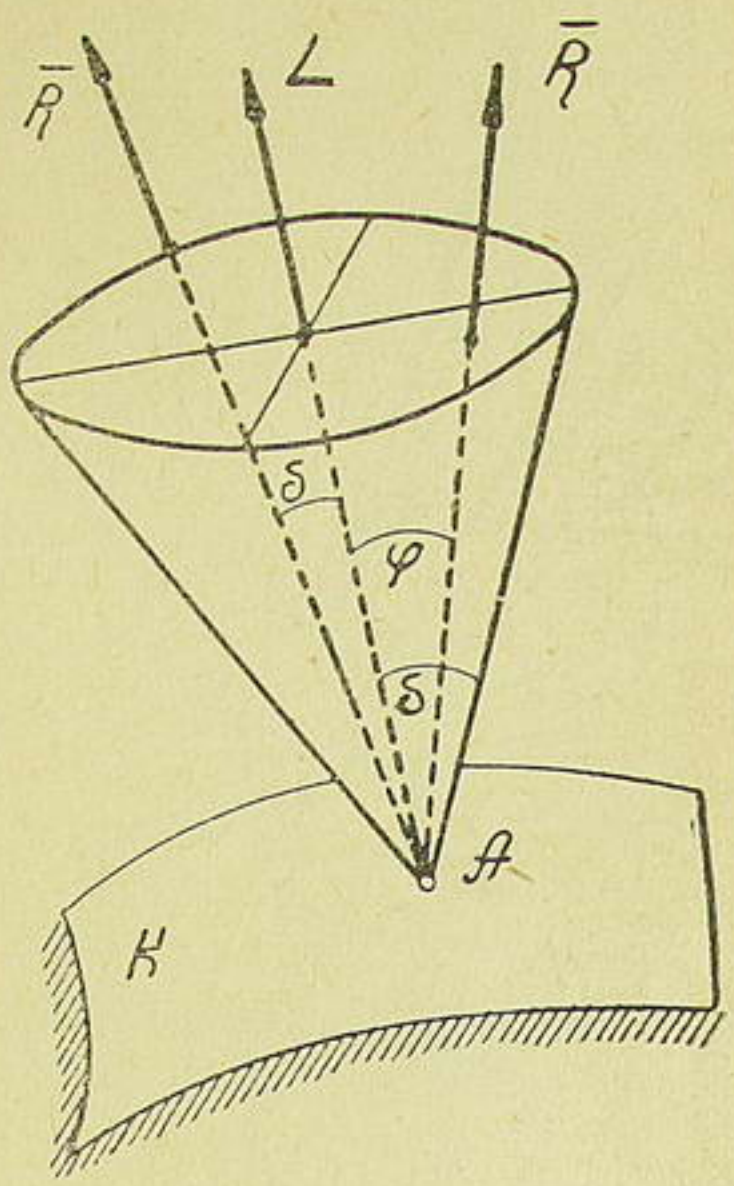
$F_\sigma=kF_N$ *դեպքում*

A կետը հավասարակշռության մեջ կլինի, եթե որևէ ակնթարթում նա գտնվել է K-ի վրա հանգստի մեջ:

Դուրս բերված լինելով այդ դիրքից, A-ն կկարողանա հանգստի վրայով:

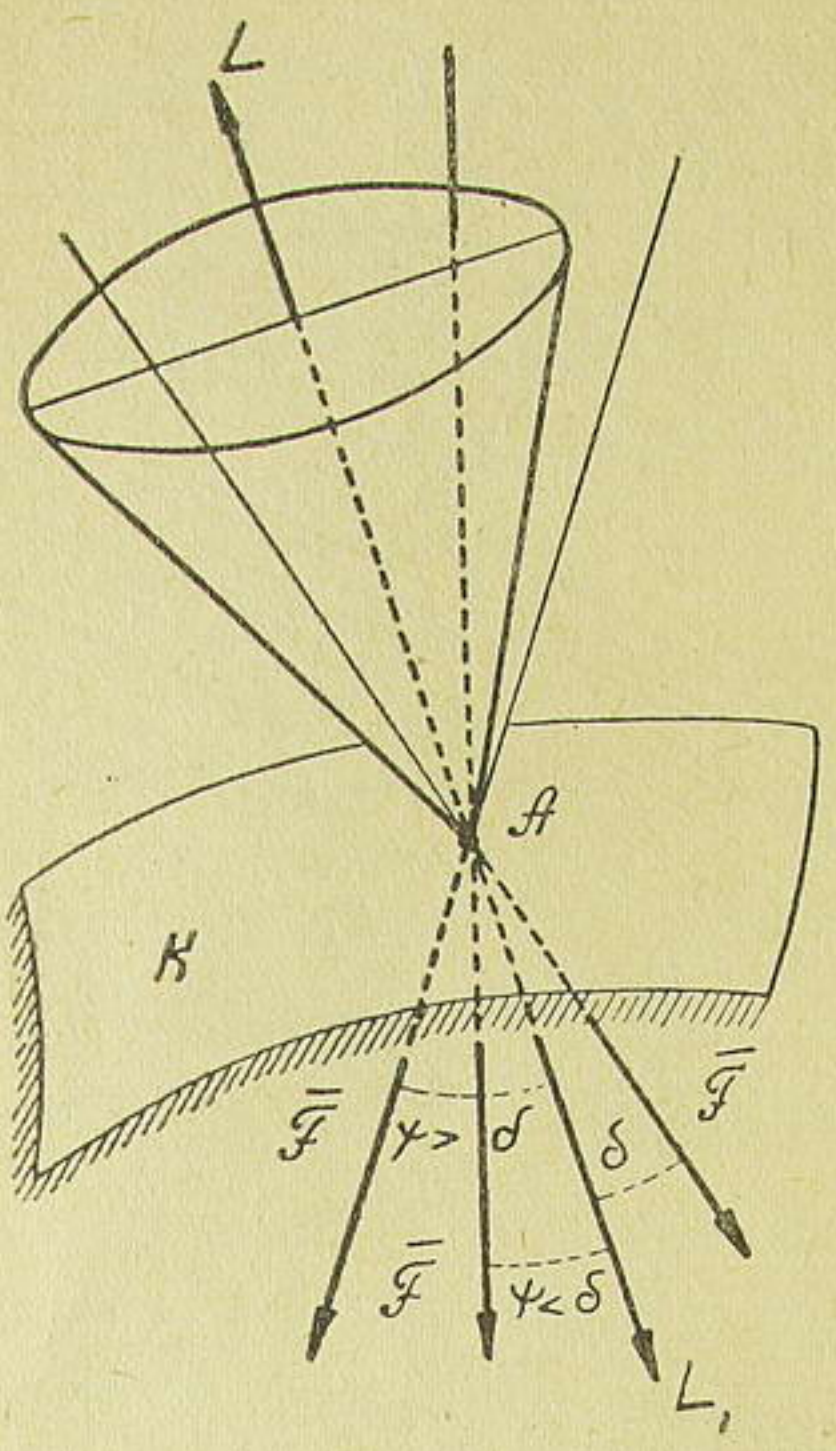
Հավասարակշռությունը, որը կարող է տեղի ունենալ այն դեպքում, երբ $R_\sigma=kR_N$, $F_\sigma=kF_N$ կոչվում է սահմանային:

3°. Դժվար չէ համոզվել, որ A-ի հավասարակշռությունը K-ի մակերևույթի վրա միշտ տեղի է ունենում, երբ $\bar{F}$-ի ազդման գիծը գտնվում է շփման կոնի ներսում (նկ. 137):



Նկ. 136

Հավասարակշռությունը անհնարին է, երբ $\bar{F}$-ի ազդման գիծը կոնից դուրս է, իսկ եթե $\bar{F}$-ի ազդման գիծը համընկնում է շփման ծնիչներից մեկի հետ, ապա A-ն կամ գտնվում է սահմանային հավասարակշռության մեջ, կամ էլ սահում է K-ի մակերևույթի վրայով:



Նկ. 137

Եվ իսկապես, քանի դեռ $R_\sigma < R_{\sigma\,max.}$, ապա $F_\sigma + \bar{R}_\sigma = 0$: Բացի դրանից, միշտ $\bar{F}_N + \bar{R}_N = 0$: Հետևապես

$$\bar{F}_\sigma + \bar{R}_\sigma + \bar{F}_N + \bar{R}_N = \bar{F} + \bar{R} = 0,$$

այսինքն, երբ $R_\sigma < R_{\sigma\,max}$, A-ն գտնվում է հավասարակշռության մեջ, իսկ $\bar{F}$ ուժի ազդման գիծը համընկնում է R-ի ազդման գծի հետ: Իսկ այդ վերջինը գտնված է կամ շփման կոնի ներսում, կամ մակերևույթի վրա:

Իսկ երբ $\bar{F}$-ի ազդման գիծը գտնվում է շփման կոնից դուրս, ապա հավասարակշռությունը անհնարին է, որովհետև R-ի ազդման գիծը միշտ գտնվում է կոնի ներսը և այդ պատճառով $\bar{F}+\bar{R}$ գումարը չի կարող դառնալ զերո:

4°. *Թող K կարծր մարմնի և նյութական A կետի մակերևույթները իդեալական հղկված են: Այն ժամանակ սահմանման համաձայն $R_\sigma = 0$: Հավասարակշռության (VI 5) հավասարումը վեր է ածվում հետևյալին՝*

$$\bar{F}_\sigma = 0:$$

Որպեսզի հավասարակշռությունը տեղի ունենա իդեալական հարթ մակերևույթի վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կետին կիրառված ուժը հակազուգահեռ լինի արտաքին նորմալին. $\bar{F} \uparrow\downarrow \hat{N}$:

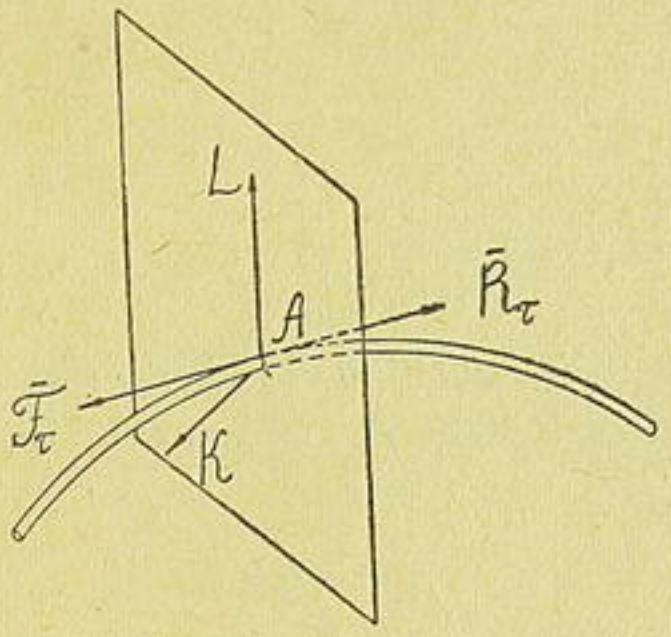
Երբ $\bar{F}$-ը $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$ ուժերի համազորն է, ապա հավասարակշռությունը տեղի կունենա, եթե մակերևույթի շոշափող հարթությանը զուգահեռ $\bar{F}_{1\sigma}$, $\bar{F}_{2\sigma} \dots \bar{F}_{n\sigma}$ բաղադրիչների շղթան փակ բազմանկյունի է՝

$$\bar{F}_\sigma = \Sigma \bar{F}_{1\sigma} = 0:$$

§ 49. Կարծր ցյութական գծի հակազդումը: *Բարակ լարը, թելը, որոնց ընդլայնական չափերը փոքր են, հանդիսանում են որպես «նյութական գծերի» օրինակներ: Թելերը հեշտությամբ են ենթարկվում դեֆորմացիայի, մի քիչ ավելի դժվար, բայց դգալիորեն, դեֆորմացիայի են են-*

թարկվում և լարերը: Բայց երբեմն կիրառված են լինում այնպիսի ուժեր, որ նյութական գիծը կարող է դիտարկվել որպես կոշտ, կարծր մարմին:

Ակնհայտ է, որ կարծր գծում նույնպես առաջ է գալիս հակազդում: Այստեղ նույնպես կարելի է հակազդումը վերլուծել նորմալ և շոշափող բաղադրիչների: Վերջինս նույնպես կոչվում է շփման ուժ: Այստեղ նորմալ հակազդման և շփման ուժերի հատկությունները կատարելապես նույնպիսիններն են, ինչպես կարծր մարմնի դեպքում: Բայց կարծր մարմնում նորմալ հակազդումը ուղղահայաց է նրա մակերևույթին և հետևապես այդ մարմնի յուրաքանչյուր կետում ունի միանգամայն որոշ ուղղություն: Իսկ նյութական կարծր գծի դեպքում $\bar{R}_N \uparrow\downarrow \bar{F}_N$, բայց $\bar{F}_N$-ի ազդման գիծը կարող է լինել նորմալ հարթության որևէ ուղիղը (նկ. 138): Այնպես, որ



նկ. 138

եթե $\bar{F}_N \uparrow\uparrow \overline{AL}$, ապա $\bar{R}_N \uparrow\downarrow \overline{AL}$, եթե $\bar{F}_N \uparrow\uparrow \overline{AK}$, ապա $\bar{R}_N \uparrow\downarrow \overline{AK}$: Իսկ ինչ վերաբերում է շփման ուժին, ապա կարծր գծի դեպքում նրա ազդման գիծը կորի շոշափողն է տվյալ կետում և հետևապես ունի միանգամայն որոշակի ուղղություն: Մինչդեռ կարծր մարմնի դեպքում շփման $\bar{R}_\sigma$ ուժը դասավորված է շոշափող հարթության վրա:

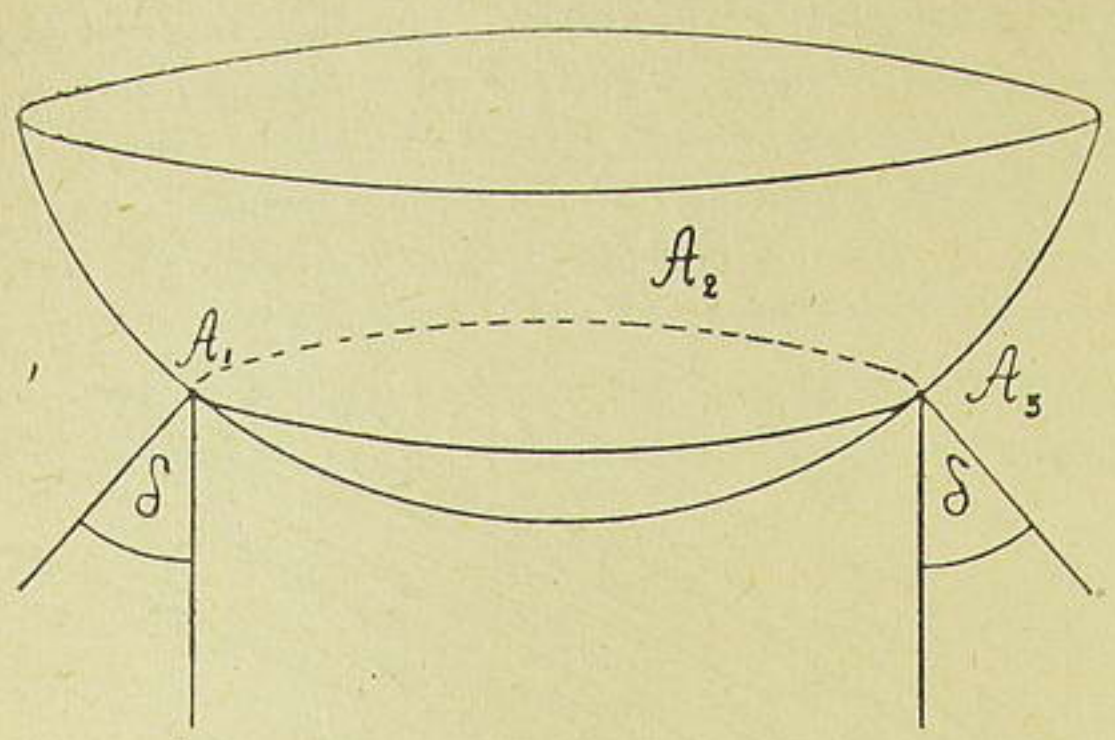
Կարծր գծի շփման ուժը մենք կնշանակենք R_τ, քանի որ τ տառով հաճախ նշանակում են գծի շոշափողը:

§ 50. Հավասարակշռության յուրահատկությունը շփման առկայության դեպքում: Արդեն ասված է եղել, որ հավասարակշռությունը միշտ տեղի ունի, եթե $F_\sigma < R_{\sigma\,max.}$: Այստեղից պարզ է, որ շփման առկայության դեպքում գոյություն ունի հավասարակշռության ոչ թե մեկ դիրք, այլ հավասարակշռության «ընդգավառ», այսինքն մակերևույթի հատված, որի յուրաքանչյուր կետում նյութական կետը պահվում է հավասարակշռության մեջ: Այդ բանում համոզվելու համար դիտարկենք մի քանի օրինակներ:

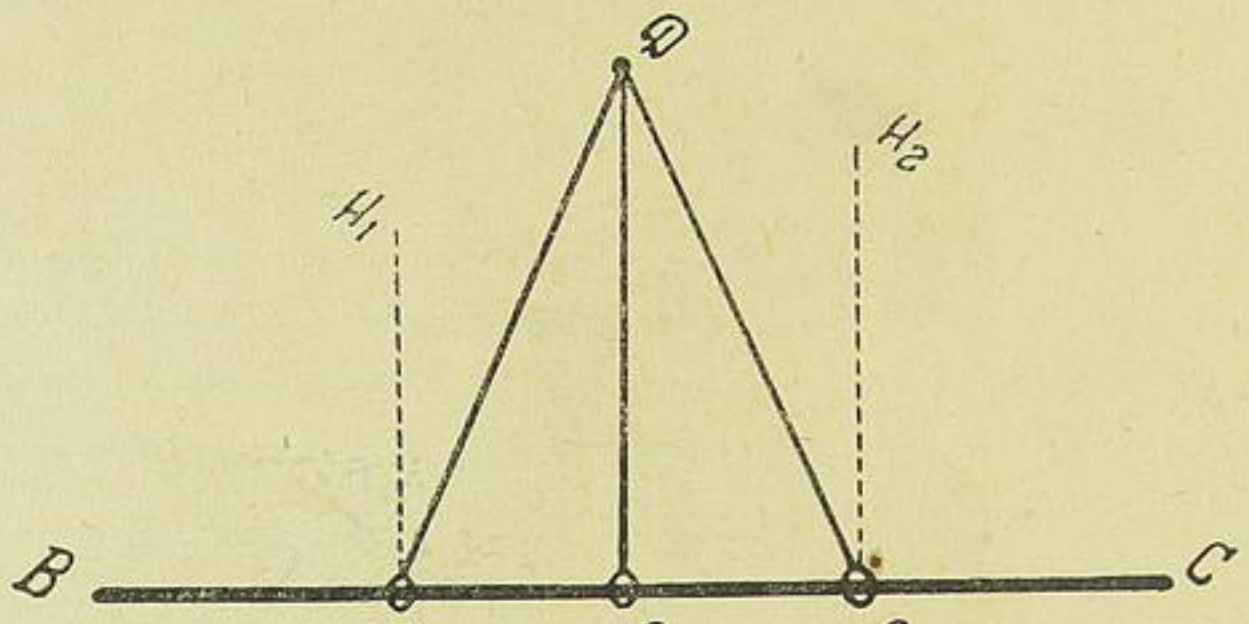
Եթե (նկ. 139ա) BCD-ն իդեալապես հղկված մակերևույթ է, ապա A ծանր նյութական կետը հավասարակշռության մեջ կլինի միայն մի դեպքում—մակերևույթի ամենացածր կետում: Այժմ ենթադրենք, որ շփման անկյունը հավասար է δ: Բոլոր այն դիրքերում, որոնցում ուղղաձիգը (A կետի կշռի ազդման գծի ուղղությունը) մակերևույթի նորմալի հետ կազմում է δ-ից փոքր կամ δ-ին հավասար անկյուն, A-ն հավասարակըշ-

ուրթյան մեջ կլինի։ Այդ պայմանին բավարարում են BCD մակերևույթից A_1 A_2 A_3 հատվածի բոլոր կետերը։

Մի այլ օրինակ. A օղակը, որի կշիռը արհամարհում ենք, հագցված է պլանաձև հորիզոնական BC ձողին (նկար 139բ)։ Օղակը կապված է ուռուցիկ թելին, որի մյուս ծայրն ամրացված է D-ում։ D-ի և BC-ի միջև եղած հեռավորությունը մեծ է թելի բնական l երկարությունից և այդ պատճառով էլ թելը ձգված կլինի, ինչպիսի դիրք էլ որ գրաված լինի օղակը BC-ի վրա։ Եթե ձողը և օղակը իդեալական հղկված են, ապա հավասարակշռությունը տեղի կունենա այն միակ A_0 դիրքում, երբ թելը ուղղահայաց է



Նկ. 139ա



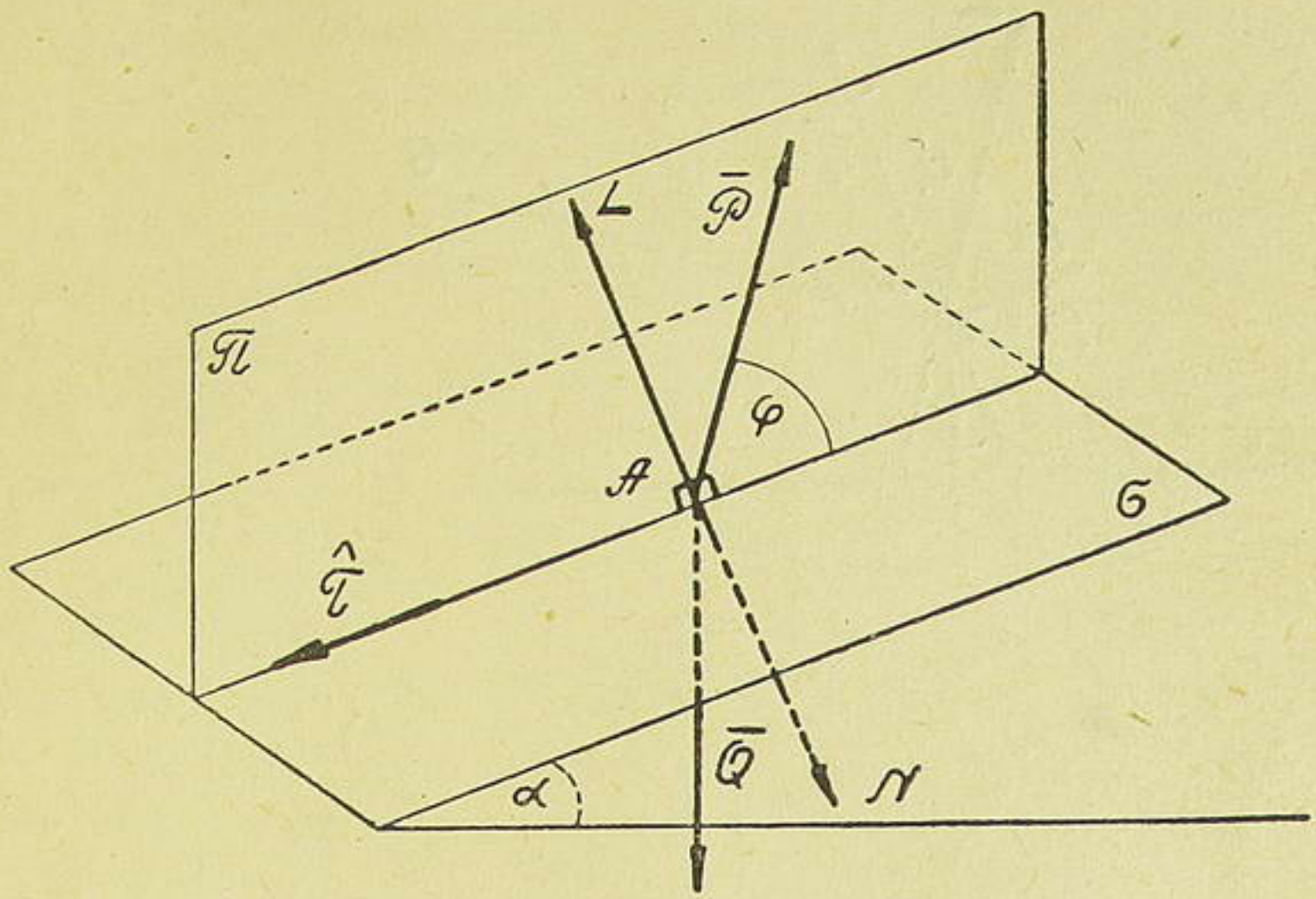
Նկ. 139բ

ձողին, $DA_0 \perp BC$. Իսկ եթե ձողը հղկված չէ և δ—շփման անկյունն է, ապա օղակը կգտնվի հավասարակշռության մեջ, բոլոր այն դիրքերում, որոնցում անկյունը ձողի ուղղահայացի և թելի միջև չի գերազանցում δ-ին։ Այդ բոլոր դիրքերը դասավորված են ձողի A_1 A_2 հատվածի վրա, ըստ որում $A_1A_0 = A_0A_2$ և $\angle DA_1H_1 = \angle DA_2H_2 = \delta$ (A_1H_1 և A_2H_2 ձողի ուղղահայացներն են)։

Խնդիրներ.

1. Զհղկված σ հարթության վրա գտնվում է $\bar{Q}$ կշիռ ունեցող A մասնիկը։ A-ին կիրառված է նաև P ուժը (նկար 140)։ σ-ն հորիզոնի հետ կազմում է α անկյունը։ P, $\bar{Q}$ և σ-ի $\overline{AN}$ նորմալը գտնվում են մի հար-

թութքյան վրա (Π)։ Ինչ պայմանների պետք է բավարարեն $\bar{P}$ ուժի չափը և φ անկյունը, որպեսզի շփման ուժը հավասար լինի զերոյի։



Նկ. 140

Նշանակելով $\bar{Q}$ *և* $\bar{P}$*-ի համազորը* $\bar{F}$*, կունենանք* $\bar{R}_\tau=0$*, հետևյալ երեք դիրքերում՝* ա. $\bar{F}\downarrow\uparrow\overline{AN}$, բ. $\bar{F}\perp\overline{AN}$, գ. $\bar{F}=(\bar{P}+\bar{Q})=0$։

ա. *Եթե* $\bar{F}\downarrow\uparrow\overline{AN}$, $\bar{F}\cdot\hat{\tau}=(\bar{Q}+\bar{P})\cdot\hat{\tau}=0$,

կամ $$Q\sin\alpha-P\cos\varphi=0,\ P\cos\varphi=Q\sin\alpha,$$

բ. $\bar{F}\perp\overline{AN}$ *դեպքում* $\bar{F}\cdot\hat{N}=(\bar{Q}+\bar{P})\cdot\hat{N}=0$,

կամ $$Q\cos\alpha+P\sin\varphi=0,\ P\sin\varphi=Q\cos\alpha.$$

գ. $P=-\bar{Q}$, *այնպես որ միմիայն տեղի ունի հավասարությունները՝* $(\bar{P}+\bar{Q})\cdot\tau=0$, $(P+Q)\cdot\hat{N}=0$։

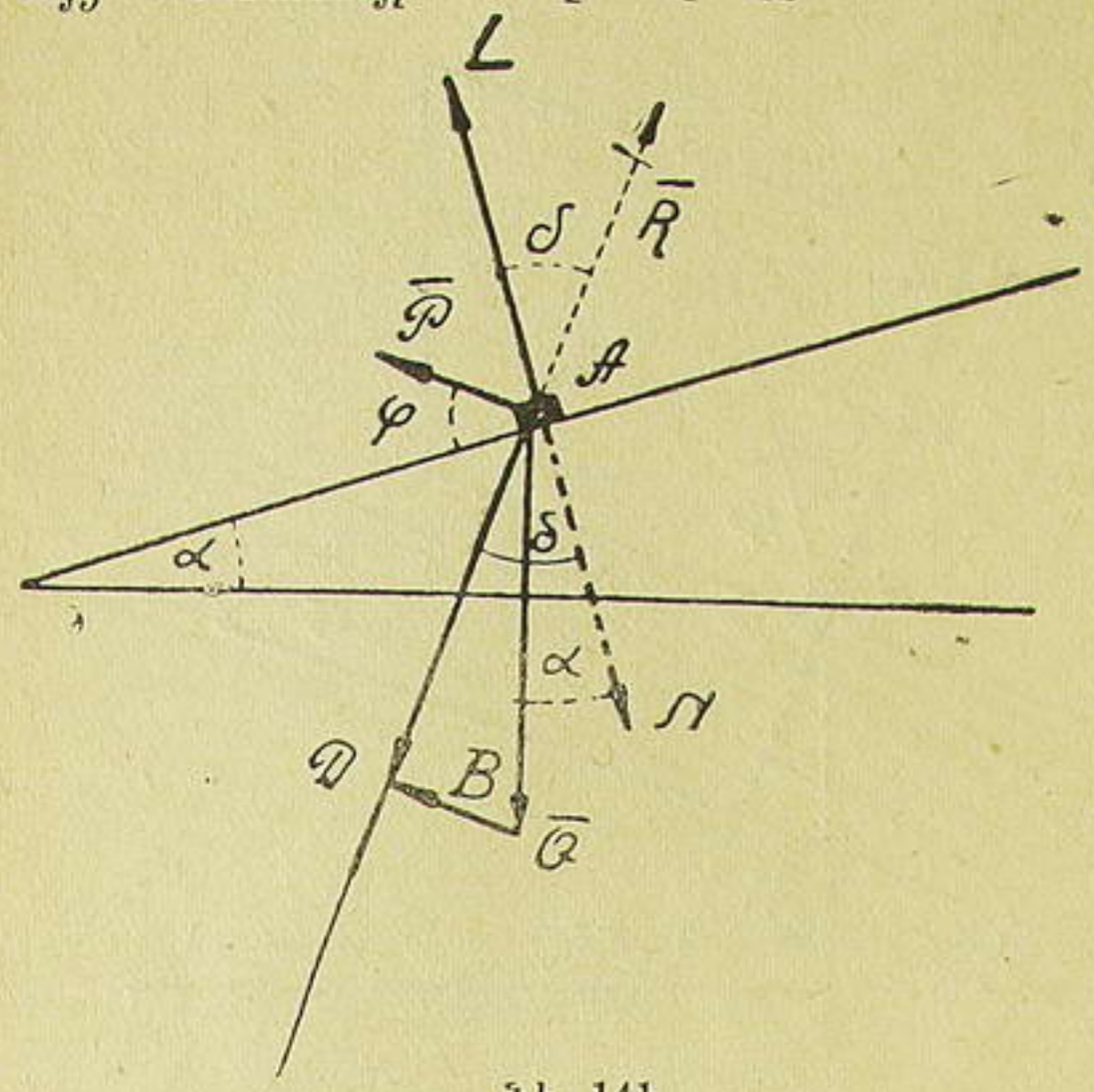
ա. և գ դեպքերում A կետը գտնվում է հավասարակշռության մեջ։ Իսկ բ. դեպքում $\bar{F}$ *համազորը, զերո չէ, այլ ղուգահեռ է σ-ին։ Այդ պատճառով էլ A-ն չի լինի հավասարակշռության մեջ, այլ կսկսի սահել σ-ի վրայով։*

2. $\bar{Q}$ *կշիռ ունեցող A մասնիկը գտնվում է հավասարակշռության մեջ չհղկված σ հարթության վրա, որը հորիզոնի հետ կազմում է α անկյուն (նկար 141),* $\alpha<\delta$։ *Որոշել ամենափոքր* $\bar{P}$ *ուժի ուղղությունը, որը կարող է առաջացնել շարժում դեպի ներքև։* $\bar{P}$*-ն դասավորված է σ-ի* $\overline{AN}$ *նորմալով տարած ուղղաձիգ հարթության վրա։*

Շարժում առաջացնելու ընդունակ ամենափոքր $\bar{P}$ *ուժը հենց այն ուժն է, որը* $\bar{Q}$*-ի և* $\bar{R}$ *հակազդման հետ կարող է պահպանել «սահմանային հավասարակշռություն», այնպես որ՝*

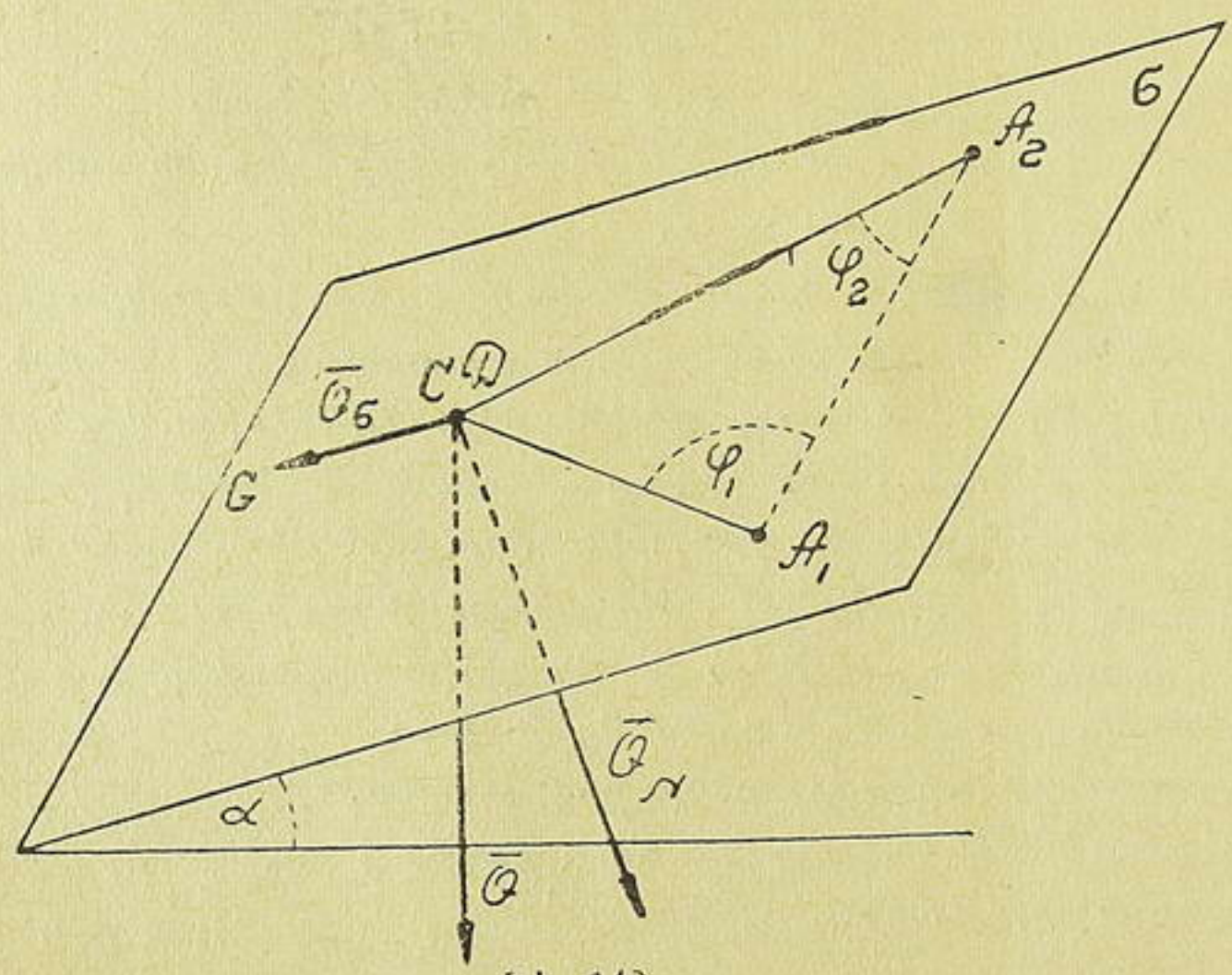
$$\bar{P}+\bar{Q}+\bar{R}=0։$$

Գիտենալով մեկայն $\overline{Q}$-ն, չի կարելի կառուցել ուժերի եռանկյունի։ Բայց սահմանային հավասարակշռության դեպքում ($\overline{R}$, $\overline{A\angle}$) անկյունը հավասար է շփման δ անկյան։ Իսկ $(\overline{Q}, \overline{AN})=\alpha$։ Այնպես, որ $(\overline{Q}, R)=\pi-(\delta-\alpha)$։ Թող $\overline{AB}=\overline{Q}$ և $\angle BAD=\delta-\alpha$։ Այն ժամանակ $\overline{AD}\uparrow\downarrow\overline{R}$։ $\overline{R}$-ի չափը, ինչպես և $\overline{P}$ ուժի չափը և ուղղությունը այժմ հեշտությամբ որոշվում է նրանով, որ $\overline{P}$-ն պետք է լինի ամենափոքրը։ Եվ իսկապես, եթե $\overline{R}=\overline{DA}$, ապա $\overline{P}=\overline{BD}$, իսկ ավյալ B կետից անցկացված BD հատվածը փոքրագույնը կլինի, եթե նա ուղղահայաց է $\overline{AD}$-ին։ Այսպիսով $\overline{P}\perp\overline{R}$, $\varphi=\delta-\alpha$, $P=Q\sin(\delta-\alpha)$ և $R=Q\cos(\delta-\alpha)$։



Նկ. 141

3. σ-ն իդեալական հղկված հարթություն է, որը հորիզոնի հետ կազմում է α անկյունը (նկար 142 ա)։ σ-ի A_1 և A_2 կետերին ամրացված են A_1C և A_2C թելերի ծայրերը, իսկ այդ թելերի C ծայրից կախված է ծանր մատնիկ D-ն, որը նույնպես դասավորված է σ-ի վրա։



Նկ. 142ա

Տրված են D *մասնիկի* $\overline{Q}$ *կշիռը, թելերի* l_1, l_2 *երկարությունները և* $A_1A_2=h$. *Հայտնի է, որ* A_1A_2 *հորիզոնական է: Որոշել թելերի* $\overline{T}_1$ *և* $\overline{T}_2$ *լարումները:*

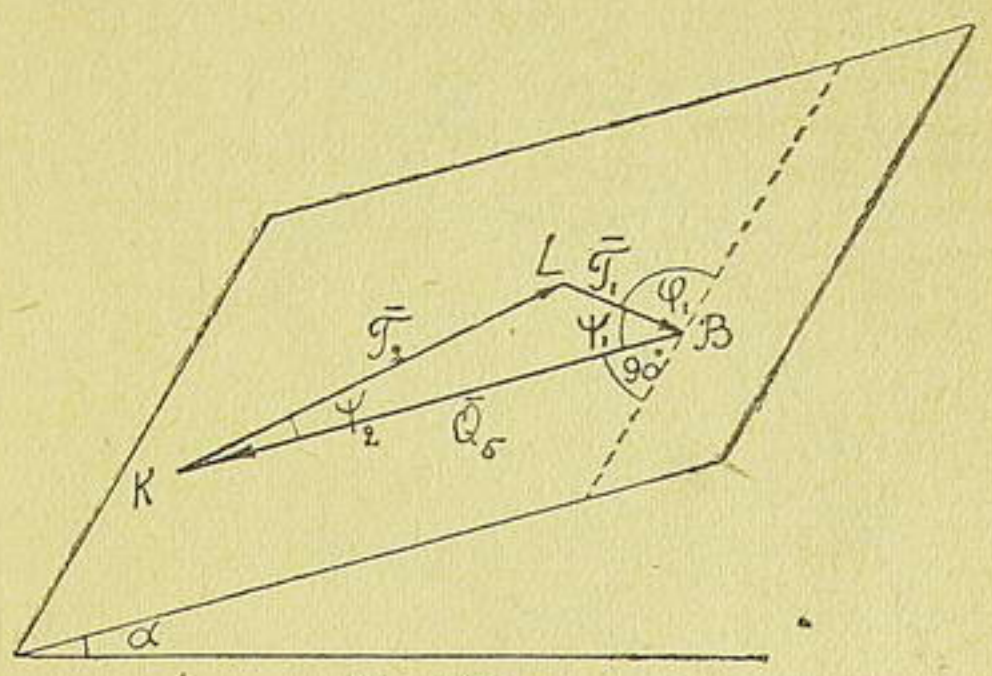
Հավասարակշռության (VI 5) *պայմանը* $\overline{F}_\sigma+\overline{R}_\sigma=0$ *մեր դեպքում վեր է ածվում* $\overline{F}_\sigma=0$, *որովհետև* σ *հարթությունը իդեալական հղկված է և շփման ուժը հավասար է զրոյի:*

$\overline{F}=\overline{T}_1+\overline{T}_2+\overline{Q}$, $\overline{T}_1\uparrow\uparrow\overline{CA}_1$, $\overline{T}_2\uparrow\uparrow\overline{CA}_2$ *և դրա համար էլ* $\overline{T}_{1\sigma}=\overline{T}_1$, $\overline{T}_{2\sigma}=\overline{T}_2$: *Այսպիսով* $\overline{F}_\sigma=0=\overline{T}_1+\overline{T}_2+\overline{Q}_\sigma$, *որտեղ* $\overline{Q}_\sigma=\overline{Q}_{\text{sn}\,\alpha}$: *Որովհետև* $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ *և* $\overline{Q}_\sigma$ *կազմում են հատ-*

կյունին (նկ. 142բ), *ապա*

$$\frac{Q\sin\alpha}{\sin(\psi_1+\psi_1)}=\frac{T_1}{\sin\psi_2}=\frac{T_2}{\sin\psi_1}:$$

BKL *եռանկյան* ψ_1, ψ_2 *անկյունները կարելի է որոշել նրանից, որ* $\overline{Q}_N$ $\overline{Q}_\sigma$ *և* σ*-ի նորմալը դասավորված են* $\pi\perp\sigma$ *հարթության վրա, և* $\overline{CG}=\overline{Q}_\sigma$: *Քանի որ* A_1A_2 *հորիզոնականը* σ*-ի վրա է, ապա* $CG\perp A_1A_2$:



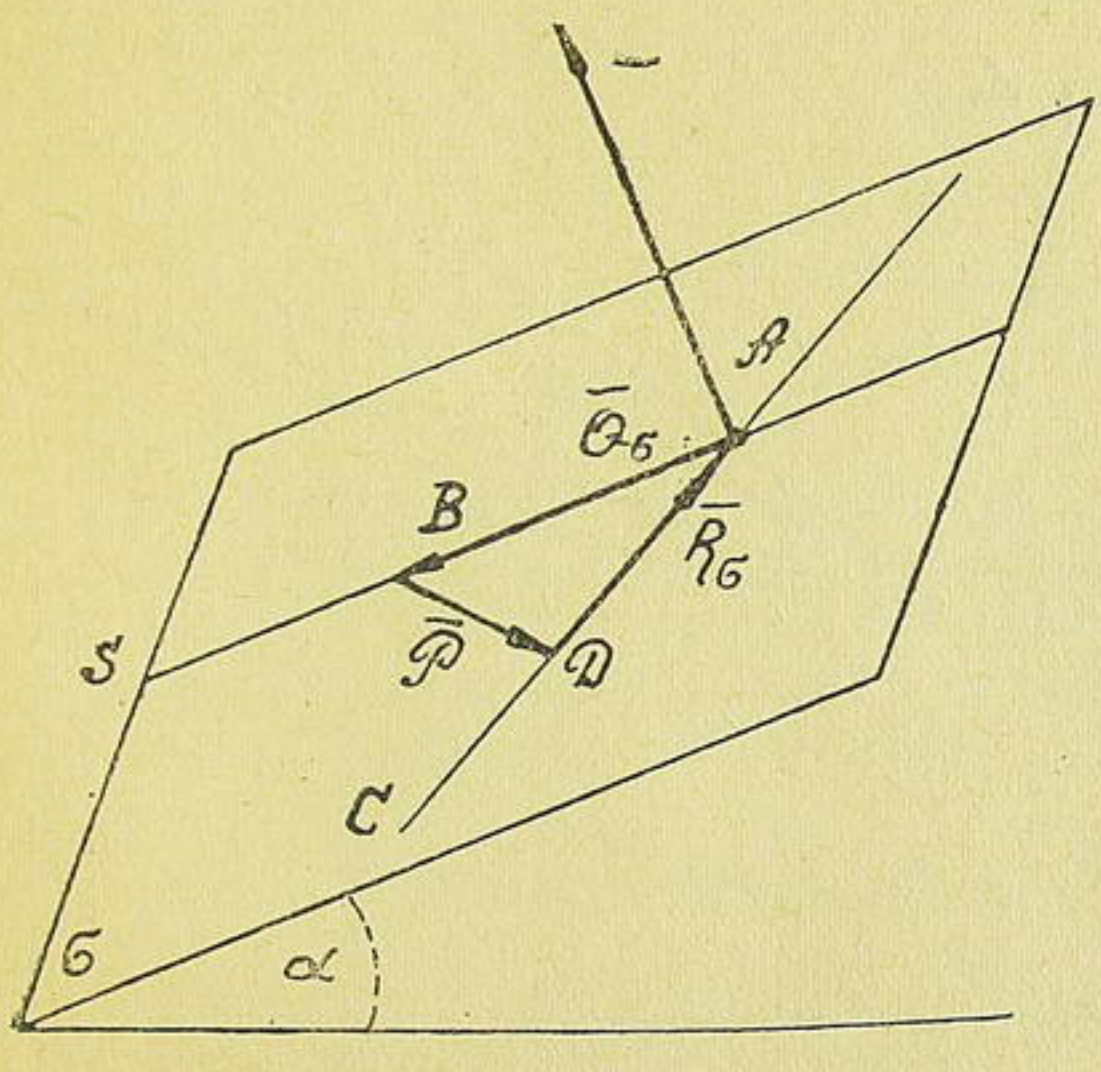
Նկ. 142բ

Ուժերի մասշտաբը այս նկարում մեծացրած է 142 նկարի համեմատությամբ:

Ուստի $\psi_1=90-\varphi_1$, $\psi_2=90-\varphi_2$, $\psi_1+\psi_2=180^\circ-(\varphi_1+\varphi_2)$, $\sin\psi_1=\cos\varphi_1$, $\text{sn}\,\psi_2=\cos\varphi_2$:

Այդպիսով նախընթաց հավասարությունը կգրվի այսպես՝

$$\frac{Q\sin\alpha}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}=\frac{T_1}{\cos\varphi_2}=\frac{T_2}{\cos\varphi_1}:$$

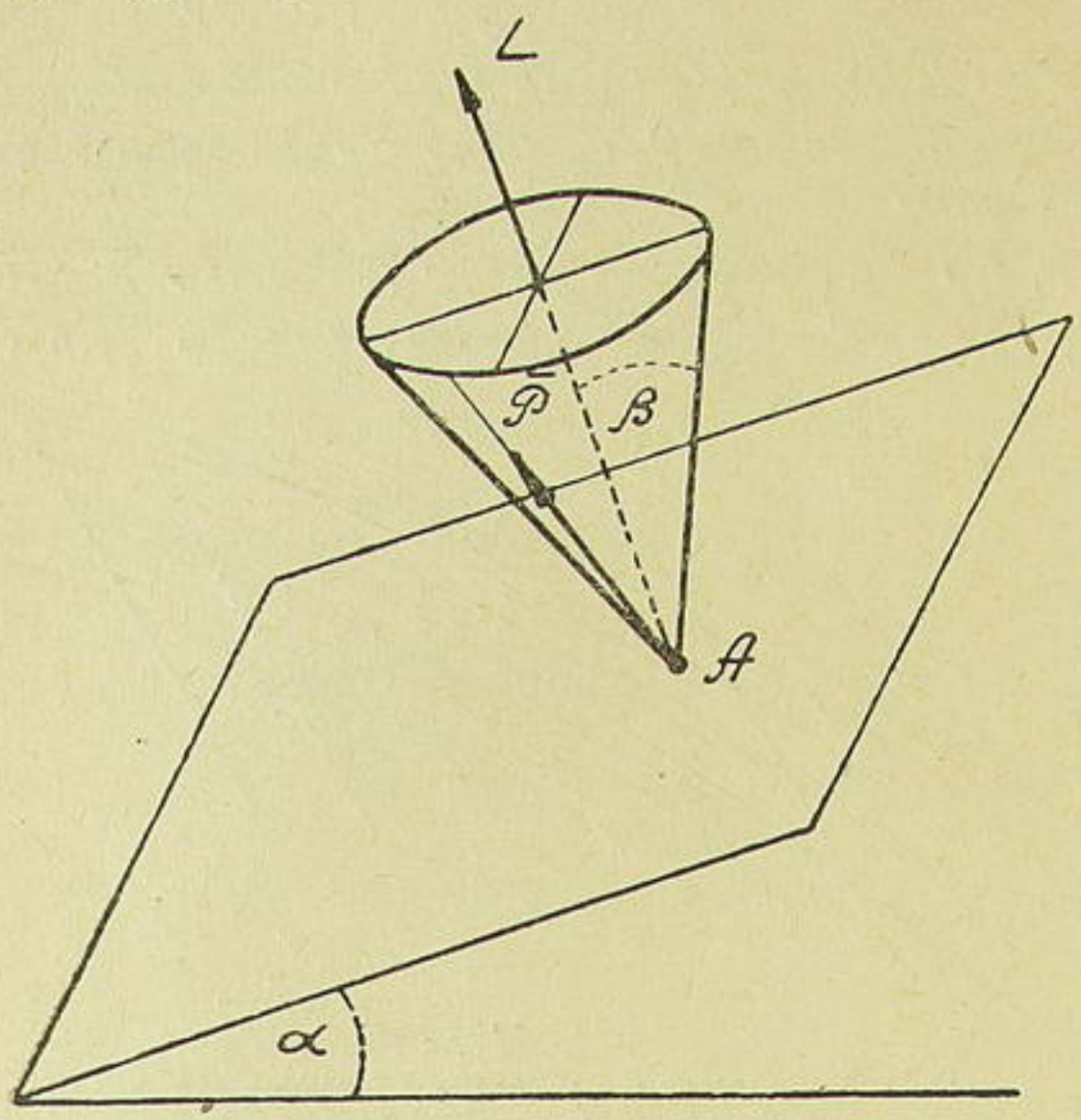


Նկ. 143

Ակնհայտ է, որ այդ հավասարություններում $\cos\varphi_1$ *և* $\cos\varphi_2$ *և* $\sin(\varphi_1+\varphi_2)$, *կարելի է աբստրահացնել* l_1, *և* l_2 *և* h*-ի միջոցով:*

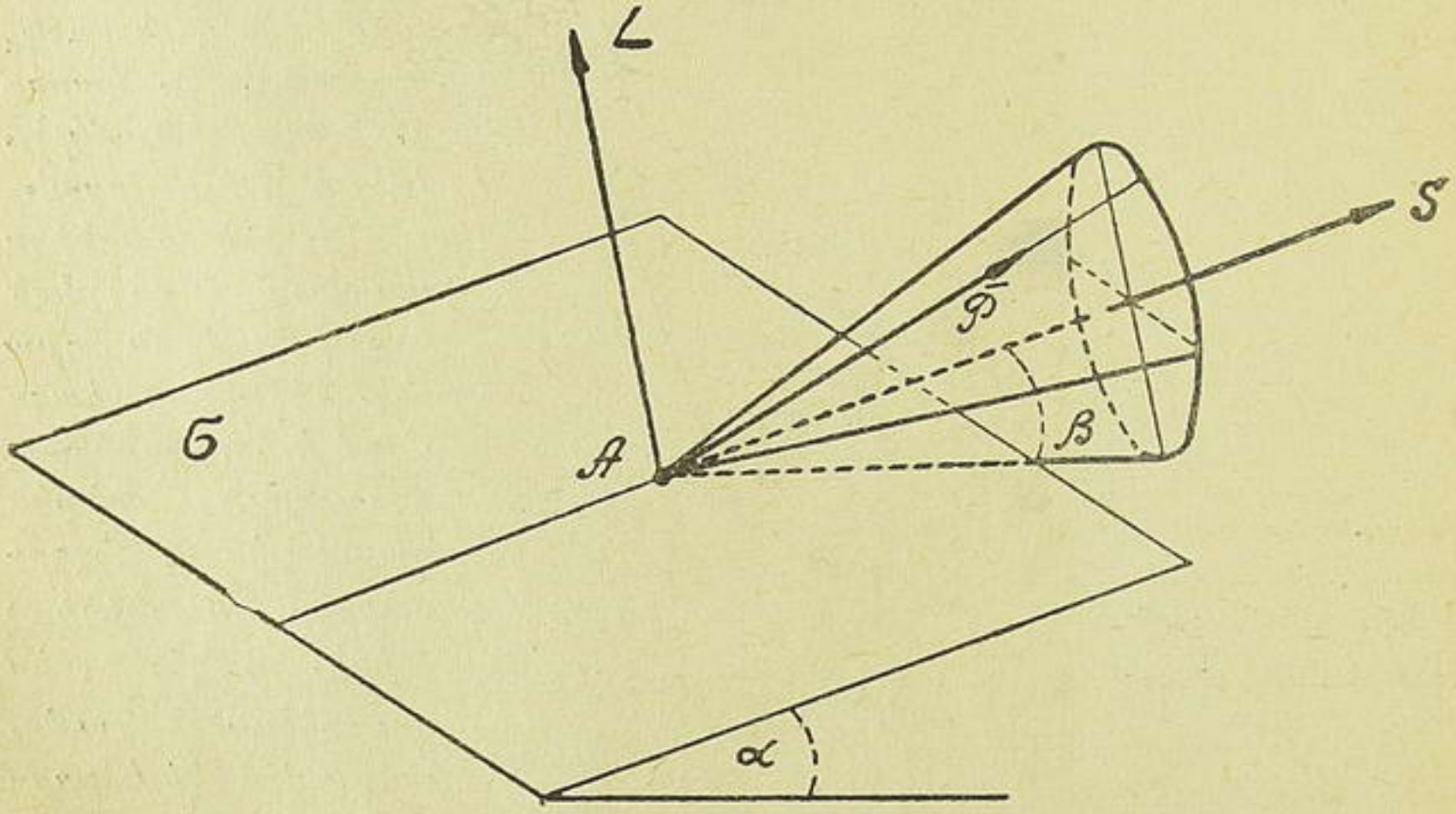
4. A *մասնիկը գտնվում է չհղկված* σ *հարթության վրա (նկ. 143), որը կազմում է հորիզոնի հետ* α *անկյունը: Գիտենալով շփման* k *գործակիցը և մասնիկի* $\overline{Q}$ *կշիռը, գտնել* σ*-ին զուգահեռ այն* $\overline{P}$ *ուժը, որն ի վիճակի է շարժել A-ն AC ուղղությամբ.* $\angle SAC=\varphi$:

5. $\overline{Q}$ կշիռ ունեցող A մասնիկը (նկ. 144), գտնվում է չհղկված σ հարթության վրա, σ-ն կազմում է α անկյունը հորիզոնի հետ։ A-ին կիրառված է $\overline{P}$ ուժը, որի չափը հաստատուն է։ Որոշել, թե ինչպես կփոխվի $\overline{R}_{\sigma_1 \max}$-ը, եթե փոխենք $\overline{P}$-ի ազդման գիծն այնպես, որ նա միշտ համընկնի նկարած կոնի ծնիչի հետ։ Կոնի առանցքն ուղղահայաց է σ-ին։



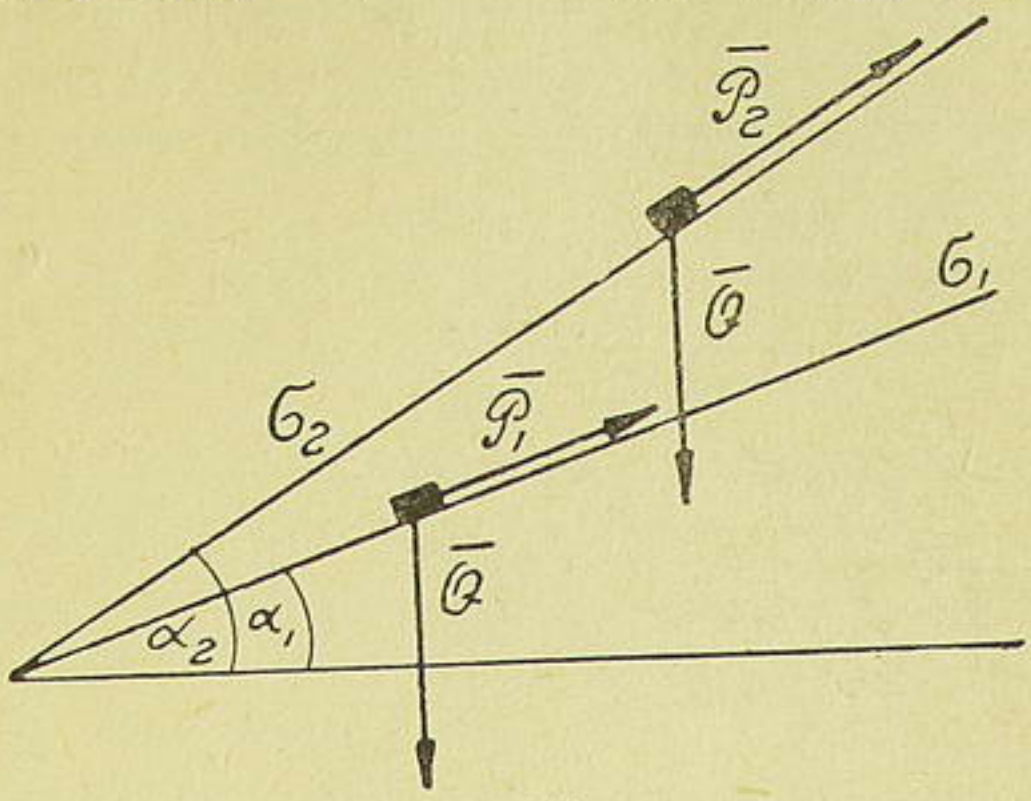
Նկ. 144

6. $\overline{Q}$ կշիռ ունեցող A մասնիկը (նկ. 145) գտնվում է չհղկված σ հարթության վրա. σ-ն կազմում է α անկյունը հորիզոնի հետ։ A-ին կիրառված է $\overline{P}$ ուժը, որի ափը հաստատուն է։ Որոշել, թե ինչպես կփոխվի $\overline{R}_{\sigma_1 \max}$-ը, եթե փոխենք $\overline{P}$-ի ազդման գիծն այնպես, որ նա միշտ համընկնի նկարած կոնի ծնիչի հետ։ Կոնի առանցքը σ-ի վրա է և նույնպես կազմում է հորիզոնի հետ α անկյունը։



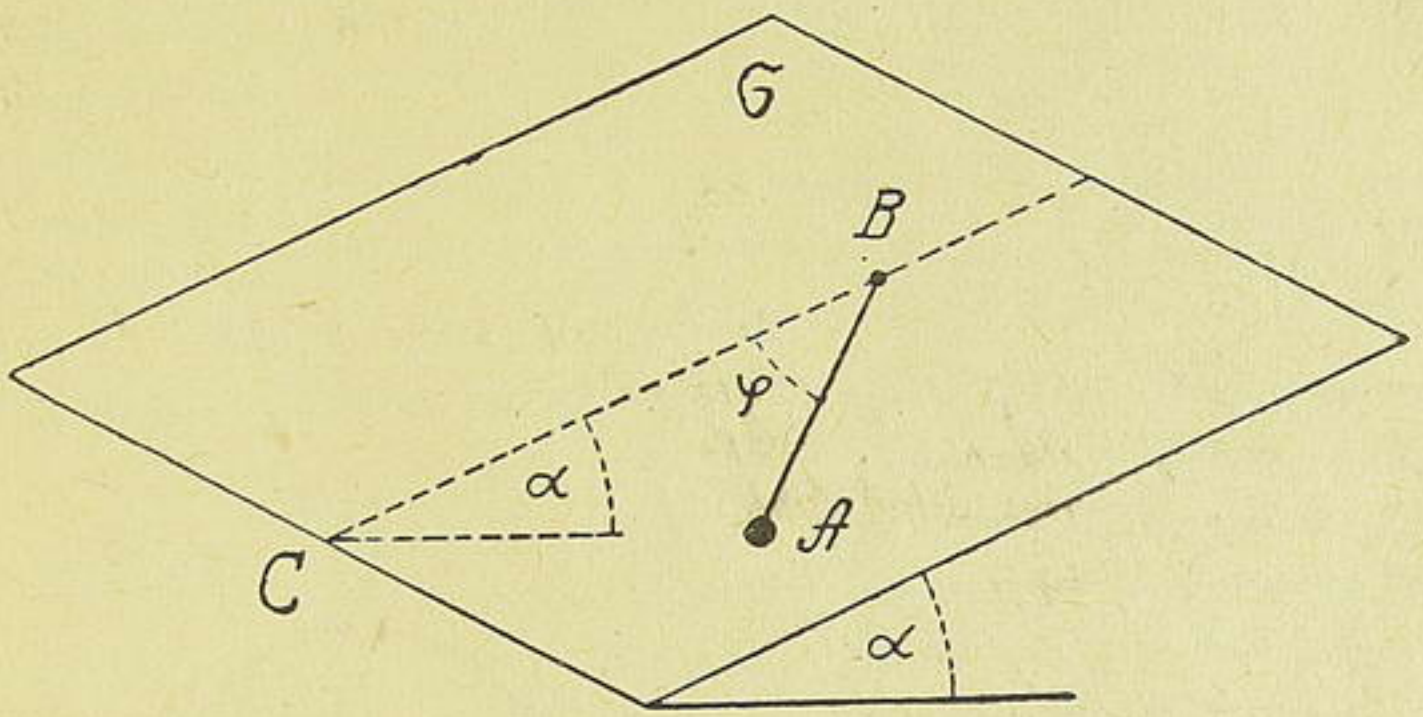
Նկ. 145

7. $\overline{Q}$ կշիռ ունեցող մասնիկը գտնվում է չհղկված σ հարթության վրա, որը կարող է պտտվել հորիզոնական առանցքի շուրջը (նկ. 146)։ Երբ σ-ն կազմում է հորիզոնի հետ α_1 անկյուն, այն՝ σ-ին զուգահեռ և դեպի վեր ուղղված ամենամեծ ուժը, որի դեպքում դեռ հնարավոր է մասնիկի հավասարակշռությունը, հավասար է $\overline{P}_1$։



Նկ. 146

Երբ σ-ն կազմում է հորիզոնի հետ α_2 անկյուն ($\alpha_2 > \alpha_1$), այն՝ σ-ին զուգահեռ և դեպի վեր ուղղված ամենափոքր ուժը, որի դեպքում դեռ հնարավոր է հավասարակշռությունը, հավասար է $\overline{P}_2$։ Գիտենալով, որ $P_2 = P_1$, որոշել փ անկյունը։



Նկ.

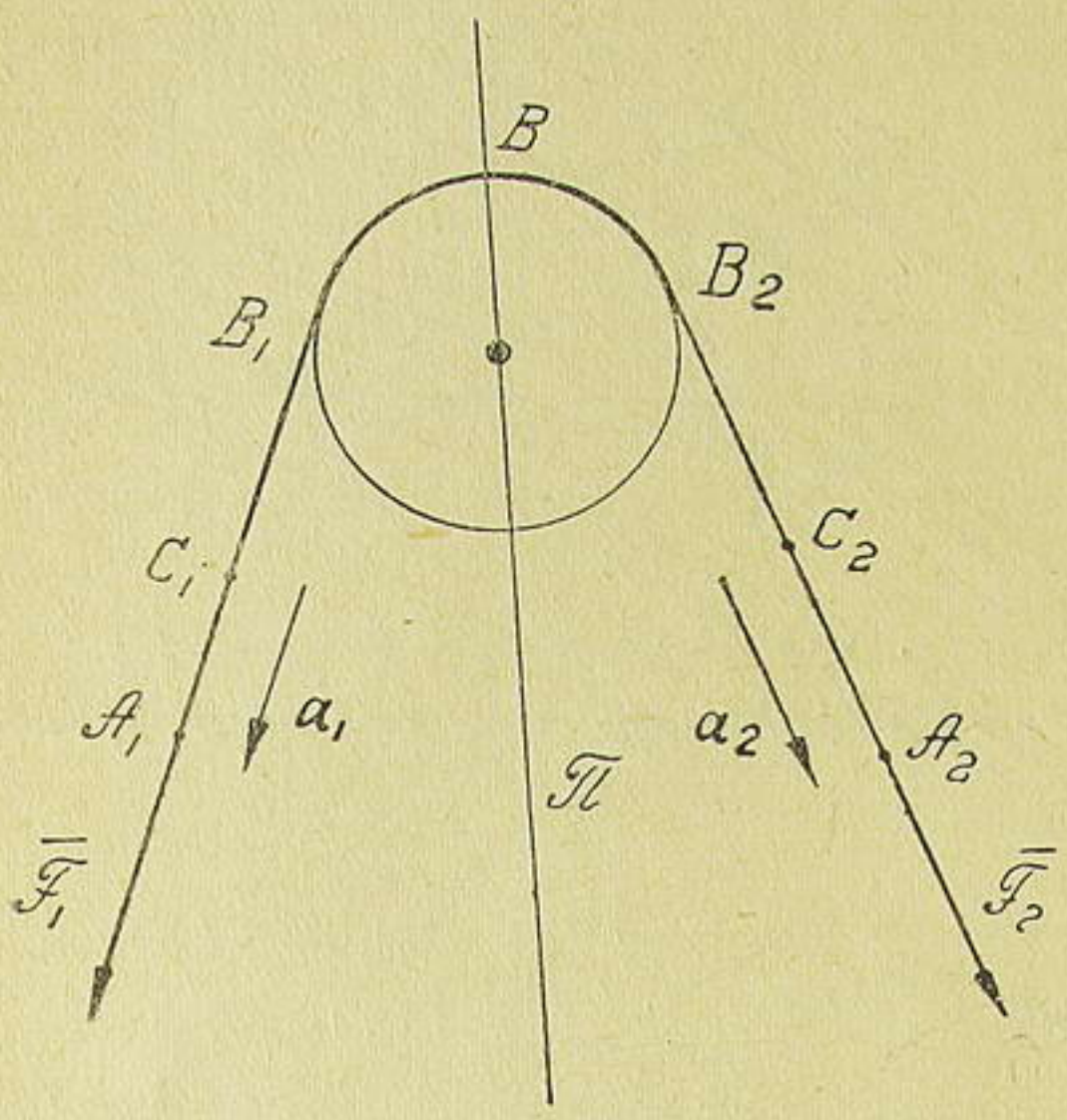
8. Թելի մի ծայրն ամրացված է չհղկված σ հարթության B կետում, իսկ մյուս ծայրից կապված է A մասնիկը, որը գտնվում է σ-ի վրա (նկ. 147)։ σ-ն կազմում է հորիզոնի հետ α անկյուն, իսկ թելի կազմած անկյունը ամենամեծ թեքության BC գծի հետ նշանակված է փ։ Որոշել փ անկյան այն արժեքները, որոնց դեպքում A մասնիկը կլինի հավասարակշռության մեջ։

ՁԱԽԱՐԱԿԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

51, 52 պարագրաֆներում տրվում են խնդիրներ լուծելու համար անհրաժեշտ մի շարք տեղեկություններ։ Այստեղ շարադրված նյութի սիստեմատիկ մշակումը մասամբ կատարված է XIII գլխում մասամբ էլ

մտնում է կինեմատիկայի դասընթացում բացատրված թեքերի հավասարակշռության տեսության մեջ։

§ 51. Թեքի հավասարակշռությունը ածուռ ճախարակի վրա։ *Ճախարակ է կոչվում կլոր սկավառակը, որն ընդունակ է պտտվելու իր հարթության ուղղահայաց և իր կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջը։*



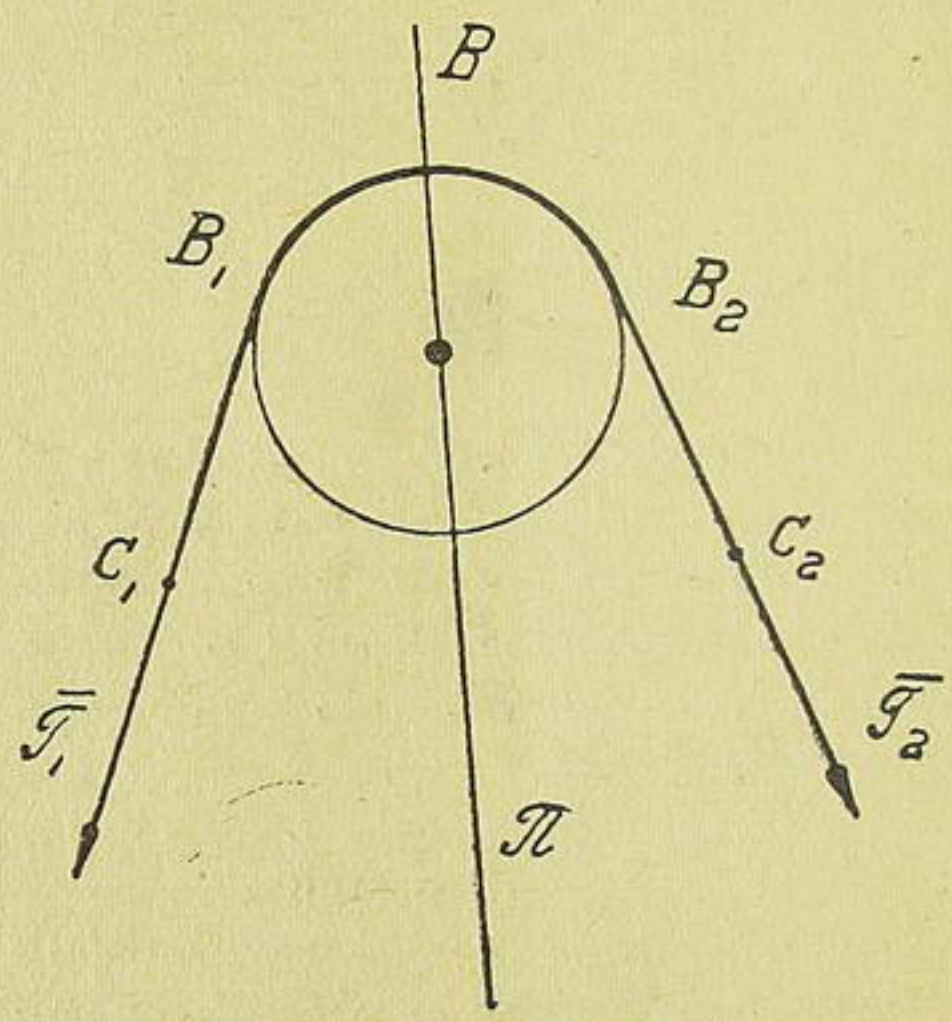
Նկ. 148ա

Հետագա բոլոր դատողությունները հիմնված են այն ենթադրության վրա, որ սկավառակի և առանցքի միջև շփում չկա։

Թող ճախարակի վրայից անցկացված անկշիռ, անձգելի և ճկուն թելի A_1 և A_2 ծայրերին կիրառված են համապատասխանաբար $\overline{F}_1$ և $\overline{F}_2$ ուժերը (նկ. 148ա)։ Ցույց տանք որ՝

(VI8) *Եթե այդ ուժերի չափերը հավասար են, և յուրաքանչյուր ուժի ազդման գիծը համընկնում է թելի համապատասխան ճյուղին, ապա թելը (ճախարակի վրա) հավասարակշռության մեջ կլինի։*

Իսկապես, դեն ձգենք մտքով թելի C_1A_1 և C_2A_2 մասերը, ըստ որում C_1 և C_2 այնպես ընտրենք, որ $B_1C_1 = B_2C_2$։ π հարթությունը անցկացնելով ճախարակի առանցքով և B_1B_2 աղեղի B միջակետով, կնկատենք, որ $C_1B_1BB_2C_2$ թելը սիմետրիկ է π-ի նկատմամբ։ π-ի նկատմամբ սիմետրիկ են նաև $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ լարումները (նկ. 148բ), որովհետև թելի անկշռության և ճկունության հետևանքով $\overline{T}_1 = \overline{F}_1$, և $\overline{T}_2 = \overline{F}_2$, այդ պատճառով էլ $T_1 = T_2$ (ըստ պայմանի $F_1 = F_2$)։ Թելի և լարումների սիմետրիկ լինելուց հետևում է, որ եթե հնարավոր է շարժումը a_1 սլաքի ցույց



Նկ. 148բ

ուված ուղղությամբ, ապա նույնքան էլ հնարավոր է շարժումը a_2 սլաքի ցույց ուված ուղղությամբ։ Մինչդեռ չի կարող տեղի ունենալ մի շարժում, որը հավասարաչափ հնարավոր լիներ երկու հակառակ ուղղությամբ։ Հետևապես $C_1 B_1 B B_2 C_2$ թելը պետք է հավասարակշռության մեջ լինի։ Եթե թելի $C_1 B_1 B B_2 C_2$ մասի փոխարեն քննարկենք $A_1 B A_2$ ամբողջ թելը, ապա վերջինս նույնպես պետք է հավասարակշռության մեջ լինի, որովհետև $C_1 A_1$ և $C_2 A_2$ մասերը (ինչպես և ամբողջ թելը) անկշիռ են։

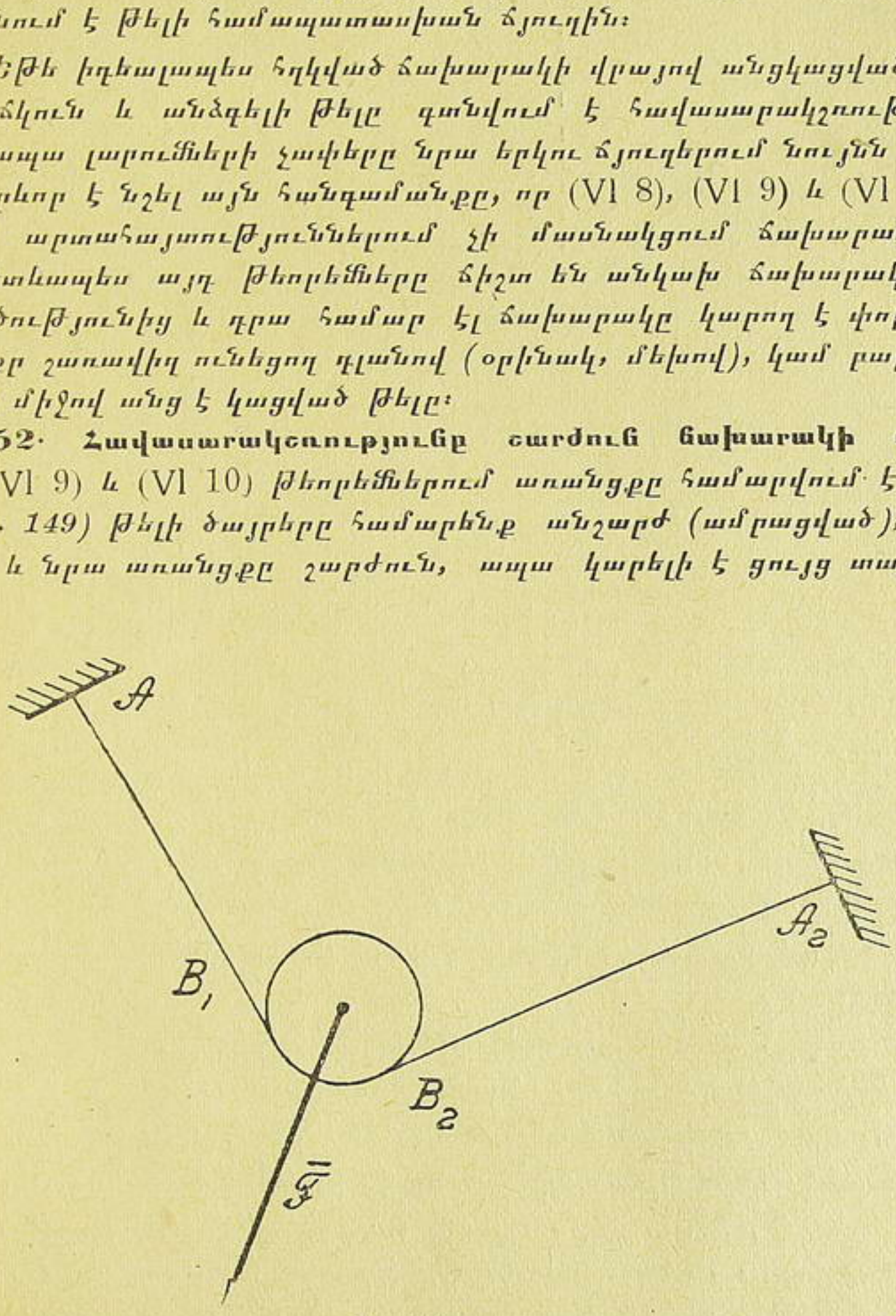
Հետևյալ (Vl 9) *և* (Vl 10) *երկու թեորեմները համարժեք են միմյանց և հակադարձ* (Vl 8) *թեորեմին։*

(Vl 9) *Եթե իդեալապես հղկված ճախարակի վրայով անցկացված անկշիռ, ճկուն և անձգելի թելը գտնվում է հավասարակշռության մեջ, ապա թելի ծայրերին կիրառված $\overline{F}_1$ և $\overline{F}_2$ ուժերի չափերը հավասար են և այդ ուժերից յուրաքանչյուրի ազդման գիծը համընկնում է թելի համապատասխան ճյուղին։*

(Vl 10) *Եթե իդեալապես հղկված ճախարակի վրայով անցկացված անկշիռ, ճկուն և անձգելի թելը գտնվում է հավասարակշռության մեջ, ապա լարումների չափերը նրա երկու ճյուղերում նույնն են։*

Կարևոր է նշել այն հանգամանքը, որ (Vl 8), (Vl 9) *և* (Vl 10) *թեորեմների արտահայտություններում չի մասնակցում ճախարակի շառավիղը։ Հետևապես այդ թեորեմները ճիշտ են անկախ ճախարակի շառավիղի մեծությունից և դրա համար էլ ճախարակը կարող է փոխարինվել շատ փոքր շառավիղ ունեցող պլանով (օրինակ, մեխով), կամ բարակ օղակով, որի միջով անց է կացված թելը։*

§ 52. Հավասարակշռությունը շարժուն ճախարակի դեպքում։ (Vl 8), (Vl 9) *և* (Vl 10) *թեորեմներում առանցքը համարվում է անշարժ։ Եթե (նկ. 149) թելի ծայրերը համարենք անշարժ (ամրացված), իսկ ճախարակը և նրա առանցքը շարժուն, ապա կարելի է ցույց տալ, որ լա-*

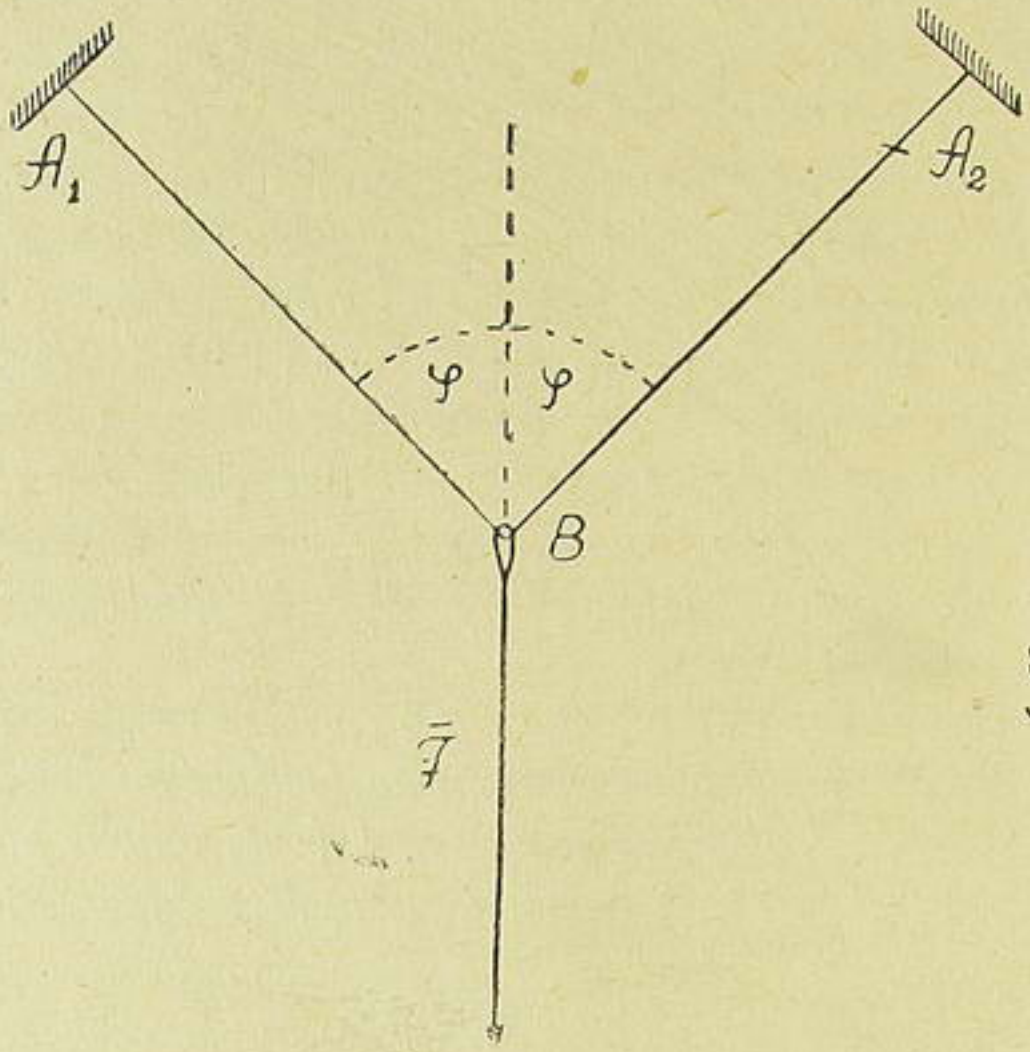


Նկ. 149

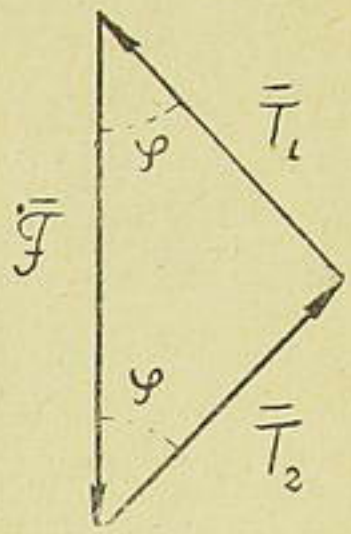
բուծների չափի հավասարությունը թելի երկու ճյուղերում հանդիսանում է նրա հավասարակշռության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը, այսինքն՝

եթե ծայրերն ամրացված թելի վրա գտնվում է մի շարժուն ճախարակ, ապա ա) թելի երկու ճյուղերի լարուծների հավասար լինելու դեպքում (Vl 11) թելը կգտնվի հավասարակշռության մեջ, և ընդհակառակը, բ) թելի հավասարակշռության դեպքում լարուծները նրա ճյուղերում պետք է հավասար լինեն։

Այս թեորեմի մեջ չի մտնում նույնպես ճախարակի շառավիղի մեծությունը, այնպես որ ճախարակը կարելի է փոխարինել շատ բարակ մեխով կամ հղկված բարակ օղակով, որը հագցված է թելին և ընդունակ է սահելու թելի երկարությամբ (նկ. 150ա և 150բ)։



նկ 150ա



նկ. 150բ

Թող թելի B ծայրին կիրառված է $\bar{F}$ ուժը։ Ցույց տանք, որ՝

եթե ճկուն, անկշիռ թելին հագցված օղակը, որին կիրառված է F (Vl 12) ուժը հավասարակշռության մեջ է, ապա թելի երկու ճյուղերով կազմված A_1BA_2 անկյան կիսորդը հանդիսանում է $\bar{F}$-ի ազդման գիծը։

Եվ իսկապես, թող $\bar{T}_1$ և $\bar{T}_2$-ը թելի BA_1 և BA_2 ճյուղերի լարումներն են։ Իննաարկենք B կետը։ Նրան կիրառված են $\bar{F}$, T_1 և T_2 ուժերը (նկ. 150 բ), ըստ որում համաձայն (Vl 11) $T_1=T_2$։ Ուստի այդ ուժերով կազմվող եռանկյունին հավասարասրուն կլինի, հետևապես $(T_1, \bar{F})=(\bar{F}, \bar{T}_2)$ կամ $(\overline{BA}_1, \bar{F})=(\bar{F}, \overline{BA}_2)$։ Հենց այդ էլ հարկավոր էր ապացուցել։

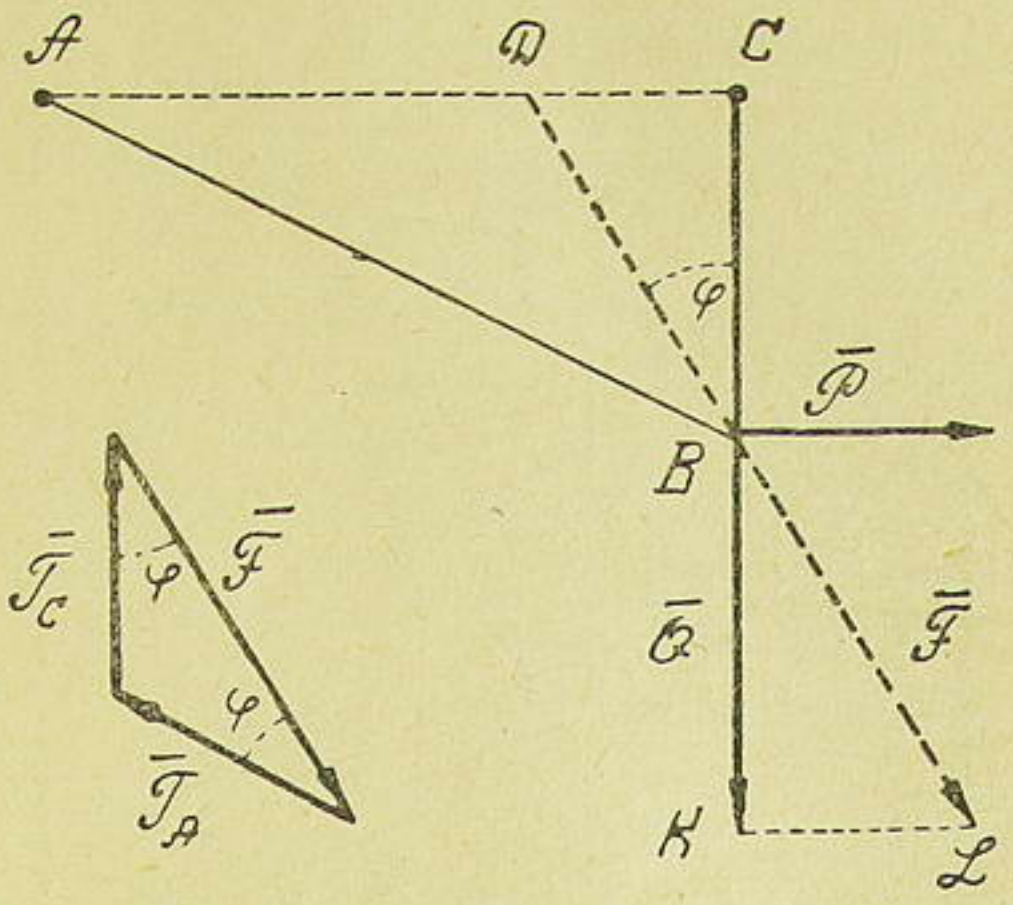
§ 53. Խնդիր։ *Իդեալապես հղկված փոքրիկ B օղակը (նկ. 151) հագցված է ABC թելին, որի A և C ծայրերն ամրացված են և գտնվում են*

մի հորիզոնականի վրա։ Թելի երկարությունն է l, AC=a, օղակի կշիռն է Q։ Որոշել

1°. այն հորիզոնական $\bar{P}$ *ուժը, որը հարկավոր է կիրառել օղակին թելի* BC *ճյուղը ուղղաձիգ պահելու համար։*

2°. թելի T *լարումը (և նկատի ունենալով, որ* ABC *թելը և* $\bar{Q}$, $\bar{P}$ *ուժերը գտնվում են մի ուղղաձիգ հարթության վրա)։*

1°. $\bar{Q}$ *և* $\bar{P}$*-ի համազորը նշանակենք* $\bar{F}$։ *Համաձայն* (VI 12) $\bar{F}$*-ը բաժանում է* ABC *անկյունը հավասար մասերի, այնպես, որ* $\bar{F}$*-ի ազդման գիծը համընկնում է այդ անկյան* BD *կիսորդի հետ։ Դրա համար էլ* △BCD *նման է ուժերի* BLK *եռանկյանը և հետևապես* P : Q=DC : BC։



Նկ. 151

Մյուս կողմից ըստ կիսորդի հատկության՝

$$DC : AD = BC : BD,$$

կամ BC *և* DC *համապատասխանաբար նշանակելով* s *և* b, *կստանանք*

$$\frac{b}{a-b} = \frac{s}{l-s}$$

կամ $\frac{b}{s} = \frac{a}{l} = \operatorname{tg}\varphi$, $\varphi = \angle DBC$։

Այսպիսով $\frac{P}{Q} = \frac{a}{l}$, $P = Q\frac{a}{l}$։

2°. Ըստ (VI 11) *թելի* BA *և* BC *մասերի* $\bar{T}_A$ *և* $\bar{T}_C$ *լարուժերն ունեն միևնույն չափը. այդ չափը նշանակենք* T։

Որովհետև $\bar{T}_C \uparrow\uparrow \overline{BC}$, $\bar{T}_A \uparrow\uparrow \overline{BA}$,

ապա $\varphi = (\bar{T}_A, \bar{F}) = (\bar{F}, \bar{T}_C)$ *և* $T = \frac{F}{2\cos\varphi}$,

բայց $F = \frac{Q}{\cos\varphi}$ $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{l}{\sqrt{l^2+a^2}}$։

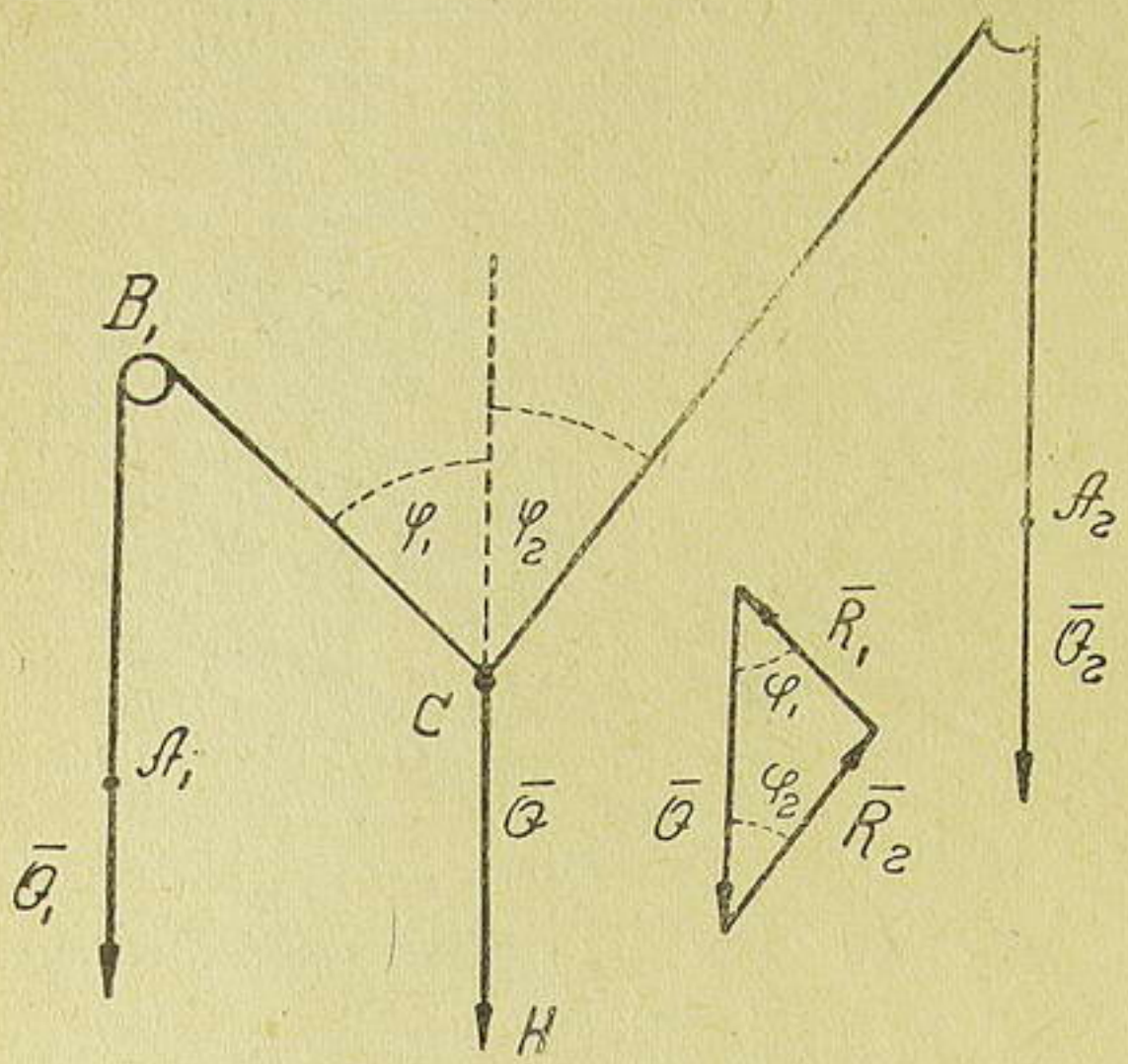
Այդ պատճառով էլ

$$T = \frac{Q}{2\cos^2\varphi} = \frac{Q}{2}\frac{l^2+a^2}{l^2}.$$

Խնդիր.

A_1B_1C *և* A_2B_2C *թելերի ծայրերը միացված են և կազմում են* C *հանգույցը, որից կախված է* $\bar{Q}$ *կշիռ ունեցող ծանրոցը (նկար 152)։ Թե-*

լերը համապատասխանաբար անց են կացված իդեալապես հղկված B_1 *և* B_2 *մեխերի վրայից:* A_1 *և* A_2 *ծայրերից կախված են* $\overline{Q}_1$ *և* Q_2 *կշիռ ունեցող ծանրոցները: Որոշել՝*



Նկ. 152

1°. $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$, $\overline{Q}$ *ուժերն ինչ պայմանի պիտի բավարարեն, որպեսզի հնարավոր լինի թելերի հավասարակշռությունը:*

2°. Թելերի դասավորությունը հավասարակշռության վիճակում:

3°. Եթե $\overline{Q}$ *ծանրոցը կախված է ոչ թե C հանգույցից, այլ իդեալապես հղկված օղակից, որը կարող է սահել* $A_1B_1CB_2A_2$ *թելի երկարությամբ, ապա, ինչպիսին պիտի լինեն* Q_1 *և* Q_2*-ը, որպեսզի օղակը կարողանա հավասարակշռության մեջ գտնվել:*

1°. Ենթադրվում է, որ թելը անկշիռ և ճկուն է: Ուստի համաձայն (VI 10) A_1B_1C *թելի* T_1 *լարումը նույնն է նրա բոլոր կետերում և հավասար է* Q_1*-ի,* $T_1=Q_1$*: Ճիշտ նույն կերպով էլ* A_2B_2C *թելի լարումը՝* $T_2=Q_2$*:*

Անջատենք մտքով C կետը և քննարկենք նրա հավասարակշռությունը: C կետին կիրառված է նրանից կախված ծանրոցի $\overline{Q}$ *կշիռն և* A_1B_1C *ու* A_2B_2C *թելերի* $\overline{R}_1$ $\overline{R}_2$ *հակազդումները (նկ. 152):*

$$\overline{R}_1 \uparrow\uparrow CB_1,\ \overline{R}_2 \uparrow\uparrow CB_2,\ R_1=T_1=Q_1,\ R_2=T_2=Q_2:$$

Եթե C-ն հավասարակշռության մեջ է $\overline{Q}$, $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ *ուժերը պետք է կազմեն փակ եռանկյուն: Ինչպես հայտնի է, եռանկյան մեջ երկու կողմերի չափերի գումարը մեծ է երրորդ կողմի երկարությունից:*

Այնպես որ $R_1+R_2>Q$*,*

կամ որ միևնույնն է $Q_1+Q_2>Q$ . . . . . *(α):*

Հետևապես եթե Q_1, Q_2 *կշիռների գումարը փոքր լինի Q կշռից, ապա C կետը (և* $A_1B_1CB_2A_2$ *թելը) ոչ մի դեպքում հավասարակշռության մեջ չի լինի:*

2°. Եթե (α) պայմանը կատարված է, ապա գոյություն ունի միայն մի դիրք, որում C-ն, նրա հետ միասին և A_1C, A_2C *թելերը, հավասարակշռության մեջ կլինեն:*

Եվ իսկապես, երբ տրված են եռանկյան երեք կողմերի մեծությունները (R_1, R_2, Q) *և այդ կողմերից մեկի ուղղությունը (Q ուժը ուղղա-*

ձիգ է), ապա դրանով կատարելապես որոշվում են մյուս երկու կողմերի ուղղությունները (R_1 և $\overline{R}_2$)։ Բայց $\overline{R}_1 \uparrow\uparrow \overline{CB}_1$, և $\overline{R}_2 \uparrow\uparrow \overline{CB}_2$, և B_1 ու B_2 կետերն էլ տրված են։ Հետևապես B_1C և B_2C հավասարակշռության դեպքում բռնում են կատարյալ որոշ դիրք։

Համապատասխանաբար նշանակելով $(\overline{B_1C}, \overline{Q})$ և $(\overline{Q}, B_2C)$ անկյունները φ_1 և φ_2, իսկ B_1CB_2 անկյունը φ, կունենանք

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,\ \sin\varphi_1 : \sin\varphi_2 : \sin\varphi = R_2 : R_1 : Q = Q_2 : Q_1 : Q:$$

Այստեղից որոշվում են φ_1 և φ_2 անկյունները, այսինքն թելի B_1C և B_2C ճյուղերի դիրքերը հավասարակշռության վիճակում։

3°. Ենթադրենք $A_1B_1CB_2A_2$-ը մի թել է, որով ազատ կարող է սահել C օղակը, նրա կախված Q կշիռ ունեցող ծանրոցով։ Ըստ (VI 12) հավասարակշռության դեպքում Q-ի ազդման գիծն CH հանդիսանում է $B_1CB_2=(R_1, R_2)$ անկյան կիսորդը.

$$\text{այնպես որ } (\overline{R}_1, \overline{CH}) = (\overline{CH}, \overline{R})_2$$

Համաձայն (VI 11) $R_1=R_2$. բայց $R_1=Q_1$, $R_2=Q_2$։

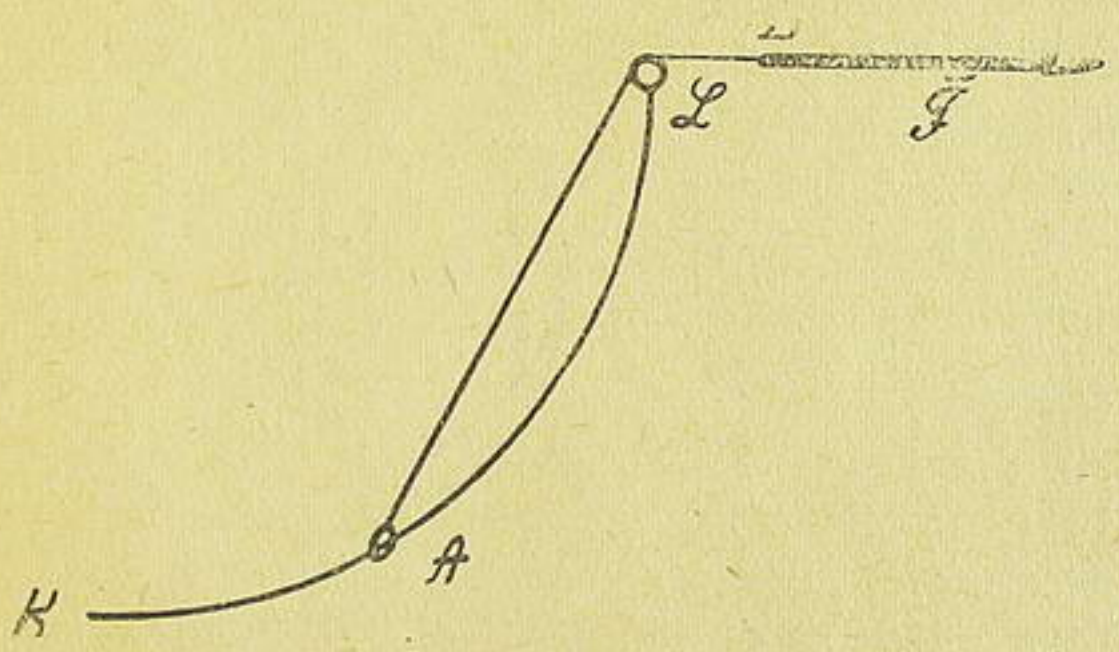
Այդ պատճառով էլ օղակի հավասարակշռությունը հնարավոր է միայն $Q_1=Q_2$ և $2Q_1>Q$-ից պայմաններում։ Վերջին անհավասարակշռությունը ստացվում է (α) անհավասարությունից՝ $Q_1+Q_2>Q$, որում Q_2 փոխարինված է Q_1։

Խնդիրներ.

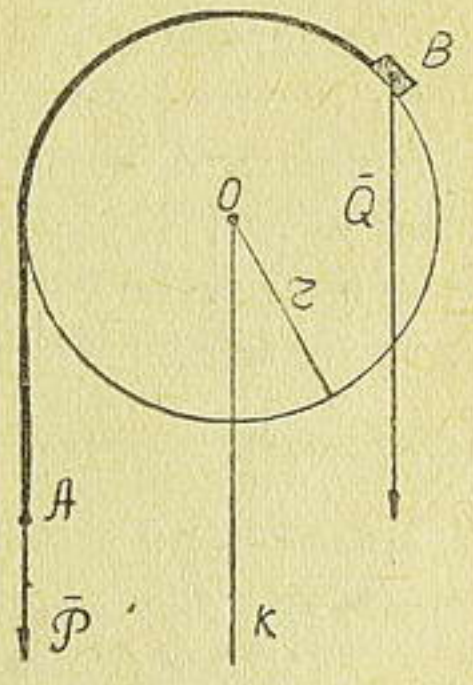
10. Ձգվված K կվանդրանտի L կետում գտնվում է իդեալապես հղկված մի շատ փոքր ճախարակ, որի վրայով անցկացված է ALB թելը (նկ. 153)։ A կետում թելից կախված է $\overline{Q}$ կշիռ ունեցող մի ծանրոց, իսկ B կետին կիրառված է հորիզոնական $\overline{F}$ ուժը, որի չափը կարող է փոխվել ըստ հայեցողության։ Դրա շնորհիվ ծանրոցը կվանդրանտի վրա կարող է գտնվել հավասարակշռության մեջ բոլոր դիրքերում։

Գտնելով շփման δ անկյունը, որոշել թելի AL ճյուղի $\overline{T}$ լարումը և F-ի մեծագույն չափը։

11. Անկշիռ, ճկուն և անձգելի թելի B ծայրը գտնվում է իդեալապես հղկված գլանի մակերևույթի վրա, որի շառավիղն է r (նկ. 154)։ Թելի A



նկ. 153



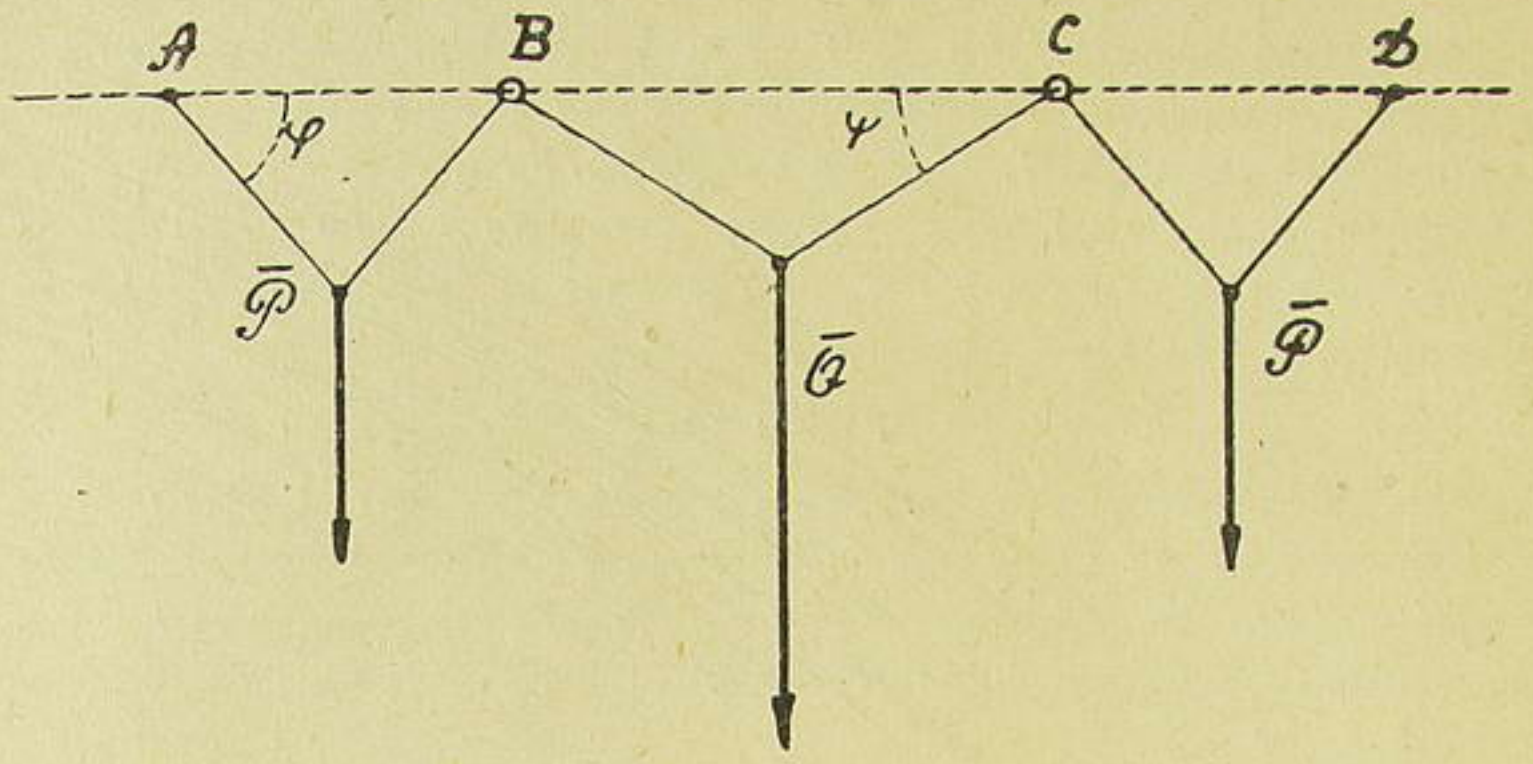
նկ. 154

ծայրը կախ է ընկած. B-ին կապված է $\overline{Q}$ ուժ ունեցող մի ծանրոց, A-ին՝ $\overline{P}$ ուժ ունեցող մի ծանրոց: Որոշել՝

1°. Ինչպիսի $\overline{Q}$ և $\overline{P}$ ուժերի դեպքում է հնարավոր հավասարակշռությունը:

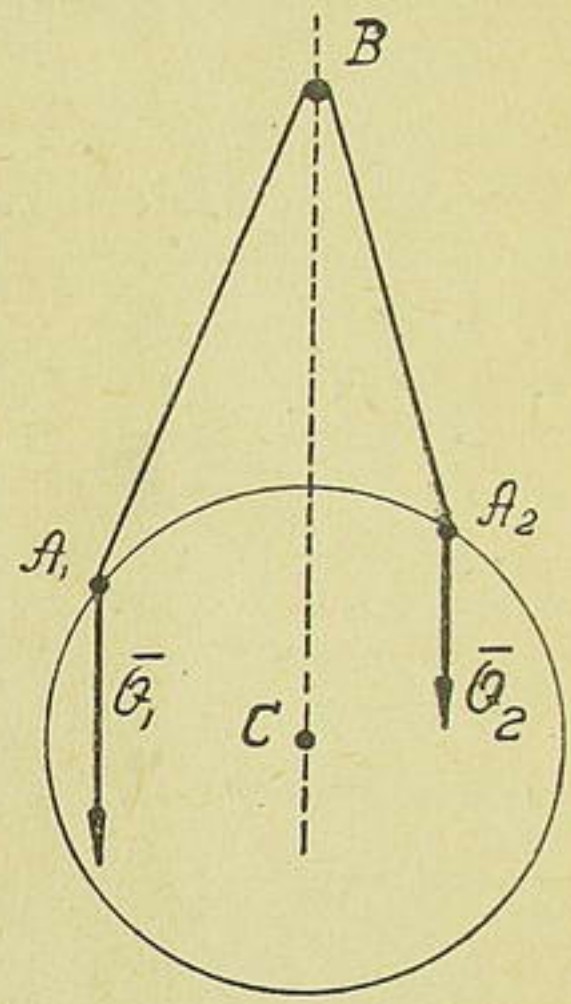
2°. Թելի հարթությունը գլանի առանցքի հետ ինչ անկյուն կկազմի հավասարակշռության վիճակում:

3°. KOB անկյունը, որտեղ OK-ը ուղղաձիգն է:



Նկ. 155

12. Շատ փոքր B և C ճախարակների վրայից անցկացված է մի թել, որի ծայրերն ամրացված են A և D կետերում (նկ. 155): A, B, C, D կետերը գտնվում են մի հորիզոնական ուղղի վրա: AB=CD=a, BC=b: Թելին հագցված են երեք օղակներ, որոնց կշիռները են P, Q, P: Որոշել φ. ψ անկյունների և $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ուժերի չափի միջև եղած կապակցությունը հավասարակշռության դիրքում:

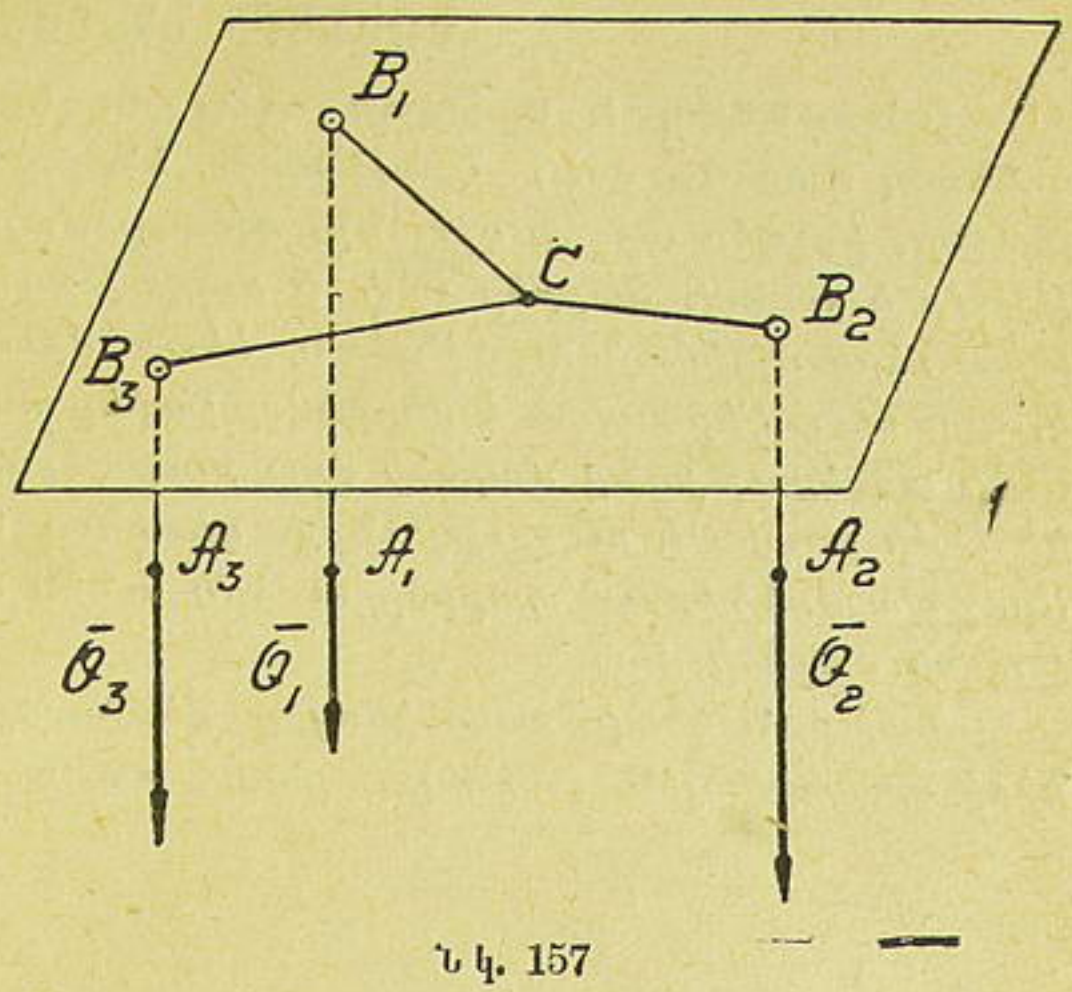


Նկ. 156

13. A_1 և A_2 օղակները (նկար 156), կարող են սահել իդեալապես հղկված ուղղաձիգ շրջանագծի ձև ունեցող կոշտ լարի վրայով: Օղակները միացված են հղկված B մեխի վրայով անցկացված ճկուն, անկշիռ և անձգելի թելով: B-ն գտնվում է շրջանագծի C կենտրոնի հետ մի ուղղաձիգի վրա: l-ը թելի երկարությունն է, r-ը— շրջանագծի շառավիղը $\left[CR<\left(\frac{l}{2}+r\right)\right]$: Որոշել թելերի l_1 և l_2 ճյուղերի երկարությունները հավասարակշռության դիրքում:

14. Հորիզոնական եռանկյունի կազմող B_1 B_2 B_3 կետերում (նկ. 157), ամրացված են 3 իդեալապես հղկված

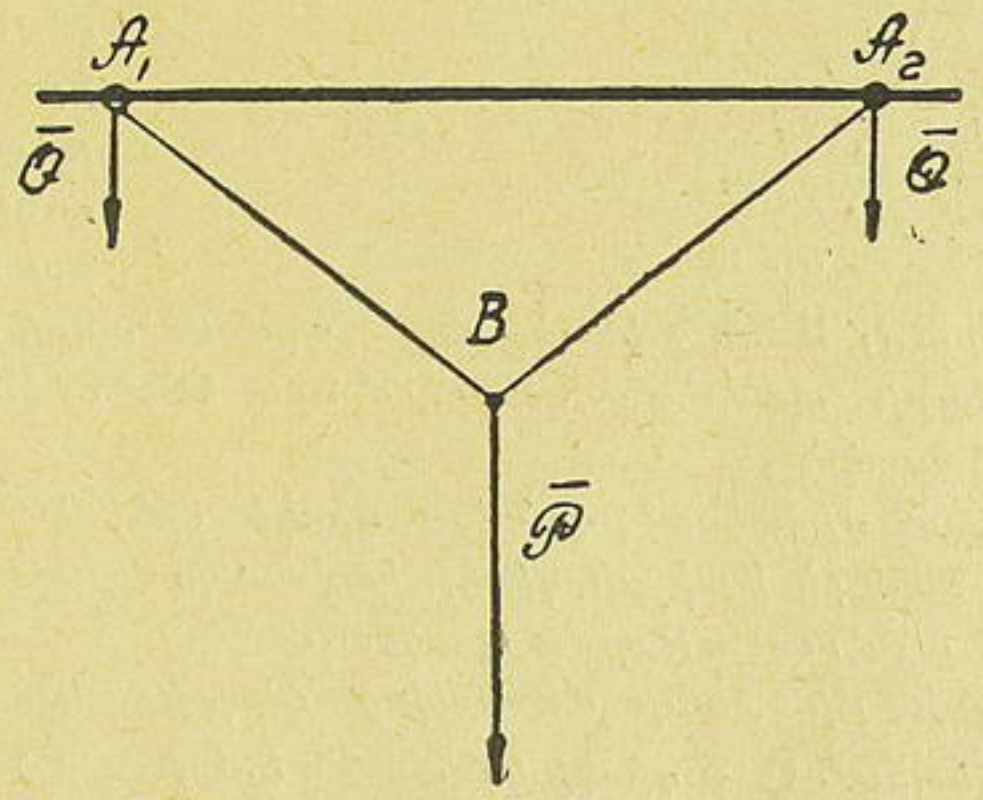
շատ փոքր օղակներ։ Յուրաքանչյուր օղակով անց է կացված մետաղե թել. թելերի երեք ծայրերը կապված են և կազմում են C հանգույցը, իսկ թելի յուրաքանչյուր A_1, A_2, A_3 ազատ կախ ընկած ծայրերից կախված են մետաղե ծանրոցներ, որոնց կշիռներն են համապատասխանաբար $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$։ Որոշել C հանգույցի դիրքը հավասարակշռության վիճակում։



Նկ. 157

15. Ճկուն անձգելի թելի ծայրերը (նկար 158), ամրացված են A_1, A_2 շատ փոքր օղակներին, որոնք կարող են շարժվել հորիզոնական ձողի վրայով։ Յուրաքանչյուր օղակի կշիռը հավասար է $\bar{Q}$. Թելի վրայով կարող է սահել B օղակը, որի կշիռն է $\bar{P}$։

Դիտենալով շփման k գործակիցը ձողի և օղակների միջև, որոշել ամենամեծ A_1A_2 հեռավորությունը, որի դեպքում օղակները դեռ կարող են գտնվել հավասարակշռության մեջ։



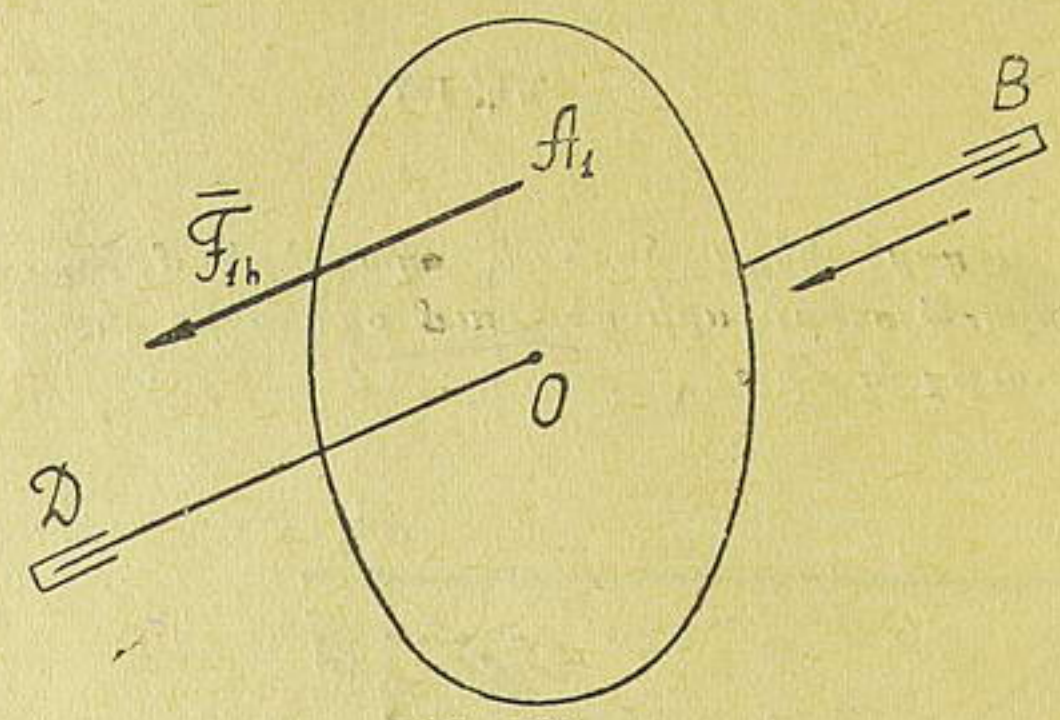
Նկ. 158

ԳԼՈՒԽ VII

ՈՒԺԻ ՄՈՄԵՆՏԸ ԿԵՏԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ. ՈՒԺԻ ՄՈՄԵՆՏԸ ԱՌԱՆՑՔԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ

§ 54. Ինչից է կախված ուժի ազդեցությունը վերջավոր չափեր ունեցող մարմնի վրա։ *Նյութական կետին կիրառված ուժի ազդեցությունը, ինչպես արդեն գիտենք, միանգամայն բնորոշվում է նրա ուղղությամբ և չափով։ Տարբեր չափ և ուղղություն ունեցող ուժերի ազդեցությունները միևնույն նյութական կետի վրա տարբեր են։ Բոլորովին այլ է, երբ ուժը կիրառված է վերջավոր չափեր ունեցող մարմնի որևէ կետում։ Ուժի ազդեցությունը մարմնի վրա բնորոշելու համար անհրաժեշտ է, բացի ուժի չափից և ուղղությունից, գիտենալ նաև նրա կիրառման կետը։ Որոշ պայմաններում տարբեր ուժերն ունեն ճշտորեն միևնույն ազդեցությունը մարմնի վրա։*

Նախքան կետի ստատիկայից վերջավոր չափեր ունեցող մարմինների ստատիկային անցնելը, ցույց տանք մի քանի օրինակներով, թե



Նկ. 159

ինչպես է փոփոխվում ուժի ազդեցությունը մարմնի վրա, երբ փոխվում են ուժի ազդման գիծը, կիրառման կետը, կամ ուղղությունը։

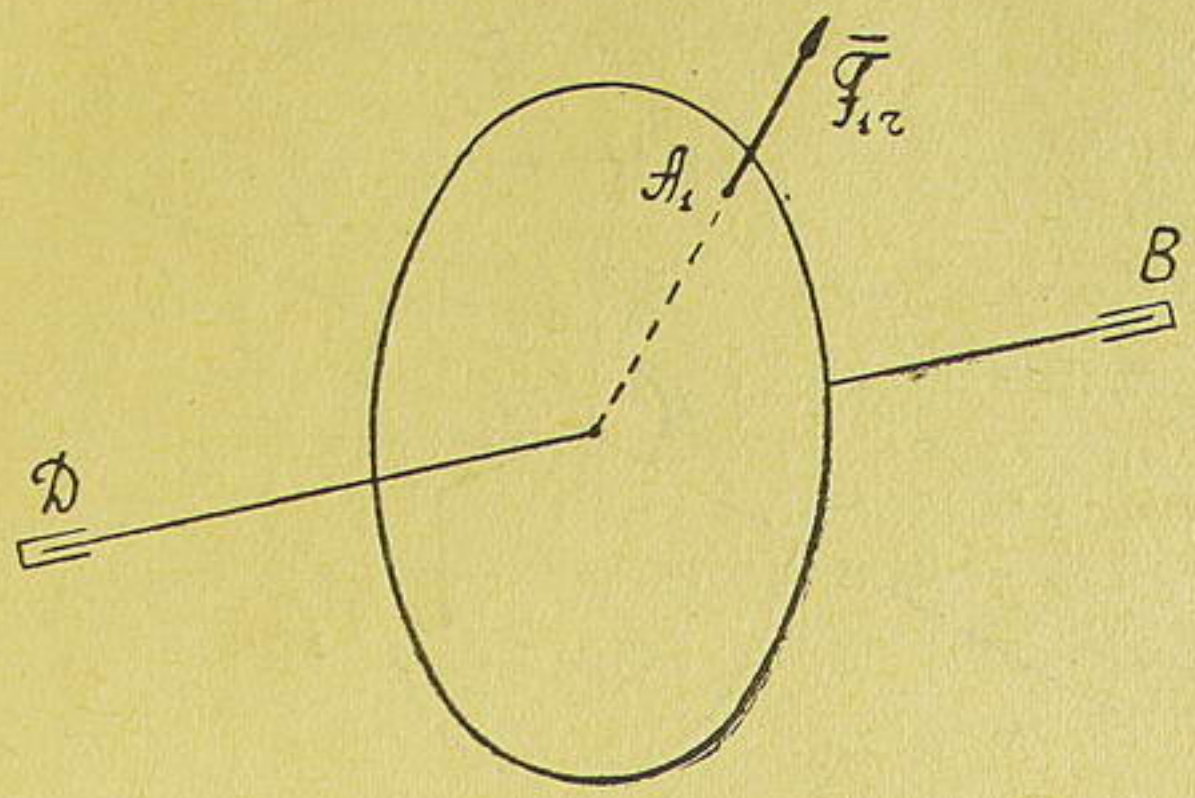
Դիտենք մի կլոր դիսկ (նկ. 159), որն անշարժ ամրացված է իր առանցքին։ Թող առանցքը լինի հորիզոնական և կարողանա ազատ պտտվել իր առանցքակալներում։ Ամեն տեսակի այլ շարժում առանցքի համար հնարավոր չէ։ Առանցքի պտտման դեպքում նրա հետ մեկտեղ կպտտվի նաև դիսկը և ընդհակառակը։

Եթե հանդիստ վիճակում գտնվող դիսկի որևէ կետին կիրառել ուժ, ապա այդ ուժը կամ չի խախտի դիսկի հավասարակշռությունը կամ առաջ կբերի այս կամ այն ուղղությամբ պտտում։

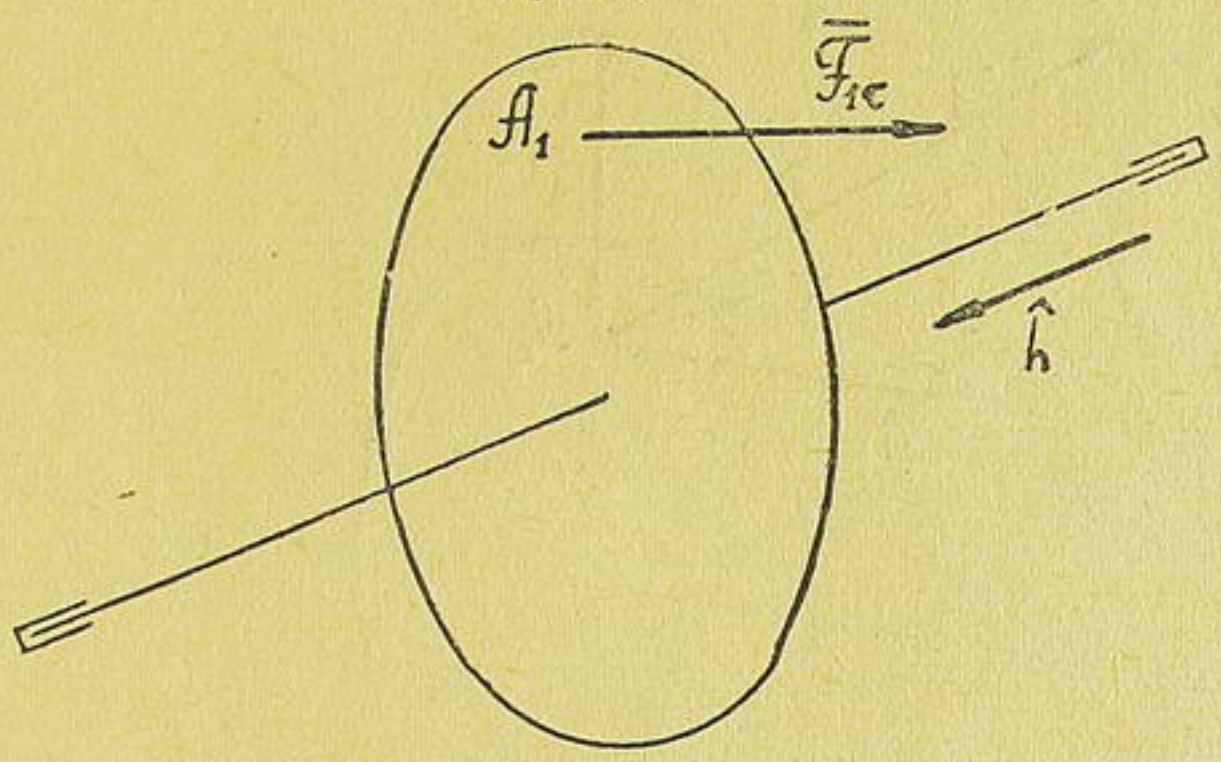
Նախ քննենք մի քանի մասնավոր դեպքեր. Թող ուժը կիրառված լինի դիսկի A կետում. O-ն դիսկի կենտրոնն է, $\overline{OA}=\bar{r}$. նշանակենք $\overline{BD}$-ին համաուղղահեռ միավոր վեկտորը $\bar{h}$-ով, իսկ $\hat{\tau}$-ով A կետում r շառավիղ ունեցող շրջանագծի շոշափողի միավոր վեկտորը՝ $\hat{\tau}=\bar{h}\times\hat{r}$։

Դիսկի տարբեր կետերի համար $\bar{r}$, $\hat{r}$ և $\hat{\tau}$ վեկտորները տարբեր են (ինչպես, օրինակ, նկ. 162, $\bar{r}_1=\overline{OA_1}$, $\bar{r}_2=\overline{OA_2}$ $\bar{r}_1\neq\bar{r}_2$, $\hat{\tau}_1\neq\hat{\tau}_2$), իսկ $\bar{h}$ վեկտորը միևնույնն է դիսկի բոլոր կետերի համար։ Այս երեք վեկտորները յուրաքանչյուր կետում փոխադարձաբար ուղղահայաց են։

A կետում կիրառված ուժը ի, $\hat{r}$ և $\hat{\tau}$ երեք վեկտորներից որևէ մեկին ղուգահեռ լինելու դեպքում նշանակենք համապատասխանաբար $\overline{F}_h$, $\overline{F}_r$, $\overline{F}_\tau$:

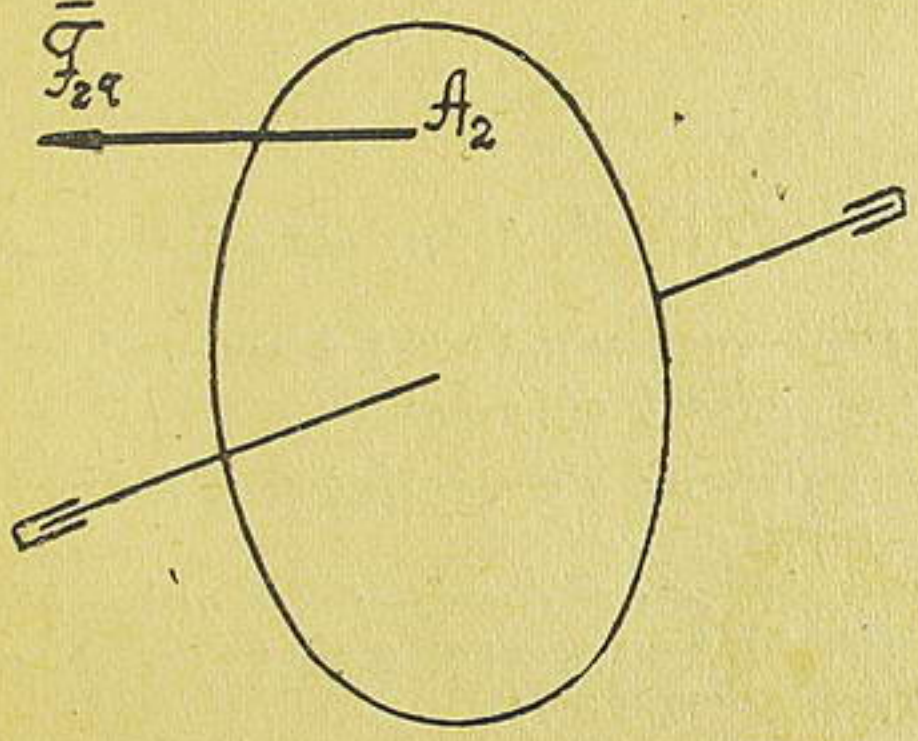


Նկ. 160



Նկ. 161ա

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ A կետում կիրառված է $\overline{F}_h$ ուժը (նկ. 159): Ակնհայտ է, որ այդ ուժը չի կարող շարժել դիսկը: Նաև ոչ մի շարժում չի առաջացնի $\overline{F}_r$ ուժը (նկ. 160): Իսկ $\overline{F}_\tau$ ուժը կխախտի դիսկի հավասարակշռությունը (նկ. 161ա, 161բ): Օրինակ՝ $\overline{F}_{1\tau}$-ն կառաջացնի պտտում ժամսլաքի ուղղությամբ, իսկ $F_{2\tau}$—ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ:

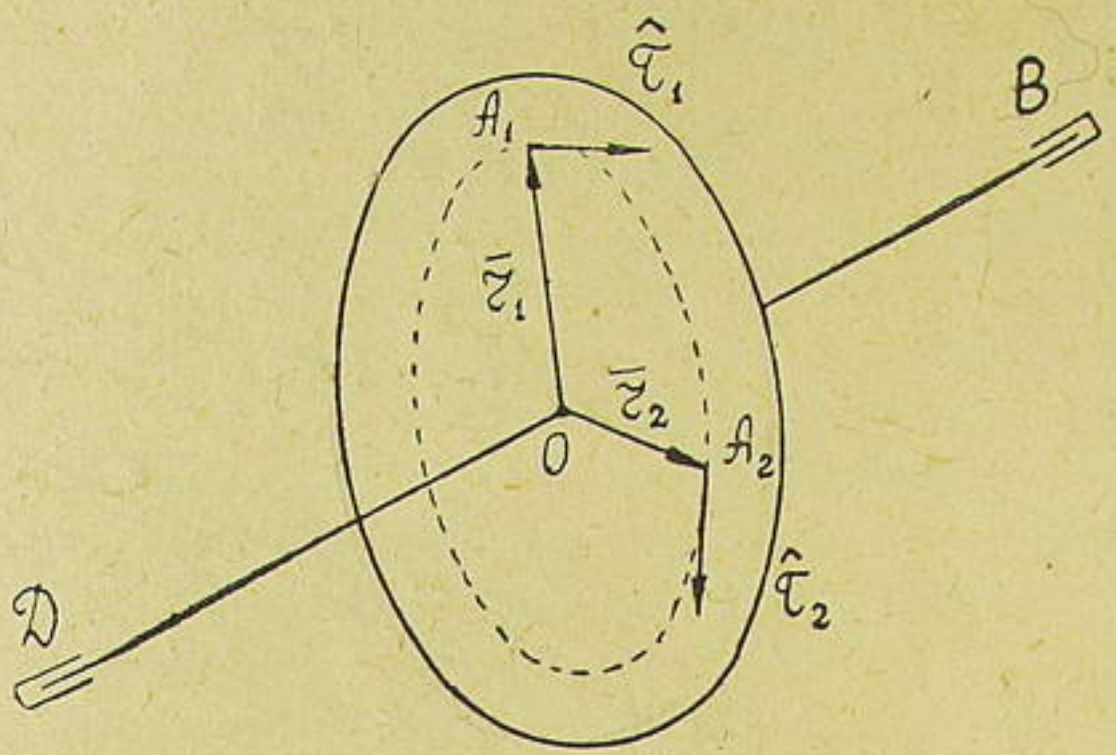


Նկ. 161բ

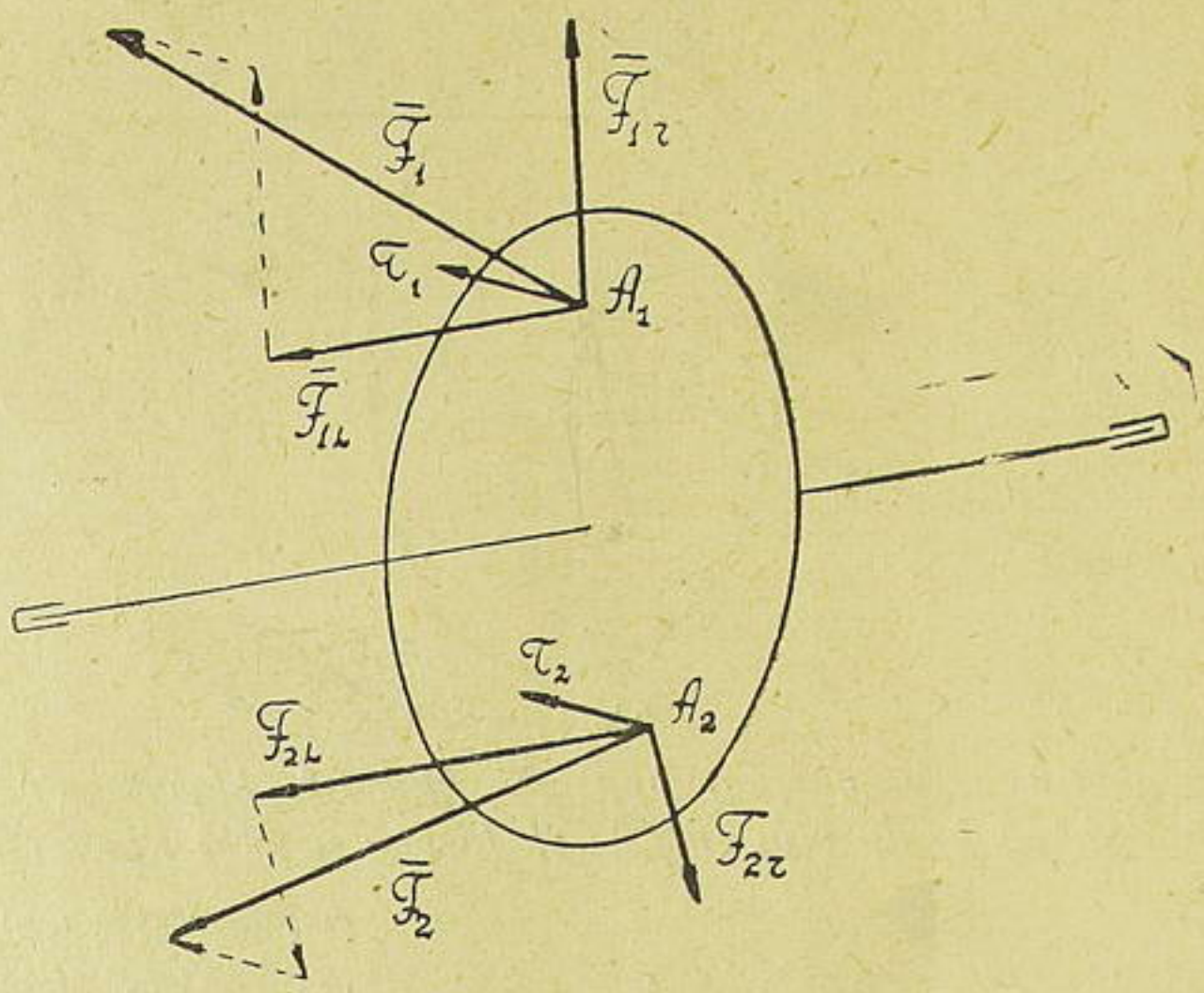
Որևէ $\overline{F}$ ուժը (կիրառված A կետում) կարելի է

վերլուծել երեք բաղադրիչների համապատասխանաբար զուգահեռ $\hat{h}$, $\hat{r}$, և $\hat{\tau}$-ին (նկ. 163)։

$$\overline{F}=\overline{F}_h+\overline{F}_r+\overline{F}_\tau$$



նկ. 162



նկ. 163

այնպես, որ $\overline{F}$-ը համարժեք է $\overline{F}_h$, $\overline{F}_r$, և $\overline{F}_\tau$ երեք ուժերի համախմբությանը։

Այստեղից պարզ է, որ դիսկի պտտումը կարող է առաջանալ միայն այն ուժից, որի $\overline{F}_\tau$ բաղադրիչը տարբեր է զերոյից։

Ուժը, որի $\overline{F}_\tau$ բաղադրիչը հավասար է զերոյի, չի կարող խախտել դիսկի հավասարակշռությունը։

Այժմ ցույց տանք, որ այն հարցը, թե տվյալ $\overline{F}$ ուժը կխախտի արդյոք դիսկի հավասարակշռությունը և ձգ ուղղությամբ կսկսվի պտտումը, կարող է լուծված լինել նաև այլ հայտանիշով։

Նշանակենք $\bar{r}\times\overline{F}$ վեկտորական արտադրյալը $\bar{m}$-ով՝ $\bar{m}=\bar{r}\times\overline{F}$. $\bar{m}$-ի

պրոեկցիան $\overline{BD}$ առանցքի ուղղությամբ նշանակենք m_h: Ցույց տանք, որ՝

երբ $m_h=0$, ապա $\overline{F}$-ը չի խախտում դիսկի հավասարակշռությունը.

երբ $m_h>0$, $\overline{F}$-ը առաջացնում է պտտում ժամսլաքի ուղղությամբ,

իսկ եթե $m_h<0$, $\overline{F}$-ը առաջացնում է պտտում ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ:

Կրկին սկսենք մասնավոր դեպքերից՝ թող $\overline{F}=\overline{F}_h$, այդ դեպքում $\bar{r}\times\overline{F}_h=\bar{m}\perp\hat{h}$, հետևաբար $\bar{m}_h=0$:

Եթե $\overline{F}=\overline{F}_r$, ապա $\overline{F}_r\parallel\bar{r}$ ուստի $\bar{m}=\bar{r}\times\overline{F}=0$ $\bar{m}_h=0$: Այսինքն, երբ կիրառված են այնպիսի ուժերը ($\overline{F}_h$ և $\overline{F}_r$), որոնք չեն կարող խախտել դիսկի հավասարակշռությունը, $m_h=0$:

Եթե $\overline{F}=\overline{F}_\tau$ ապա $\bar{m}=(\bar{r}\times\overline{F}_\tau)\parallel\hat{h}$ և $m_h\neq 0$:

$\overline{F}_{1\tau}$ ուժի համար, որն առաջացնում է շարժում ժամսլաքի ուղղությամբ, $m_h>0$, իսկ $\overline{F}_{2\tau}$ ուժի համար որն առաջացնում է շարժում ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ $m_h<0$:

Կամայական ուժի դեպքում՝

$$\overline{F}=\overline{F}_h+\overline{F}_r+\overline{F}_\tau:$$

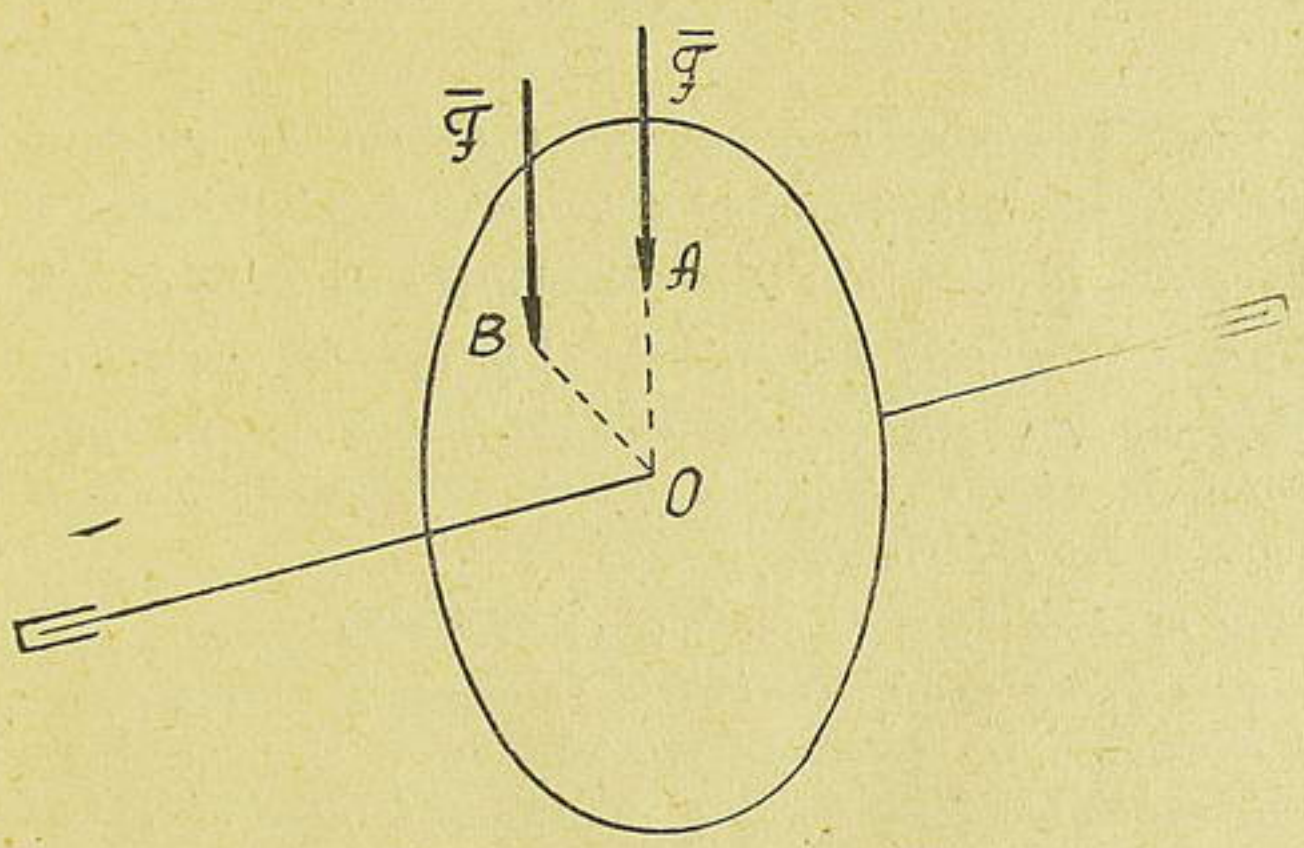
$$\bar{m}=\bar{r}\times\overline{F}=\bar{r}\times(\overline{F}_h+\overline{F}_r+\overline{F}_\tau)=\bar{r}\times\overline{F}_h+\bar{r}\times\overline{F}_\tau,$$

(քանի որ $\bar{r}\times\overline{F}_r=0$) և որովհետև $\bar{r}\times\overline{F}_h\perp\hat{h}$

$$\text{ապա } m_h=(\bar{r}\times\overline{F}_\tau)_h:$$

Եթե $\overline{F}_\tau\neq 0$, ապա $m_h\neq 0$: Այդպիսով յուրաքանչյուր ուժի համար, որի $\overline{F}_\tau$ բաղադրիչը զերո չէ, $m_h\neq 0$: Հենց այդպիսի ուժերն առաջացնում են պտտում:

Ենթադրելով, որ $\overline{F}$ ուժը կիրառված է սկզբում A կետում (նկ. 164) և $\overline{OA}\parallel\overline{F}$, կիրառենք նույն ուժը հետո B կետում. A կետում $\overline{F}$ ուժը չի



Նկ. 164

առաջացնի շարժում, իսկ B կետում կառաջացնի պտտում ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ: Առաջին դեպքում $\bar{m}_A=OA\times\overline{F}=0$, երկրորդ դեպքում $\bar{m}_B=\overline{OB}\times\overline{F}\neq 0$:

Այստեղից մենք պետք է անենք երկու կարևոր եզրակացություններ՝

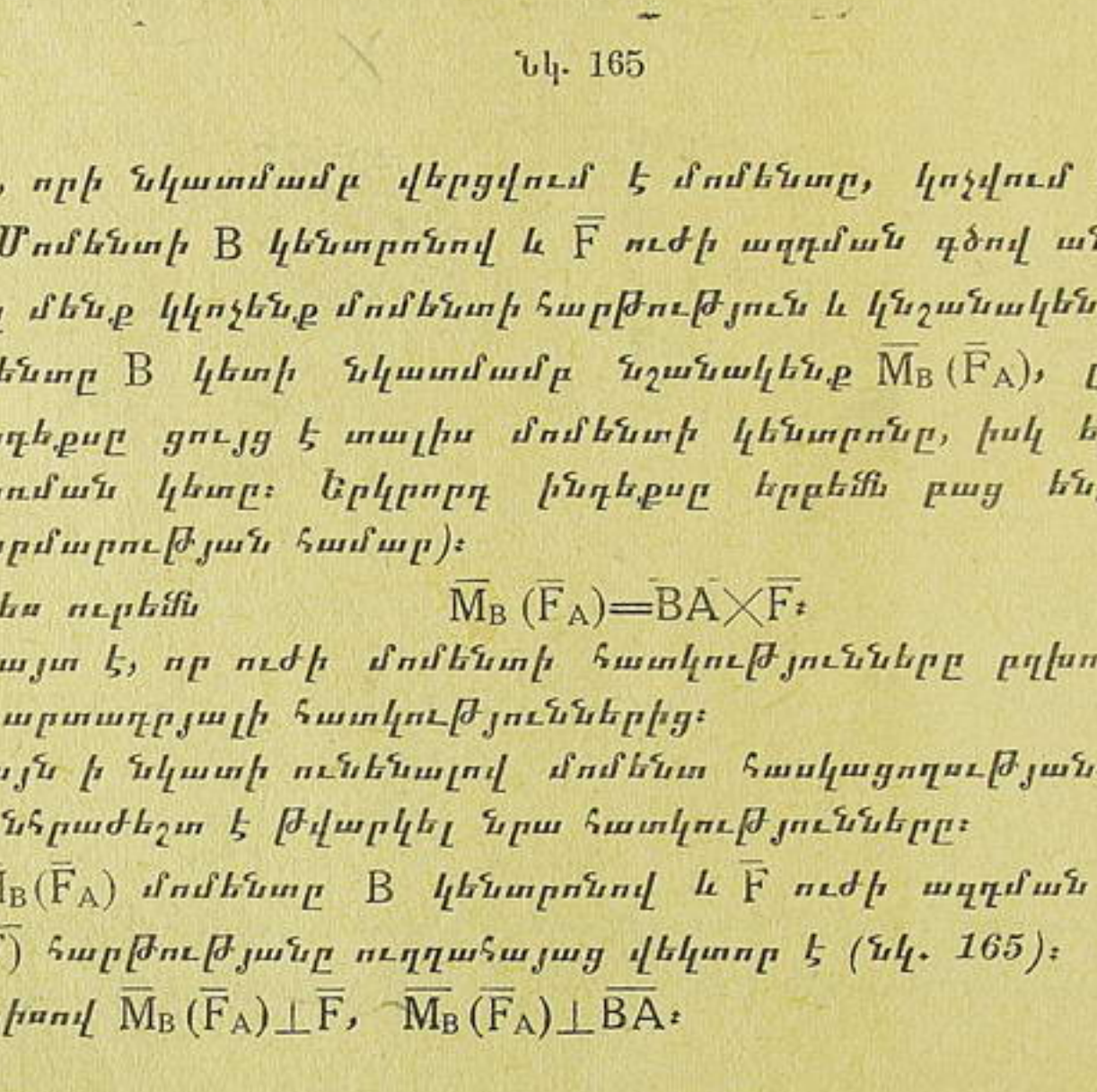
1. Ուժի ազդեցությունը կարծր մարմնի վրա ոչ միայն կախում ունի ուժի մեծությունից և ուղղությունից այլ և նրա ազդման գծից։

2. Ազդման գծի դիրքից կախված է նաև $\bar{m}$ վեկտորը։

Հետագայում մենք կտեսնենք, որ տվյալ $\bar{F}$ ուժի դեպքում $\bar{m}$ վեկտորը ($\bar{m}=\bar{r}\times\bar{F}$) թույլ է տալիս որոշել $\bar{F}$-ի ազդման գիծը։

Դրանում էլ կայանում է $\bar{m}$ վեկտորի կարևոր նշանակությունը։

§ 55. Ուժի մոմենտը կետի նկատմամբ. մոմենտի հիմնական հատկությունները։ *1° A կետում կիրառված $\bar{F}$ ուժի մոմենտը B կետի նկատմամբ անվանում ենք $\overline{BA}\times\bar{F}$ վեկտորական արտադրյալը (նկ. 165)։*



Նկ. 165

Կետը, որի նկատմամբ վերցվում է մոմենտը, կոչվում է մոմենտի կենտրոն։ Մոմենտի B կենտրոնով և $\bar{F}$ ուժի ազդման գծով անցնող հարթությունը մենք կկոչենք մոմենտի հարթություն և կնշանակենք $\sigma(B,\bar{F})$։ $\bar{F}$ ուժի մոմենտը B կետի նկատմամբ նշանակենք $\bar{M}_B(\bar{F}_A)$, ըստ որում առաջի ինդեքսը ցույց է տալիս մոմենտի կենտրոնը, իսկ երկրորդը՝ $\bar{F}$ ուժի կիրառման կետը։ Երկրորդ ինդեքսը երբեմն բաց են թողնելու (գրելու հարմարության համար)։

Այսպես ուրեմն $\bar{M}_B(\bar{F}_A)=\bar{B}\bar{A}\times\bar{F}$։

Ակնհայտ է, որ ուժի մոմենտի հատկությունները բղխում են վեկտորական արտադրյալի հատկություններից։

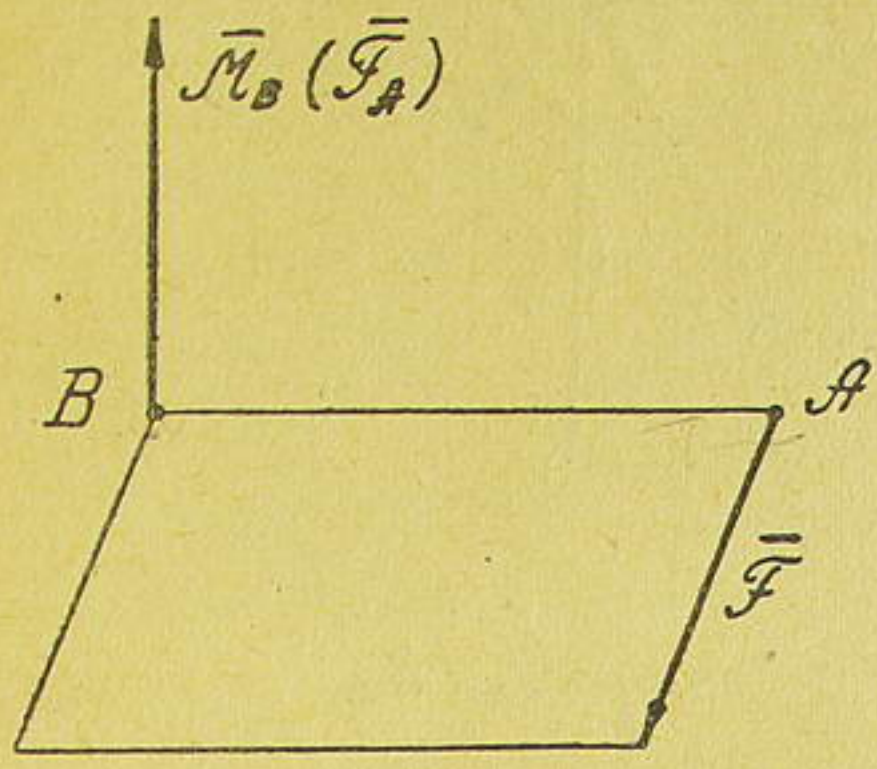
Սակայն ի նկատի ունենալով մոմենտ հասկացողության կարևորությունը, անհրաժեշտ է թվարկել նրա հատկությունները։

2°. $\bar{M}_B(\bar{F}_A)$ մոմենտը B կենտրոնով և $\bar{F}$ ուժի ազդման գծով անցնող $\sigma(B,\bar{F})$ հարթությանը ուղղահայաց վեկտոր է (նկ. 165)։

Այդպիսով $\bar{M}_B(\bar{F}_A)\perp\bar{F}$, $\bar{M}_B(\bar{F}_A)\perp\overline{BA}$։

$\overline{M}_B(\overline{F}_A)$-ի իմաստը որոշվում է «ձեռքի կանոնով» կամ «դիտողի կանոնով»։ Այս գրքում ընդունված է ձախ ձեռքի կանոնը, ըստ որի էլ կարող ենք ասել՝

Եթե ձախ ձեռքի մեծ մատը մոմենտի կենտրոնից ուղղենք դեպի ուժի կիրառման կետը, ցուցամատը — համապատասխան ուժին, մյուս մատը, որն ուղղահայաց է առաջի երկուսի հարթությանը, կլինի ուժի մոմենտին համապատասխան։



Նկ. 166

Մոմենտի չափը հավասար է $\overline{BA}$ *և* $\overline{F}$ *վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռակողմի մակերեսին։*

Որովհետև ուժի մոմենտը վեկտորական արտադրյալ է, ապա այդ արտադրիչների մեկի իմաստը փոխելու դեպքում, պետք է փոխվի նաև մոմենտի իմաստը։ 166—169 նկարներում ցույց է տրված բոլոր հնարավոր դեպքերը՝

Նկար 166 $\overline{BA}$, $\overline{F}$, $\overline{M}_B(\overline{F}_A)$

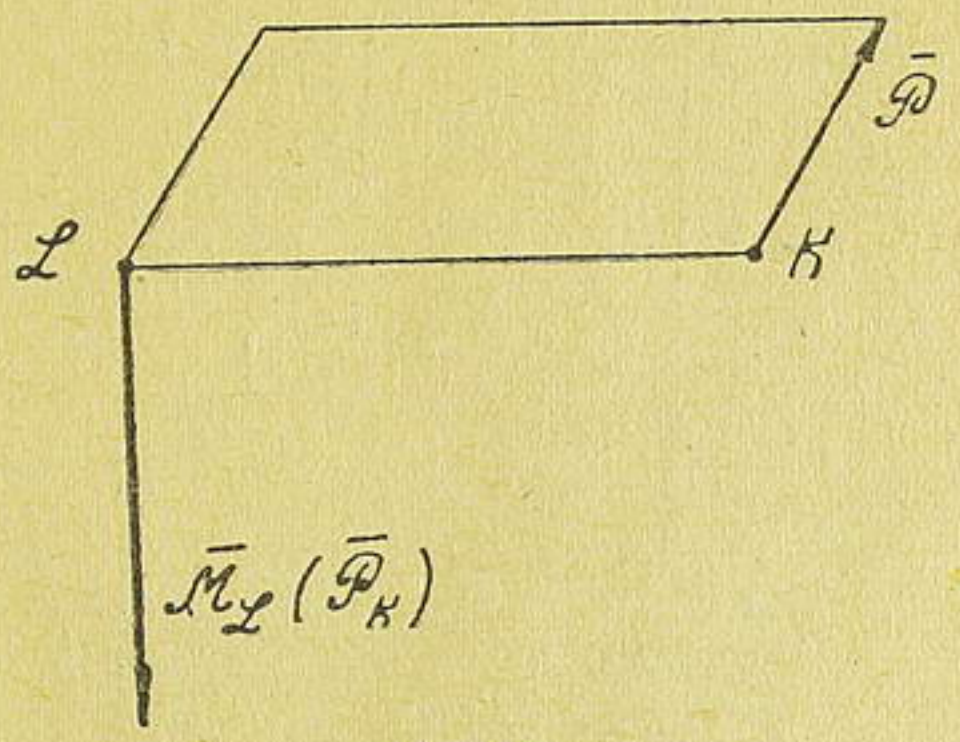
Նկար 167 $\overline{LK}\uparrow\uparrow\overline{BA}$, $\overline{P}\uparrow\downarrow\overline{F}$, $\overline{M}_L(\overline{P}_K)\uparrow\downarrow\overline{M}_B(\overline{F}_A)$,

Նկար 168 $\overline{DC}\uparrow\downarrow\overline{BA}$, $\overline{Q}\uparrow\uparrow\overline{F}$, $\overline{M}_D(\overline{Q}_C)\uparrow\downarrow\overline{M}_B(\overline{F}_A)$,

Նկար 169 $\overline{HD}\uparrow\downarrow\overline{BA}$, $\overline{R}\uparrow\downarrow\overline{F}$, $\overline{M}_H(\overline{R}_D)\uparrow\uparrow\overline{M}_B(\overline{F}_A)$։

3°. Շատ օգտակար է լավ հիշել հետևյալը՝

Եթե $(\overline{F})$ *ուժի ազդման գծով անցկացնենք որևէ հարթություն, ապա (նկար 170) ազդման գծի մի կողմ գտնվող բոլոր B, C, D կենտրոնների նկատմամբ մոմենտները միմյանց համապատասխան են։*



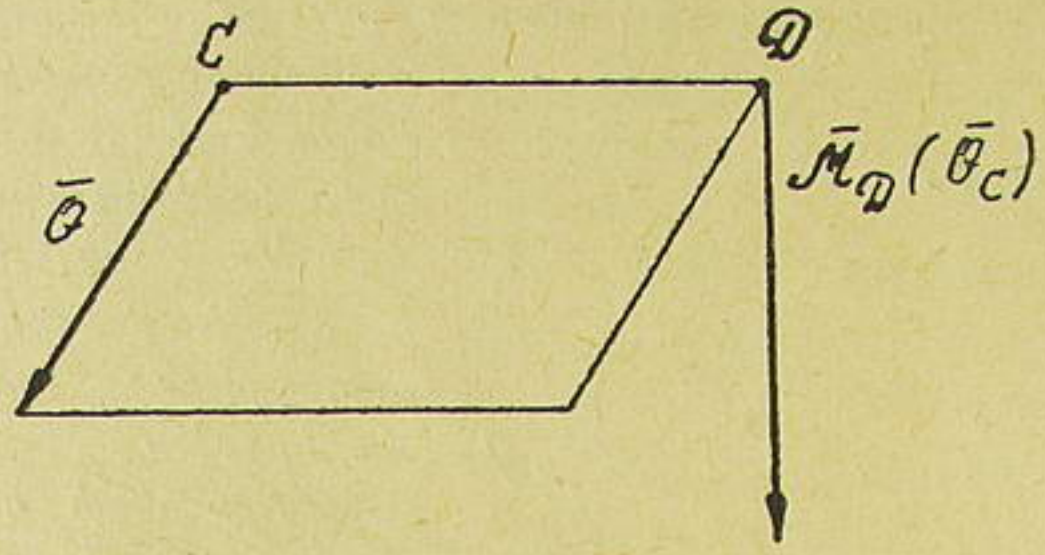
Նկ. 167

$\overline{M}_B(\overline{F}_A)\uparrow\uparrow\overline{M}_C(\overline{F}_A)\uparrow\uparrow\overline{M}_D(\overline{F}_A)$

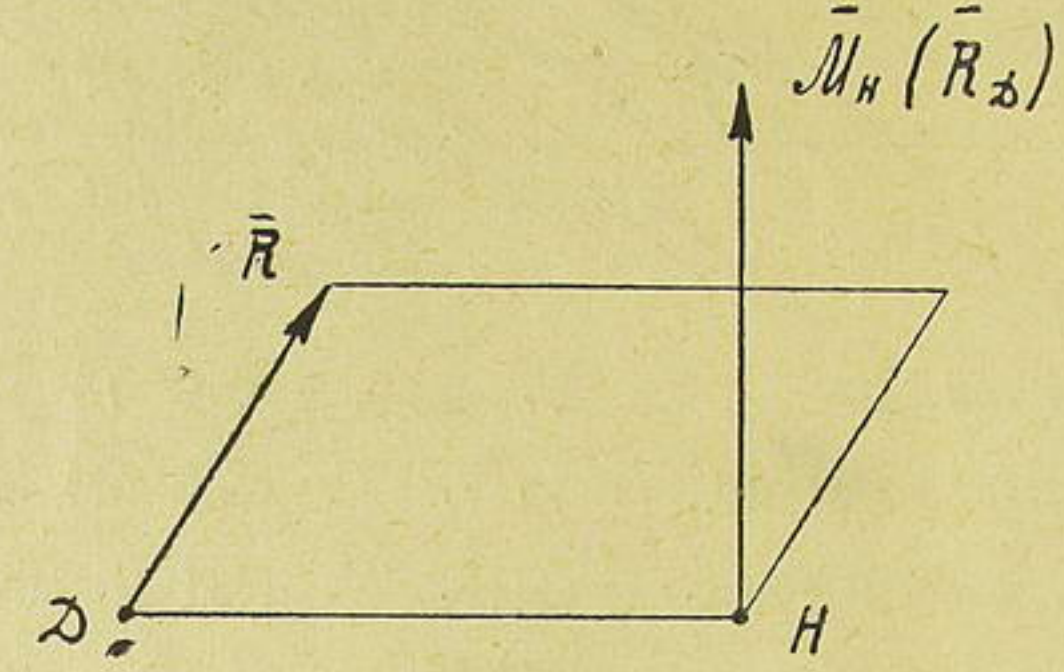
$\overline{M}_K(\overline{F}_A)\uparrow\uparrow\overline{M}_L(\overline{F}_A)\uparrow\uparrow\overline{M}_G(\overline{F}_A)$,

Իսկ ուժի ազդման գծի զանազան կողմերում դասավորված երկու կենտրոնների նկատմամբ մոմենտները հակազուգահեռ են, օրինակ՝

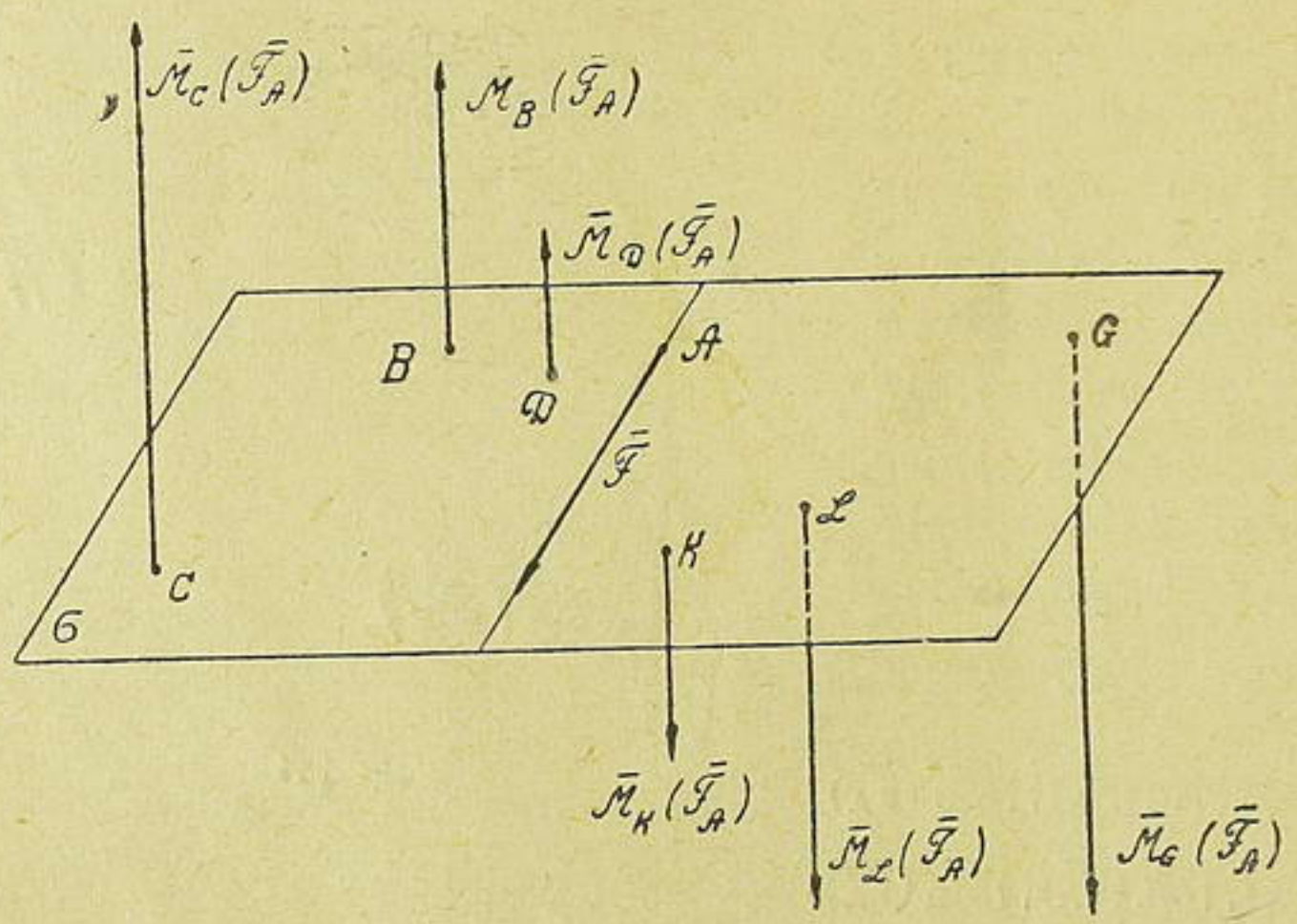
$$\bar{M}_C(\bar{F}_A)\uparrow\downarrow\bar{M}_K(\bar{F}_A):$$



Նկ. 168

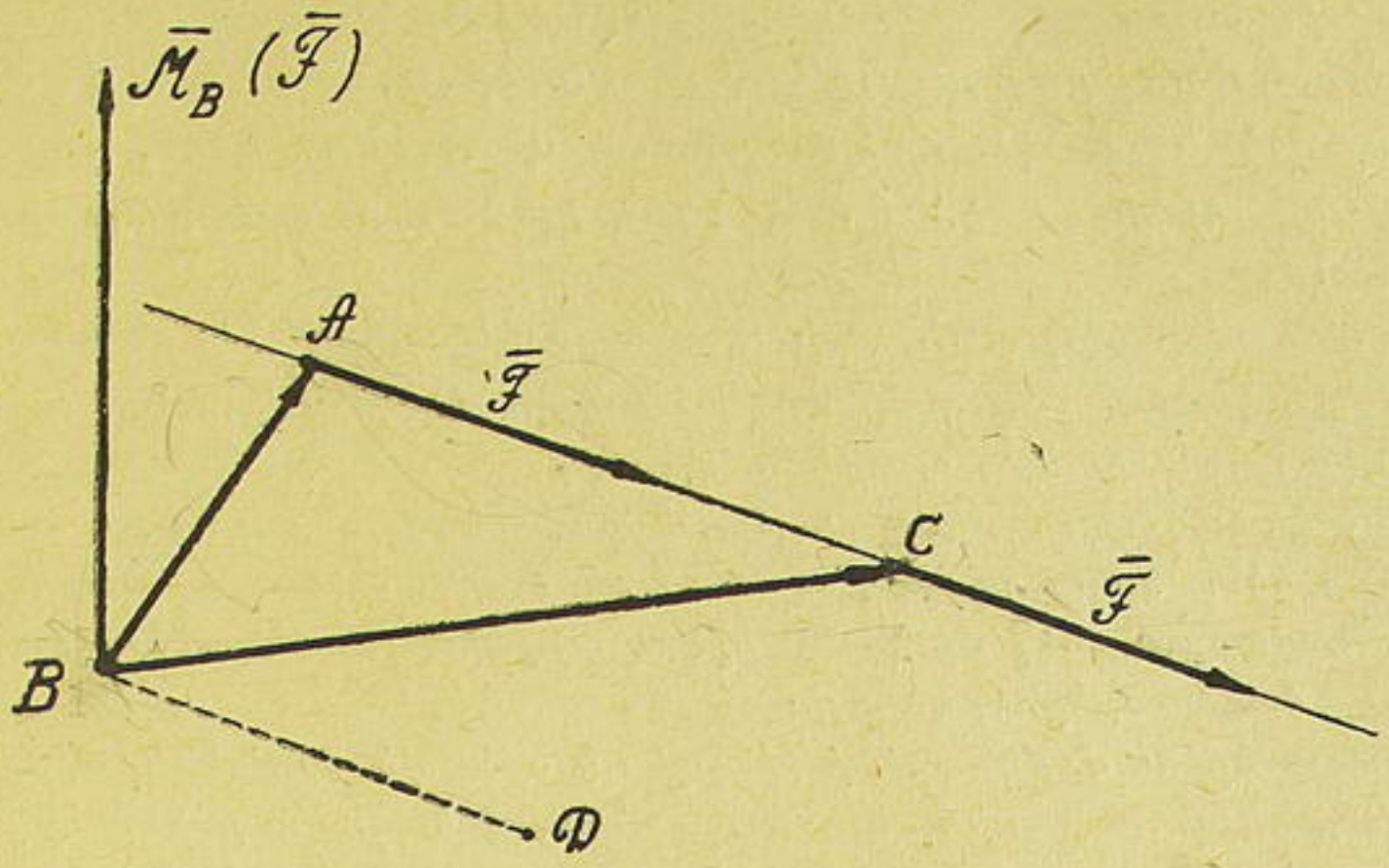


Նկ. 169



Նկ. 170

4°. A *կետում կիրառված* $\bar{F}$ *ուժը տեղափոխենք նրա ազդման գծի երկարությամբ և կիրառենք մի ինչ որ* C *կետում (նկ. 171)։*



նկ. 171

$$\bar{M}_B(\bar{F}_C) = \overline{BC} \times \bar{F}, \text{ բայց } \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC},$$

քանի որում $\overline{AC} \parallel \bar{F}$. *այդ պատճառով էլ* $\overline{BC} \times \bar{F} = (\overline{BA} + \overline{AC}) \times \bar{F} = \overline{BA} \times \bar{F}$։
Հետևապես

$$\bar{M}_B(\bar{F}_C) = \bar{M}_B(\bar{F}_A)։ \qquad \text{(VII 1)}$$

Եթե D *կետը (նկ. 171) ընտրենք այնպես, որ* DB*-ն զուգահեռ լինի ուժի ազդման գծին, ապա*

$$\bar{M}_D(\bar{F}_A) = \overline{DA} \times F = (\overline{DB} + \overline{BA}) \times \bar{F} = \overline{BA} \times \bar{F},$$

(որովհետև $\overline{DB} \parallel \bar{F}$*), այսինքն*

$$\bar{M}_D(\bar{F}_A) = \bar{M}_B(\bar{F}_A), \qquad \text{(VII 2)}$$

Նկատենք, որ այդ պայմաններում D *և* B *կետերը գտնվում են ուժի ազդման գծից միևնույն հեռավորության վրա։*

(VII 1), (VII 2) *ֆորմուլներից հետևում է, որ՝*

(VII 3) *Ուժի մոմենտը կետի նկատմամբ լիովին որոշվում է ուժով, նրա ազդման գծով և այդ գծի հեռավորությամբ մոմենտի կենտրոնից։*

Իսկ կիրառման կետի դիրքը ազդման գծի վրա բոլորովին չի ազդում ուժի մոմենտի վրա։

(Խոսելով ուղղի հեռավորության մասին՝ մի որևէ կետից պետք է ի նկատի ունենալ, որ հեռավորությունը վեկտոր է։ Երկու հեռավորությունները հավասար են, եթե նրանք համազուգահեռ են և ունեն միևնույն չափը։ Օրինակ, շրջանային գլանի առանցքը գտնվում է միևնույն հեռավորության վրա միևնույն ծնիչի կետերից, իսկ առանցքի հեռավորությունները երկու կետերից, որոնք չեն պատկանում միևնույն ծնիչին, նույնը չեն)։

5⁰. Ուժի մոմենտը կետի նկատմամբ հավասար է զերոյի երկու դեպքում, երբ ուժը հավասար է զերոյի և երբ մոմենտի կենտրոնը վերցված է ուժի ազդման գծի վրա։

Եվ իսկապես $\overline{M}_B(\overline{F}_A)=\overline{BA}\times\overline{F}$,

իսկ վեկտորական արտադրյալը հավասար է զերոյի, եթե $F=0$, *կամ* $\overline{BA}\parallel\overline{F}$. *բայց որովհետև A կետը պատկանում է ազդման գծին, ապա* $\overline{BA}\parallel\overline{F}$ *պայմանից հետևում է, որ B կետն էլ է գտնվում* $\overline{F}$ *ուժի ազդման գծի վրա։*

Մասնավոր դեպքում, երբ մոմենտի կենտրոնը համընկնում է ուժի կիրառման կետին, այդ ուժի մոմենտը զերո է՝ $\overline{M}_A(\overline{F}_A)=0$։

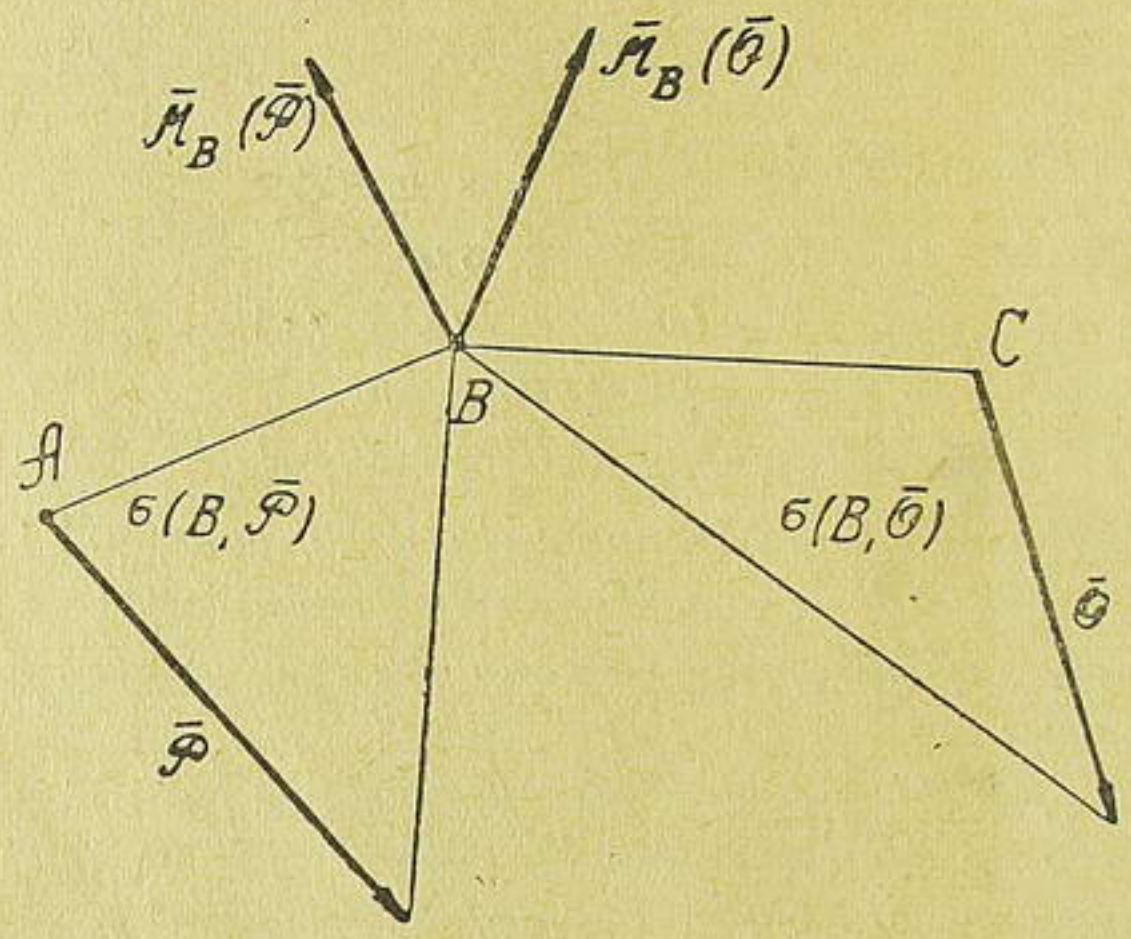
Մենք հաճախ ենք օգտվելու դրանից։

6⁰. Հետագայում մենք հաճախ ստիպված ենք լինելու համեմատել միմյանց հետ երկու ուժերի մոմենտներն ընդհանուր կենտրոնի նկատմամբ, հավասարեցնել միմյանց երկու այդպիսի մոմենտներ, կամ նրանց գումարը հավասարեցնել զերոյի։

Բայց երկու մոմենտների (ինչպես և որևէ վեկտորների) միմյանց հավասար լինելը հնարավոր է միայն նրանց համազուգահեռության դեպքում։

Իսկ երկու մոմենտների գումարը զերոյի հավասար լինելու համար անհրաժեշտ է, որ նրանք հակազուգահեռ լինեն։ Այդ պատճառով էլ հետևյալ թեորեմը շատ օգտակար է։

(VII 4) *Երկու ուժերի մոմենտները ընդհանուր կենտրոնի նկատմամբ միմյանց զուգահեռ են միայն այն դեպքում, երբ այդ ուժերի ազդման գծերը և մոմենտների կենտրոնը գտնվում են մի հարթության վրա։*



Նկ. 172

Եվ իսկապես, ենթադրենք տրված են $\overline{P}$ *և* $\overline{Q}$ *ուժերը (նկ. 172), որոնք համապատասխանաբար կիրառված են A և C կետերում։ Կամայական B*

կետը ընդունենք որպես մոմենտների կենտրոն։ Որովհետև յուրաքանչյուր մոմենտ ուղղահայաց է իր հարթությանն՝

$$\overline{M}_B(\overline{P}_A)\perp\sigma(B,\overline{P}),\ \overline{M}_B(\overline{Q}_C)\perp\sigma(B,\overline{Q}),$$

ապա մոմենտների զուգահեռության դեպքում պետք է զուգահեռ լինեն և $\sigma(B,\overline{P})$ ու $\sigma(B,\overline{Q})$ հարթությունները։ Այդ դեպքում հարթություններն, ունենալով ընդհանուր B կետ, պետք է ձուլվեն։

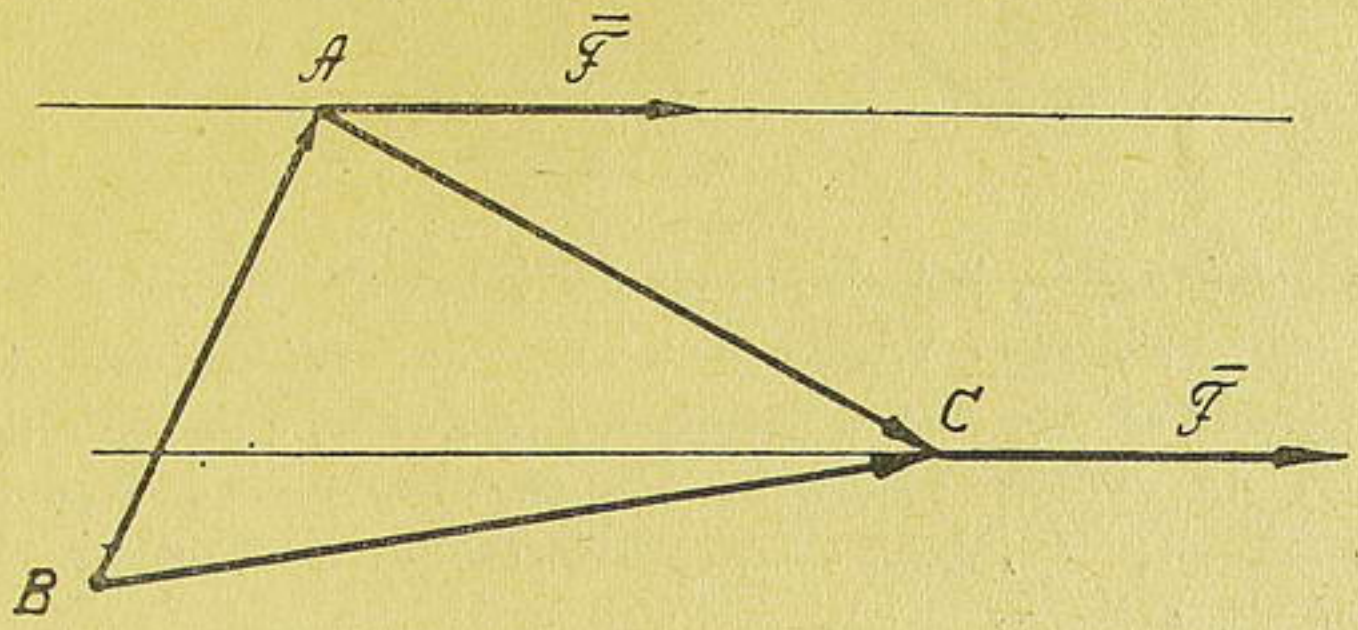
Այստեղից պարզ է՝ եթե $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ ուժերը դասավորված են այնպես, որ անկարելի է անցկացնել մի հարթություն, որը պարունակեր միաժամանակ և $\overline{P}$ և $\overline{Q}$-ն, ապա ոչ մի կետի նկատմամբ այդ ուժերի մոմենտները զուգահեռ չեն լինի։

§ 56. Ուժի մոմենտի հատկությունները (շարունակություն)։

1°. Թեորեմ։

(VII 5) *Երկու հավասար ուժերի մոմենտները ընդհանուր կենտրոնի նկատմամբ հավասար են միայն այն դեպքում, երբ այդ ուժերի ազդման գծերը համընկնում են։*

Դիցուք երկու հավասար ուժեր կիրառված են A և C կետերում։ Այդ ուժերն անվանենք $\overline{F}_A$ և $\overline{F}_C$ (նկ. 173)։ Որովհետև հավասար ուժերը պետք



Նկ. 173

է զուգահեռ լինեն միմյանց, ապա նրանց ազդման գծերը կամ զուգահեռ են միմյանց կամ էլ ձուլվում են միմյանց հետ։ Եթե B-ն մոմենտների կենտրոնն է, ապա $\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}$ և այդ պատճառով էլ

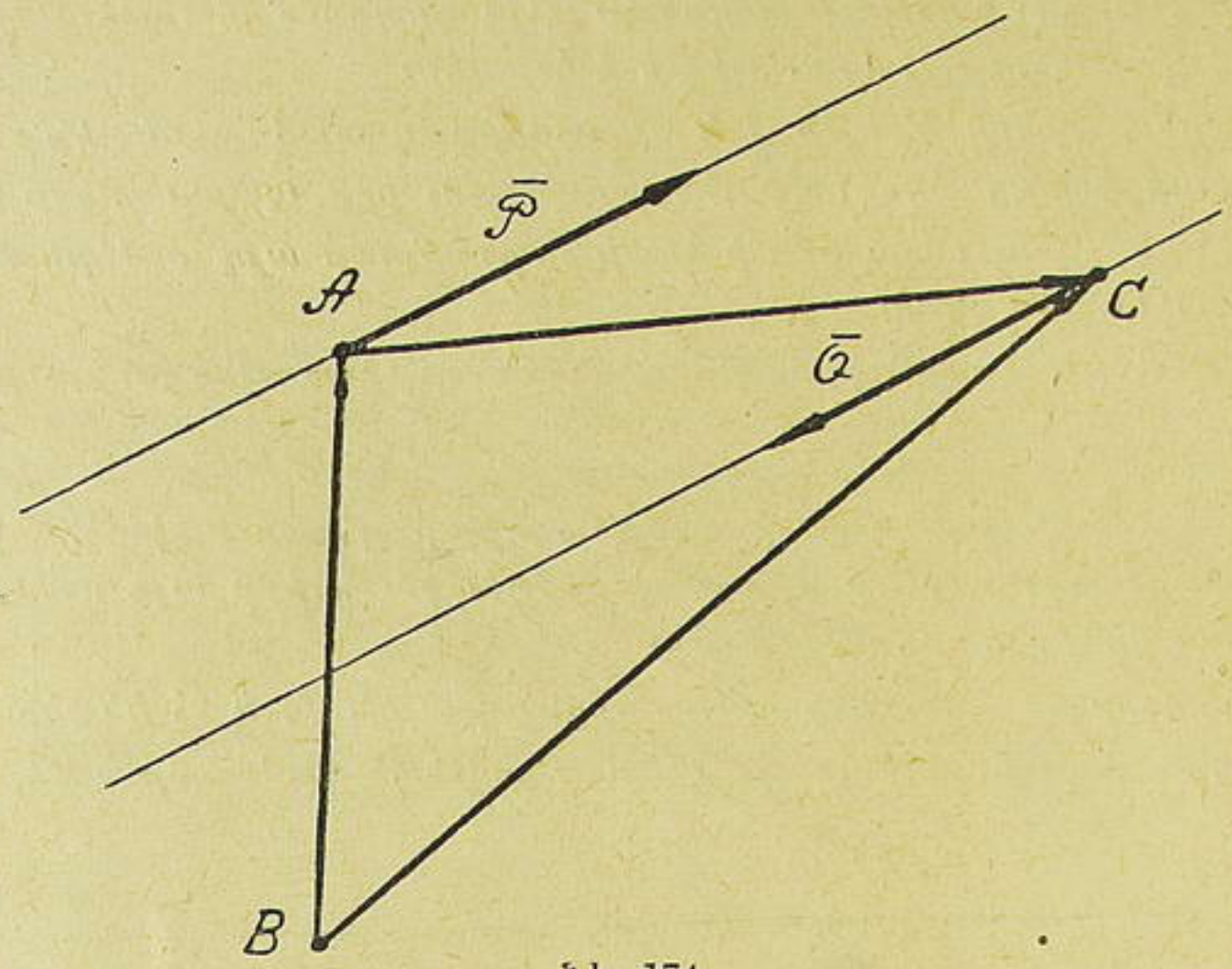
$$\overline{M}_B(\overline{F}_C)-\overline{M}_B(\overline{F}_A)=(\overline{BA}+\overline{AC})\times\overline{F}-\overline{BA}\times\overline{F}=\overline{AC}\times\overline{F}:$$

Մենք տեսնում ենք, որ երկու հավասար ուժերի մոմենտների տարբերությունը բոլորովին կախված չէ B կենտրոնից։

Եթե մոմենտները հավասար են միմյանց, ապա նրանց տարբերությունը զերո է և $\overline{AC}\times\overline{F}$ պետք է զառնա զերո։ Այդ հնարավոր է, երբ $\overline{AC}\parallel\overline{F}$, այսինքն երբ երկու ուժերի ազդման գծերը համընկնում են։ Իսկ եթե $\overline{AC}$ և $\overline{F}$ զուգահեռ չեն, ապա $\overline{F}_A$ և $\overline{F}_C$ ուժերի ազդման գծերը չեն համընկնում, այլ զուգահեռ են, և $\overline{AC}\times\overline{F}\neq0$։

2°. Թեորեմ.

Եթե երկու ուժերի գումարը հավասար է զերոյի, ապա նրանց
(VII 6) *մոմենտների գումարը ընդհանուր (կամայական) կենտրոնի նկատմամբ կարող է հավասար լինել զերոյի միայն այն դեպքում, երբ ուժերի ազդման գծերը համընկնում են:*



Նկ. 174

Այդ կարևոր թեորեմի ապացուցումը բոլորովին նման է նախընթաց թեորեմի ապացուցմանը: Դիցուք $\bar{P}$ *և* $\bar{Q}=-\bar{P}$ *ուժերը համապատասխանաբար կիրառված են* A *և* C *կետերում (նկ. 174)* $\bar{Q}=-\bar{P}$ *պայմանից հետևում է, որ ուժերը հակազուգահեռ են, իսկ նրանց ազդման գծերը միմյանց զուգահեռ են, կամ համընկնում են: Վերջին դեպքում* $\overline{AC}$ *զուգահեռ է* $\bar{P}$*-ին և* $\bar{Q}$*-ին:*

$$M_B(\bar{P}_A)+\bar{M}_B(\bar{Q}_C)=\overline{BA}\times\bar{P}+\overline{BC}\times\bar{Q}=$$
$$=\overline{BA}\times\bar{P}+(\overline{BA}+\overline{AC})\times(-\bar{P})=$$
$$=\overline{AC}\times(-\bar{P})=\overline{AC}\times\bar{Q}=\overline{CA}\times\bar{P} \qquad \text{(VII 7)}:$$

Եթե մոմենտների գումարը զերո է, ապա $\overline{AC}\times\bar{Q}=0$ *նույնպես, այսինքն,* $\overline{AC}\parallel\bar{Q}$ *և, նշանակում է,* $\bar{P}$ *և* $\bar{Q}$ *ուժերի ազդման գծերը համընկնում են:*

(VII 6) *թեորեմը թույլ է տալիս շատ հասարակ կերպով արտահայտելու ազդման և հակազդման հավասարության սկզբունքը: Այդ սկզբունքի համաձայն, տես* (IV 2),

ա. $f_{SK}=f_{KS}$,

բ. $\bar{f}_{SK}\uparrow\downarrow\bar{f}_{SK}$,

գ. $\bar{f}_{SK}$ *և* $\bar{f}_{KS}$ *ունեն ազդման ընդհանուր գիծ՝* A_sA_k *ուղիղը:*

ա) և բ) արտահայտվում են $\bar{f}_{SK}+\bar{f}_{KS}=0$ *հավասարությամբ:*

(VII 6) *Թեորեմից օգտվելով կարող ենք գ. պայմանը գրել այսպես՝*

$$\overline{M}_B(\overline{f}_{SK}) + \overline{M}_B(\overline{f}_{KS}) = 0 \qquad \text{(VII 8)}$$

Տարածության որևէ B կետի համար։

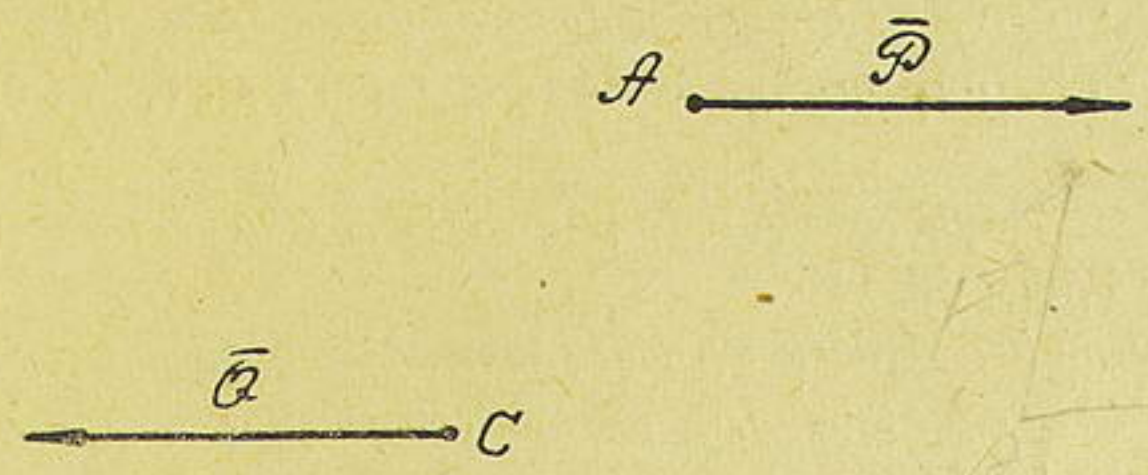
Այդպիսով ազդման և հակազդման սկզբունքը կարելի է արտահայտել երկու հավասարությունների համախմբությամբ[1]*։*

$$\left.\begin{aligned} &\overline{f}_{SK} + \overline{f}_{KS} = 0 \\ &\overline{M}_B(\overline{f}_{SK}) + \overline{M}_B(\overline{f}_{KS}) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(VII 9)}$$

Շատ օգտակար է և (VII 7) ֆորմուլը.

$$\left.\begin{aligned} &\overline{M}_B(\overline{P}_A) + \overline{M}_B(\overline{Q}_C) = \overline{AC} \times \overline{Q} = \overline{CA} \times \overline{P} \\ &\text{եթե } \overline{P} + \overline{Q} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(VII 7)}$$

Միևնույն չափին ունեցող երկու հակազուգահեռ ուժերի խումբը, որոնց ազդման գծերը չեն համընկնում, այլ զուգահեռ են (նկար. 175),



Նկ. 175

անվանում են ուժերի զույգ, կամ ավելի համառոտ—զույգ։ Զույգ կազմող ուժերի մոմենտների գումարը, ինչպես ցույց է տալիս (VII 7), *ամենևին էլ կախված չէ մոմենտների կենտրոնից։ Այդ գումարը անվանում են զույգի մոմենտ։*

Այն սահմանումից, որը տրված է ուժի մոմենտին կետի նկատմամբ, հետևում է, որ

$$\overline{AC} \times \overline{Q} = \overline{M}_A(\overline{Q}_C) \text{ և } \overline{CA} \times \overline{P} = M_C(P_A)\text{։} \qquad \text{(VII 10)}$$

Այդպիսով (VII 7) *արտահայտում է հետևյալը՝*

(VII 11) *Զույգի մոմենտը հավասար է այդ զույգի ուժերից մեկի մոմենտին մյուս ուժի կիրառման կետի նկատմամբ։*

3⁰. Հիմնվելով այն բանի վրա, որ՝

$$\bar{a} \times (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \ldots\ldots + \bar{b}_n) = \bar{a} \times \bar{b}_1 + \bar{a} \times \bar{b}_2 + \ldots\ldots \bar{a} \times \bar{b}_n$$

կարելի է ապացուցել շատ կարևոր մի թեորեմ, որը կոչվում է Վայրինյոնի թեորեմ։

(VII 12) *Երբ ուժերը կիրառված են մի կետում, այդ ուժերի մոմենտների գումարը ընդհանուր կամայական կենտրոնի նկատմամբ հավասար է նրանց համազորի մոմենտին, այդ նույն կենտրոնի նկատմամբ։*

---

[1]) X. գլխում մենք կտեսնենք, որ մոմենտների կենտրոնը կամայական լինելու դեպքում (VII 9) երկրորդ հավասարությունից անմիջապես բղխում է առաջին հավասարությունը։

Այսինքն, եթե $\bar{F}$*-ը* A *կետում կիրառված* $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ .... $\bar{F}_n$ *ուժերի համազորն է, իսկ* B*-ն կամայական կենտրոն, ապա՝*

$$\bar{M}_B(\bar{F}_A)=\bar{M}_B(\bar{F}_{1A})+\bar{M}_B(\bar{F}_{2A})+\cdots+\bar{M}_B(\bar{F}_{nA}); \qquad \text{(VII 13)}$$

Եվ իսկապես $\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\cdots\bar{F}_n$,

հետևապես

$$\bar{M}_B(\bar{F}_A)=\overline{BA}\times\bar{F}=\overline{BA}\times(\bar{F}_1+\bar{F}_2+\cdots\bar{F}_n)=$$
$$=\overline{BA}\times\bar{F}_1+\overline{BA}\times\bar{F}_2+\cdots+\overline{BA}\times\bar{F}_n=\bar{M}_B(\bar{F}_{1A})+\bar{M}_B(\bar{F}_{2A})+\cdots+\bar{M}_B(\bar{F}_{nA}):$$

Թեորեմն ապացուցված է։

Այստեղ նշենք Վարինյոնի թեորեմի հետևանքները.

Եթե նյութական կետը գտնվում է հավասարակշռության մեջ,
(VII 14) *ապա որևէ ընդհանուր կենտրոնի նկատմամբ կետին կիրառված ուժերի մոմենտների գումարը զրո է։*

Իսկապես, եթե կետը հավասարակշռության մեջ է, ապա նրան կիրառված $\bar{F}_1\,\bar{F}_2\cdots\bar{F}_n$ *ուժերի համազորը* $\bar{F}=0$ *և* $\bar{M}_B(\bar{F}_A)=0$*։ Ուստի* (VII 13) *տալիս է՝*

$$\bar{M}_B(\bar{F}_A)=\bar{M}_B(\bar{F}_{iA})+\cdots+\bar{M}_B(\bar{F}_{nA})=0 \qquad \text{(VII 15)}$$

Դա է հենց (VII 14)*։*

Վարինյոնի թեորեմի մի ուրիշ հետևանքն էլ կայանում է նրանում, որ՝

մի կետում կիրառված ուժերի համազորի ազդման գծի որևէ կե-
(VII 16) *տի նկատմամբ այդ ուժերի մոմենտների գումարը հավասար է զրոյի։*

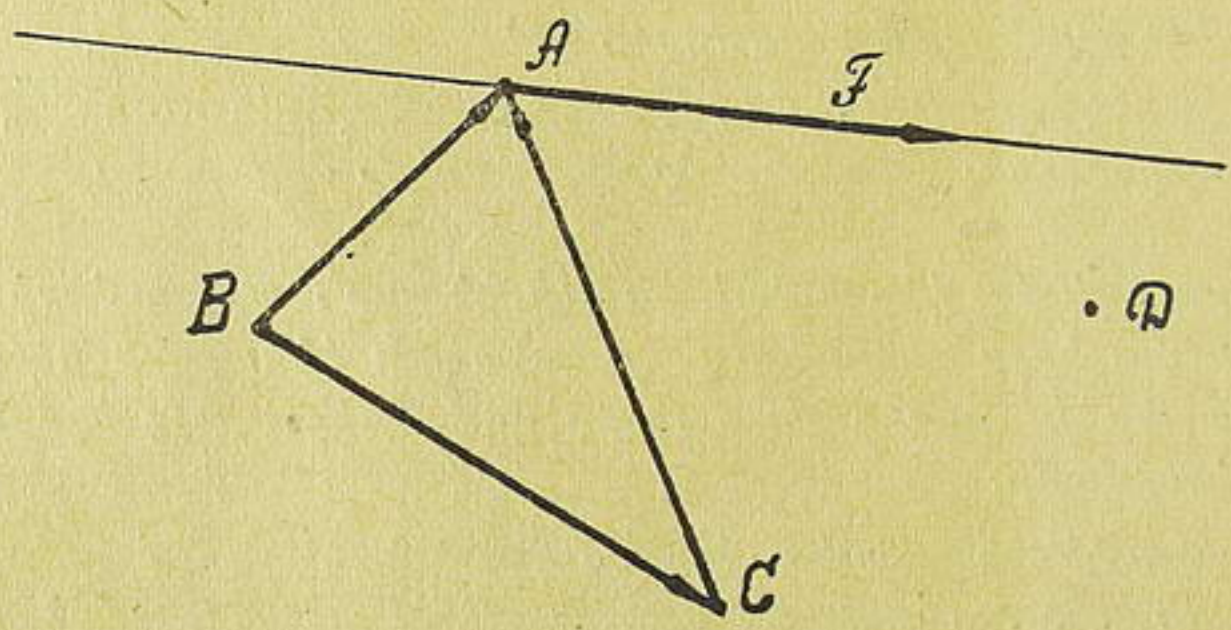
Այդ թեորեմի ճիշտ լինելը հետևում է նրանից, որ եթե մոմենտի B *կենտրոնը վերցնենք համազորի ազդման գծի վրա, ապա նրա մոմենտը հավասար կլինի զրոյի. հետևապես* (VII 12) *կստա*

$$\bar{M}_B(\bar{F}_{1A})+\bar{M}_B(\bar{F}_{2A})+\cdots\bar{M}_B(\bar{F}_{nA})=0:$$

4⁰. Գտնենք տվյալ ուժի երկու կետերի նկատմամբ վերցրած մոմենտների միջև եղած կապակցությունը։

Ինչպես $\bar{F}$ *ուժը կիրառված է* A *կետում (նկար* 176*)։ Որպես մոմենտների կենտրոններ ընդունենք՝* B *և* C *կետերը։ Այն ժամանակ՝*

$$\bar{M}_B(\bar{F}_A)=\overline{BA}\times\bar{F},\quad \bar{M}_C(\bar{F}_A)=\overline{CA}\times\bar{F},$$



Նկ. 176

Բայց $\overline{BA}=\overline{BC}+\overline{CA}$, *հետևապես* $\overline{BA}\times\overline{F}=\overline{BC}\times\overline{F}+\overline{CA}\times\overline{F}$, *կամ վեկտորական արտադրյալները փոխարինելով համապատասխան մոմենտներով, կստանանք՝*

$$\overline{M}_B(\overline{F}_A)=\overline{M}_C(\overline{F}_A)+\overline{BC}\times\overline{F}: \qquad (VII\ 17)$$

Այդ հատարակ կապակցությունն ունի շատ կարևոր կիրառություններ: Հարկավոր է նկատել, որ $\overline{BC}\times\overline{F}$ *վեկտորական արտադրյալը կարելի է պատկերել որպես C-ում կիրառված* $\overline{F}$ *ուժի մոմենտ B-ի նկատմամբ, այսինքն,* $\overline{BC}\times\overline{F}=\overline{M}_B(\overline{F}_C)$: *Ըստ որում (VII 17) կգրվի այսպես*

$$\overline{M}_B(\overline{F}_A)=\overline{M}_C(\overline{F}_A)+\overline{M}_B(\overline{F}_C): \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VII\ 18)$$

Սակայն մենք համարյա բացառապես օգտվելու ենք (VII 17)-ից: (VII 17)-ի հետևանքներից մեկն էլ հանդիսանում է հետևյալ թեորեմը՝

(VII 19) *Եթե ուժի մոմենտները մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերի նկատմամբ հավասար են զերոյի, ապա ինքն ուժը հավասար է զերոյի:*

Ենթադրենք B, C, D կետերը մի ուղղի վրա չեն, $\overline{F}$ *ուժն էլ կիրառված է A կետում, և հայտնի է, որ* $\overline{M}_B(\overline{F}_A)=0$, $\overline{M}_C(\overline{F}_A)=0$, $\overline{M}_D(\overline{F}_A)=0$:

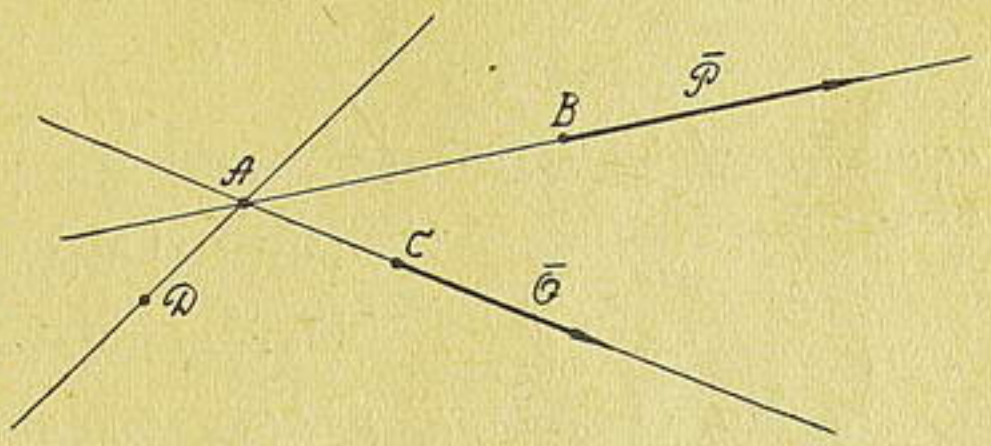
Կիրառելով (VII 17) նախ B, C կետերի զուգին և հետո էլ B, D կետերի զուգին, կստանանք՝ $\overline{BC}\times\overline{F}=0$, $\overline{BD}\times\overline{F}=0$:

Եթե $\overline{BC}\times\overline{F}=0$, *ապա կամ* $\overline{BC}\parallel\overline{F}$ *կամ* $\overline{F}=0$:

Եթե $\overline{BD}\times\overline{F}=0$, *ապա կամ* $\overline{BD}\parallel\overline{F}$ *կամ* $\overline{F}=0$:

Սակայն B, C և D-ն չեն ընկած մի ուղղի վրա, հետևապես $\overline{BC}$ *և* $\overline{BD}$ *չեն կարող միաժամանակ զուգահեռ լինել* $\overline{F}$*-ին, և* $\overline{BC}\times\overline{F}=0$ *ու* $\overline{BD}\times\overline{F}=0$ *արտադրյալների հավասար լինելը զերոյի կարող է տեղի ունենալ միայն* $\overline{F}=0$ *դեպքում:*

[(VII 17) *Թույլ է տալիս նույնպես որոշելու* $\overline{F}$ *ուժը, երբ հայտնի են նրա մոմենտները մի գծի վրա չգտնվող երեք կետերի նկատմամբ]:*



Նկ. 177

Խնդիր.

B կետում կիրառված է $\overline{P}$ *ուժը, իսկ C կետում՝* $\overline{Q}$ *ուժը: Այդ ուժերի ազդման գծերը հատվում են A կետում (նկ. 177): Որոշել այն D կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց նկատմամբ* $\overline{M}_D(\overline{P})=\overline{M}_D(\overline{Q})$:

Մի կենտրոն մի ուրիշով փոխարինելու դեպքում յուրաքանչյուր ուժի մոմենտը պիտի փոխվի: Փնտռվող երկրաչափական տեղի կետերի մեկից մյուսին անցնելու դեպքում $\overline{P}$ *և* $\overline{Q}$ *ուժերի մոմենտները փոխվելով, պետք է միմյանց հավասար մնան:*

A *կետը պատկանում է երկու ուժերի ազդման գծերին, հետևապես* $\overline{M}^A(\overline{P})=0$, $\overline{M}_A(\overline{Q})=0$: *Այդ պատճառով էլ A պատկանում է մեր երկրաչա-*

վական տեղին։ Համաձայն (VII 17)-ի կամայական D կետի համար

$$\overline{M}_D(\overline{P})=\overline{M}_A(\overline{P})+\overline{DA}\times\overline{P}=\overline{DA}\times\overline{P}:$$

Ճիշտ այդպես էլ

$$\overline{M}_D(\overline{Q})=\overline{M}_A(\overline{Q})+\overline{DA}\times\overline{Q}=\overline{DA}\times\overline{Q}:$$

Այստեղից պարզ է, որ եթե D-ն պատկանում է մեր երկրաչափական տեղին, ապա

$$\overline{DA}\times\overline{P}=\overline{DA}\times\overline{Q} \text{ կամ } \overline{DA}\times(\overline{P}-\overline{Q})=0:$$

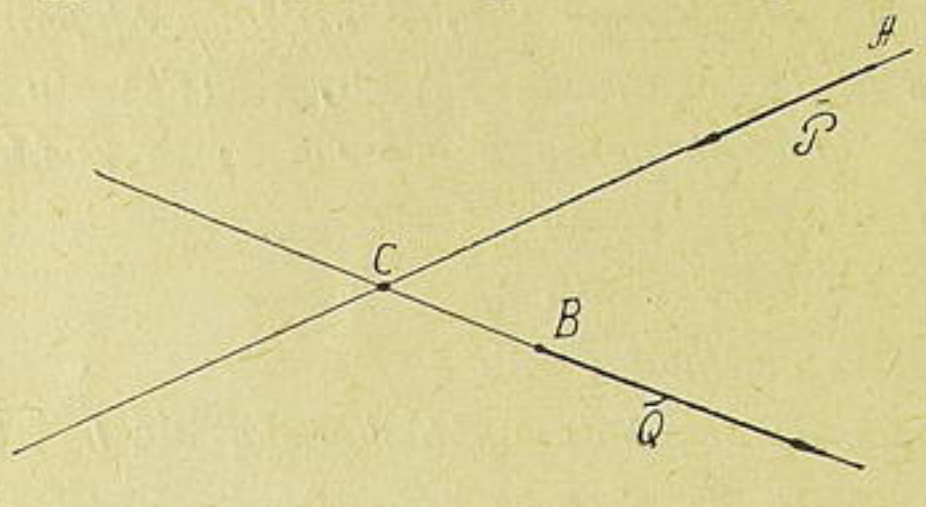
Որովհետև $DA\neq 0$, ապա այդ հավասարության համար անհրաժեշտ է, որ $\overline{DA}$ վեկտորը զուգահեռ լինի $(\overline{P}-\overline{Q})$ տարբերությանը։ Հետևապես փնտրվող երկրաչափական տեղը A-ով անցնող և $(\overline{P}-\overline{Q})$-ին զուգահեռ ուղիղն է։

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՀԱՐՑԵՐ

1. $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ ուժերի կիրառման կետերն են A և B (նկ. 178), նրանց ազդման գծերը հատվում են C կետում։ Որոշել երկրաչափական տեղերը այն կետերի, որոնց նկատմամբ՝

ա) երկու ուժերի մոմենտները համազուգահեռ են,

բ) երկու ուժերի մոմենտները հակազուգահեռ են։



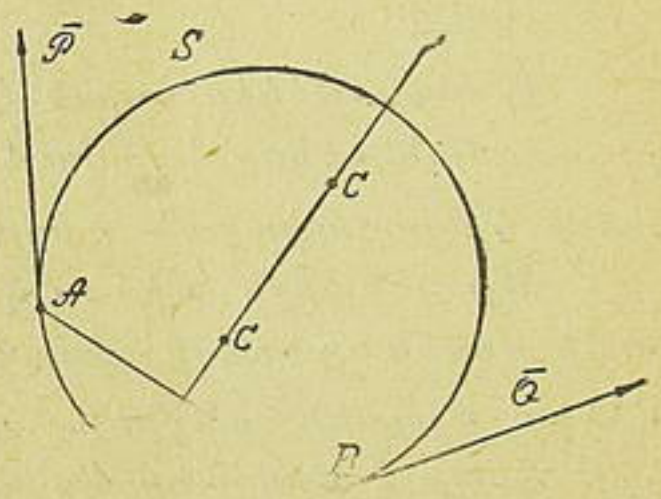
Նկ. 178

2. O կենտրոն ունեցող շրջանագծի A և B կետերին կիրառված են $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ հավասար ուժերը։ Նրանց ազդման գծերն ուղղահայաց են շրջանագծի հարթությանը։ AOB անկյան որ արժեքների դեպքում

$$\overline{M}_O(\overline{P}_A)\perp\overline{M}_O(\overline{Q}_B).$$

$$M_O(P_A)+M_O(Q_B)=0:$$

3. $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ ուժերի չափերը նույնն են (նկ. 179)։ Նրանց ազդման գծերը A և B կետերում հպվում են S շրջանագծին։ Ցույց տալ, որ այն C կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց նկատմամբ $\overline{M}_C(\overline{P})+\overline{M}_C(\overline{Q})=0$, AB լարին ուղղահայաց տրամագիծն է։



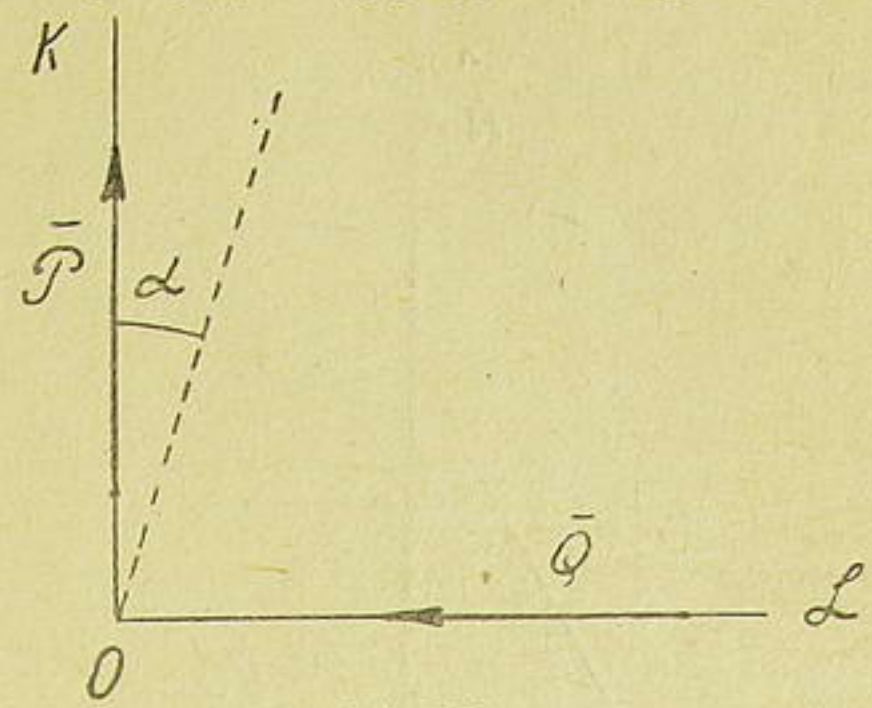
Նկ. 179

4. $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ ուժերի ազդման գծերն են OK-ն և OL-ը $OL\perp OK$ (նկ. 180)։ Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց նկատմամբ այդ ուժերի մոմենտների գումարը զուգահեռ է KOL հարթությանը. գտնել նաև այն α անկյունը, որ մոմենտների հիշյալ գումարը կազմում է OK առանցքի հետ։

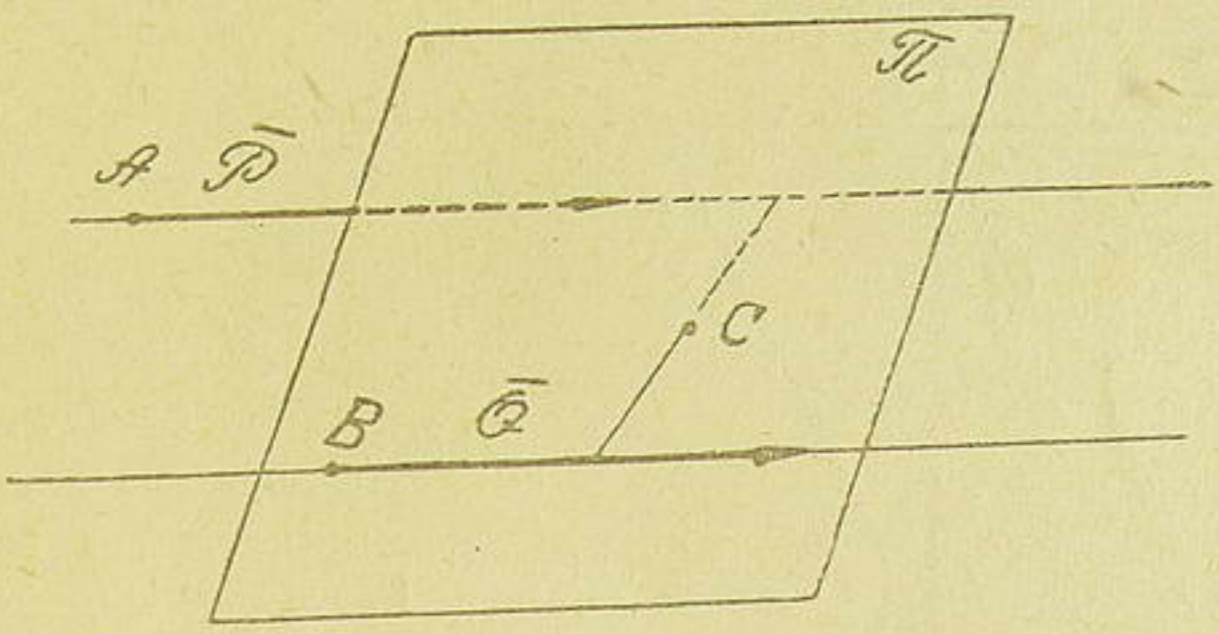
5. A և B կետերում (նկ. 181), կիրառված են հավասար $\bar{P}$ և $\bar{Q}$ ուժերը ($\bar{P}=\bar{Q}$)։ Այդ ուժերի ազդման գծերով անցկացրած հարթությունը նշանակված է σ։ Ցույց տալ, որ C կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց նկատմամբ այդ ուժերի մոմենտների չափերը միևնույնն են՝

$$M_C(\bar{P}_A)=M_C(\bar{Q}_B)$$

σ-ին, ուղղահայաց մի հարթություն է (π), որը զուգահեռ է $\bar{P}$ և $\bar{Q}$ ուժերին ու զանվում է այդ ուժերի ազդման գծերից միևնույն հեռավորության վրա։



Նկ. 180



Նկ. 181

§ 57. Ուժի մոմենտը առանցքի նկատմամբ։ *Միևնույն ժամանակ, բացի նաև նկատմամբ մոմենտից, քննարկվում է նաև առանցքի նկատմամբ մոմենտը։*

Ենթադրենք տրված են A կետում կիրառված $\bar{F}$ ուժը և HH առանցքը, որի դրական ուղղությունը որոշվում է h միավոր վեկտորով (նկ. 182)։ HH առանցքի վրա վերցնենք մի որևէ B կետ, համաառաջության համար նշանակենք՝

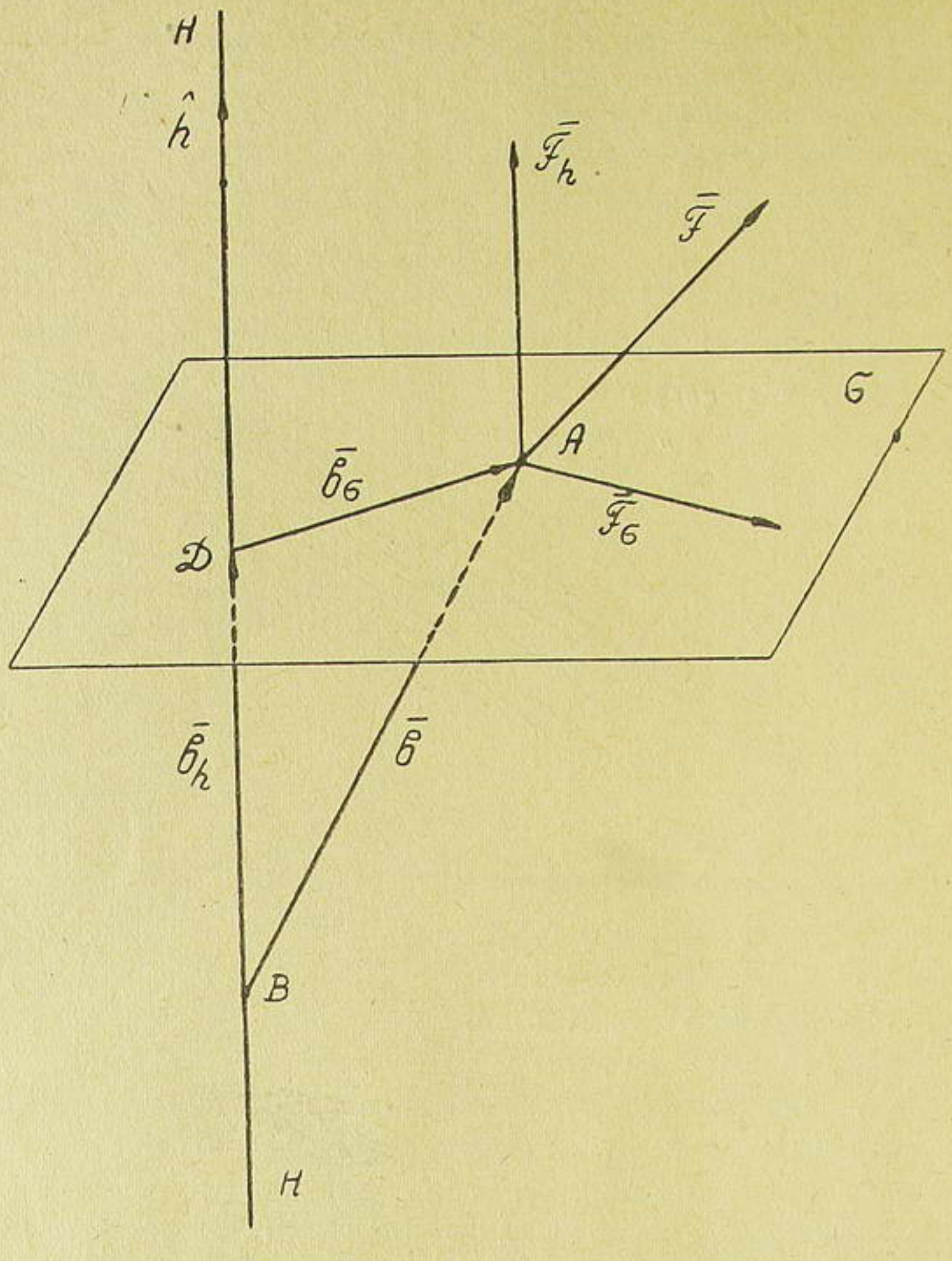
$$\overline{M}_B(\bar{F}_A)=\bar{l}, \quad \overline{BA}=\bar{b}.$$

A-ով անցկացնենք HH-ին ուղղահայաց σ հարթությունը։ σ-ի հատման կետը HH-ի հետ նշանակենք D։ $\bar{b}$, $\bar{F}$, $\bar{l}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրը վերլուծենք երկու բաղադրիչների՝ զուգահեռ h-ի և զուգահեռ σ-ին, այնպես, որ՝

$$\bar{b}=\bar{b}_h+\bar{b}_\sigma,\ \bar{F}=\bar{F}_h+\bar{F}_\sigma,\ \bar{l}=\bar{l}_h+\bar{l}_\sigma$$

Որովհետև $\bar{l}=\bar{b}\times\bar{F}$ և $\bar{b}_h\times\bar{F}_h=0$, ապա ըստ (II, 36) ֆորմուլի կստանանք

$$\bar{l}=(\bar{b}_h\times\bar{F}_\sigma+\bar{b}_\sigma\times\bar{F}_h+\bar{b}_\sigma\times\bar{F}_\sigma)$$



Նկ. 182

Նկատի առնելով, որ $\bar{b}_\sigma \times \bar{F}_\sigma \parallel HH$, $\bar{b}_k \times \bar{F}_\sigma \perp HH$, $\bar{b}_\sigma \times \bar{F}_k \perp HH$ *ստանում ենք՝*

$$\bar{l}_k = \bar{b}_\sigma \times \bar{F}_\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (VII\ 20)$$

$$\bar{l}_\sigma = \bar{b}_k \times \bar{F}_\sigma + \bar{b}_\sigma \times \bar{F}_k :$$

Բայց $\bar{b}_\sigma = \overline{DA} = -\overline{AD}$, *որտեղ* $\overline{AD}$-*ն* HH-*ի հեռավորությունն է ուժի կիրառման կետից և բոլորովին կախված չէ* B *կետի դիրքից առանցքի վրա։ Այդ կետի դիրքից նույնպես կախված չէ ուժի* $\bar{F}_\sigma$ *բաղադրիչը։*

Այդպիսով HH *առանցքի վրա գտնվող բոլոր կենտրոնների նկատմամբ ուժի մոմենտի այն* ($\bar{l}_k$) *բաղադրիչը, որը զուգահեռ է առանցքին, նույնն է։*

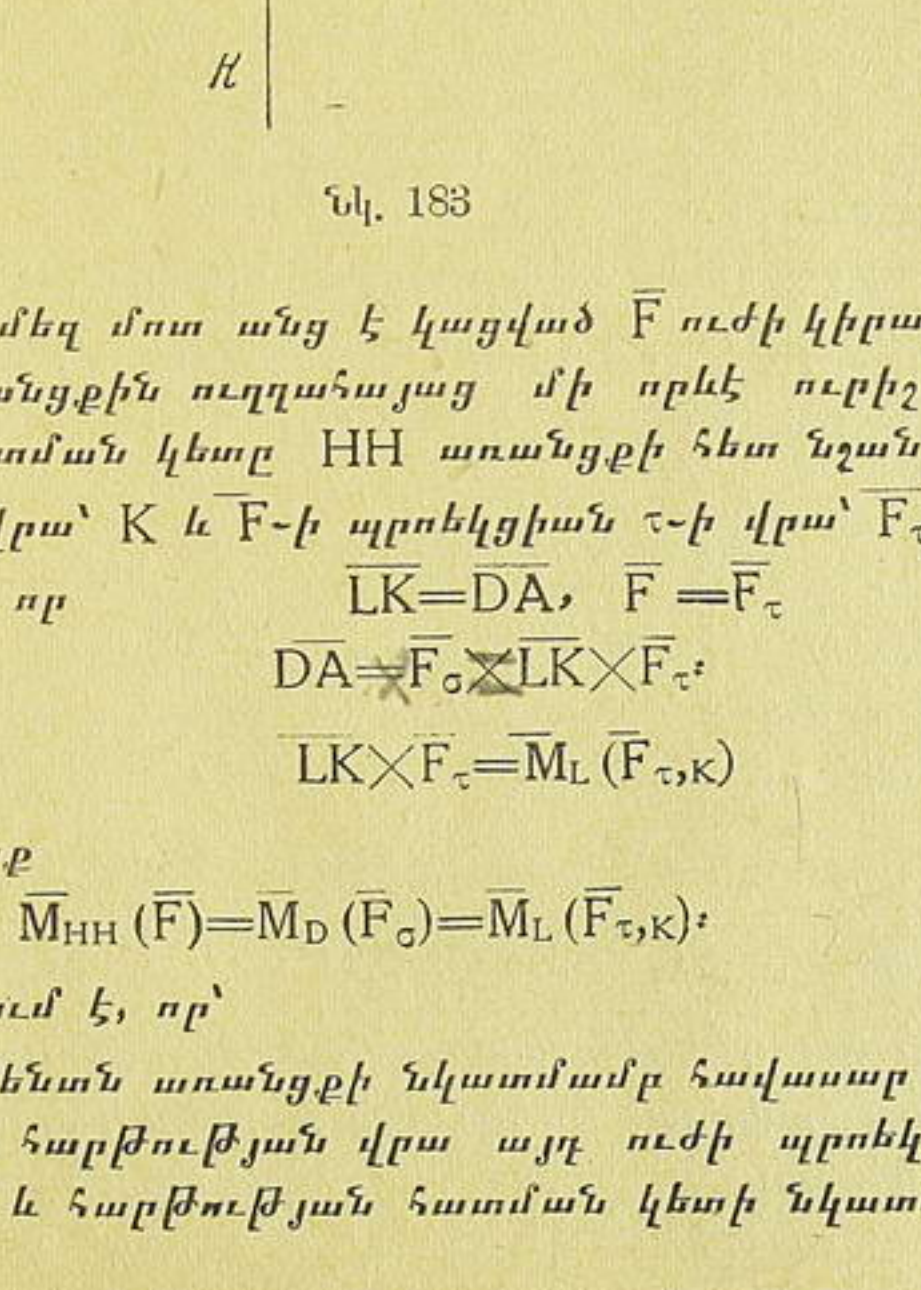
Այդ պատճառով էլ մոմենտի այն բաղադրիչը, որը զուգահեռ է մոմենտի կենտրոնով անցնող առանցքին, կոչվում է մոմենտ այդ առանցքի նկատմամբ։

A կետում կիրառված $\bar{F}$ *ուժի մոմենտը* HH *առանցքի նկատմամբ նշանակենք* $\bar{M}_{HH}(\bar{F}_A)$, *կամ* $\bar{M}_{HH}(\bar{F})$.

Ըստ (Vll 20)-*ի* $$\bar{M}_{HH}(\bar{F})=\bar{b}_\sigma\times\bar{F}_\sigma=\overline{DA}\times\bar{F}_\sigma; \quad \ldots \quad (Vll\ 21)$$

Բայց $$\overline{DA}\times\bar{F}_\sigma=\bar{M}_D(\bar{F}_{\sigma,A}),$$

Հետևապես մենք ունենք $$\bar{M}_{HH}(\bar{F})=\bar{M}_D(F_\sigma);$$



Նկ. 183

σ հարթությունը մեզ մոտ անց է կացված $\bar{F}$ *ուժի կիրառման կետով։ Այժմ անցկացնենք առանցքին ուղղահայաց մի որևէ ուրիշ (τ) հարթություն. (նկ. 183) τ-ի հատման կետը* HH *առանցքի հետ նշանակենք* L, A *կետի պրոեկցիան τ-ի վրա՝* K *և* $\bar{F}$*-ի պրոեկցիան τ-ի վրա՝* $\bar{F}_\tau$։ *Գծագրից անմիջապես երևում է, որ* $$\overline{LK}=\overline{DA},\quad \bar{F}=\bar{F}_\tau$$

և դրա համար էլ $$\overline{DA}=\bar{F}_\sigma\times\overline{LK}\times\bar{F}_\tau;$$

Բայց որովհետև $$\overline{LK}\times\bar{F}_\tau=\bar{M}_L(\bar{F}_{\tau,K})$$

ապա մենք ունենք

$$\bar{M}_{HH}(\bar{F})=\bar{M}_D(\bar{F}_\sigma)=\bar{M}_L(\bar{F}_{\tau,K}); \qquad (Vll\ 22);$$

(Vll 22) *նշանակում է, որ՝*

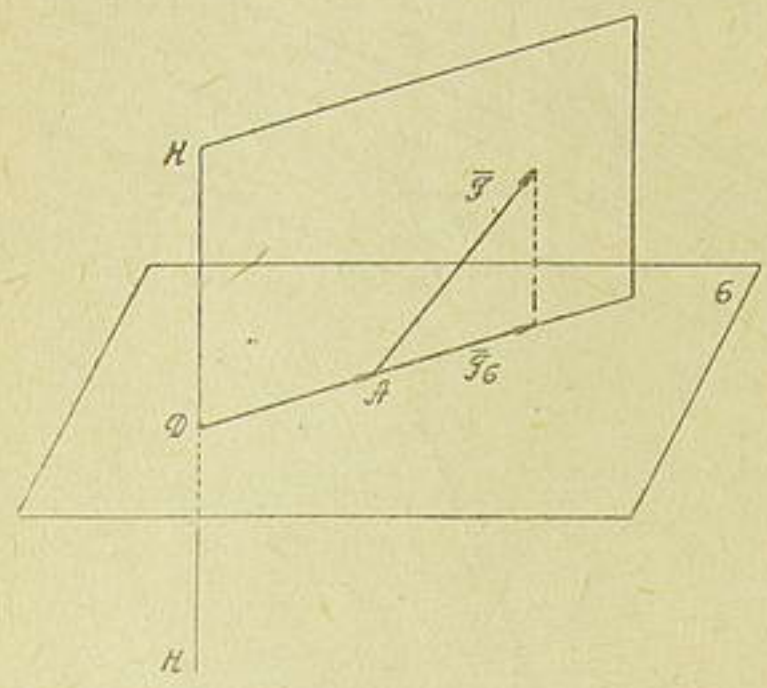
(Vll 23) *Ուժի մոմենտն առանցքի նկատմամբ հավասար է առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա այդ ուժի պրոեկցիայի մոմենտին, առանցքի և հարթության հատման կետի նկատմամբ։*

$\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)=\overline{DA}\times\overline{F}_\sigma$ *արտահայտությունից երևում է, որ ուժի մոմենտը առանցքի նկատմամբ հավասար է զերոյի, երբ* $\overline{DA}\times\overline{F}_\sigma=0$, *այսինքն, երբ*

1^0 $\quad\overline{F}_\sigma \parallel \overline{DA}$,

2^0. $\quad\overline{F}_\sigma=0$:

Առաջին դեպքում (նկ. 184) $\overline{F}$ *ուժը առանցքի հետ զոնվում է մեկ հարթության վրա, իսկ երկրորդ դեպքում* $\overline{F}$ *ուժը զուգահեռ է առանցքին, այսինքն, ուժն առանցքի հետ զարձյալ զոնվում է մի հարթության վրա:*



Նկ. 184

Այդպիսով կարող ենք ասել, որ եթե $\overline{F}$ *ուժը տարբեր է զերոյից, ապա նրա մոմենտը առանցքի նկատմամբ զերո է, երբ նա զոնվում է առանցքի հետ մի հարթության վրա:*

Ուժի մոմենտը առանցքի նկատմամբ ունի հետևյալ հատկությունը:

Եթե HH *և* NN *առանցքները հատվում են, իսկ* $\overline{M}_{HH}(F_A)=0$, $\overline{M}_{NN}(\overline{F}_A)=0$, *ապա և որևէ* KK *առանցքի նկատմամբ, որը զասավորված է* HH *և* NN *առանցքները պարունակող հարթության վրա*

$$\overline{M}_{KK}(F_A)=0:$$

Իսկապես, եթե A *կետում կիրառված* $\overline{F}$ *ուժը հավասար չէ զերոյի, ապա* $\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)$ *և* $M_{NN}(F_A)$ *կարող են միաժամանակ հավասար լինել զերոյի միայն այն ժամանակ, երբ* $\overline{F}$ *ուժի ազդման գիծը զասավորված է* HH *և* NN *առանցքների հարթության վրա: Բայց այդ դեպքում ուժի մոմենտը հավասար կլինի զերոյի այդ նույն հարթության վրա զասավորված ամեն մի առանցքի նկատմամբ:*

§ 58. Կետի և առանցքի նկատմամբ ուժի մոմենտների կոորդինատային արտահայտությունները: *Թող* A *և* B *կետերի շուռավիղ վեկտորների պրոեկցիաները լինեն* $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$, *այն ժամանակ* $\overline{BA}$*-ի պրոեկցիաները կլինեն՝*

$$a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z:$$

Նշանակենք $\overline{F}$ *ուժի պրոեկցիան* X, Y, Z: *Ի նկատի առնենք, որ ուժի մոմենտը կետի նկատմամբ վեկտորական արտադրյալ է՝* $\overline{M}_B(F_A)=\overline{BA}\times F$: *Ըստ* (II 37) *ֆորմուլի առանում ենք՝*

$$\overline{M}_B(F_A)=i[(a_y-b_y)Z-(a_z-b_z)Y]+j[(a_z-b_z)X-(a_x-b_x)Z]+$$
$$+k[(a_x-b_x)Y-(a_y-b_y)X]. \quad \ldots \quad \text{(VII 24)}$$

Այս ֆորմուլի քառակուսի փակագծերի արտահայտությունները համապատասխանաբար հավասար են $\overline{M}_B(\overline{F}_A)$ *մոմենտի պրոեկցիաներին* OX, OY, OZ *առանցքի վրա:*

Եթե մոմենտների կենտրոնը կոօրդինատային սկզբնակետում է, այսինքն, B *համընկնում է* O*-ի հետ,* $b_x=b_y=b_z=0$, *և* (VII 24)*-ը տալիս է՝*

$$\overline{M}_0(\overline{F}_A)=\hat{i}(a_yZ-a_zY)+\hat{j}(a_zX-a_xZ)+\hat{k}(a_xY-a_yX)\cdot\ \ldots\ \text{(VII 25)}$$

Եթե HH *առանցքը զուգահեռ է* $\hat{h}$*-ին և անցնում է* B *կետով,*

ապա
$$\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)=\hat{h}\,[\overline{M}_B(\overline{F}_A)\cdot\hat{h}], \qquad \text{(VII 26)}$$

որտեղ $\overline{M}_B(\overline{F}_A)\cdot\hat{h}$ *հանդիսանում է* $\overline{M}_B(\overline{F}_A)$ *մոմենտի պրոեկցիան* HH *առանցքի վրա, իսկ տես* § *57,*

$$\hat{h}\,[\overline{M}_B(\overline{F}_A)\cdot\hat{h}]=\overline{l}_h$$

$\overline{F}_A$ *ուժի մոմենտն է* HH *առանցքի նկատմամբ։*

Վերլուծելով $\hat{h}$*-ը կոօրդինատային առանցքներին զուգահեռ բաղադրիչների, կունենանք՝*

$$\hat{h}=\hat{i}\cos\alpha+\hat{j}\cos\beta+\hat{k}\cos\gamma,\ \ldots\ \text{(VII 27)}.$$

որտեղ
$$\alpha=(\hat{h},\,OX),\ \beta=(\hat{h},\,OY),\ \gamma=(\hat{h},\,OZ)\text{։}$$

Փոխարինելով $\overline{M}_B(\overline{F}_A)$ *և* $\hat{h}$*-ը նրանց* (VII 24) *և* (VII 27) *արտահայտություններով, ստանում ենք՝*

$$[\overline{M}_B(\overline{F}_A)]\cdot\hat{h}=[(a_y-b_y)Z-(a_z-b_z)Y]\cos\alpha+[(a_z-b_z)X-$$

$$-(a_x-b_x)Z]\cos\beta+[(a_x-b_x)Y-(a_y-b_y)Z]\cos\gamma\ \ldots\ \text{(VII 28)}$$

(VII 28) *բազմապատկելով* $\hat{h}=(\hat{i}\cos\alpha+\hat{j}\cos\beta+H\cos\gamma)$*-ով, գտնում ենք* $\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)$*-ի արտահայտությունը։*

Վերջապես, եթե հայտնի է $\overline{F}$ *ուժի մոմենտը* C *կետի նկատմամբ և* HH *առանցքն անցնում է* B *կետով, ապա ըստ* (VII 17)*-ի գրում ենք՝*

$$\overline{M}_B(\overline{F}_A)=\overline{M}_C(F_A)+\overline{BC}\times\overline{F}$$

և օգտվելով այդ արտահայտությունով՝ գտնենք $\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)$։

Խնդիրներ.

1. HH *և* NN *առանցքները զուգահեռ են.* NN *առանցքի հեռավորությունը* HH*-ից հավասար է* $\bar{a}$*-ի (նկ. 185)։ Ապացուցել, որ եթե* F *ուժը կիրառված է* A *կետում, ապա*

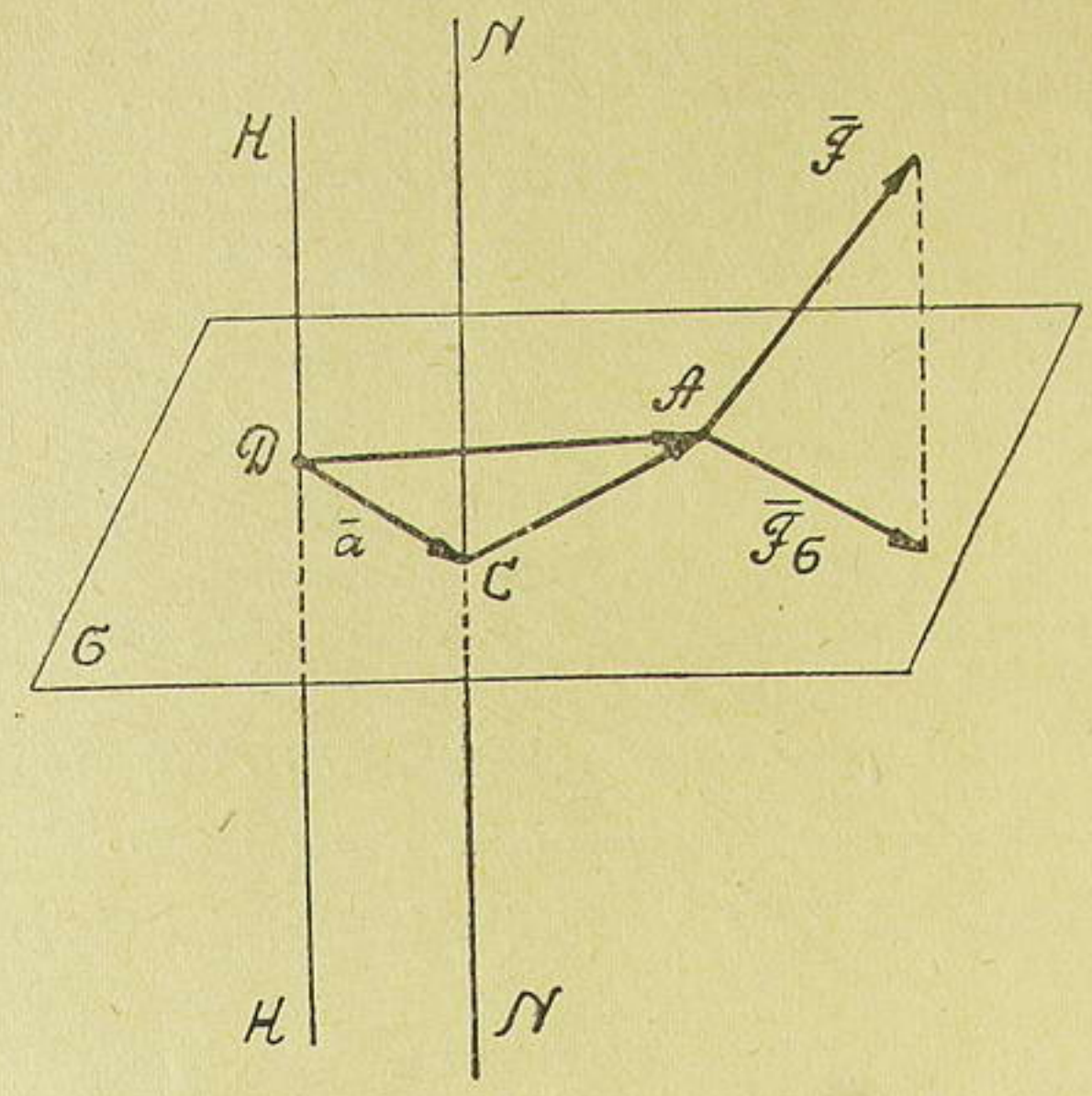
$$\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)=\overline{M}_{NN}(\overline{F}_A)+\bar{a}\times\overline{F}_\sigma,\ \ldots\ \text{(VII 29)}$$

որտեղ $\overline{F}_\sigma$*-ն* $\overline{F}$*-ի պրոեկցիան է առանցքներին ուղղահայաց հարթության վրա։ Որոշել, ինչպես պետք է ուղղված լինի* $\overline{F}_\sigma$*-ն, որպեսզի*

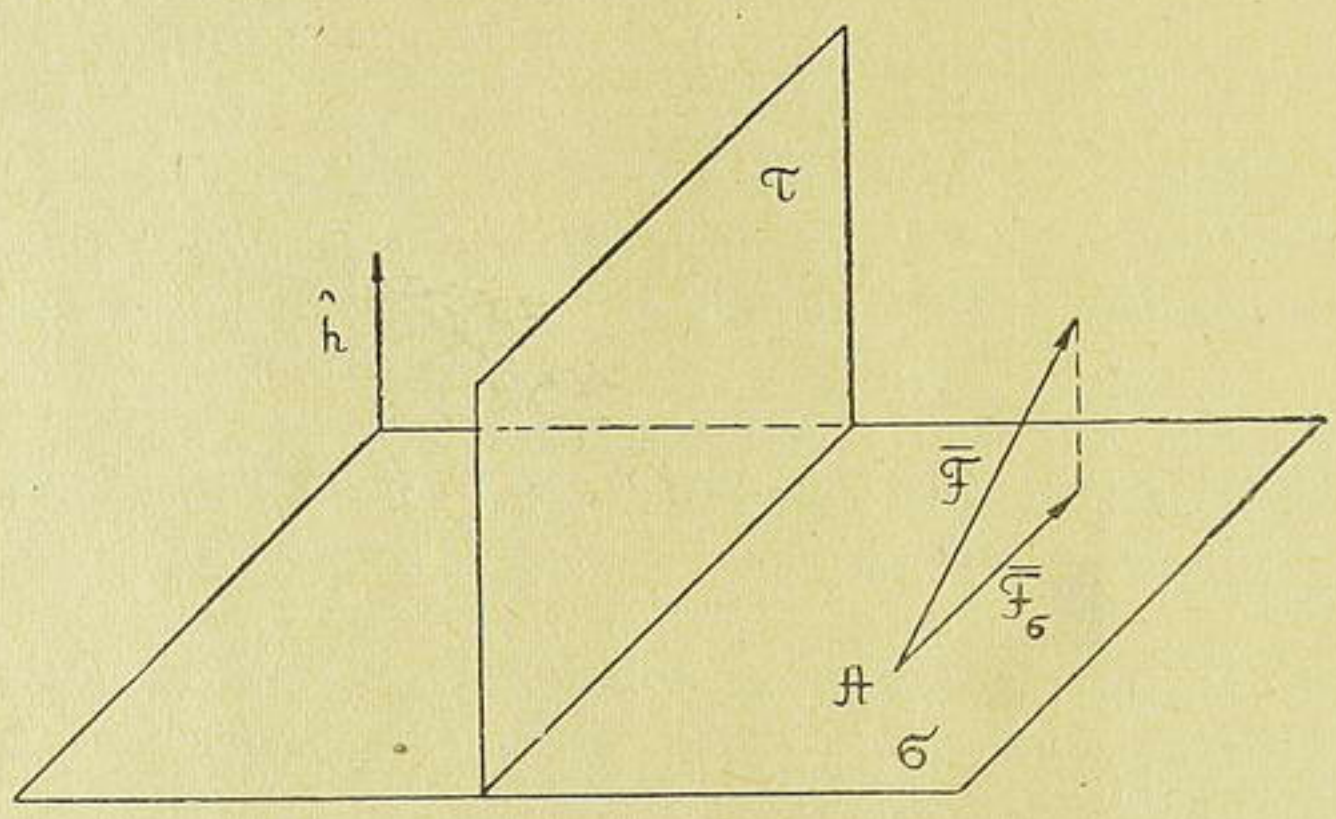
$$\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)=\overline{M}_{NN}(\overline{F}_A)\text{։}\ \ldots\ \text{(VII, 30)}$$

2. *Ապացուցել, որ* $\hat{h}$*-ին զուգահեռ առանցքների երկրաչափական տեղը, որոնց նկատմամբ (նկ. 186)* $\overline{F}$ *ուժի մոմենտը միևնույնն է, դա* $\overline{F}_\sigma$*-ին*

զուգահեռ մի հարթություն է. ($\overline{F}_\sigma$-ն $\overline{F}$-ի պրոեկցիան է հ-ին ուղղահայաց σ հարթության վրա):



Նկ. 185



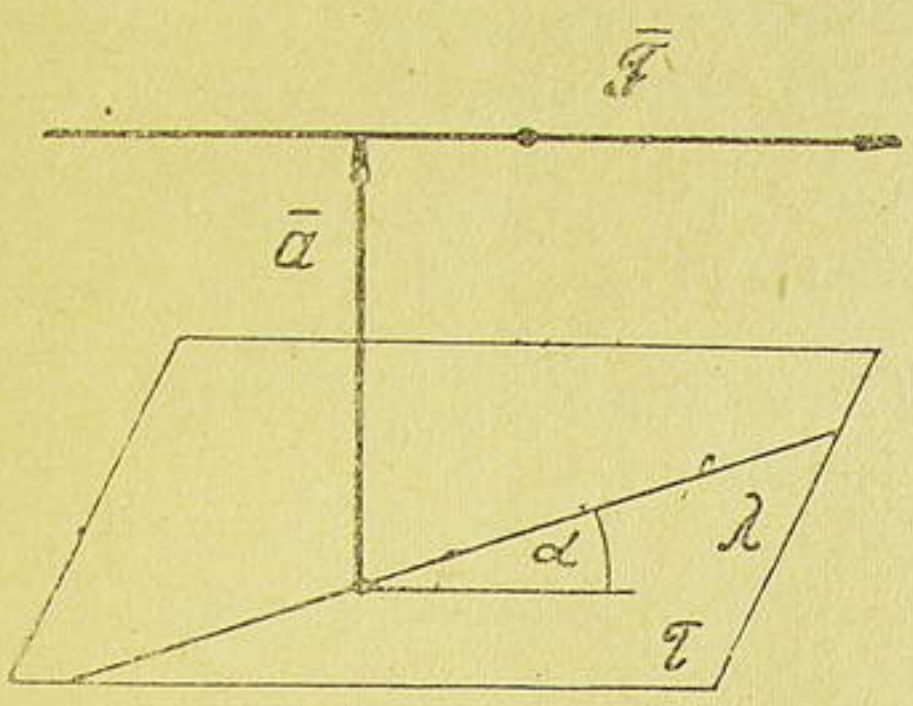
Նկ. 186

3. $\overline{F}$ ուժի ազդման գիծը զուգահեռ է τ հարթությանը (նկ. 187) և գտնվում է τ-ից ā հեռավորության վրա: τ-ի վրա դասավորված λ առանցքը կազմում է α անկյուն $\overline{F}$-ի ազդման գծի հետ: Որոշել $\overline{M}_\lambda(\overline{F})$:

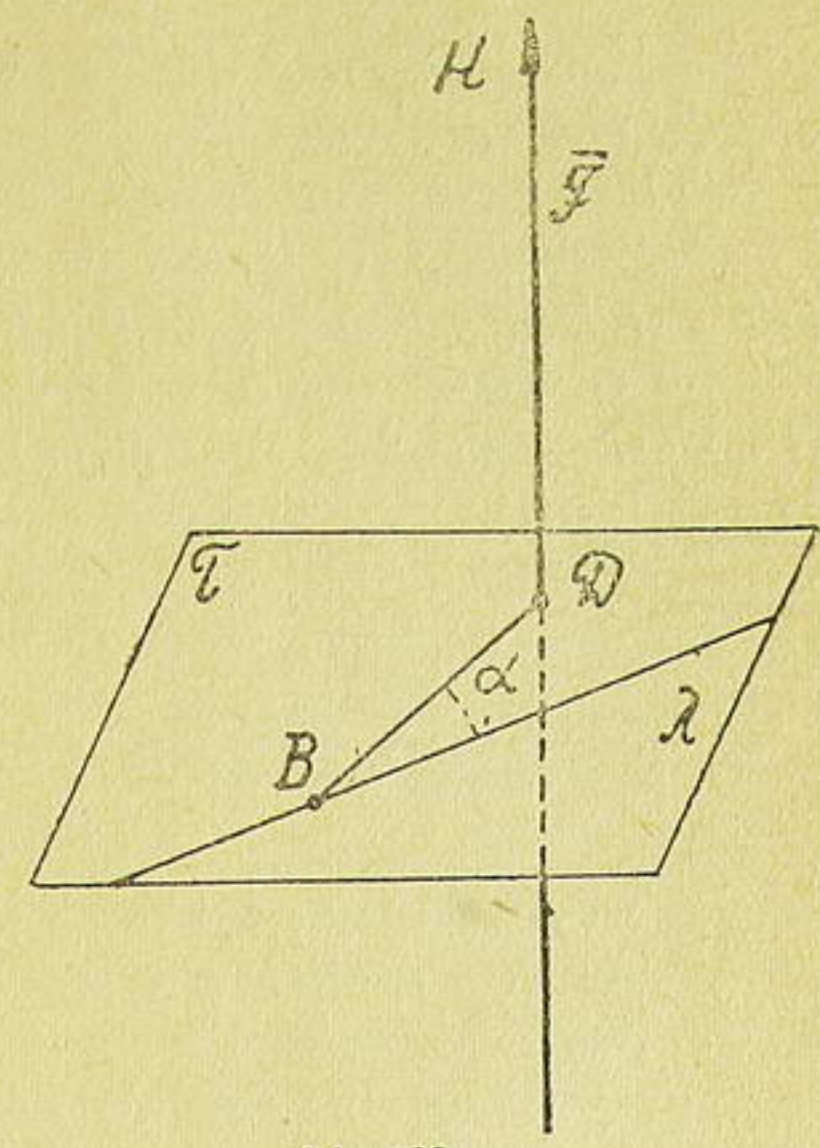
4. $\overline{F}$ ուժի ազդման գիծն ուղղահայաց է τ հարթությանը (նկ. 188) և հատվում է նրա հետ D կետում: Գիտենալով $\overline{F}$-ի մոմենտը, τ-ին պատ-

կանող B *կետի նկատմամբ, որոշել* $\overline{F}$*-ի մոմենտը* B*-ով անցնող և τ-իվրա դասավորված* λ *առանցքի նկատմամբ.* $(\overline{BD}, \lambda)=\alpha$:

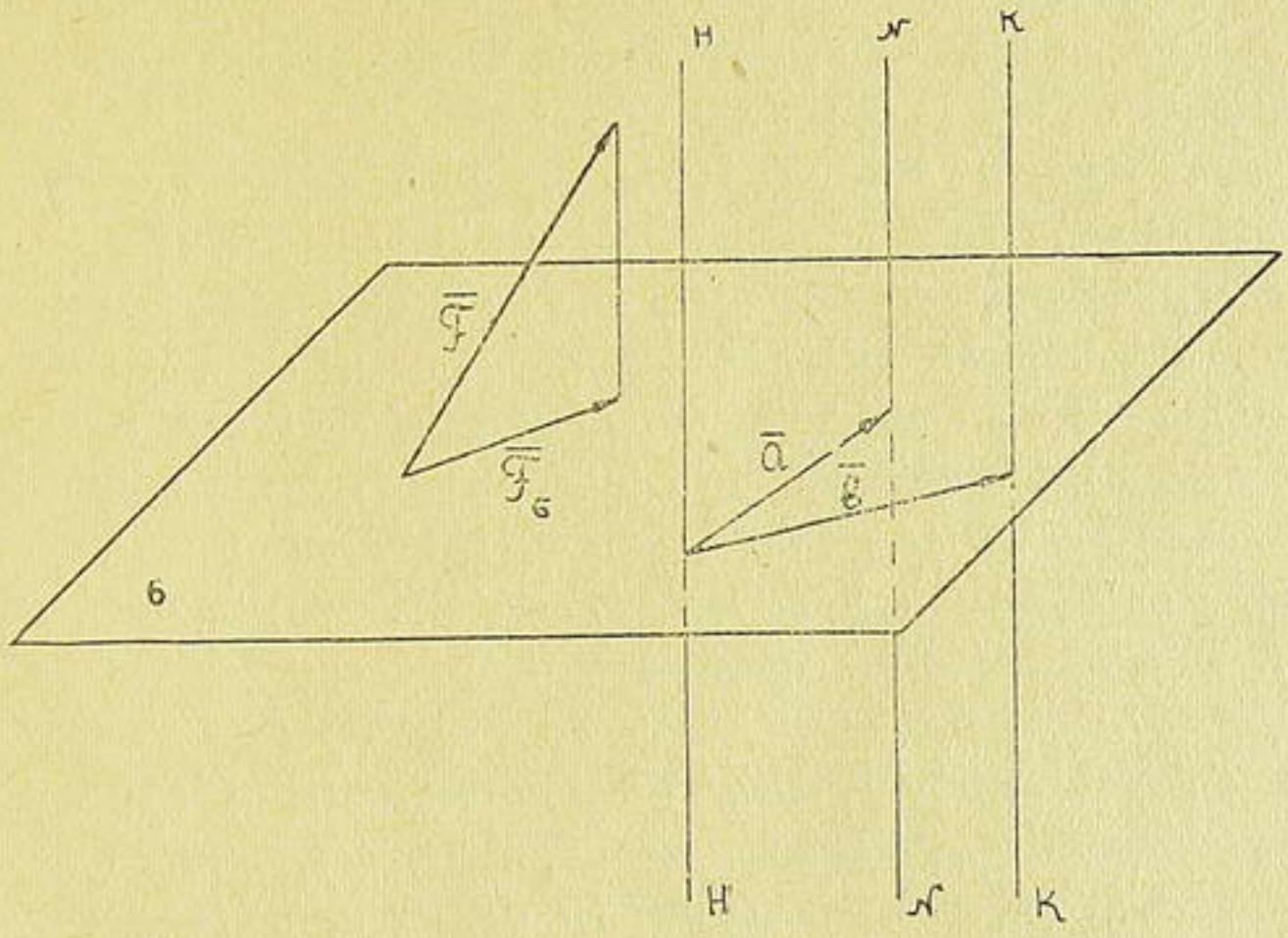
5. HH, NN, KK *առանցքները մխմյանց զուգահեռ են (նկ. 189).* NN *և* KK *առանցքների հեռավորությունները* HH*-ից համապատասխանաբար հավասար են* ā *և* $\bar{b}$, *ընդ որում* a=b. NN*-ը այնպես է ընտրված, որ*



նկ. 187



նկ. 188



նկ. 189

$\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)=\overline{M}_{NN}(\overline{F}_A)$: *Որոշել* (b̄, ā) *անկյունն այնպես, որ* $|\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)-\overline{M}_{KK}(\overline{F}_A)|$ *լինի ամենամեծը:*

6. *Համաձայն* (VII, 26) *ֆորմուլի*

$$\overline{M}_{HH}(\overline{F}_A)=\hat{h}\,[\overline{M}_B(\overline{F}_A)\cdot\hat{h}]:$$

Ենթադրելով, որ $\overline{BA}=\bar{r}$, *կստանանք՝*

$$\overline{M_B}(\overline{F_A})=\bar{r}\times\overline{F} \text{ և } M_{HH}(F_A)=\hat{h}[(\bar{r}\times\overline{F})\cdot\hat{h}]; \ldots \text{(VII 31)}$$

ա) ցույց տալ, որ $\hat{h}\cdot(\bar{r}\times F)$ *խառն արտադրյալը կախում չունի* B *կետի դիրքից առանցքի վրա,*

բ) ստանալ (VII 31)*-ից* (VII 22)

գ) ելնելով (VII 31)*-ից՝ ապացուցել, որ* $M_{HH}(\overline{F_A})$ *հավասար է զերոյի, եթե* $\overline{F}$ *և* HH*-ը մեկ հարթության վրա են:*

№ 9. Տրված են մի շարք ոչ կոպլանար առանցքներ: Ո՞ր դեպքում $\overline{F}$ *ուժի մոմենտները այդ բոլոր առանցքների նկատմամբ հավասար են զերոյի, եթե* $\overline{F}\neq 0$*:*

ԳԼՈՒԽ VIII

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

§ 59. Նյութական կետերի սիստեմ. արտաքին եվ ներքին ուժեր: *Նյութական կետերի սիստեմ է կոչվում նյութական կետերի այն համախումբը, որը մտքով անջատված է ճնացած բոլոր կետերից:*

Յուրաքանչյուր մարմին մտքով կարելի է բաժանել այնքան փոքր մասերի, որ նրանցից յուրաքանչյուրը կարելի լիներ դիտարկել որպես նյութական կետ: Հետևապես որևէ մարմին, կամ նրա կամայական մասը, կամ մի քանի մարմիններ միշտ կարելի է դիտարկել որպես նյութական կետերի սիստեմ:

Համառոտության համար նյութական կետերի սիստեմը ուղղակի կանվանենք սիստեմ:

Սիստեմի կետերի վրա ազդող ուժերը նպատակահարմար է բաժանել արտաքին և ներքին ուժերի:

Ներքին ուժեր են կոչվում հենց սիստեմի կետերից առաջացող ուժերը, իսկ արտաքին ուժերն այն ուժերն են, որոնք առաջանում են սիստեմին չպատկանող կետերից կամ մարմիններից:

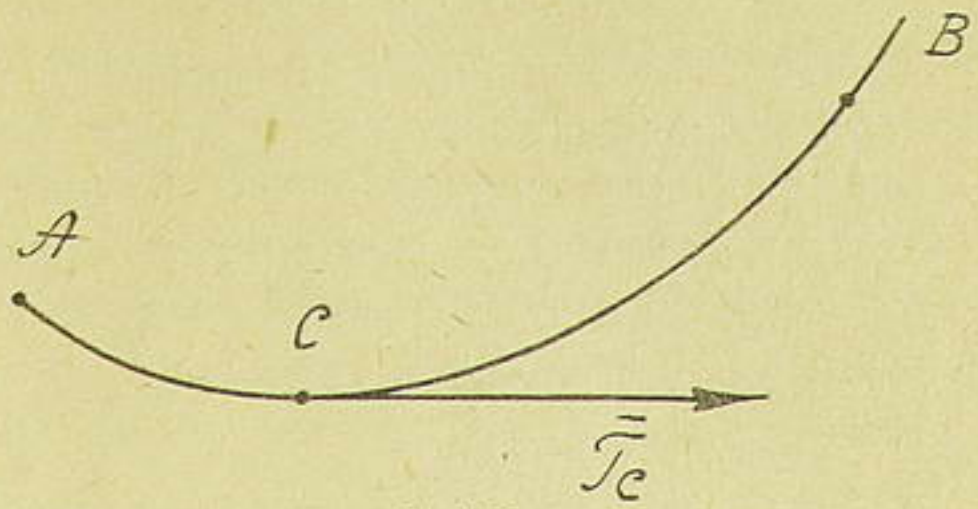
Ասածից անմիջապես հետևում է, որ միևնույն ուժը կարող է լինել և՛ ներքին, և՛ արտաքին, նայած թե կետը, որից առաջանում է ուժը, պատկանում է սիստեմին, թե ոչ:

Օրինակ, եթե որպես սիստեմ ընդունենք քարը և երկրագունդը, ապա քարի կշիռը—երկրագնդի կողմից քարը ձգող ուժը—կլինի ներքին ուժ: Եթե երկրագունդը չի մտցված սիստեմի մեջ, քարի կշիռը կլինի արտաքին ուժ:

Եթե սիստեմը բաղկացած է ճախարակից, նրա վրայով անցկացված թելից և ճախարակի առանցքից, ապա առանցքի հակազդումը ներքին ուժ է: Առանցքի հակազդումը կլինի արտաքին ուժ, եթե սիստեմը բաղկացած է միայն ճախարակից և թելից:

ACB *թելի լարումը* C *կետում (նկ. 190) կլինի ներքին ուժ, եթե որպես սիստեմ ընդունենք ամբողջ թելը: Բայց այդ նույն լարումը կլինի արտաքին ուժ, եթե որպես սիստեմ ընդունենք թելի* CA *մասը:*

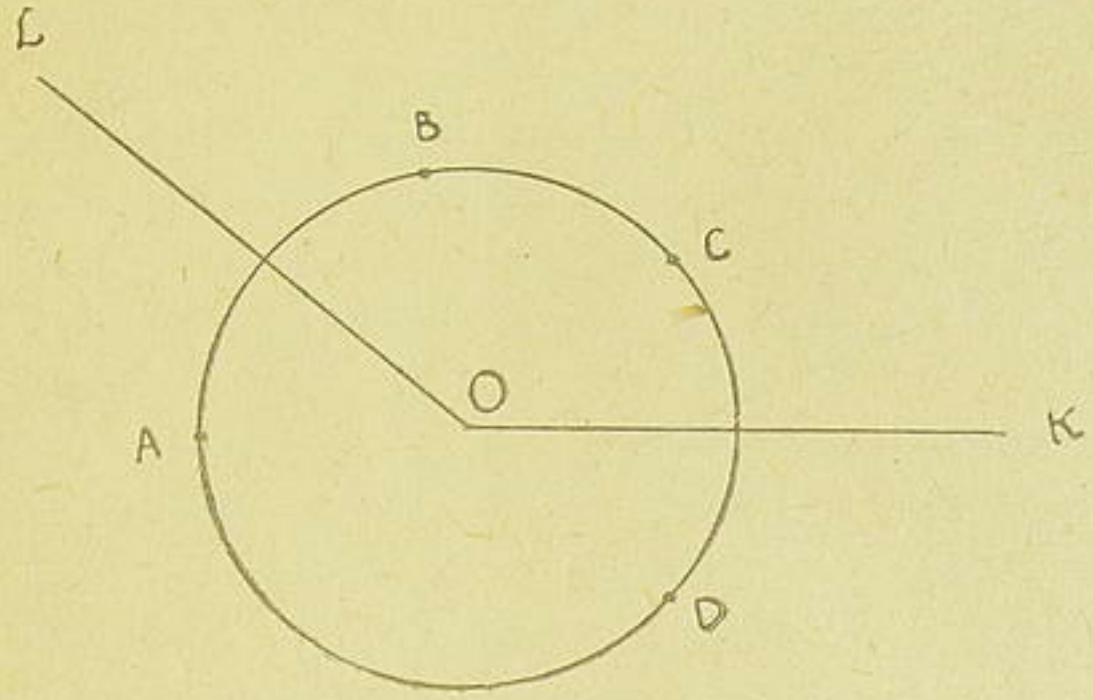
Այսպես ուրեմն, որպեսզի որևէ ուժ հաշվենք արտաքին, պետք է սիստեմից արտաքսել այն մարմինը կամ կետը, որից առաջանում է ուժը։ [Այդ եղանակով շարունակ օգտվում են նյութերի դիմադրության մեջ]։



Նկ. 190

Հարցեր.

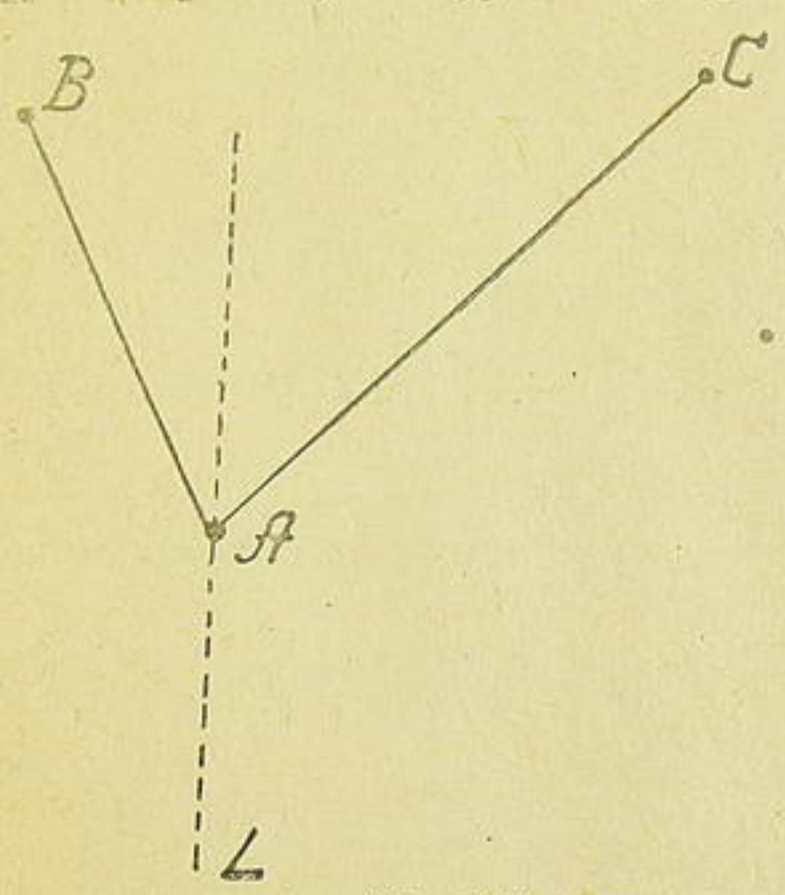
1. Հավասար շառավիղ ունեցող և համանուն էլեկտրական լիցքեր կրող O, A, B, C, D գնդիկները դասավորված են ինչպես ցույց է տված նկ. 191։ Ի՞նչ գնդիկներից է կազմված սիստեմը, եթե O-ին կիրառված ներքին ուժերի համազորի ազդման գիծը OL-ն է, իսկ O-ին կիրառված արտաքին ուժերի համազորի ազդման գիծը—OK-ն է։



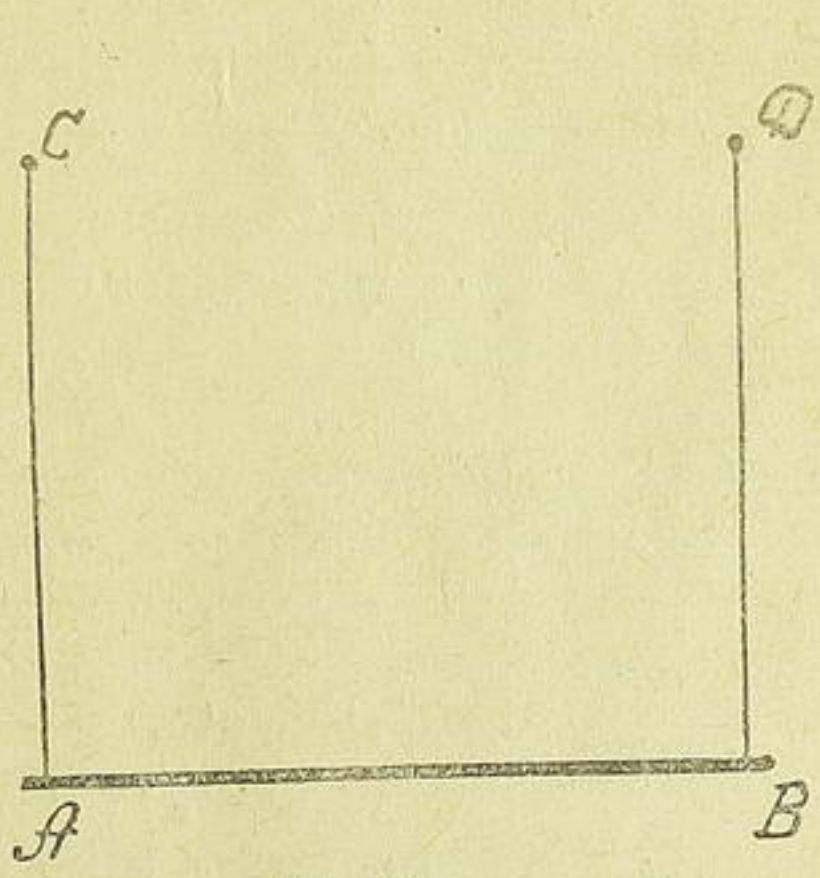
Նկ. 191

2. A ծանր կետը կախված է CA և BA թելերից (նկար 192)։ Թվել այն կետերն ու մարմինները, որոնցից պիտի բաղկացած լինի սիստեմը, որպեսզի A կետին կիրառված արտաքին ուժերի համազորն ընկնի AL ուղղաձիգից այլ։

3. Q կշիռ ունեցող AB ձողը կախված է CA և DB ծանր թելերի վրա (նկ. 193)։ Ցույց տալ, թե ինչ կետերից ու մարմիններից պիտի



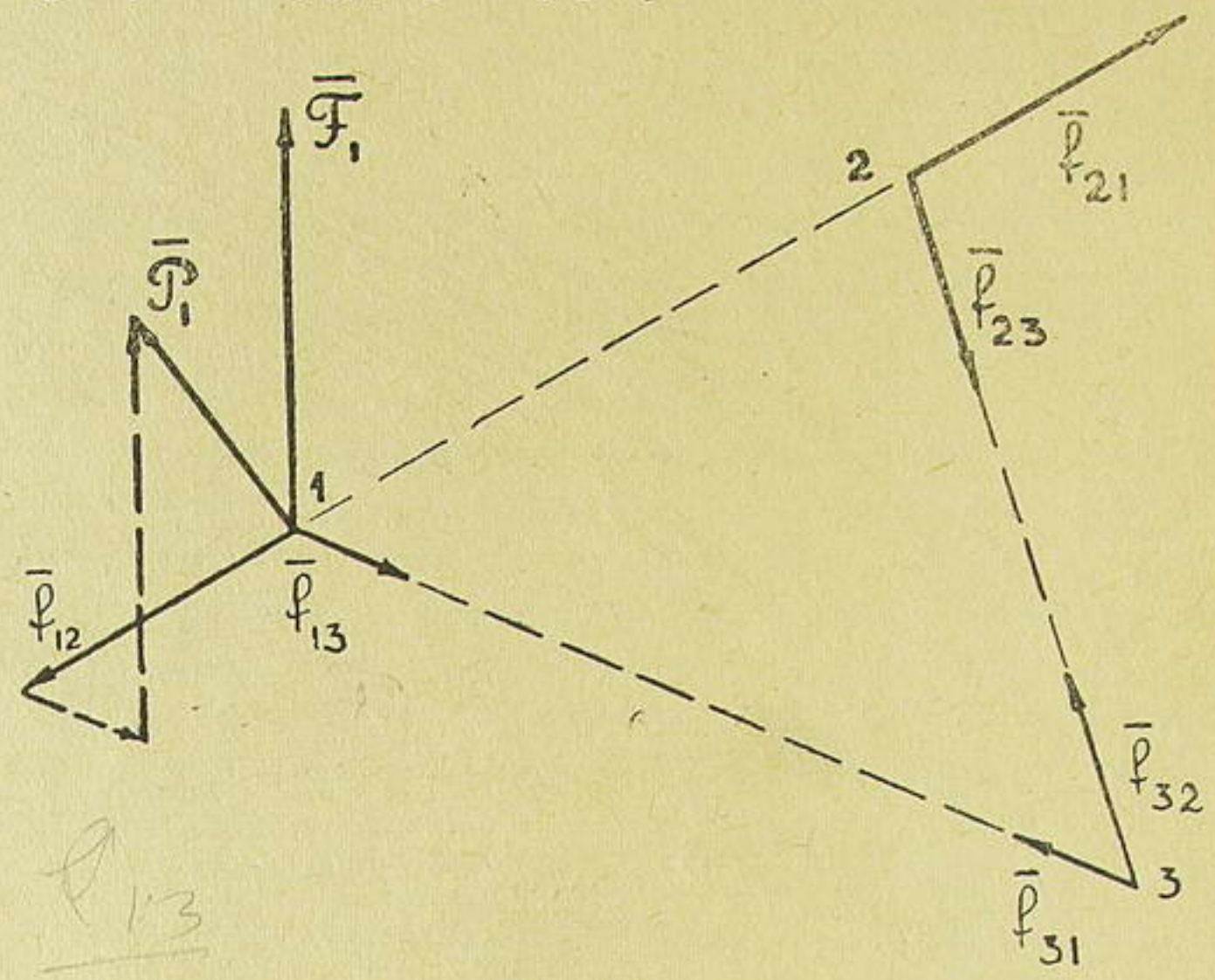
Նկ. 192



Նկ. 193

բազկացած լինի սիստեմը, որպեսզի սիստեմի կետերին կիրառված ուղղաձիգ ուժերից և ոչ մեկը արտաքին ուժ չլինի։

§ 60. Կամայական սիստեմի հավասարակշռության անհրաժեշտ պայմանները։ *Այժմ անցնենք նյութական կետերի սիստեմի հավասարակշռության պայմանների որոշմանը։ Պարզության համար մի քառժամանակ ենթադրենք, որ սիստեմը բաղկացած է միայն երեք կետերից (նկ. 194)։ Ինչպարիկենք այդ սիստեմի որևէ կետը, օրինակ, առաջինը։ Այդ կետին ազդող բոլոր արտաքին ուժերը կարելի է գումարել և այդպիսով ստացած նրանց համազորը նշանակել $\bar{F}_1$։*



Նկ. 194

Առաջին կետին կիրառված են նաև երկրորդ և երրորդ կետերից համապատասխանաբար առաջացող ներքին $\bar{f}_{12}$ և $\bar{f}_{13}$ ուժերը։ Ներքին ուժերի համազորը նշանակենք $\bar{f}_1$; $\bar{f}_1=\bar{f}_{12}+\bar{f}_{13}$, իսկ առաջին կետին կիրառված ներքին և արտաքին ուժերի համազորը՝ $\bar{P}_1$,

$$\bar{P}_1=\bar{F}_1+\bar{f}_1=\bar{F}_1+\bar{f}_{12}+\bar{f}_{13}. \qquad \text{(VIII 1)}$$

Ըստ Վարինյոնի թեորեմի

$$\bar{M}_C(\bar{P}_1)=\bar{M}_C(\bar{F}_1)+\bar{M}_C(\bar{f}_{12})+\bar{M}_C(\bar{f}_{13}), \quad \text{(VIII 2)}$$

որտեղ C-ն մոմենտների կամայական կենտրոնն է։

Ճիշտ նույն ձևով էլ երկրորդ և երրորդ կետերի համար կստանանք՝

$$\bar{P}_2=\bar{F}_2+\bar{f}_2=\bar{F}_2+\bar{f}_{21}+\bar{f}_{23}, \qquad \text{(VIII 3)}$$

$$\bar{M}_C(\bar{P}_2)=\bar{M}_C(\bar{F}_2)+\bar{M}_C(\bar{f}_{21})+\bar{M}_C(\bar{f}_{23}) \qquad \text{(VIII 4)}$$

$$\bar{P}_3=\bar{F}_3+\bar{f}_3=\bar{F}_3+\bar{f}_{31}+\bar{f}_{32} \qquad \text{(VIII 5)}$$

$$\bar{M}_C(\bar{P}_3)=\bar{M}_C(\bar{F}_3)+\bar{M}_C(\bar{f}_{31})+\bar{M}_C(\bar{f}_{32}). \qquad \text{(VIII 6)}$$

(VIII 1), (VIII 2), ... , (VIII 6) *հավասարությունները ճիշտ են միշտ և կարող են դրվել նյութական կետերի սխեմի դինամիկայի հիմքում։*

Այժմ ենթադրենք, որ սխեմը գտնվում է հավասարակշռության մեջ։ Ակնհայտ է, որ սխեմը կարող է հավասարակշռության մեջ լինել միայն այն ժամանակ, երբ նրա կետերից յուրաքանչյուրը հավասարակշռության մեջ է։ Իսկ դրա համար անհրաժեշտ է, որպեսզի յուրաքանչյուր կետին կիրառված արտաքին և ներքին ուժերի համազորը հավասար լինի զերոյի։

$$\overline{P}_1=0,\ \overline{P}_2=0,\ \overline{P}_3=0, \qquad \text{(VIII 7)}$$

Բայց եթե $\overline{P}_1=0$, *հետևապես* $\overline{M}_C(\overline{P}_1)=0$։

Այսպիսով սխեմի հավասարակշռության դեպքում

$$\overline{M}_C(\overline{P}_1)=0,\ \overline{M}_C(\overline{P}_2)=0,\ \overline{M}_C(\overline{P}_3)=0. \qquad \text{(VIII 8)}$$

Այստեղ հարկավոր է նկատել, որ (VIII 8) հավասարությունները համարժեք են (VIII 7) հավասարություններին։ Եվ իսկապես, զերոյի հավասար ուժի մոմենտը նույնպես հավասար է զերոյի, և ընդհակառակը, եթե ուժի մոմենտը որևէ կենտրոնի նկատմամբ հավասար է զերոյի, ապա ուժն էլ է հավասար զերոյի։

Հետևապես, եթե տեղի ունեն (VIII 7) հավասարությունները կամ (VIII 8) հավասարությունները, սխեմը պետք է հավասարակշռության մեջ գտնվի։

Սակայն (VIII 7) և (VIII 8) հավասարությունները գրեթե չունեն գործնական ոչ մի կիրառում։ Դրա պատճառն այն է, որ այդ հավասարությունների մեջ մտնում են ներքին ուժեր։ Ներքին ուժերի ազդման գծերը մեզ հայտնի են [օրինակ՝ $\overline{f}_{12}$ *և* $\overline{f}_{21}$ *ուժերի ազդման գիծը 12 ուղիղն է], իսկ ներքին ուժերի չափերը գրեթե երբեք հայտնի չեն լինում։*

Ներքին ուժերը մեր հավասարություններից արտաքսելու համար կարելի է օգտվել նրանց հատկություններից (VII, 9)։

Գումարենք (VIII 1), (VIII 3) (VIII 5) հավասարությունները՝

$$\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3=(\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{f}_{12}+\overline{f}_{13})+(\overline{F}_2+\overline{f}_{21}+\overline{f}_{23})+(\overline{F}_3+\overline{f}_{31}+\overline{f}_{32})=$$
$$(\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3)+(\overline{f}_{12}+\overline{f}_{21})+(\overline{f}_{13}+\overline{f}_{31})+(\overline{f}_{23}+\overline{f}_{32}).$$

Համաձայն (VII 9)-ի $\overline{f}_{12}+\overline{f}_{21}=0,\ \overline{f}_{13}+\overline{f}_{31}=0,\ \overline{f}_{23}+\overline{f}_{32}=0$։

Այսպիսով
$$\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3=F_1+F_2+F_3 \qquad \text{(VIII 9)}$$

Գումարելով (VIII 2), (VIII 4) և (VIII 6) հավասարությունները, կստանանք՝

$$\overline{M}_C(\overline{P}_1)+\overline{M}_C(\overline{P}_2)+\overline{M}_C(\overline{P}_3)=\overline{M}_C(\overline{F}_1)+\overline{M}_C(\overline{f}_{12})+\overline{M}_C(\overline{f}_{21})+\overline{M}_C(\overline{F}_2)+$$
$$+\overline{M}_C(\overline{f}_{21})+\overline{M}_C(\overline{f}_{23})+\overline{M}_C(\overline{F}_3)+\overline{M}_C(\overline{f}_{31})+\overline{M}_C(\overline{f}_{13})=$$
$$[\overline{M}_C(\overline{F}_1)+\overline{M}_C(\overline{F}_2)+\overline{M}_C(\overline{F}_3)]+[\overline{M}_C(\overline{f}_{12})+\overline{M}_C(\overline{f}_{21})]+[\overline{M}_C(\overline{f}_{13})+\overline{M}_C(\overline{f}_{31})]+$$
$$+[\overline{M}_C(\overline{f}_{23})+\overline{M}_C(\overline{f}_{32})].$$

Համաձայն (VII 9)-ի

$$\overline{M}_C(\overline{f}_{12})+\overline{M}_C(\overline{f}_{21})=0,\ \overline{M}_C(\overline{f}_{13})+\overline{M}_C(\overline{f}_{31})=0,\ \overline{M}_C(\overline{f}_{23})+\overline{M}_C(\overline{f}_{32})=0.$$

Դրա համար էլ

$$\overline{M}_C(\overline{P}_1)+\overline{M}_C(\overline{P}_2)+\overline{M}_C(\overline{P}_3)=\overline{M}_C(\overline{F}_1)+\overline{M}_C(\overline{F}_2)+\overline{M}_C(\overline{F}_3) \qquad \text{(VIII 10)}$$

Երբ սխեմը գտնվում է հավասարակշռության մեջ (VIII 9) *և* (VIII 10), *հավասարությունների ձախ մասերը զառնում են զերո, որովհետև* $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ *և* $\overline{P}_3$ *ուժերից յուրաքանչյուրը զերո է։*

Հետևապես, երբ սխեմը հավասարակշռության մեջ է,

$$\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3=0 \qquad \text{(VIII 11)}$$

$$\overline{M}_C(\overline{F}_1)+\overline{M}_C(\overline{F}_2)+\overline{M}_C(\overline{F}_3)=0. \qquad \text{(VIII 12)}$$

Ա.յստեղ մոմենտների C կենտրոնը բոլորովին կամայական է։

Այժմ երևք կետերի սխեմից անցնենք նյութական n կետերից բաղկացած սխեմին, որտեղ n-ը կարող է լինել որքան կամենաք մեծ։

Ակնհայտ է, այժմ (VIII 9) *և* (VIII 10) *հավասարությունների փոխարեն մենք կստանանք՝*

$$\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3+\dots\overline{P}_n=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\dots\overline{F}_n \qquad \text{(VIII 13)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{M}_C(\overline{P}_1)+\overline{M}_C(\overline{P}_2)+\overline{M}_C(\overline{P}_3)+\dots+\overline{M}_C(\overline{P}_n)=\\&\overline{M}_C(\overline{F}_1)+\overline{M}_C(\overline{F}_2)+\overline{M}_C(\overline{F}_3)+\dots+\overline{M}_C(\overline{F}_n).\end{aligned}\right\} \text{(VIII 14)}$$

Ա.յս կամ այն ուժի վեկտորական գումարը շատ հաճախ անվանում են գլխավոր վեկտոր։

Ա.յս կամ այն ուժի մոմենտների վեկտորական գումարը, երբ բոլոր մոմենտները վերցված են միևնույն կենտրոնի նկատմամբ, անվանում են այդ ուժերի գլխավոր մոմենտ։

(VIII 13)-ի աջ մասը ներկայացնում է սխեմի կետերին կիրառված բոլոր արտաքին ուժերի վեկտորական գումարը, այսինքն սխեմի կետերին կիրառված արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը։ Այդ վեկտորը մենք կնշանակենք F-ով։

(VIII 14)-ի աջ մասը սխեմին կիրառված բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների վեկտորական գումարն է, այսինքն այդ ուժերի գլխավոր մոմենտը C կամայական կետի նկատմամբ։ Այդ մոմենտը մենք կնշանակենք M_C-ով։

Այժմ (VIII 13) *և* (VIII 14) *կարելի է գրել այսպես՝*

$$P_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3+\dots+P_n=F, \qquad \text{(VIII 15)}$$

$$\overline{M}_C(P_1)+\overline{M}_C(\overline{P}_2)+M_C(\overline{P}_3)+\dots+M_C(P_n)=\overline{M}_C \qquad \text{(VIII 16)}$$

Երբ սխեմը հավասարակշռության մեջ է, նրա բոլոր կետերը պետք է լինեն հավասարակշռության մեջ և հետևապես

$$\overline{P}_1=0,\ \overline{M}_C(P_1)=0,\ P_2=0,\ M_C(\overline{P}_2)=0,\dots\dots P_n=0,\ \overline{M}_C(\overline{P}_n)=0.$$

Այդ պատճառով էլ (VIII 15), (VIII 16)-ի ձախ մասերը զառնում են զերո։ *Այդպիսով մենք ստանում ենք նյութական կետերի սխեմի ստատիկայի հիմնական թեորեմը։*

Երբ սխեմը գտնվում է հավասարակշռության մեջ՝

(VIII 17) *արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը հավասար է զերոյի,* (VIII 17′)
արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը հավասար է զերոյի։ (VIII 17″)

Այդ թեորեմը արդարացի է ամեն մի սիստեմի համար։ Եթե (VIII 17′) *և* (VIII 17″) *հավասարություններից թեկուզ մեկը տեղի չունի, սիստեմի հավասարակշռությունը անհնար է։*

Իսկապես, դիցուք օրինակ՝ գլխավոր վեկտորը հավասար չէ զերոյի։ (VIII 13)-*ի համաձայն* $\overline{F}=\Sigma\overline{P}_K$, *այդ պատճառով էլ այն դեպքում, երբ*

$$\overline{F}\neq 0,\ \text{ապա}\ \Sigma\overline{P}_k\neq 0:$$

Հետևապես

$$\overline{P}_1=0,\ \overline{P}_2=0,\ \overline{P}_k=0\ \ldots.\ \overline{P}_n=0$$

պայմանները բավարարված են սիստեմի ոչ բոլոր կետերի համար, ուրեմն սիստեմը չի կարող հավասարակշռության մեջ լինել։

Ճիշտ նույն ձևով էլ կարելի է ցույց տալ, որ սիստեմի հավասարակշռությունն անհնարին է նաև այն դեպքում, երբ արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը հավասար չէ զերոյի։ Այդ պատճառով $F=0$ *և* $\overline{M}_C=0$ *հավասարությունները կոչվում են սիստեմի հավասարակշռության անհրաժեշտ պայմաններ։*

(VIII 17) *թեորեմի հակադարձ թեորեմը ճիշտ չէ, այսինքն մենք չենք կարող հաստատել, որ սիստեմը միշտ կգտնվի հավասարակշռության մեջ, եթե* $F=0$ *և* $\overline{M}_C=0$։

Եվ իսկապես, սիստեմը կարող է հավասարակշռության մեջ լինել միայն այն ժամանակ, երբ նրա կետերից յուրաքանչյուրը հավասարակշռության մեջ է, իսկ դրա համար անհրաժեշտ է, որ

$$\overline{P}_1=0,\ \overline{P}_2=0\ \ldots.\ \overline{P}_k=0\ \ldots..\ \overline{P}_n=0,$$

$$\overline{M}_C(P_1)=0,\ \overline{M}_C(\overline{P}_2)=0,\ \overline{M}_C(\overline{P}_k)=0\ \ldots\ \overline{M}_C(P_n)=0$$

հավասարությունները տեղի ունենային սիստեմի կետերի յուրաքանչյուրի համար։

Մինչդեռ $F=0$, $\overline{M}_C=0$ *դեպքում* (VIII 17′) *և* (VIII 17″)-*իցստանում ենք* $\Sigma\overline{P}_k=0$, $\Sigma\overline{M}_C(\overline{P}_k)=0$։

Վերջին հավասարություններում զերոյի հավասար է $\overline{P}_k$ *ուժերից ոչ թե ամեն մեկը առանձին-առանձին, այլ նրանց գումարը։ Հետևապես, երբ*

$$\overline{F}=0,\ \overline{M}_C=0$$

սիստեմը կարող է և չգտնվել հավասարակշռության մեջ։ Այդ պատճառով էլ հավասարակշռության պայմանները կոչվում են անհրաժեշտ, բայց ոչ բավարար։

XI *դիտում ցույց կտրվի, որ այդ պայմանները միանգամայն բավարար են կարծր մարմնի հավասարակշռության համար։ Այսինքն, երբ արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը հավասար են զերոյի, կարծր մարմինը միշտ կգտնվի հավասարակշռության մեջ։*

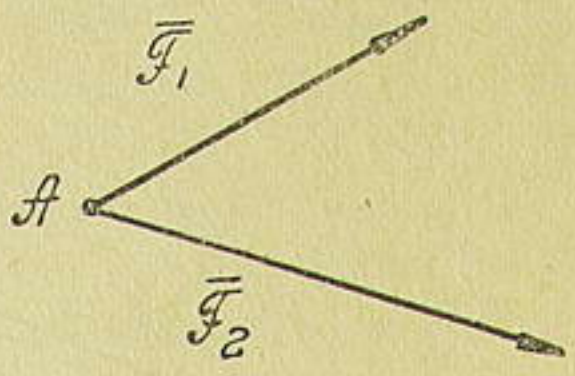
Հարցեր.

Ներքևում բերված հարցերին վերաբերող նկարներում ցույց են տրված միայն ուժերը և նրանց կիրառման կետերը, իսկ սիստեմները, որոնց պատկանում են այդ կետերը, ցույց չեն տրված։

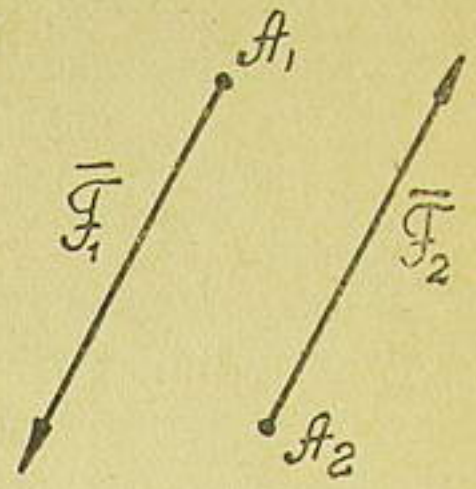
Որոշել. հնարավո՞ր է արդյոք կամայական սիստեմի հավասարակշռությունը, որին կիրառված են հետևյալ երկու ուժերը՝

ա. $\overline{F}_1$ *և* $\overline{F}_2$ *ուժերը* A *կետում (նկ. 195)*

բ. $\overline{F}_1$ *ուժը* A_1*-ում և* $\overline{F}_2$ *ուժը* A_2*-ում (նկ. 196)*



նկ. 195



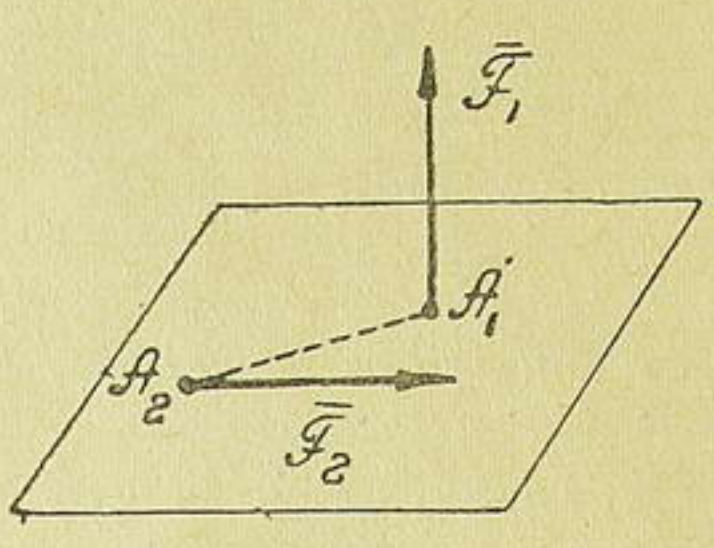
նկ. 196

ըստ որում հայտնի է, որ այդ ուժերը հակազուգահեռ են, իսկ նրանց չափերը հավասար։

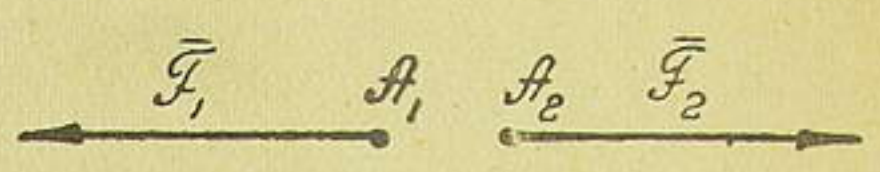
գ. $\overline{F}_1$*-ը* A_1 *կետում,* $\overline{F}_2$*-ը* A_2 *կետում (նկ. 197),*

դ. $\overline{F}_1$*-ը* A_1*-ում,* $\overline{F}_2$*-ը* A_2*-ում (նկ. 198)*

ըստ որում ուժերը հակազուգահեռ են, ըստ չափի հավասար և ունեն ազդման ընդհանուր գիծ։



նկ. 197



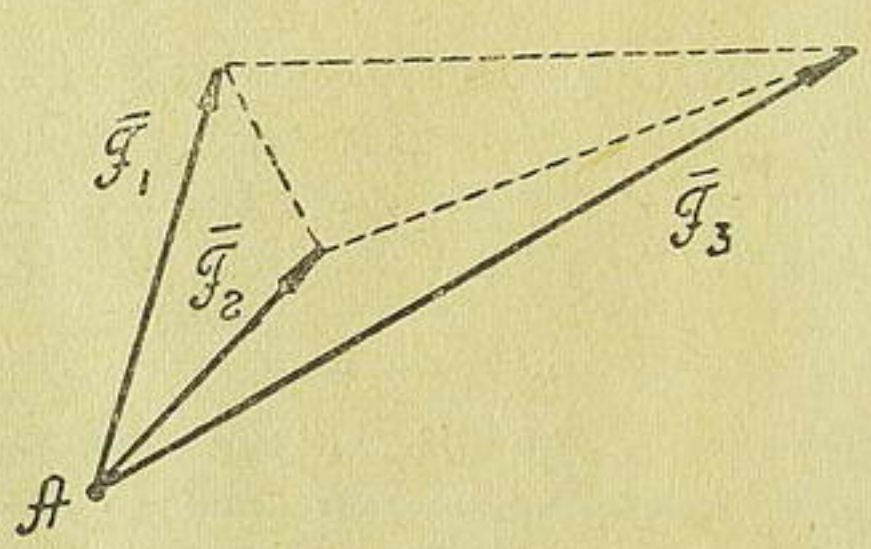
նկ. 198

Որոշել, հնարավո՞ր է արդյոք կամայական սիստեմի հավասարակշռությունը, որին կիրառված են հետևյալ երեք ուժերը՝

ա. F_1, F_2, F_3*-ը* A *կետում (նկ. 199), ըստ որում այդ ուժերը կոպլանար չեն,*

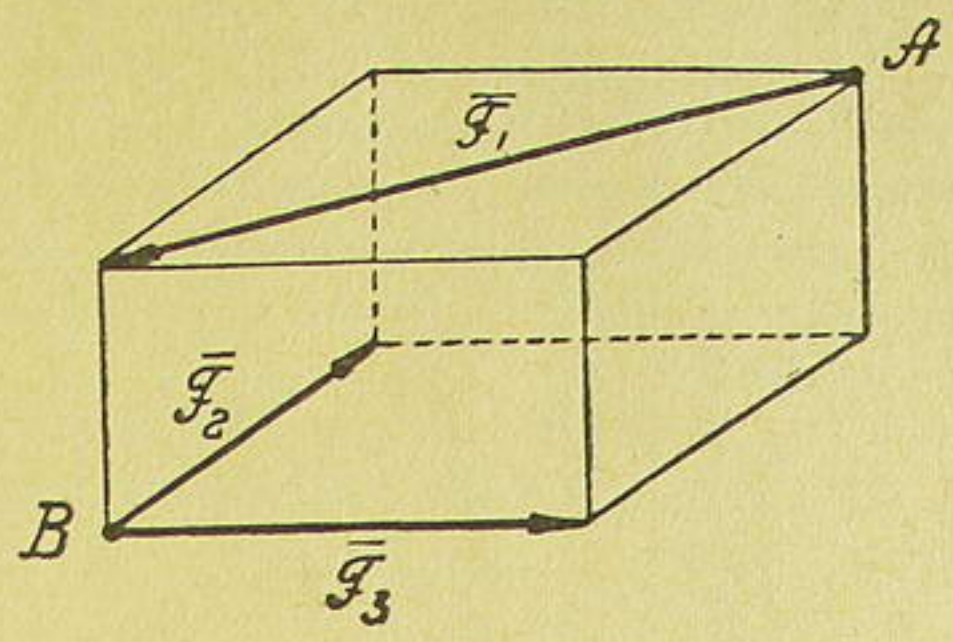
բ. $\overline{F}_1$*-ը* A*-ում,* $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ *ուժերը* B *կետում (նկ. 200),*

գ. $\overline{F}_1$*-ը* A_1*-ում,* $\overline{F}_2$*-ը* A_2*-ում,* $\overline{F}_3$*-ը* A_3*-ում, (նկ. 201),*

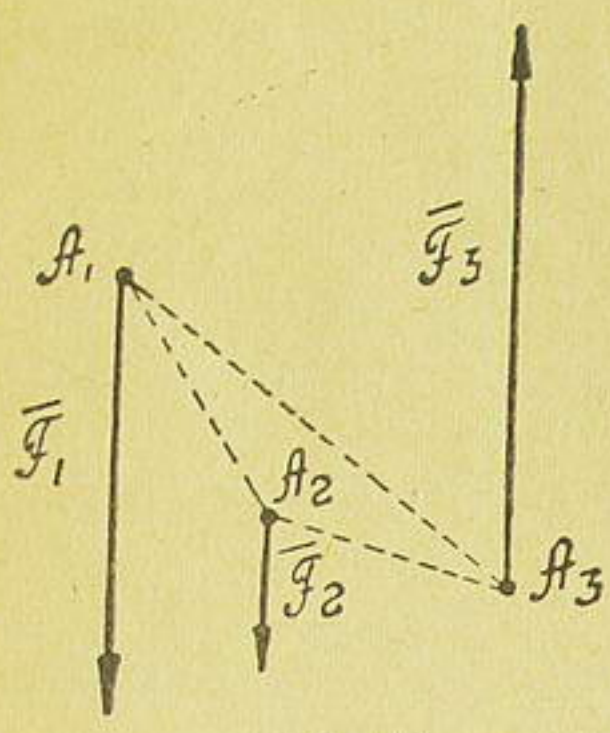


նկ. 199

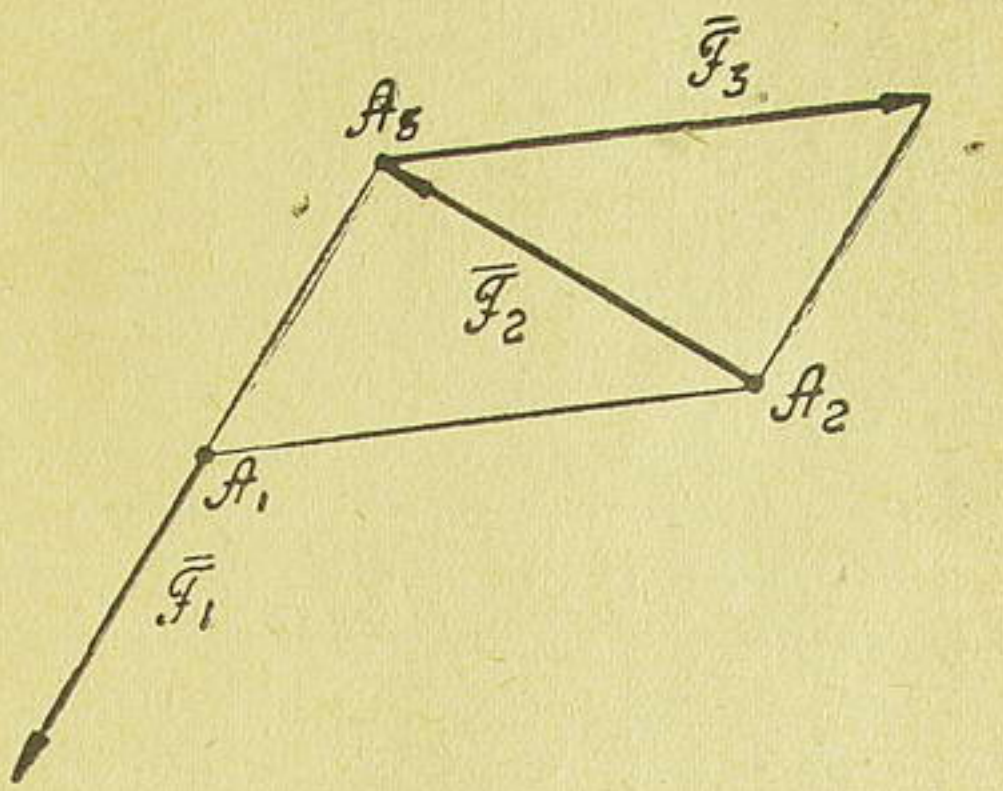
բաո ոլում A_1, A_2, A_3 *կետերը չեն պատավորված մի ուղիղի վրա, դ.* $\overline{F}_1$*-ը* A_1 *կետում,* F_2*-ը* A_2*-ում,* $\overline{F}_3$*-ը* A_3*-ում (նկար 202)*



Նկ. 200



Նկ. 201



Նկ. 202

Խնդիրներ.

Հետևյալ 1—5 խնդիրները հավասարակշռության պայմանների կիրառման վարժություններ են և տալիս են մի շարք օգտակար տեղեկություններ:

1. Օգտվելով (VIII 17′)*-ից, ապացուցել, որ եթե* n *արտաքին ուժերից* (n—1) *զուգահեռ են միմյանց, ապա սիստեմի հավասարակշռության դեպքում* n*-երորդ ուժը նույնպես զուգահեռ է նրանց:*

2. Օգտվելով (VIII 17′)*-ից, ապացուցել, որ եթե* n *արտաքին ուժերից* (n—1)*-ը մի ինչ-որ հարթության զուգահեռ են, ապա սիստեմի հավասարակշռության դեպքում* n*-երորդ ուժն էլ է զուգահեռ այդ հարթությանը:*

3. Օգտվելով (VIII 17″)*-ից, ապացուցել, որ եթե* n *արտաքին ուժերից* (n—1)*-ն ունեն ազդման ընդհանուր գիծ, ապա հավասարակշռության դեպքում* n*-երրորդ ուժն էլ ունի ազդման նույն գիծը:*

4. Օգտվելով (VIII 17″)*-ից, ապացուցել, որ եթե* n *արտաքին ուժերից* (n—1)*-ը գտնվում են մի հարթության վրա, ապա սիստեմի հավասարակշռության դեպքում* n*-երրորդ ուժն էլ է գտնվում այդ նույն հարթության վրա:*

5. Դիցուք $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2 \dots \overline{F}_k \dots \overline{F}_n$ արտաքին ուժերը բավարարում են հավասարակշռության (VIII 17′) *և* (VIII 17″) *պայմաններին։ Ապացուցել, որ եթե այդ ուժերից յուրաքանչյուրը մեծացնենք λ անգամ, չփոխելով կիրառման կետերը, ապա $\lambda\overline{F}_1$, $\lambda\overline{F}_2 \dots \lambda\overline{F}_K \dots \lambda F_n$ ուժերը նույնպես բավարարում են* (VIII 17′) *և* (VIII 17″) *պայմաններին։*

§ 61. Հավասարակշռության պայմանների հատուկ ձևը տարածության երկու ուժերի դեպքում։ *Կամայական սիստեմի հավասարակշռության պայմաններին կարելի է տալ մի հատուկ ձև, երբ արտաքին ուժերի թիվը հավասար է երկուսի կամ երեքի։*

Դիցուք A_1 և A_2 կետերում համապատասխանաբար կիրառված են $\overline{F}_1$ և $\overline{F}_2$ ուժերը։ (VIII 11) *և* (VIII 12) *պայմանները կգրվեն այսպես՝*

$$\overline{F}_1+\overline{F}_2=0, \qquad \text{(VIII 18)}$$

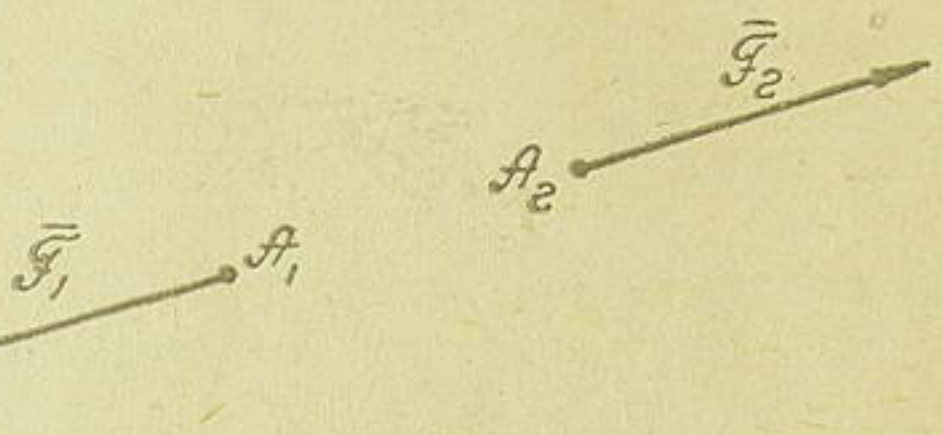
$$\mathrm{Mc}(F_1)+\mathrm{Mc}(F_2)=0, \qquad \text{(VIII 19)}$$

որ տեղ C-ն կամայական կետ է։ (VIII 18)-*ից հետևում է, որ F_1 և F_2 ուժերը հակազուգահեռ են և ունեն միևնույն չափը։ Իսկ* (VIII 19)-*ից հետևում է, C կետի կամայական լինելու պատճառով, որ այդ ուժերն ունեն ընդհանուր ազդման գիծ [տես VII 6] այն է A_1A_2 ուղիղը։*

Այստեղից կստացվի հետևյալ թեորեմը՝

(VIII 20) *Եթե սիստեմը, որին կիրառված են երկու արտաքին ուժեր, գտնվում է հավասարակշռության մեջ, ապա այդ ուժերը հակազուգահեռ են, ունեն միևնույն չափը և ազդման ընդհանուր գիծ, որն անցնում է նրանց կիրառման կետերով (նկ. 203)։*

Այն դեպքերը, երբ արտաքին ուժերի թիվը հավասար է երկուսի, հարվածում են։ Բայց երբեմն արտաքին ուժերը լինում են այնպիսիները, որ մի քանի ուժերի փոխարինելը համապատասխան անսահման կիրառված մեկ ուժով, բոլորովին էլ չի անդրադառնում հավասարակշռության $F=0$, $M_C=0$ պայմանների վրա։ Այդպիսի դեպքերում արտաքին ուժերի թիվը կարելի է հասցնել երկուսի։



նկ. 203

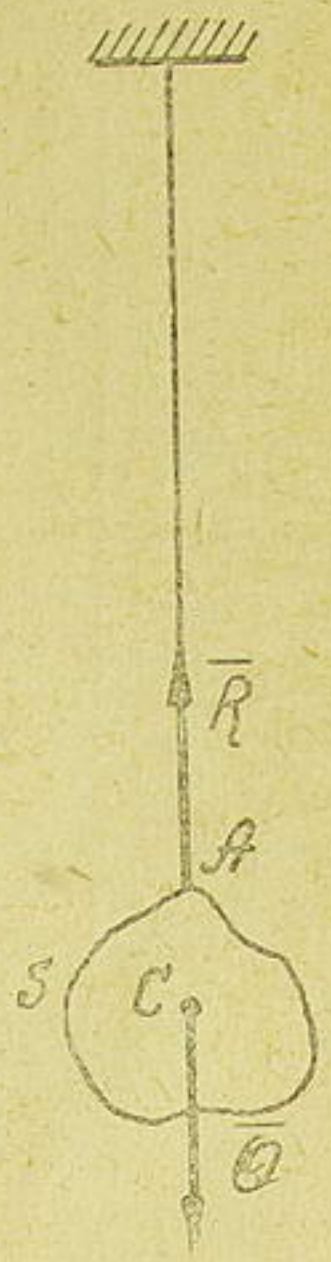
Մի քանի ուժեր մեկով փոխարինելու հնարավորության ամենակարևոր օրինակը ներկայացնում են ծանրության ուժերը։ Յուրաքանչյուր նյութական կետ ունի իր կշիռը։ Բայց պինդ վեկտորի և արտաքին ուժերի պինդը մոմենտի արտահայտության մեջ մենք մտցնում ենք ոչ թե սիստեմ կազմող նյութական կետերի կշիռները, այլ ամբողջ սիստեմի կշիռը (որը հավասար է բոլոր նյութական կետերի կշիռների գումարին)։

Սիստեմի կշռի ազդման գիծը միշտ անցնում է միանգամայն որոշ կետով, որը կոչվում է ծանրության կենտրոն։

Ծանրության կենտրոնի տեսությունը տրվում է XII գլխում։

Խնդիր.

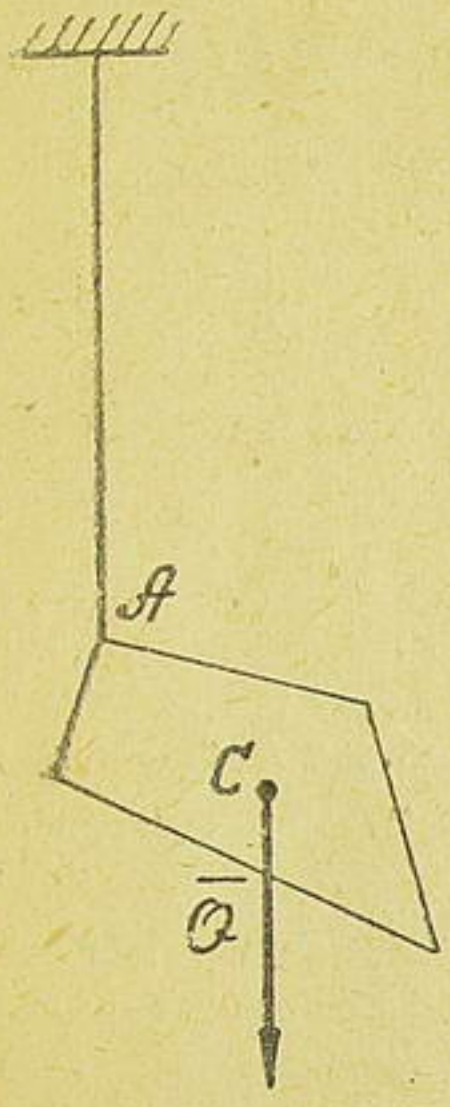
Բարակ, անկշիռ թելի A ծայրից կախված է ծանր S մարմինը: Գտնել թելի դիրքը և նրա լարումը մարմնի հավասարակշռության դեպքում (նկար 204):



նկ. 204

Դիցուք Q-ն այդ մարմնի կշիռն է, իսկ C-ն նրա ծանրության կենտրոնը: Հենց նոր ասածի համաձայն, Q-ի ազդման գիծը անցնում է C-ով: Որպես սիստեմ ընդունենք S մարմինը: Այդ դեպքում թելի R հակազդումը և մարմնի կշիռը կլինեն արտաքին ուժեր: Այդ մարմնին կիրառված ուրիշ արտաքին ուժեր չկան: (VIII 20) թեորեմի համաձայն, մարմնի հավասարակշռության դեպքում R և $\overline{Q}$ ուժերն ունեն ազդման ընդհանուր գիծ՝ AC ուղիղը: Բայց կշիռը և նրա ազդման գիծը ուղղաձիգ են: Հետևապես R և AC-ն նույնպես պետք է լինեն ուղղաձիգ, և մենք գալիս ենք հետևյալ եզրակացության՝

S մարմնի հավասարակշռության դեպքում ճկուն թելը, որից նա կախված է, ընդունում է այդ մարմնի կենտրոնով անցնող ուղղաձիգ ուղիղի ձևը (ինչպես և ցույց է տված 204 նկարում: 205 նկարում ցույց տված դիրքում հավասարակշռությունը անհնարին է): Որովհետև թելն անկշիռ է, նրա լարումը մեծությունն է բոլոր կետերում և հավասար է A կետի $\overline{R}$ հակազդմանը: Ըստ (VIII 18)-ի $R+\overline{Q}=0$: Այդպիսով թելի լարումը և մարմնի կշիռը հակազուգահեռ են և ունեն մեծության չափը:



նկ. 205

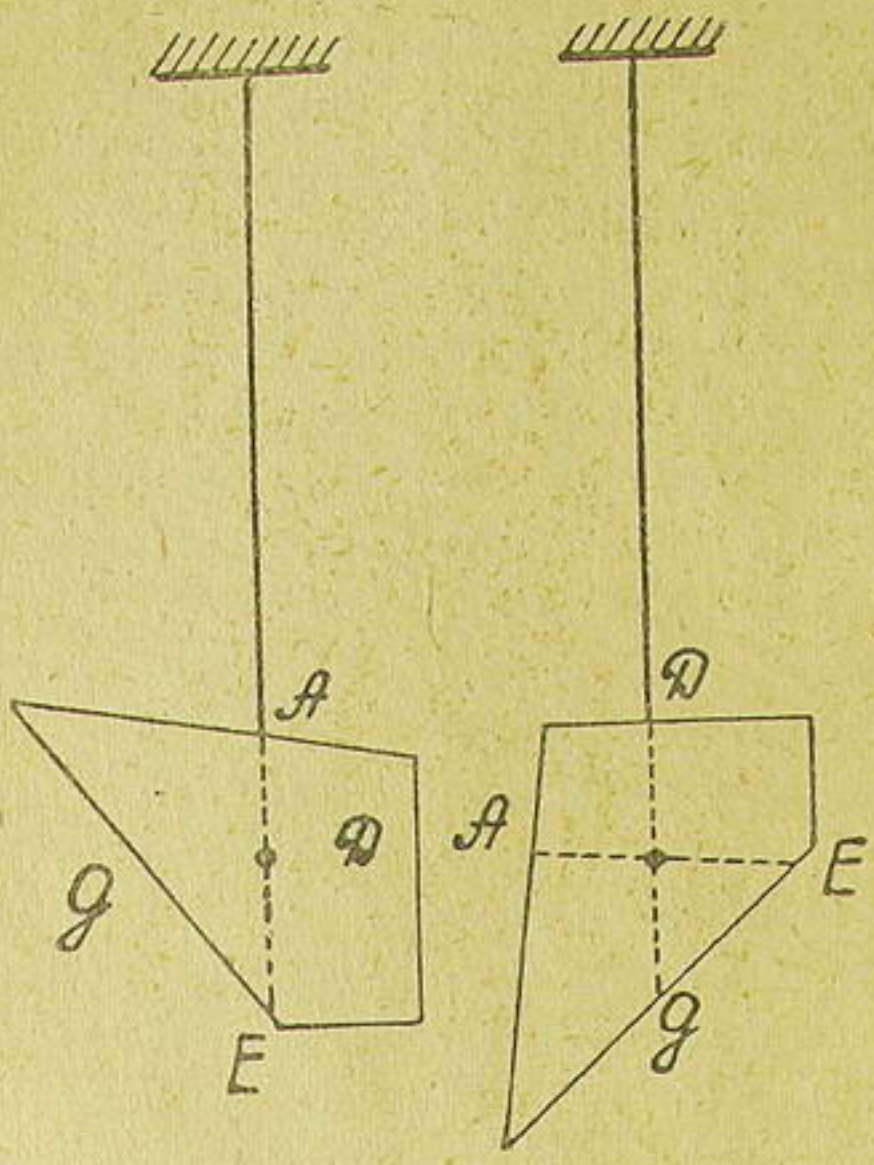
Թիթեղների ծանրության կենտրոնները որոշելու համար հաճախ օգտվում են այն հանգամանքից, որ թելը հավասարակշիռ դրության մեջ համընկնում է կախված մարմնի ծանրության կենտրոնով անցնող ուղղաձիգ ուղիղի հետ:

Ենթադրենք (նկար 206) մեզ հարկավոր է գտնել ADEG թիթեղի ծանրության C կենտրոնը: Մենք կարող ենք թիթեղը կախել A կետից և նրա վրա նշանակել ուղղաձիգ թելի AE շարունակությունը: Ասածի համաձայն AE անցնում է ծանրության C կենտրոնով: Հետո էլ թիթեղը կախենք D կետից և նորից թիթեղի վրա նշանակենք թելի DG շարունակությունը: DG-ն նույնպես պետք է անցնի C-ով: Հետևապես թիթեղի ծանրության կենտրոնը համընկնում է AE-ի և DG-ի հատման կետի հետ:

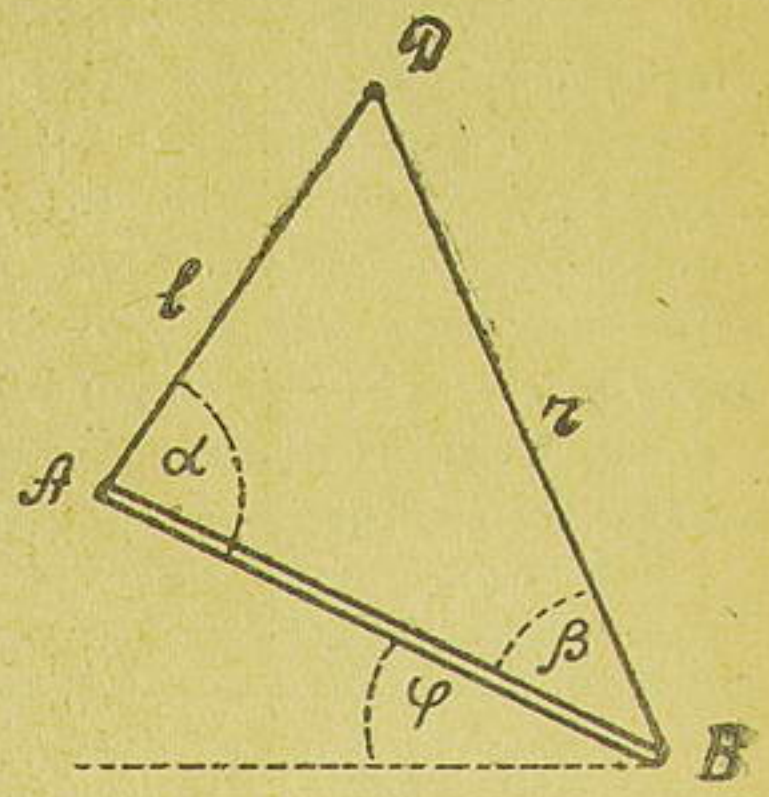
Խնդիրներ.

1. AB համասեռ ձողը (նկար 207), կախված է երկու թելերի ծայրերից: Այդ թելերի մյուս ծայրերն ամրացված են D կետում: Թելերի r և l երկարու-

թյուններըև DAB եռանկյան α, β անկյուններըհայտնի են։ Ձողի հա-մասեռության շնորհիվ նրա ծանրության (C) կենտրոնը գտնվում է հա-վասար հեռավորության վրա A և B-ից։ Գտնել φ անկյունը, որը կազմում է ձողը, հավասա-կշռության դիրքում, հորի-զոնի հետ։ (Նախատակահարմար



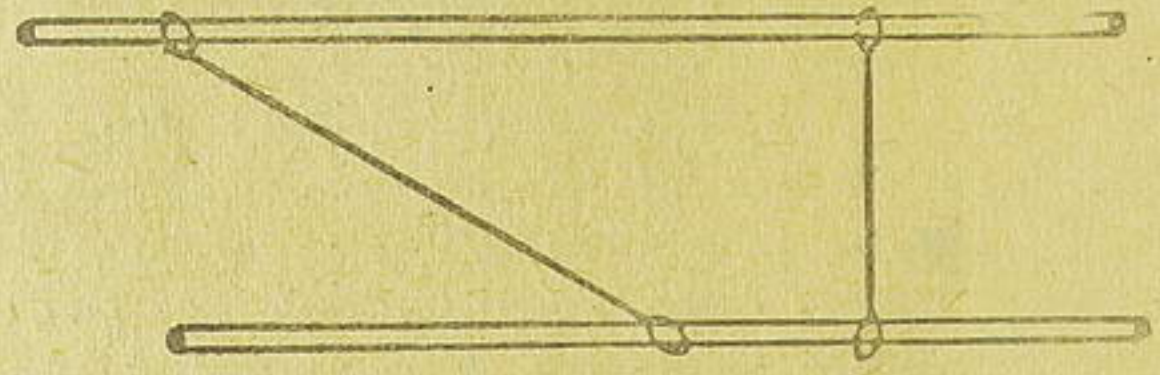
Նկ. 206



Նկ. 207

է սխատեմն այնպես ընտրել, որ ամրակին ուժերի թիվը հավասար լինի երկուսի)։

2. Երկու հղկված, կլոր, զուգահեռ ձողերից յուրաքանչյուրին հագցված է մի-մի օղակ (նկար 208). օղակները միացված են ուռուցիկ թելով, որի



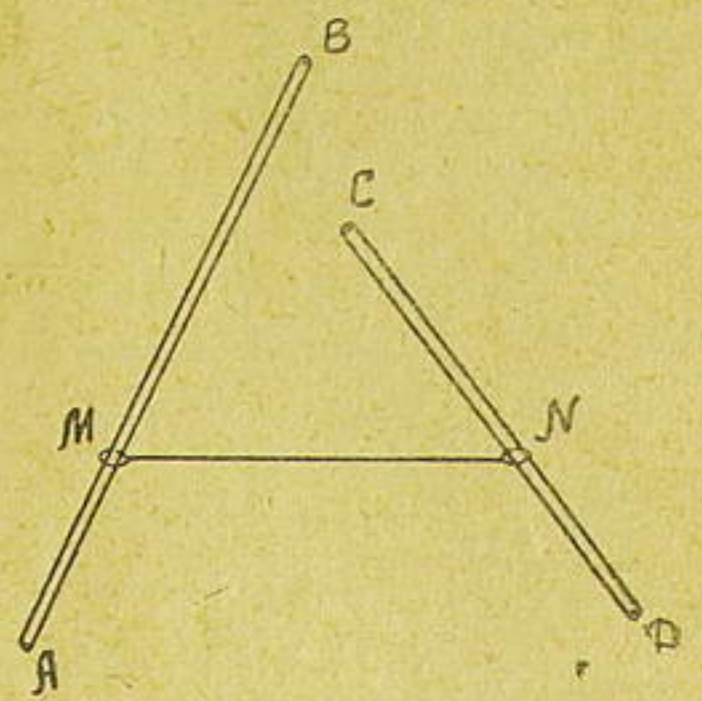
Նկ. 208

երկարությունը չգված դրության մեջ փոքր է ձողերի միջև եղած հեռա-վորություններից։ Համարելով թելը և օղակները անկշիռ, ապացուցել, որ օղակների հավասարակշռության դիրքում թելը ուղղահայաց է ձողերին։

3. Իդեալական հղկված, կլոր ձողերին հագցված օղակները միացված են (նկար 209) ուռուցիկ թելով, որի երկարությունը չգված դրության մեջ, փոքր է ձողերի միջև եղած ամենակարճ MN հեռավորությունից (ձո-ղերը չեն գտնվում մի հարթության վրա)։ Անտեսելով օղակների և թելի

կշիռը, ցույց տալ, որ հավասարակշիռ դիրքում թելը համընկնում է MN *ուղղի հետ (ցուցմունք՝* $MN \perp AB$, $MN \perp CD$)։

§ 62. Հավասարակշռության պայմանների հատուկ ձևերը առաձգական երեք ուժե-ի դեպքում։ *Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ սիստեմին համապատասխանաբար կիրառված են* A_1, A_2, A_3 *կետերում* $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ *ուժերը (նկ. 210)։*

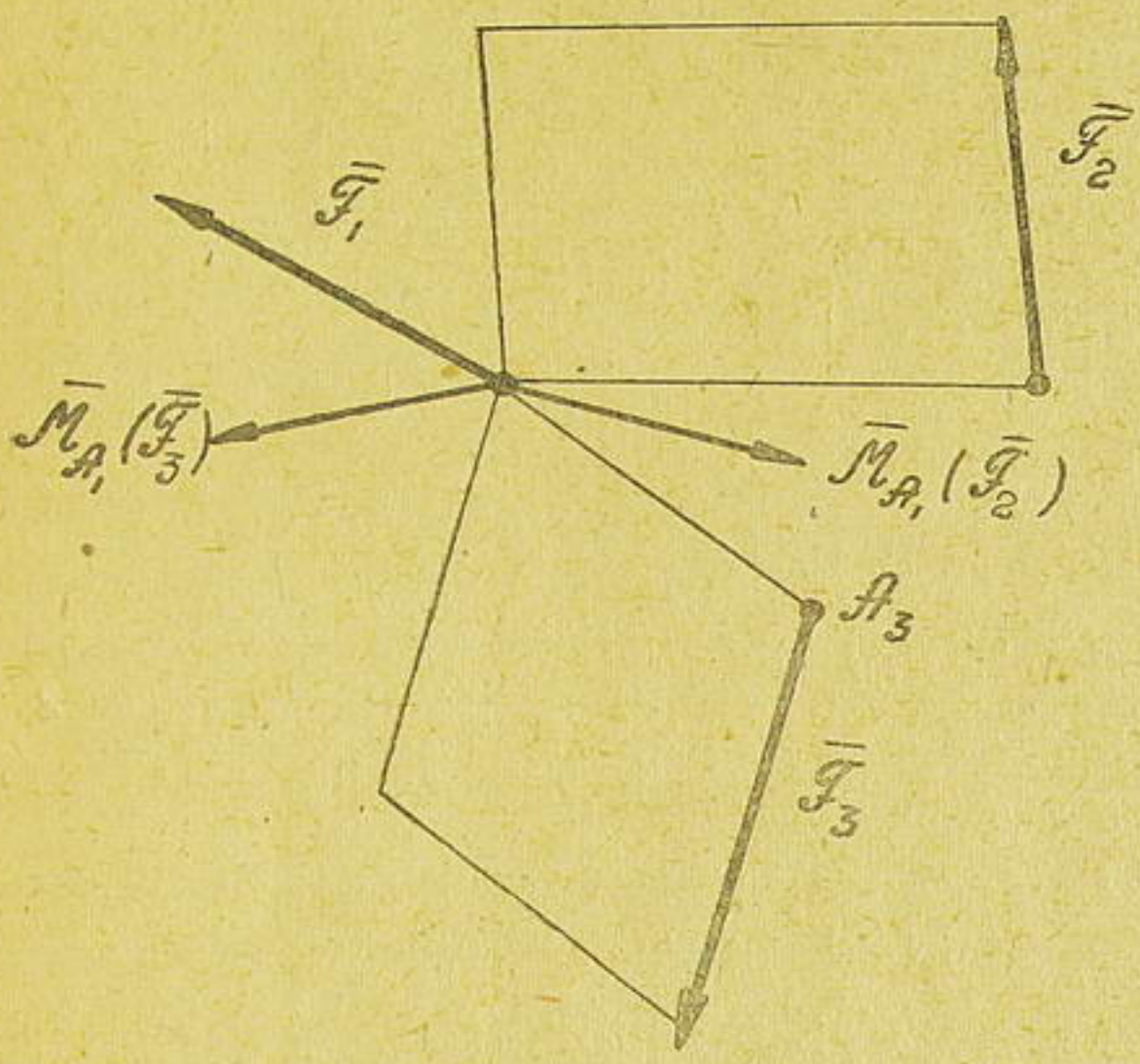


Նկ. 209

Հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է, որ $\bar{F}=0$, $\bar{M}_C=0$, *որտեղ* C*-ն կամայական կետ է։ Որպես մոմենտների կենտրոն ընդունենք արտաքին ուժերի կիրառման կետերից մեկը, օրինակ* A_1։ *Որովհետև* $\bar{M}_{A_1}(\bar{F}_1)=0$, *ապա ունենք*

$$\bar{M}_{A_1}=\bar{M}_{A_1}(\bar{F}_2)+\bar{M}_{A_1}(\bar{F}_3)=0։$$

Այստեղից հետևում է, որ $\bar{M}_{A_1}(\bar{F}_2)$ *և* $\bar{M}_{A_1}(\bar{F}_3)$ *մոմենտները հակազուգահեռ են, իսկ դրա համար անհրաժեշտ է, որ* A_1 *և* F_2 *պարունակող հարթությունը զուգահեռ լինի* A_1 *և* $\bar{F}_3$ *պարունակող հարթությանը։ Բայց այդ դեպքում այդ հարթությունները ունենալով ընդհանուր* A_1 *կետ, համաուղղված են։ Հետևապես* A_1, F_2 *և* $\bar{F}_3$*-ը գտնվում են մեկ հարթության վրա, որը մենք կնշանակենք σ-ով։*



Նկ. 210

Դժվար չէ ցույց տալ, որ $\bar{F}_1$ *նույնպես գտնվում է* σ *հարթության վրա։ Իսկապես ըստ* (VIII 11) $\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3=0$, *դրա համար էլ մնում է ուժերը պետք է լինեն կոպլանար։ Բայց* $\bar{F}_2$ *և* $\bar{F}_3$ *գտնվում են* σ *հարթության վրա, իսկ* $\bar{F}_1$*-ն այդ հարթության հետ ունի ընդհանուր* A_1 *կետը, հետևապես* $\bar{F}_1$*-ն էլ է գտնվում* σ *հարթության վրա։ Այդ հարթությունը, պարունակելով* $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ *ուժերը, պարունակում է և նրանց կիրառման կետերը։ Այդ պատճառով էլ, եթե* A_1, A_2, A_3 *կետերը չեն գտնվում մեկ ուղղի վրա, ապա դրանով կատարելապես որոշվում է* σ *հարթության դիրքը։ Եթե*

A_1, A_2, A_3 *գտնվում են մեկ ուղղի վրա, ապա ո հարթության վրա նրանցով չի կարող հատարելապես որոշվել: Մենք եկանք հետևյալ եզրակացության՝*

Եթե մարմինը, որին կիրառված են երեք արտաքին ուժեր, գտնվում է հավասարակշռության մեջ, ապա այդ ուժերը պետք
(VIII 21) *է գտնվեն մի ո հարթության վրա: Եթե ուժերի կիրառման կետերը չեն գտնվում մեկ ուղղի վրա, ապա նրանցով հատարելապես որոշվում է ո հարթության դիրքը:*

Որովհետև երեք ուժերն էլ գտնվում են մեկ հարթության վրա, այդ ուժերից որևէ երկուսի ազդման գծերը կամ զուգահեռ են կամ հատվում են:

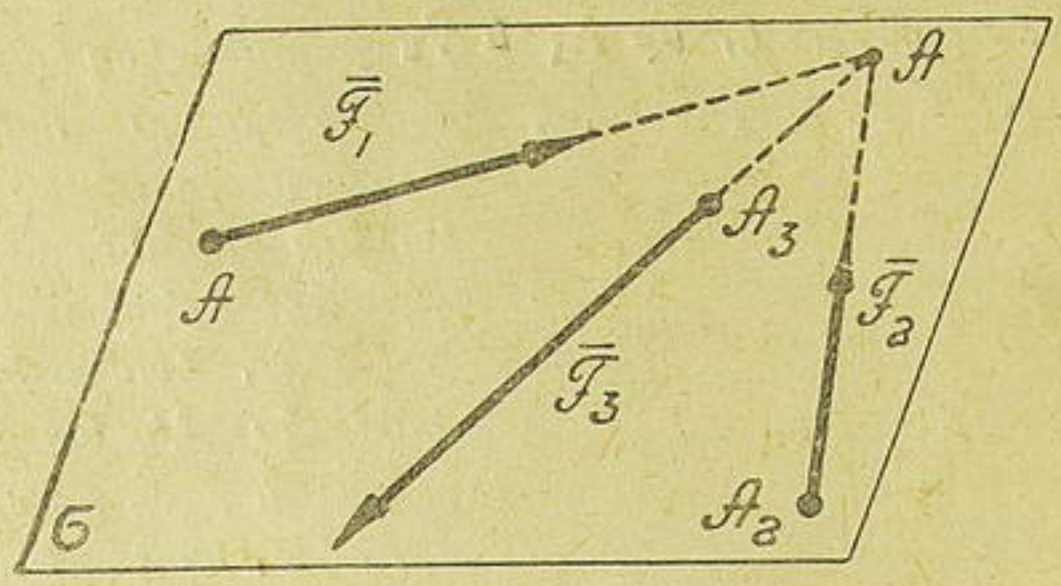
Ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Եթե երեք ուժերից երկուսը զուգահեռ չեն, ապա հավասարակշռության դեպքում բոլոր երեք ուժերի ազդման գծերը պետք է
(VIII 22) *հատվեն մի կետում:*

Թող օրինակի, F_1 և F_2 ուժերի ազդման գծերը հատվում են A կետում, (նկար 211): Այդ կետն ընդունենք որպես մոմենտների կենտրոն: Որովհետև մարմինը գտնվում է հավասարակշռության մեջ, ապա

$$M_A = 0$$

այսինքն $M_A(F_1)+M_A(F_2)+M_A(F_3)=0$,



Նկ. 211

բայց այստեղ առաջին երկու մոմենտները հավասար են զրոյի, որովհետև F_1 և F_2 ուժերի ազդման գծերն անցնում են A-ով: Հետևապես $M_A(F_3)=0$: Բայց $F_3 \neq 0$, և նրա մոմենտը պետք կդառնա միայն այն պայմանով, որ մոմենտների A կենտրոնը դասավորվի ուժի ազդման գծի վրա:

Այսպիսով թեորեմն ապացուցված է:

§ 63. Հավասարակշռության պայմանների հատուկ ձևը տարաիճ երեք զուգահեռ ուժերի դեպքում: *Նույնպես հեշտությամբ ապացուցվում է, որ՝*

Եթե սիստեմի հավասարակշռությունը տեղի ունի երեք արտաքին ուժերի ազդեցության տակ, ընդ որում երկու ուժերի ազդման գծերը զուգահեռ են, ապա՝

(VIII 23) *1. երրորդ ուժի ազդման գիծը նույնպես զուգահեռ է նրանց,*
2. ուժերից երկուսը ուղղակի զուգահեռ են, իսկ երրորդը նրանց հակազուգահեռ է,
3. հակազուգահեռ ուժի ազդման գիծը դասավորված է համազուգահեռ ուժերի ազդման գծերի միջև:

1. և 2. անմիջապես բղխում են (VIII 11)-*ից՝*

$$\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3=0,$$

եթե միայն ընդունենք, որ օրինակ՝ $\overline{F}_1 \parallel \overline{F}_2$:

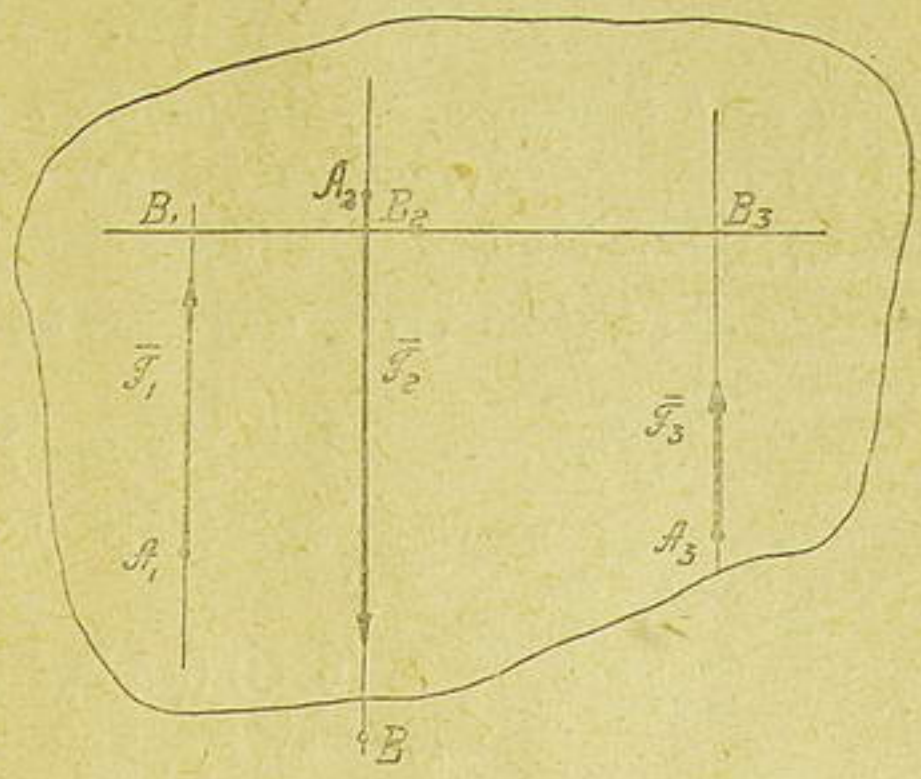
Իսկ 3. հետևում է (VIII 12) *պայմանից, եթե մոմենտների կենտրոնը վերցված է ուժերից մեկի ազդման դծի վրա:*

Օրինակ, որպես մոմենտների կենտրոն ընտրենք B_1 *կետը (նկ. 212, 213):*

Այն ժամանակ $\overline{M}_{B_1}(\overline{F}_1)=0$. *և* (VIII 12) *պայմանը տալիս է՝*

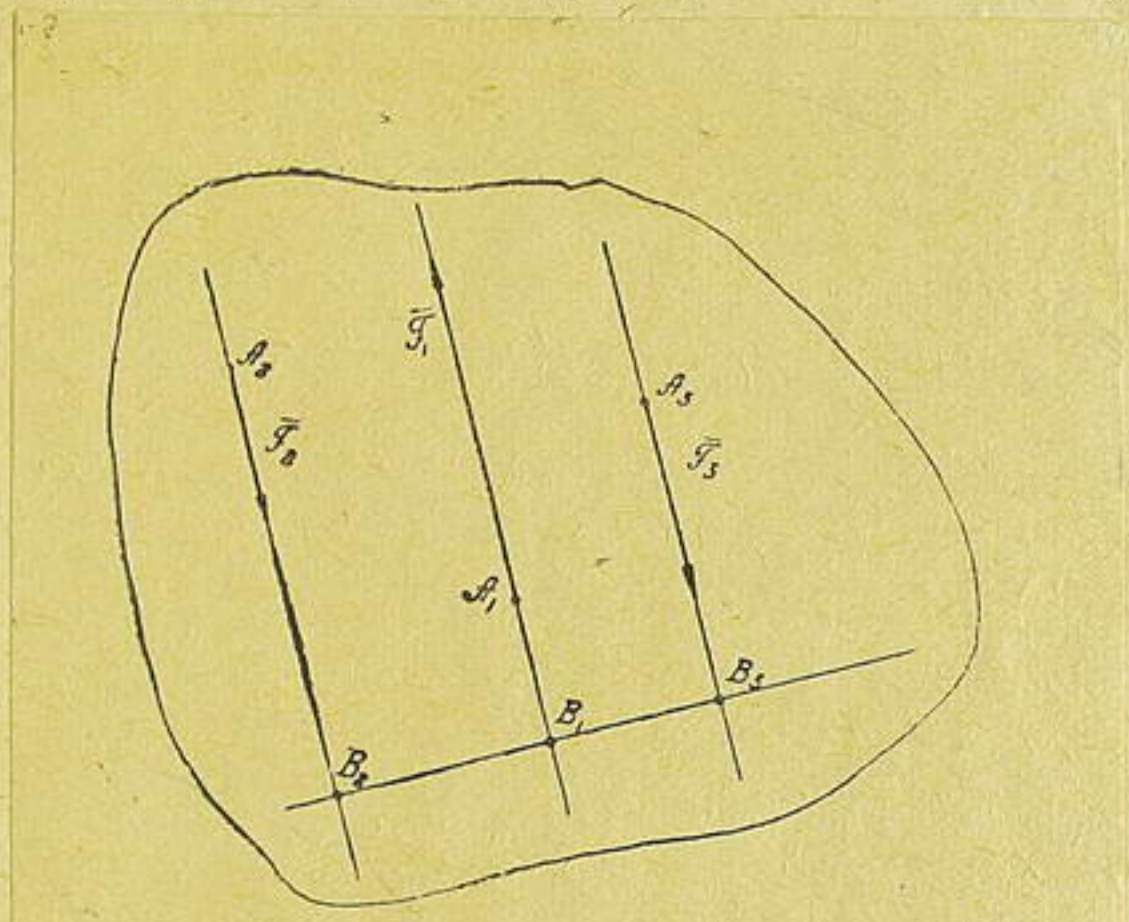
$$\overline{M}_{B_1}(\overline{F}_2)+\overline{M}_{B_1}(\overline{F}_3)=0:$$

Այստեղից հետևում է, որ այդ երկու մոմենտները հակազուգահեռ են: Իսկ դրա համար F_2 *և* F_3*-ը 212 նկարում պետք է լինեն հակազուգահեռ, իսկ 213 նկարում՝ համազուգահեռ: Դրանով էլ ապացուցվում է* VIII 23)*-ի երկրորդ կետը:*



Նկ. 212

Երեք ուժերի ազդման դծերը միևնույն հարթության մեջ գտնվող հետևյալ հատկությունը որոշելու



Նկ. 213

համար ամենից հարմար է ազդման դծերը հատել նրանց ուղղահայաց կամայական ուղիղով և որպես մոմենտների կենտրոն վերցնել հատման B_1, B_2, B_3 *կետերից մեկը (նկ. 212, 213):*
Այդ դեպքում, օրինակ՝

$$\left.\begin{aligned} &\overline{M}_{B_1}(\overline{F}_2)+\overline{M}_{3_1}(\overline{F}_3)=0, \\ \text{որտեղ}\quad &\overline{M}_{B_1}(\overline{F}_2)=\overline{B_1B_2}\times\overline{F}_2,\ \overline{M}_{B_1}(\overline{F}_3)=\overline{B_1B_3}\times\overline{F}_3: \end{aligned}\right\}\text{(VIII 24)}$$

Նշանակենք $\overline{B_1B_2}$*-ին համապուգահեռ միավոր վեկտորը* $\hat{b}$*-ով, իսկ* $\overline{F_1}$*-ին համապուգահեռ միավոր վեկտորը՝* $\hat{f}$*-ով. այն ժամանակ*

$$\overline{B_1B_2}=\hat{b}\,b_{12},\quad \overline{B_1B_3}=\hat{b}\,b_{13},$$

որտեղ b_{12} *և* b_{13}*-ը* $\overline{B_1B_2}$ *և* $\overline{B_1B_3}$ *հեռավորությունների թվական արժեքներն են.*

$$\overline{F}_2=\hat{f}\,F_2,\quad \overline{F}_3=\hat{f}\,F_3$$

որտեղ F_2 *և* F_3 *այդ ուժերի թվական արժեքներն են։ Թվական արժեքներից մի քանիսները դրական կլինեն, մյուսներն էլ՝ բացասական. [օրինակ՝ եթե* $\hat{b}\uparrow\uparrow\overline{B_1B_2}$*, ապա 212 նկարում* $b_{12}>0$*,* $b_{13}>0$*, իսկ 213 նկարում* $b_{12}>0$*,* $b_{13}<0$*, եթե* $\hat{f}\uparrow\uparrow\overline{F}_1$ *ապա 212 նկարում* $F_2<0$*,* $F_3>0$*, իսկ 213 նկարում* $F_2<0$*,* $F_3<0$*]։*

Այժմ

$$\overline{B_1B_2}\times\overline{F}_2=(\hat{b}\times\hat{f})b_{12}F_2$$

$$\overline{B_1B_3}\times\overline{F}_3=(\hat{b}\times\hat{f})b_{13}F_3$$

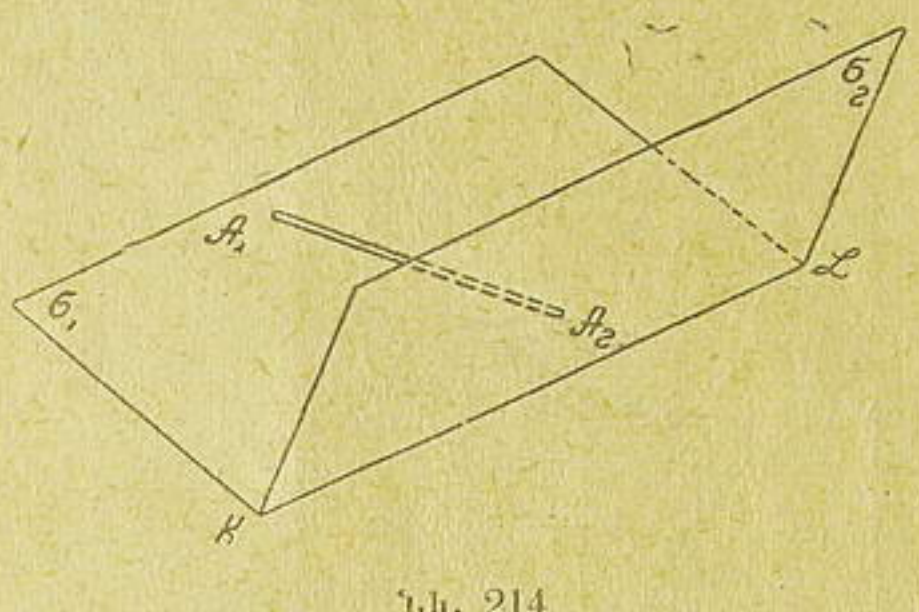
և (VIII 24)*-ից հետևում է՝*

$$(\hat{b}\times\hat{f})\,(b_{12}F_2+b_{13}F_3)=0;$$

կամ

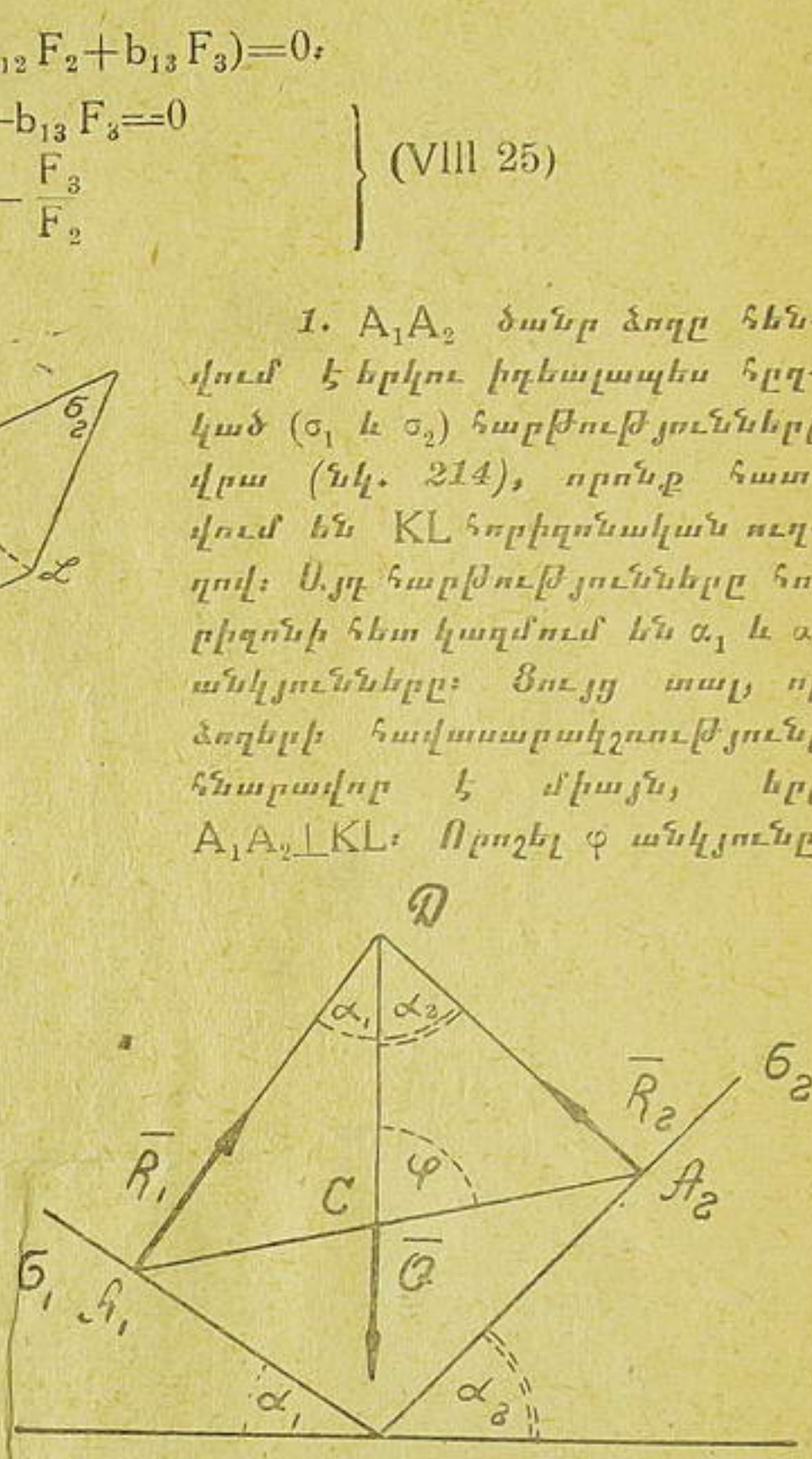
$$\left.\begin{aligned} &b_{12}F_2+b_{13}F_3=0\\ &\frac{b_{12}}{b_{13}}=-\frac{F_3}{F_2}\end{aligned}\right\}\ \text{(VIII 25)}$$

§ 64. Խնդիր.



Նկ. 214

1. A_1A_2 *ծանր ձողը հենվում է երկու իդեալապես հղկած* (σ_1 *և* σ_2) *հարթությունների վրա (նկ. 214), որոնք հատվում են* KL *հորիզոնական ուղղով։ Այդ հարթությունները հորիզոնի հետ կազմում են* α_1 *և* α_2 *անկյունները։ Ցույց տալ որ ձողերի հավասարակշռության հնարավոր է միայն, երբ* $A_1A_2\perp KL$*։ Որոշել* φ *անկյունը,*



Նկ. 215

որքան կազմում է ձողն ուղղահիզի հետ հավասարակշռության դիրքում։

Որպես սխեմաի ընդունենք ձողը։ Նրա վրա ազդում են (նկ. 215) երեք արտաքին ուժեր՝ $\overline{Q}$ *շոշը և հարթությունների* $\overline{R}_1$*-և* $\overline{R}_2$ *հակազդեցությունները։ Որովհետև հարթությունները իդեալապես հղկված են, ապա* $\overline{R}_1\perp\sigma_1$*,* $\overline{R}_2\perp\sigma_2$*։ Եթե ձողն ուղղահայաց*

չէ KL-ին, ապա այդ երեք ուժերը չեն կարող լինել մի հարթության վրա։ Այդ պատճառով էլ հավասարակշռությունն անհնարին է, երբ A_1A_2 ուղղահայաց չէ KL-ին։

Q, $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ մի հարթության վրա կլինեն միայն այն դեպքում, եթե ձողը ուղղահայաց է KL-ին։ Սակայն չպետք է կարծել որ ձողը KL-ին ուղղահայաց բոլոր դիրքերում հավասարակշռության մեջ կլինի։ Որովհետև $\overline{R}_1$ և $\overline{R}_2$ զուգահեռ չեն, ապա հավասարակշռության համար ըստ (VIII 22)-ի պահանջվում է, որ երեք ուժերի ազդման գծերը հատվեն մի կետում (նկ. 215)։ Թող $\overline{R}_1$ և $\overline{R}_2$ ուժերի ազդման գծերը հատվեն D-ում, իսկ C-ն լինի ձողի ծանրության կենտրոնը։ Որովհետև կշռի ազդման գիծը ուղղաձիգ է, ապա DC-ն ուղղաձիգ է և $\angle DCA_2$ հենց փնտրվող φ անկյունն է։

φ անկյունը հնարավորություն է տալիս A_1DC և A_2DC եռանկյուններից յուրաքանչյուրից, որտեղից

$$\angle A_1DC=\alpha_1,\ \angle CDA_2=\alpha_2$$
$$\angle DA_1C=\varphi-\alpha_1,\ \angle DA_2C=180^0-(\alpha_2+\varphi)։$$

A_1C-ն և CA_2-ն համապատասխանաբար նշանակենք a և b։

Սյն ժամանակ

$$\triangle A_1DC\text{-ից},\ \frac{DC}{a}=\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\alpha_1},$$

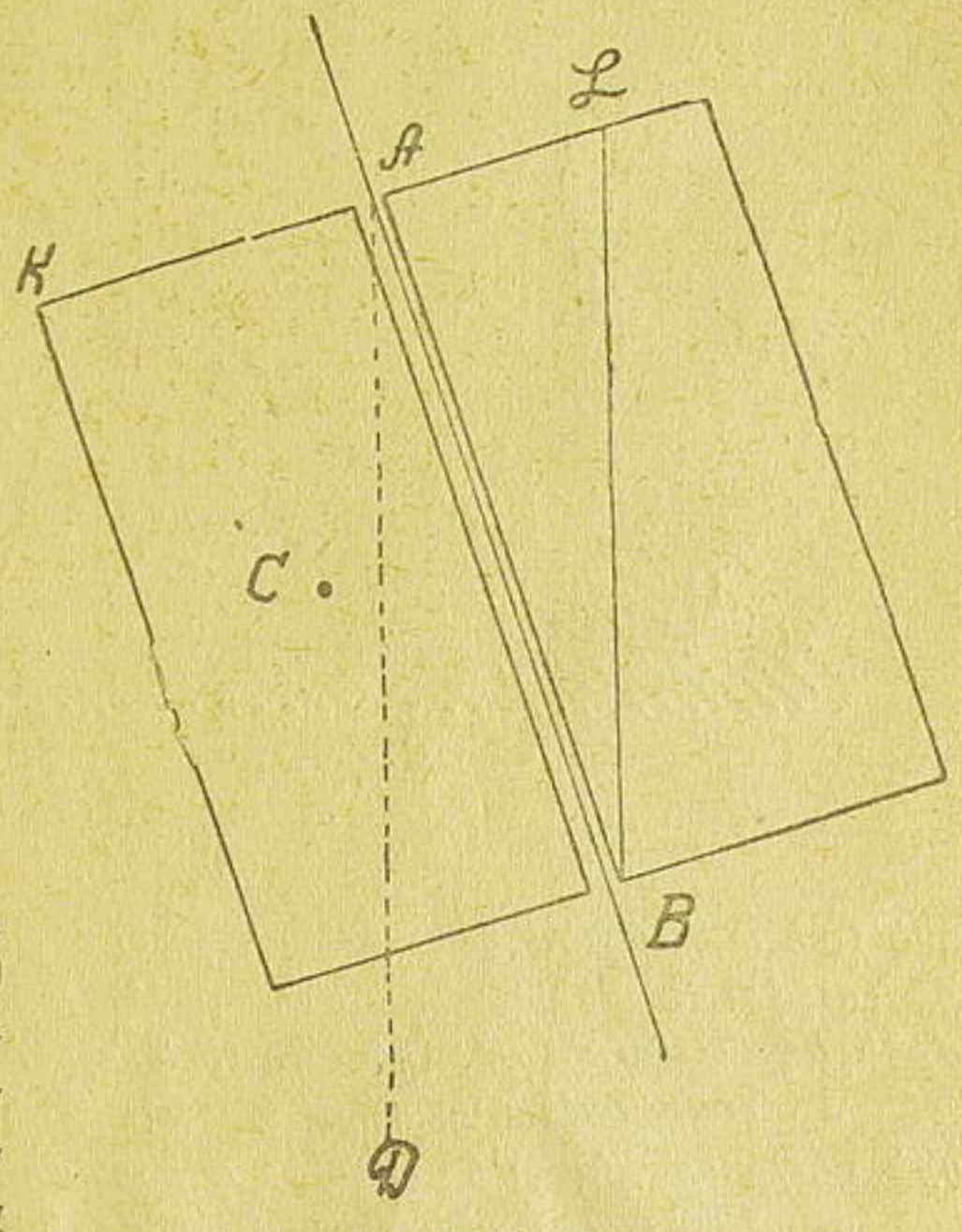
$$\triangle A_2DC\text{-ից},\ \frac{DC}{b}=\frac{\sin(\varphi+\alpha_2)}{\sin\alpha_2};$$

Այստեղից

$$\frac{a\sin(\varphi-\alpha_1)}{\sin\alpha_1}=\frac{b\sin(\varphi+\alpha_2)}{\sin\alpha_2}.$$

Կամ բացելով փակագծերը՝

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a+b}{a\operatorname{cotg}\alpha_1-b\operatorname{cotg}\alpha_2}։$$



նկ. 216

Խնդիր 2.

ABC գետը հեղվում է A և B երկու կետերում (նկ. 216) ձևարող է առանց շփման պտտվել AB-ի շուրջը։ AB առանցքն ուղղաձիգ չէ և ուղղաձիգի հետ կազմում է α անկյունը։ Որոշել գետաձև հավասարակշռության դիրքը։

Քանի որ AB առանցքը չի պատկանում սիստեմին, ապա նրա $\overline{R}_A$ և $\overline{R}_B$ հակազդեումները արտաքին ուժեր են։ Երրորդ արտաքին ուժը գետաձևի Q կշիռն է։ Կշռի ազդման գիծն անցնում է ծանրության C կենտրոնով։

Որովհետև A, B, C կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա, ապա նրանցով լիովին որոշվում է այն հարթությունը, որի մեջ հավասարակշռու-

թյան դեպքում պետք է գտնվեն երեք արտաքին ուժերը՝ $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$, $\overline{Q}_C$: Դա ABC տախտակի հարթություն է: Բայց $\overline{Q}$-ն ուղղաձիգ ուժ է, հետևապես և այդ ուժը պարունակող ABC հարթությունը պետք է ուղղաձիգ լինի:

Իսկ դռան տախտակը կարող է ուղղաձիգ լինել այն երկու դիրքերում, երբ նա համընկնում է ADB հարթության հետ, որտեղ AD-ն ուղղաձիգ է կամ LAB հարթության հետ, որտեղ LB-ն ուղղաձիգ է:

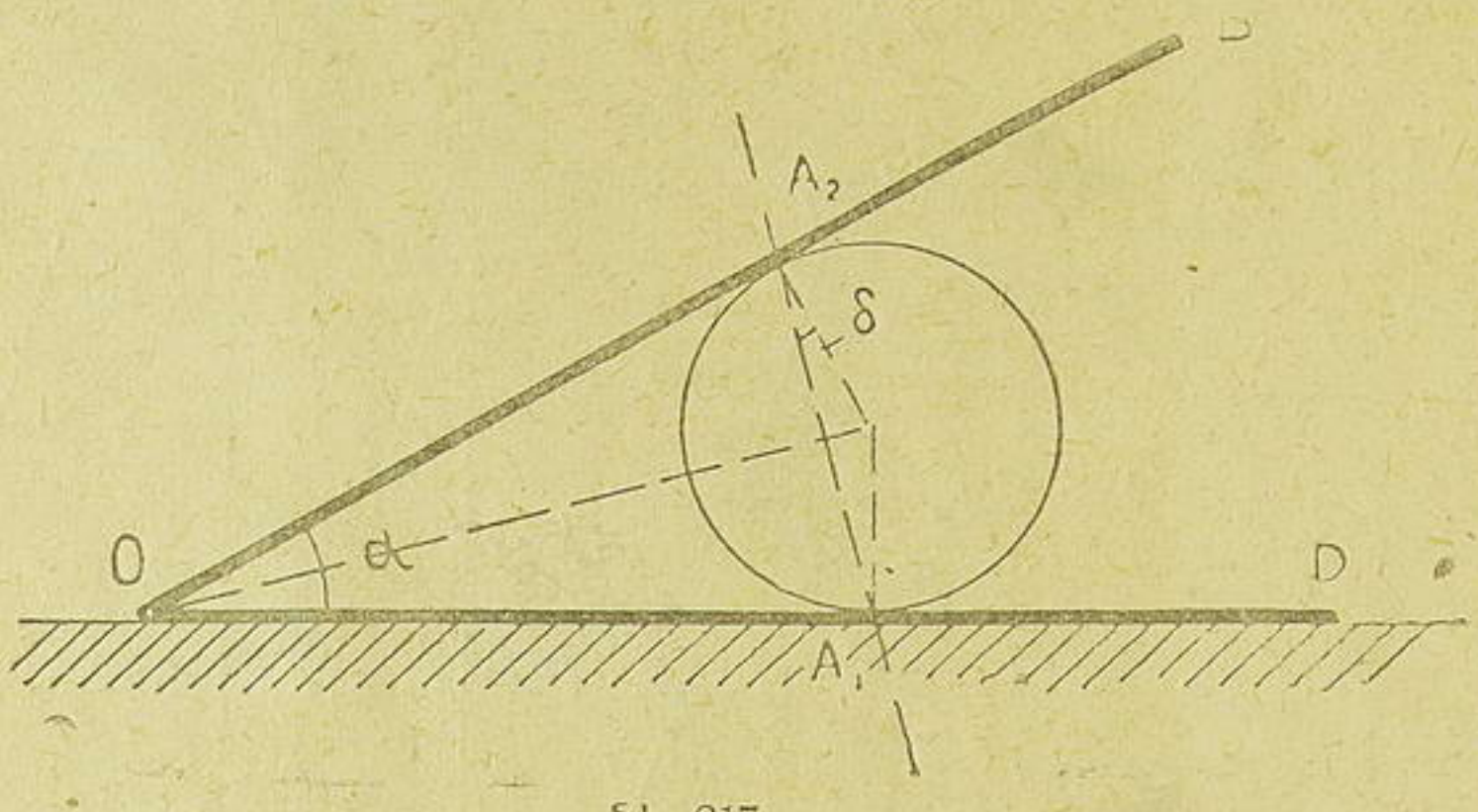
216 Նկարում ցույց տված ALB դիրքում հավասարակշռություն անկայուն է: Դա նշանակում է, որ ALB դիրքից հավասարակշռության ամենաաննշան շեղման դեպքում, դուռը ավելի ու ավելի պիտի հեռանա այդ դիրքից:

Իսկ ADB դիրքը կայուն է՝ շեղված լինելով այդ դիրքից, դուռը նորից կվերադառնա նրան:

Հավասարակշռության կայունության կամ անկայունության մասին ավելի մանրամասն հիմնավորումը կտրվի դասընթացի մյուս մասում:

Խնդիր 3.

Գնդային կարծր թաղանթը, որի կշիռը անտեսում ենք, դրված է երկու տախտակների միջև (նկ. 217). OD տախտակը հորիզոնական է



նկ. 217

իսկ OB տախտակը կարող է պտտվել O-ով անցնող հորիզոնական առանցքի շուրջը: Գիտենալով, որ գնդաձև թաղանթի OD, OB տախտակների միջև եղած շփման գործակիցը միևնույնն է և հավասար k-ի, որոշել՝

1°. տախտակների միջև եղած α անկյան այն սահմանային արժեքը, որի դեպքում դեռևս հնարավոր է թաղանթի հավասարակշռությունը:

2°. OB տախտակի ճնշումը թաղանթի վրա:

Որպես սխեմա ընդունենք թաղանթը: Նրա վրա ազդում են A_1 կետում OD տախտակի $\overline{R}$ հակազդումը, իսկ A_2-ում OB տախտակի $\overline{Q}$ ճնշումը: Ուրիշ արտաքին ուժեր չկան: Համաձայն (VIII 20)-ի թաղանթի հավասարակշռության դեպքում երկու ուժերի ազդման գիծը A_1A_2 ուղիղն է: Գնդային թաղանթի նորմալների միավոր վեկտորները A_1 և A_2

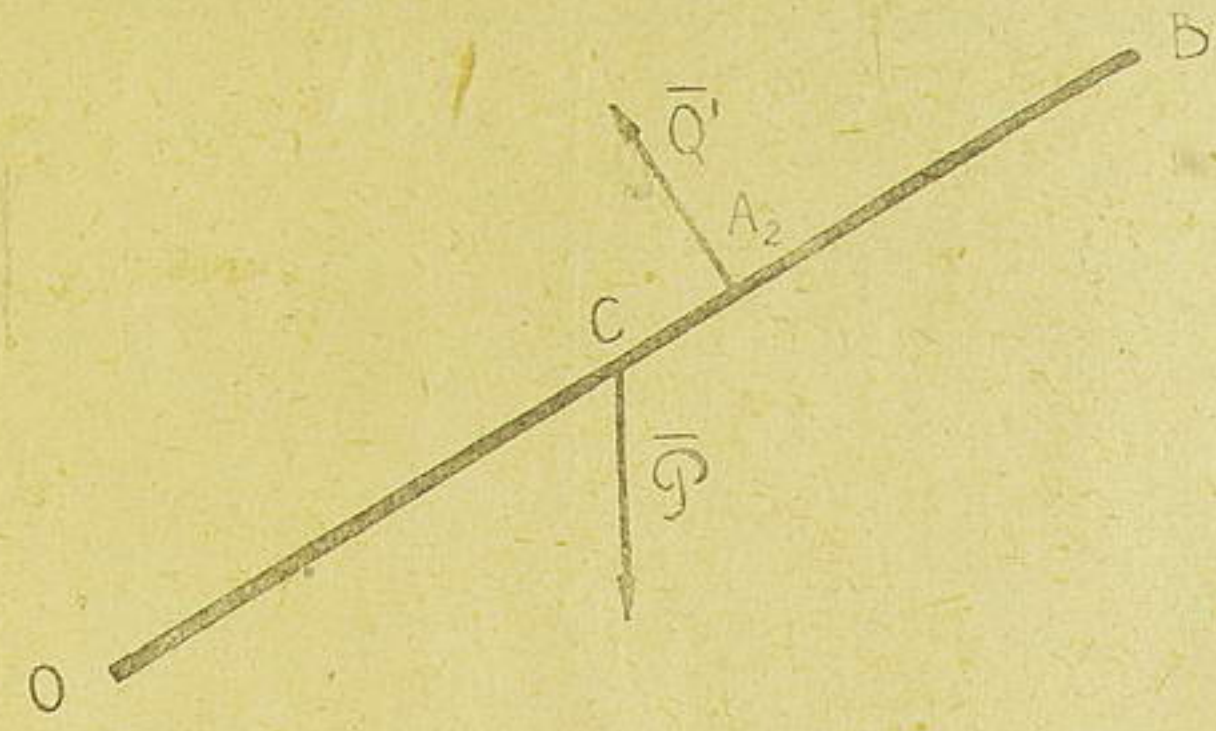
կհաներում համապատասխանաբար նշանակելով $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$*-ով, կստանանք, որ*

$$(\hat{n}_1, \overline{R}) = (\hat{n}_2, \overline{Q}) = \frac{\alpha}{2}:$$

Մյուս կողմից շփման տեսությունից հայտնի է, որ հավասարակշռության դեպքում $(\hat{n}_1, \overline{R})$ *[ինչպես և նրան հավասար* $(\hat{n}_2, \overline{Q})$*] անկյունը պետք է լինի շփման* δ *անկյունից ոչ մեծ:*

Հետևապես $\frac{\alpha}{2} \leqslant \delta$ *կամ* $\alpha \leqslant 2\delta$:

2°. Q ճնշումը որոշելու համար օգտվենք այն բանից, որ ապրման և հակազդման հավասարության օրենքի համաձայն, թաղանթի $\overline{Q'}$ *հակազդումը* A_1 *կետում հակազուգահեռ է* $\overline{Q}$*-ին և այդ երկու ուժերն ունեն միևնույն չափը: Այդ պատճառով էլ որպես սիստեմ ընդունենք* OB *սախտակը (նկ. 218) և որոշենք* $\overline{Q'}$:



Նկ. 218

OB-ի վրա ազդում են երեք արտաքին ուժեր՝ $\overline{Q'}$*-ն, պատման առանցքի* R_0 *հակազդումը O կետում (*$\overline{R}_0$*-ն նկարում ցույց չի տրված), և սախտակի* $\overline{P}$ *կշիռը:* $\overline{P}$*-ի ազդման գիծն անցնում է սախտակի C ծանրության կենտրոնով:*

Որովհետև դեռ անհայտ $\overline{R}_0$ *հակազդումը մեզ չի հետաքրքրում, ապա նրան մեր հավասարումներից արտաքսելու համար, որպես մոմենտների կենտրոն ընդունենք O-ն:*

Ըստ (VIII 12)-ի $\overline{M}_0 = 0$ *և որովհետև* $\overline{M}_0(\overline{R}_0) = 0$*, ստանում ենք՝*

$$\overline{M}_0(\overline{P}) + \overline{M}_0(\overline{Q'}) = 0$$

Այստեղից հետևում է, որ այդ մոմենտները հակազուգահեռ են և ունեն միևնույն չափը: Բայց $M_0(\overline{Q'}) = OA_2 \cdot Q' \cos\frac{\alpha}{2}$*, իսկ* $M_0(\overline{P}) = OCP \cos\alpha$:

Այսպիսով

$$OA_2\, Q' \cos\frac{\alpha}{2} = OCP \cos\alpha,$$

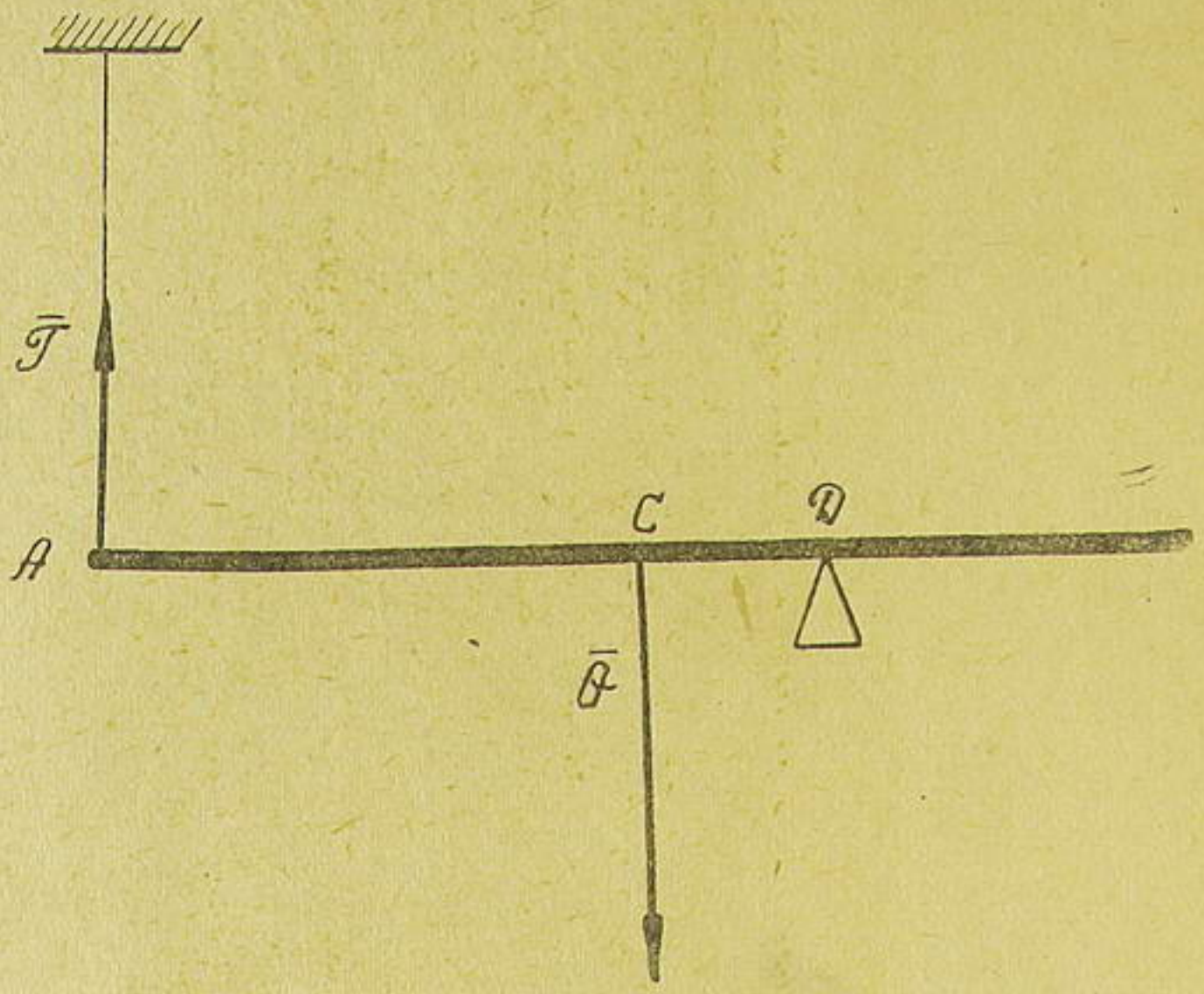
կամ

$$Q' = \frac{OCP \cos\alpha}{OA_2 \cos\frac{\alpha}{2}}:$$

Այստեղ $OA_2 = r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ *որտեղ r-ը թաղանթի շառավիղն է:*

Խնդիր 4.

Q կշիռ ունեցող չհղկված, համասեռ AB ձողը գտնվում է D հենակետի վրա, և ինչպես ցույց է տված 219 նկարում, պահվում է A կետում



Նկ. 219

ելուն, ուղղաձիգ թելով: A և D կետերը գտնվում են մեկ հորիզոնական ուղղի վրա: D հենակետը կարող է տեղափոխվել ձողի երկայնությամբ: Որոշել՝

1°. D հենակետի այն սահմանային D_0 դիրքը, որի դեպքում դեռ հնարավոր է ձողի հավասարակշռությունը:

2°. D նեցուկի հակազդումը այն դիրքերում, երբ նա համընկնում է D_0-ի և B-ի հետ, կամ գտնվում է A-ից x հեռավորության վրա, քան որում $x > AD_0$:

1°. Որպես սխեմա ընդունենք ձողը: Նրան կիրառված են երեք արտաքին ուժեր՝ թելի $\bar{T}$ լարումը, Q կշիռը և D նեցուկի $\bar{R}$ հակազդումը: Ձևուն թելի ուղղաձիգ լինելու շնորհիվ $\bar{T}$ ուժը ուղղաձիգ է: Սյդպիսով երեք ուժերից երկուսը ($\bar{T}$ և $\bar{Q}$) ուղղաձիգ են: Հետևապես ըստ (VIII 23)-ի $\bar{R}$-ը նույնպես ուղղաձիգ է: Ըստ որում $\bar{Q}$-ն ուղղված է ներքև, $\bar{T}$-ն վերև, $\bar{R}$—վերև:

Որովհետև հակազուգահեռ ուժերի աղման դիծը հավասարակշռության դիրքում պետք է լինի համազուգահեռ ուժերի աղման գծերի միջև (VIII 23, 3°), ապա D նեցուկը պետք է գտնվի ձողի ծանրության կենտրոնից դեպի աջ (ծանրության կենտրոնով անցնում է ձողի կշռի աղման դիծը), կամ սահմանային դիրքում, կհամընկնի ծանրության

կենտրոնի հետ։ Ձողի համասեռության հետևանքով $AC=\frac{l}{2}$, որտեղ l-ը ձողի երկայնությունն է։

Այսպես ուրեմն նեցուկի սահմանային ձախ դիրքը նշանակելով D_0, կունենանք՝

$$AD_0=AC=\frac{l}{2},\quad AD\geqq\frac{l}{2}.$$

2°. Որոշենք A-ից x հեռավորության վրա գտնվող նեցուկի հակազդումը։ Օգտվենք (VIII 12)-ից, որպես մոմենտների կենտրոն ընդունենք A-ն։ Այն ժամանակ

$$\overline{M}_A(\overline{Q})+\overline{M}_A(\overline{R})=0.$$

Հետևապես այդ մոմենտները (հակազուգահեռ են և) ունեն միևնույն չափը. այստեղից

$$Q\,\frac{l}{2}=Rx,\quad R=Q\,\frac{l}{2x};$$

Որովհետև $\overline{T}+\overline{R}+\overline{Q}=0$ և $\overline{T}\uparrow\uparrow\overline{R}$,

ապա $$T=Q-R=Q\,\frac{2x-l}{2x}.$$

Այդ ֆորմուլներից եզրակացնում ենք, որ D_0 նեցուկի սահմանային ձախ դիրքում, երբ $x=\frac{l}{2}$,

$$R=R_0=Q,\qquad T=T_0=0.$$

Այն դեպքում, երբ $x=l$, նեցուկը համընկնում է B-ի հետ, ըստ որում

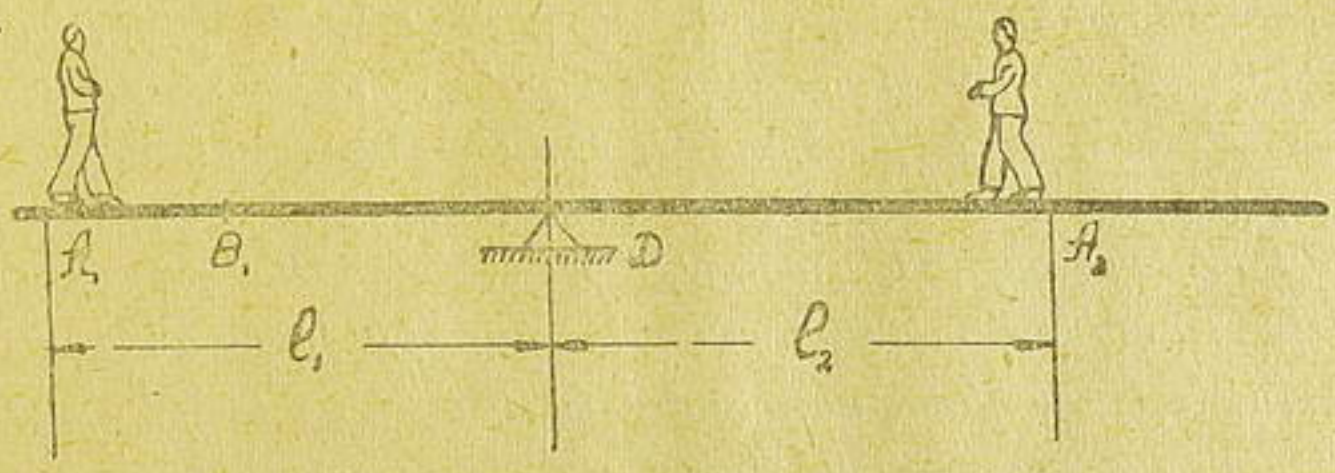
$$R=T=\frac{Q}{2}.$$

Օգտակար է լուծել այդ խնդիրը, ենթադրելով՝ 1°. որ ձողը համասեռ չէ և նրա ծանրության կենտրոնը A-ից գտնվում է $AC=a$ հեռավորության վրա։ 2°. որ ձողը թևքված է դեպի հորիզոնը, նեցուկի շփման անկյունից փոքր α անկյան տակ։

Հնարավոր է արդյոք հավասարակշռությունը, եթե թևքման անկյունը մեծ է շփման անկյունից։

Խնդիրներ.

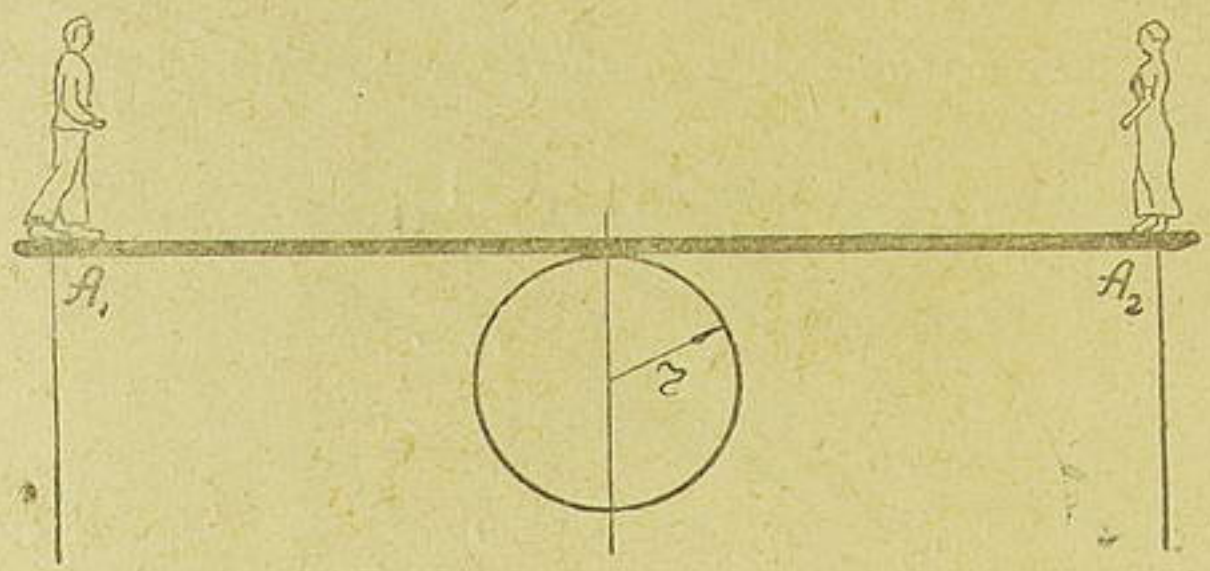
1. Չոփված տախտակը, որի կշիռը անտեսում ենք, կարող է պտտվել D նեցուկի շուրջը (նկ. 220)։ Տախտակի վրա գտնվում են Q_1 և Q_2



Նկ. 220

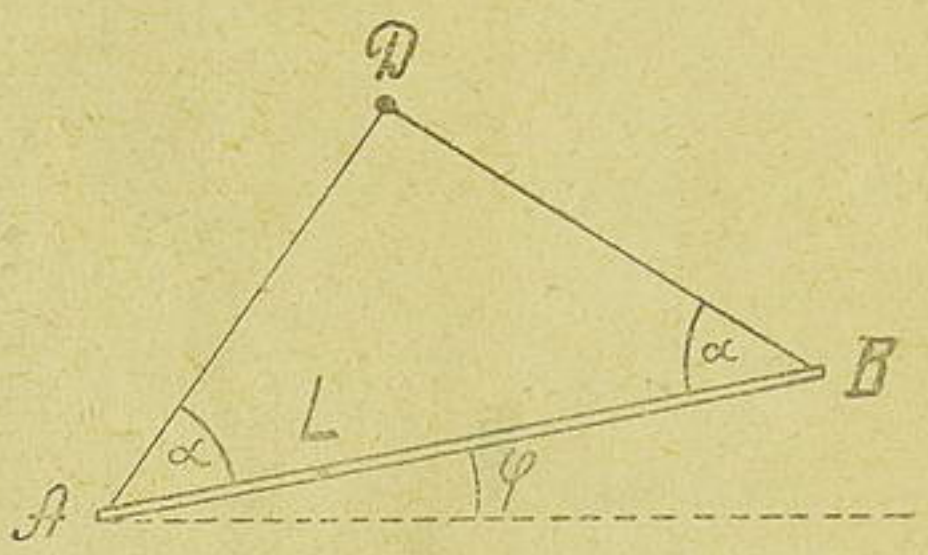
կշիռ ունեցող երկու մարդ։ Երանց հեռավորությունները D-ից համապատասխանաբար հավասար են l_1, l_2։ Մարդկանցից մեկը տեղափոխվում է A_1-ից B_1 դիրքը, ընտ որում $A_1B_1=a_1$։ Որքա՞ն, թե որքան և որ կողմը պետք է տեղափոխվի երկրորդ մարդը, որպեսզի հավասարակշռությունը չխախտվի։

2. Ջղկված տախտակը, որի կշիռն արհամարհում ենք, հենվում է r շառավիղ ունեցող անշարժ գլանին և ուղղահայաց է գլանի առանցքին։ Տախտակի և գլանի միջև եղած շփման գործակիցն է k։ Տախտակի վրա կանգնած են A_1 կետում Q_1 կշիռ ունեցող մարդը, իսկ A_2-ում Q_2 կշիռ ունեցող մարդը (նկար 221)։ Գտնել առաջի մարդու այն ամենամեծ տեղափոխումը դեպի աջ, որի դեպքում տախտակը դեռ գլանի վրա կմնա։



նկ. 221

3. AB համասեռ տախտակը (նկ. 222), որի կշիռն է Q և երկարությունը 2l, կախված է հավասար երկարություն DA և DB թելերից, որոնք տախտակի հետ կազմում են α, α անկյուններ։ L կետում (AL=a) դրված է P կշիռ ունեցող մի ծանրոց։ Որոշել φ անկյունը, որ կազմում է տախտակը հորիզոնի հետ և թելերի T_A ու T_B լարումները։



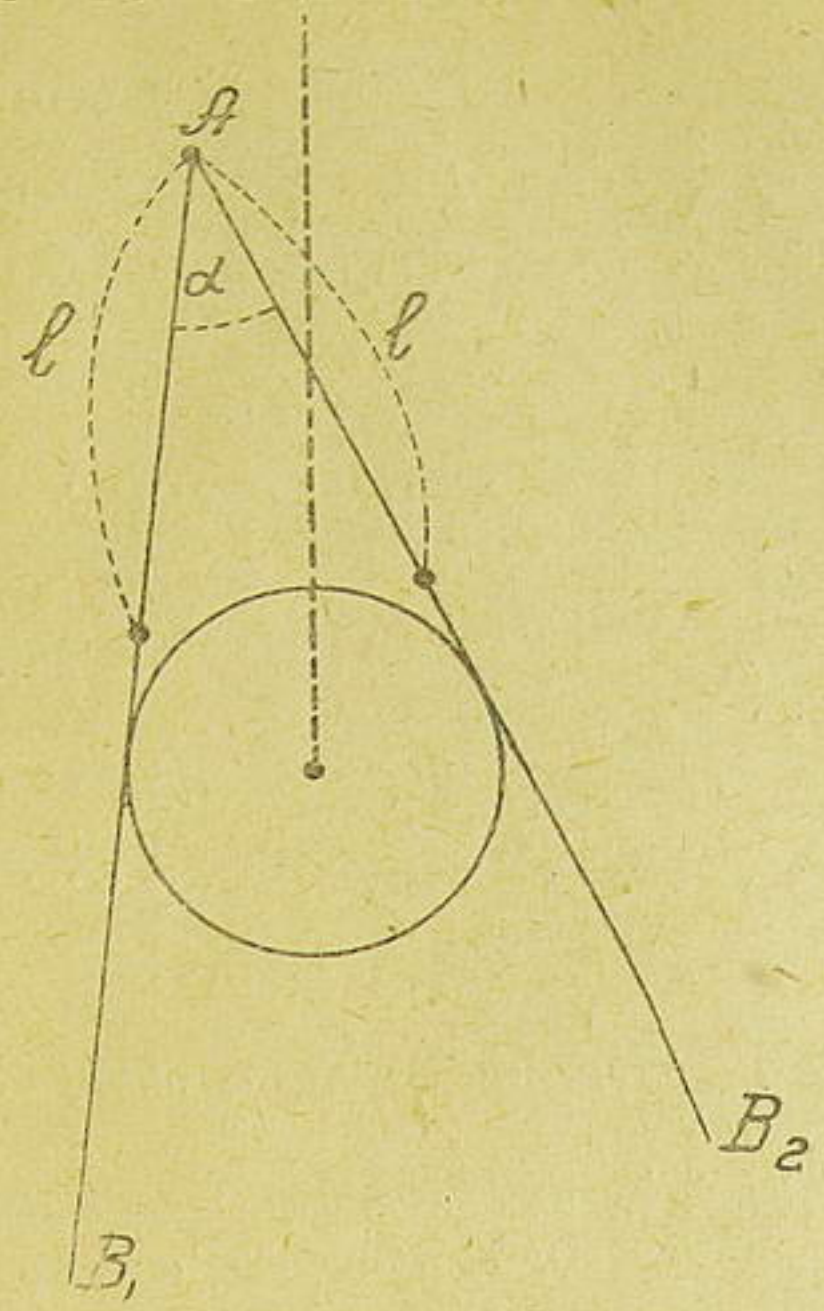
նկ. 222

Յուցմունք. φ անկյունը որոշելու համար հարմար է որպես սխեմա ընդունել տախտակն ու թելերը. այն ժամանակ տախտակի վրա կազդեն երեք ուղղահեռ արտաքին ուժեր։ Հետո, թելերի լարումները որոշելու համար պետք է քննարկել D կետի հավասարակշռությունը, որի հավասարման ուղղությունը որոշվում է առաջին հարցի լուծման ընթացքում։

4. AB_1 և AB_2 միանգամայն միանման ձողերը (նկար 223), A կետում միացված են հոդակապով և նստեցված իդեալական հարթ անշարժ գլանի վրա։ Գլանի առանցքը հորիզոնական է, ձողերից յուրաքանչյուրի կշիռն է Q, իսկ ծանրության կենտրոնը գտնվում է A-ից l հեռավորության վրա։ Ցույց տալ, որ ձողերի հավասարակշռությունը հնարավոր է միայն այն

պնպքում, երբ B_1AB_2 հարթությունը գլանի առանցքին ուղղահայաց է և A կետը գտնվում է գլանի առանցքով անցնող ուղղաձիգի վրա:

Որոշել ձողերով կազմված α անկյունը նրանց հավասարակշռության դիրքում:



Նկ. 223

Ցուցմունք. Երկու ձողերը ընդունելով որպես սիստեմ, և նկատի առնելով, որ ամբողջ սիստեմի կշռի ազդման գիծը անցնում է A-ով, որոշել գլանի R հակազդման մեծությունը: Հետո, ընդունել որպես սիստեմ ձողերից մեկը և (VIII 12)-ից օգտվել այնպես, որ հոդակապի հակազդումը չմտնի հավասարակշռության հավասարման մեջ:

ԳԼՈՒԽ IX

ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԿՈՕՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐԸ

§ 65. Հավասարակշռության պայմանների վերածումը սկալար տեսքի: *Եթե վեկտոր* $\bar{a}=0$, *ապա նրա պրոեկցիան կամայական* OL *առանցքի վրա հավասար է զերոյի՝* $a_l=0$:

Բայց $a_l=0$ *հավասարությունը համարժեք չէ* $\bar{a}=0$ *հավասարությանը: Իսկ եթե առանցքները, որոնց միավոր վեկտորները* $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{r}$ *կոպլանար չեն, ապա երեք հավասարությունների սիստեմը*

$$\left.\begin{array}{c} a_p=0,\ a_q=0,\ a_r=0 \\ \text{համարժեք է}\ \ \bar{a}=0 \end{array}\right\} \quad (IX\ 1)$$

հավասարությանը.

Ելնելով (IX, 1)*-ից կարելի է հավասարակշռության երկու հավասարումները՝*

$$\bar{F}=0,\ \overline{M}_B=0$$

արտահայտել այլ եղանակով:

Ազատին ուժերի գլխավոր վեկտորն է՝

$$\bar{F}=\Sigma\bar{F}_i,$$

որտեղ $\overline{F}_i$-ն ազատ մարմնի ուժն է, կիրառված A_i կետում։

$$\overline{M}_B = \Sigma\, \overline{M}_B(\overline{F}_i)։$$

Այնպես որ եթե $\hat{p}$, $\hat{q}$ $\hat{r}$ միավոր վեկտորները կոպլանար չեն, ապա $\overline{F}=0$ վեկտորական հավասարումը համարժեք է երեք սկալար հավասարումների՝

$$\left.\begin{aligned} F_p &= \Sigma F_{i,p} = 0 \\ F_q &= \Sigma F_{i,q} = 0 \\ F_r &= \Sigma F_{i,r} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (IX\ 2)$$

Իսկ $\overline{M}_B=0$ հավասարումը հավասարազոր է հետևյալ երեք սկալար հավասարումների՝

$$\left.\begin{aligned} M_{B,p} &= \Sigma\, M_{B,p}(\overline{F}) = 0. \\ M_{B,q} &= \Sigma\, M_{B,q}(\overline{F}_i) = 0. \\ M_{B,r} &= \Sigma\, M_{B,r}(\overline{F}_i) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (IX\ 3)$$

որտեղ $M_{B,p}$-ն գլխավոր մոմենտի պրոեկցիան է $\hat{p}$-ի ուղղությամբ, և այլն։

Եթե որևէ երեք ոչ կոպլանար առանցքներ ընդունենք OXYZ ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմի առանցքները, որպես մոմենտների կենտրոն ընդունենք կոորդինատային O սկզբնակետը, $\overline{F}_i$ ուժի պրոեկցիաները OX, OY, OZ առանցքների վրա՝ նշանակենք համապատասխանաբար X_i, Y_i, Z_i, իսկ գլխավոր վեկտորի պրոեկցիաները X, Y, Z, ապա (IX 2) և (IX 3) կգրվեն այսպես՝

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma X_i = 0 \\ Y &= \Sigma Y_i = 0 \\ Z &= \Sigma Z_i = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (IX\ 4)$$

$$\left.\begin{aligned} M_{B,X} &= \Sigma\, M_{B,X}(\overline{F}_i) = 0 \\ M_{B,Y} &= \Sigma\, M_{B,Y}(\overline{F}_i) = 0. \\ M_{B,Z} &= \Sigma\, M_{B,Z}(\overline{F}_i) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (IX\ 5)$$

Այդպիսով հավասարակշռության 2 վեկտորական (XIII 11) և (VIII 12) հավասարումները ընդհանուր առմամբ համարժեք են վեց սկալար հավասարումների, (IX 2), (IX 3), կամ (IX 4), (IX 5)։

Սակայն դժվար չէ համոզվել, որ այդ (IX 2), (IX 3) կամ (IX 4), (IX 5) վեց հավասարումները միշտ չեն լինում անկախ միմյանցից։ Երբեմն ազատ ուժերի ազդման գծերը այնպես են լինում դասավորված, որ այդ վեց (IX 2) և (IX 3), [կամ (IX 4) և (IX 5)] հավասարումներից միայն մի քանիսն են անկախ։

Օրինակ՝ եթե բոլոր ազատ ուժերի ազդման գծերը հատվում են

մի (A) *կետում, ապա* $\overline{M}_B=0$ *հավասարումը հետևանք է* $\overline{F}=0$ *հավասարման: Եվ իսկապես,* $\overline{M}_B(\overline{F}_i)=\overline{BA}\times\overline{F}_i$, *այդ պատճառով էլ*

$$M_B=\Sigma\,\overline{BA}\times\overline{F}_i=\overline{BA}\times\Sigma\,\overline{F}=\overline{BA}\times\overline{F},$$

Այստեղից պարզ է, որ $\overline{F}=0$ *դեպքում և* $\overline{M}_B=0$:

Այսպիսով, այդ դեպքում (IX 3) *երեք սկալար հավասարումները կախում ունեն* (IX 2) *երեք հավասարումներից, [կամ* (IX 5) *հավասարումները կախված են* (IX 4)-*ից]:*

Երբեմն էլ այնպես է լինում, որ ուժերի ազդման գծերի դասավորման շնորհիվ (IX 2), (IX 3) *կամ* (IX 4), (IX 5) *հավասարումներից մի քանիսը բավարարվում են, անկախ նրանից՝ գոնվո՞ւմ է սիստեմը հավասարակշռության մեջ, թե՞ ոչ:*

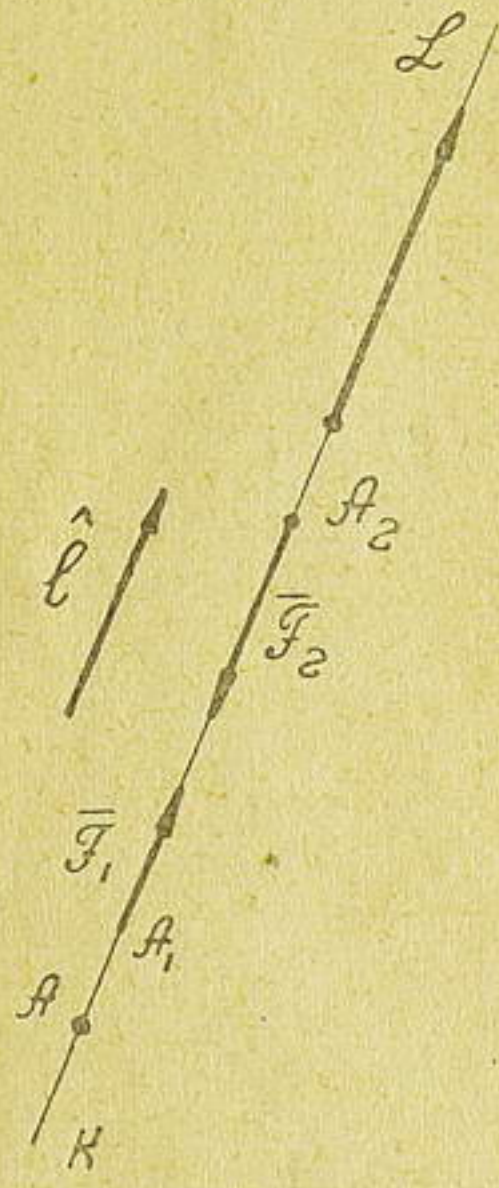
Օրինակ՝ ենթադրենք, որ բոլոր ուժերի ազդման գծերը հատում են միևնույն առանցքը, այն ժամանակ այդ առանցքի վրա վերցնելով մոմենտների B *կենտրոնը և այդ առանցքին համազուգահեռ միավոր վեկտորը անվանելով* $\hat{p}$, *կունենանք՝*

$$M_{B,p}=0$$

միայն շնորհիվ նրան, որ բոլոր ուժերի ազդման գծերը հատում են այդ առանցքը (անկախ նրանից, սիստեմը հավասարակշռության մեջ է թե ոչ):

Նման դեպքերում, երբ հավասարակշռության ոչ բոլոր հավասարումներն են անկախ միմյանցից, կամ ոչ բոլոր հավասարումներն են արդյունքի միայն հավասարակշռության դեպքում, ձգտում են վեց հավասարումները փոխարինել այնպիսի հավասարումների փոքր թվով, որոնք անկախ են միմյանցից և արդյունքի են միայն սիստեմի հավասարակշռության դեպքում:

Ստորև քննարկենք բոլոր կարևոր դեպքերը, սկսելով ամենահասարակից:



Նկ. 224

§ 66. Հավասարակշռության սկալար պայմանների թիվը, երբ բոլոր տրված ուժերն ունեն ազդման միևնույն գիծը: *Դիցուք սիստեմին կիրառված բոլոր տրված ուժերն ունեն միևնույն ազդման* KL *գիծը (նկ. 224):*

Որովհետև ուժի մոմենտը կախված չէ նրա կիրառման կետից, ապա KL*-ի վրա ընտրելով կամայական* A *կետը, կունենանք՝*

$$\overline{M}_B=\Sigma M_B(\overline{F}_i)=\Sigma\,\overline{BA}\times\overline{F}_i=\overline{BA}\times(\Sigma\,\overline{F}_i)=\overline{BA}\times\overline{F}$$

Հետևապես, եթե $\overline{F}=0$, *ապա և* $\overline{M}_B$ *վեկտոր է հավասար լինի զերոյի, այսինքն* $M_B=0$ *հավասարումը հանդիսանում է որպես հետևանք* $F=0$ *հավասարումի, և այդ պատճառով էլ կարող է բոլորովին չքննարկվել: Բավական է քննարկել* $F=0$ *հավասարումը, կամ նրան համարժեք երեք սկալար հավասարումները* (IX 2) *կամ* (IX 4):

Եթե $\hat{\imath}$-ը ուժերից մեկին, օրինակ $\bar{F}_1$-ին համազուգահեռ միավոր վեկտոր է, ապա $\bar{F}_i = F_i \hat{\imath}$, որտեղ F_i-ն $\bar{F}_i$ ուժի թվական արժեքն է։ $\hat{\imath}$-ին համազուգահեռ բոլոր ուժերի թվական արժեքները դրական են, իսկ $\hat{\imath}$-ին հակազուգահեռ ուժերի թվական արժեքները բացասական են։

Ակնհայտ է, $F_{i,p} = \bar{F} \cdot \hat{p} = F_i \hat{\imath} \cdot \hat{p}$. այդպիսով գլխավոր $\bar{F}$ վեկտորի պրոեկցիան որևէ $\hat{p}$ ուղղության վրա կլինի՝

$$F_p = \Sigma F_{i,p} = (\Sigma F_i) \hat{\imath} \cdot \hat{p} \qquad \text{(IX 6)}$$

$\bar{F} = 0$ հավասարակշռության դեպքում՝

$$F_p = (\Sigma F_i) \hat{\imath} \cdot \hat{p} = 0, \qquad \text{(IX 7)}$$

ճիշտ նույն ձևով էլ

$$F_q = (\Sigma F_i) \hat{\imath} \cdot \hat{q} = 0 \qquad \text{(IX 8)}$$

և

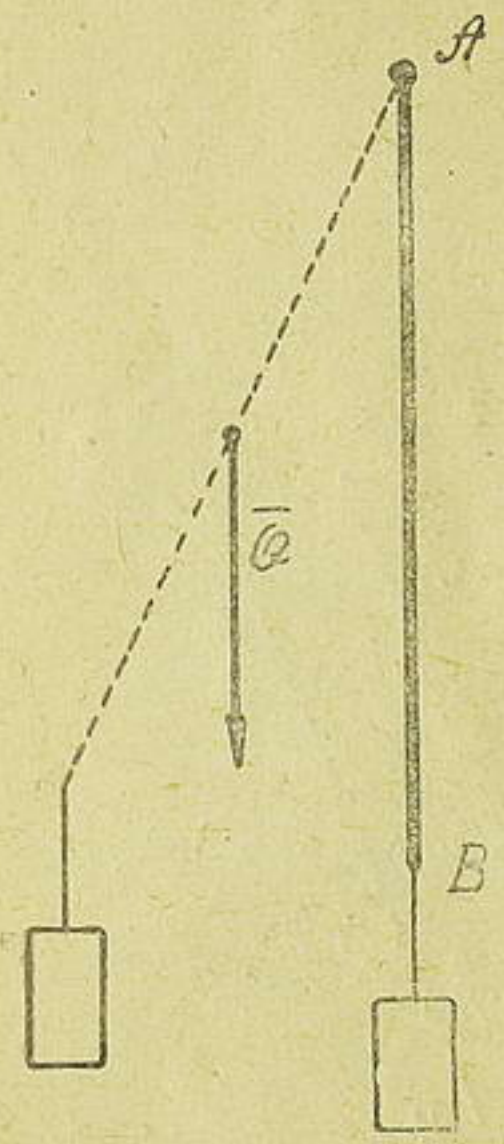
$$F_r = (\Sigma F_i) \hat{\imath} \cdot \hat{r} = 0. \qquad \text{(IX 9)}$$

F_p, F_q, և F բոլորն էլ կլուծանան զերո, եթե $\Sigma F_i = 0$. հետևապես, տվյալ դեպքում $\bar{F} = 0$ վեկտորական հավասարումը հավասարազոր է $\Sigma F_i = 0$ մեկ սկալար հավասարմանն։

Մենք հանգեցինք հետևյալին՝

Եթե սխեմային կիրառված արտաքին ուժերն ունեն միևնույն ազդման գիծը, ապա հավասարակշռության անհրաժեշտ ու (IX 11) սկալար հավասարումները հավասարազոր են միայն մեկ հավասարման, որը կայանում է նրանում, որ արտաքին ուժերի թվական արժեքների գումարը հավասար է զերոյի։

$$\Sigma F_i = 0.$$



Նկ. 225

Այստեղից պարզ է, որ երբ բոլոր արտաքին ուժերն ունեն միևնույն ազդման գիծը, մենք կարող ենք որոշել կամ անհայտ մի ուժի թվական արժեքը, կամ անհայտ մի քանի ուժերի թվական արժեքների գումարը։ Իսկ որոշել անհայտ ուժերի թվական արժեքներն առանձին-առանձին մենք հնարավորություն չունենք, որովհետև դրա համար մենք ունենք միայն մի հավասարում՝ $\Sigma F_i = 0$։

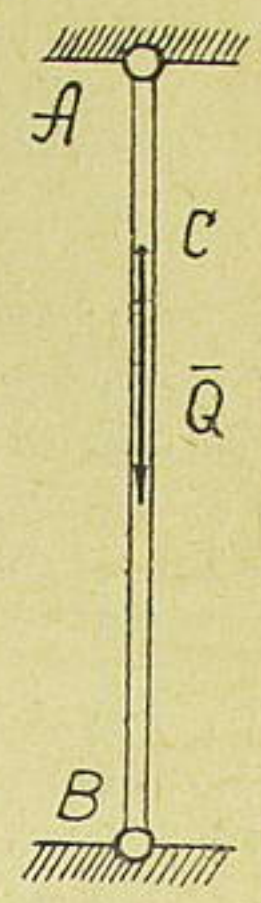
Օրինակներ՝

1°. A ծայրի շուրջն ազատ պտտվելու ընդունակ ձողի B ծայրից կախված է $\bar{Q}$ կշիռ ունեցող մի ծանրոց (նկ. 225)։ Որոշել A կետի R հակազդումը հավասարակշռության դեպքում։

Հավասարակշռության համար անհրաժեշտ է, որ $\bar{Q}$ և $\bar{R}$-ի ազդման գծերը համընկնեն, այնպես որ այդ ընդհանուր գիծը կլինի AB-ն։ Բայց $\bar{Q}$-ն ուղղաձիգ է, հետևապես հավասարակշռության դեպքում ձողը ուղղաձիգ կլինի։ Ըստ (IX 10)-ի $\Sigma F_i = 0$, այսինքն,

$$Q + R = 0.$$

Որովհետև $\bar{P}$-ն ուղղված է ուղղաձիգ դեպի ներքև, ապա $\bar{R}$-ը նույնպես ուղղաձիգ է, բայց ուղղված դեպի վեր. $R=-P$: Այս խնդրում մենք ունեինք մի անհայտ, այն է $\bar{R}$-ը և մենք այդ անհայտը որոշեցինք $\Sigma F_i=0$ հավասարումից:



Նկ. 226

2°. Անկշիռ ձողի A, B կետերը ամրացված են (նկար 226), C կետում կիրառված է $\bar{Q}$ ուժը, որի ազդման գիծը AB-ն է: Որոշել $\bar{R}_A$ և $\bar{R}_B$ հակազդումները:

Ակնհայտ է, որ այդ հակազդումների ազդման գծերը համընկնում են AB-ին, հակառակ դեպքում $\bar{R}_A$, $\bar{Q}$, $\bar{R}_B$ ուժերի գլխավոր մոմենտը չէր կարող զերո դառնալ: Հետևապես մենք կարող ենք օգտվել $\Sigma F_i=0$ կամ $R_A+R_B+Q=0$ հավասարումից: Այդ միակ հավասարումից մենք կարող ենք գտնել միայն երկու հակազդումների թվական արժեքների գումարը՝

$$R_A+R_B=-Q:$$

Իրականում R_A և R_B ունեն կատարյալ որոշ արժեքներ, բայց նրանց որոշելու համար բավական չեն հավասարակշռության անհրաժեշտ երկու վեկտորական հավասարումները, կամ նրանց համարժեք սկալար հավասարումները:

§ 67. Հավասարակշռության սկալար պայմաններբ, երբ առաձիծ ուժերը զուգահեռ են և գտնվում են մի հարթության վրա: Այժմ քննարկենք այն դեպքը, երբ սխեմաին կիրառված ուժերը զուգահեռ են և դասավորված (Π) հարթության վրա:

Ակնհայտ է, որ այստեղ ևս $\bar{F}=0$ վեկտորական հավասարումը, կամ $F_p=0$, $F_q=0$, $F_r=0$ (IX 7), (IX 8), (IX 9) երեք հավասարումները հավասարազոր են մեկ սկալար հավասարման՝

$$F=\Sigma F_i=0. \quad \ldots\ldots \quad (IX\ 11)$$

Իսկ ինչ վերաբերում է $\bar{M}_B=0$ հավասարման, կամ $M_{B,p}=0$, $M_{B,q}=0$, $M_{B,r}=0$ երեք հավասարումներին, ապա կարող ենք վարվել այսպես:

Π-ի վրա վերցնենք B կետը, որից անցկացնենք $\bar{F}_1$, $\bar{F}_i$, $\bar{F}_n$ ուժերի ազդման գծերը հատող մի կամայական ուղիղ: Հատման կետերը համապատասխանաբար անվանենք $D_1 \ldots D_i \ldots D_n$: $\overline{BD_i}$ նշանակենք $\bar{\rho}_i$, ընդունենք, որ $\rho_i=\hat{\rho}\,\rho_i$, այն ժամանակ

$$\bar{M}_B(\bar{F}_i)=\bar{\rho}_i\times\bar{F}_i=(\hat{\rho}\times\hat{f})\,\rho_i F_i,$$

որտեղ $\hat{f}$-ը $\bar{F}$ ուժերից մեկի համազուգահեռ միավոր վեկտորն է,

$$\bar{M}_B=\Sigma\bar{M}_B(\bar{F}_i)=(\hat{\rho}\times\hat{f})\,\Sigma\rho_i F_i=0:$$

Եվ որովհետև $\hat{\rho}$ և $\hat{f}$ զուգահեռ չեն, $\hat{\rho}\times\hat{f}\neq 0$, ապա $\bar{M}_B=0$ հավասարազոր է $\Sigma\rho_i F_i=0$ հավասարումին:

Այսպէսով՝

Երբ տրուած ուժերը գուգահեռ են և ղասաւորուած մեկ հարթութեան
(IX 12) *վրա, ապա հաւասարակշռութեան երկու վեկտորական հաւասարումները, կամ վեց սկալար հաւասարումները հաւասարազոր են երկու անկախ հաւասարումներին՝*

$$\Sigma F_i=0,\ \Sigma \rho_i F_i=0:$$

Ի հարկե մենք կարող ենք կոօրդինատային սիստեմն ընտրել այնպես, որ նրա սկզբնակետ O-ն և OX, OY առանցքները գտնվեն Π-ի վրա, այն ժամանակ անցկացնելով OX ∥ F_i ուժերին, իսկ OY ∥ $\hat{\rho}$ և O-ն էլ ընդունելով որպես մոմենտների կենտրոն, (IX 12) հաւասարումը կստանանք այս տեսքով.

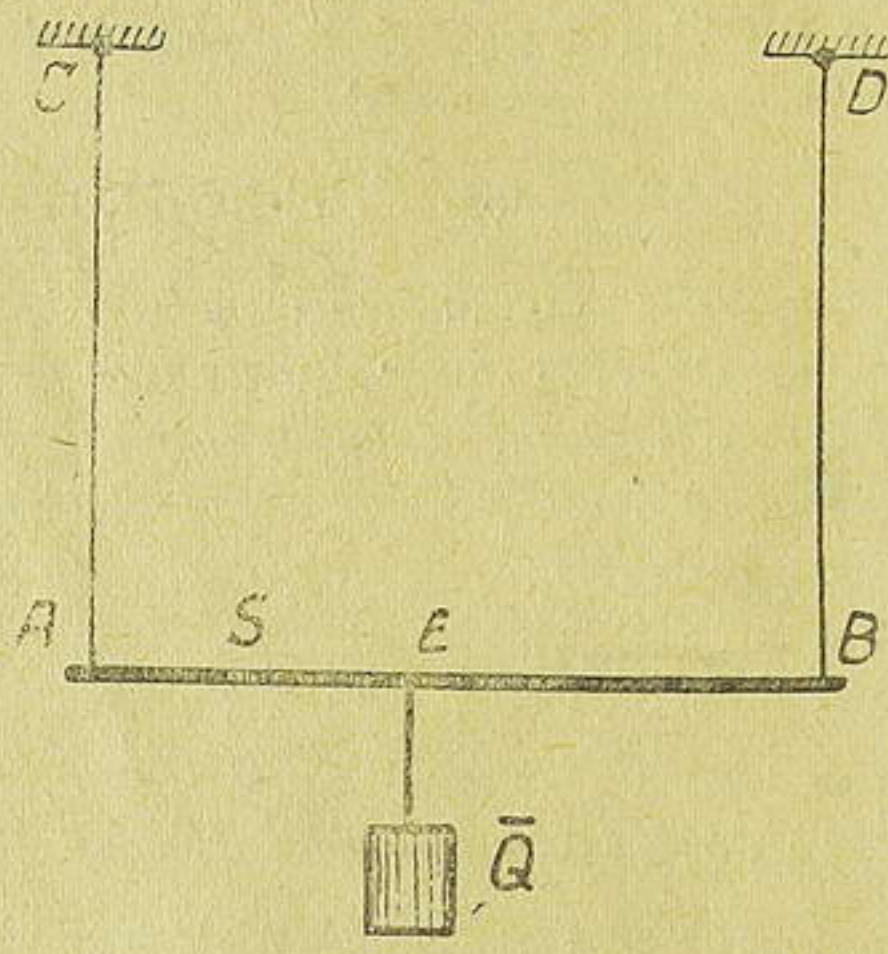
$$\Sigma X_i=0,\ \Sigma y_i X=0: \qquad \text{(IX 13)}$$

Երկու հաւասարումներից կարելի է որոշել երկու անհայտ մեծութիւններ, օրինակ՝ երկու ուժերի թվական արժէքները, ուժերի տղման գծերի միջև եղած հեռաւորութիւնները:

Իսկ եթե անհայտների թիվը երկուսից աւելի է, ապա միայն հաւասարակշռութեան պայմաններից օգտվելով մենք չենք կարող առանձին առանձին որոշել բոլոր անհայտները: s անհայտների դեպքում, (s—2) անհայտներից յուրաքանչիւրը կարտահայտվի որպես մյուս երկուսի ֆունկցիա:

Խնդիրներ.

1⁰. AB *ձողը կախված է ճկուն, անկշիռ և անձգելի* CA *և* DB *թելերից (նկ. 227), ըստ որում* $\overline{CD}=\overline{AB}$*: Ձողի* E *կետում կախված է* Q



Նկ. 227

կշիռ ունեցող ծանրոցը: Ընդունելով, որ ձողն անկշիռ է, գտնել թելերի T_A *և* T_B *լարումները:*

Որպես սկսեմ ընդունենք AB ձողը։ Այն ժամանակ $\bar{Q}$ և թելերի $\bar{R}_A$, $\bar{R}_B$ հակազդումները կլինեն արտաքին ուժեր. $\bar{R}_A=\bar{T}_A$, $\bar{R}_B=\bar{T}_B$։ Ուստի որոշենք R_A և R_B։ Քանի պայմանի $\overline{CD}=\overline{AB}$, հետևապես CA ∥ DB։ Բայց $\bar{T}_A \parallel \overline{CA}$, $\bar{T}_B \parallel \overline{DB}$, Այդպիսով $\bar{R}_A \parallel \bar{R}_B$։ Իսկ եթե երեք ուժերից երկուսը զուգահեռ են, ապա և երրորդը ($\bar{Q}$) պետք է զուգահեռ լինի նրանց։ [§ 59. գլ. VIII]։

Այսպես ուրեմն ձողը հավասարակշռության մեջ կլինի այն դեպքում, երբ CA և DB թելերը ուղղաձիգ են։ Այդ դիրքում $\bar{R}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}_B$ երեք ուժերն ուղղաձիգ են և դասավորված մեկ հարթության վրա։ Դրա շնորհիվ մենք ունենք (IX 12) տիպի երկու անկախ հավասարումներ։

AB-ի շարունակության վրա ընտրենք մոմենտների O կենտրոնը։ Նշանակենք $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OE}=\bar{e}$, այն ժամանակ ըստ (IX 12)-ի

$$R_A+Q+R_B=0,\quad aR_A+e\,Q+b\,B_B=0,$$

որտեղ R_A, Q և R_B ուժերի թվական արժեքներն են։

Այս երկու հավասարումներից գտնում ենք՝

$$R_B=\frac{(e-a)Q}{b-a},\quad R_A=-\frac{(b-e)Q}{b-a},$$

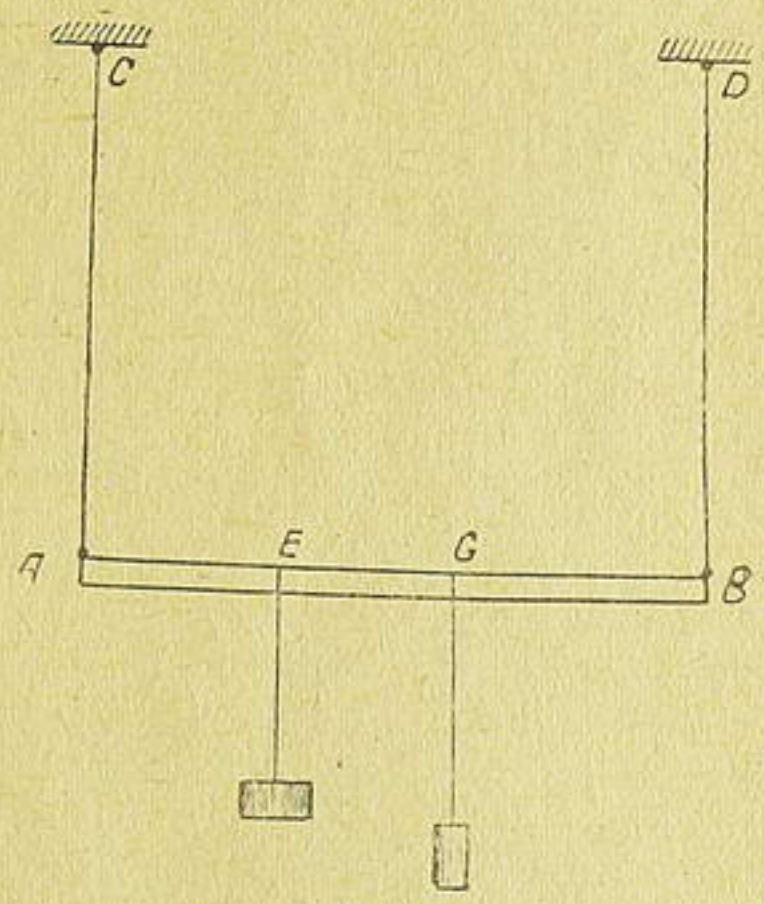
բայց $e-a=AE$, $b-e=EB$, $b-a=AB$. այնպես որ կարող ենք գրել՝

$$R_B=-\frac{AE}{AB}Q,\quad B_A=-\frac{EB}{AB}Q.$$

Մենք ավելի քիչ հաշիվներ կանենք, եթե որպես մոմենտների կենտրոն վերցնենք A կամ B կետը։ Առաջին դեպքում մենք միանգամից կստանայինք՝ $AEQ+ABR_B=0$ և այստեղից $R_B=-\frac{AE}{AB}Q$։ Երկրորդ դեպքում մենք անմիջապես կստանայինք

$$R_A=-\frac{EA}{AB}Q.$$

Վերջապես մոմենտների կենտրոն ընդունելով նախ A և հետո B, կարելի է ստանալ, ինչպես անում ենք, R_A և R_B, առանց դիմելու $R_A+Q+R_B=0$ հավասարմանը։ Այդ մանրամասն կբացատրվի հետագայում։



Նկ. 228

2°. AB ձողից (խնդիր 1°), նկ. 228 բացի $\bar{Q}$ կշիռ ունեցող ծանրոցից, G կետում կախված է $\bar{P}$ կշիռ ունեցող ծանրոցը։ Գտնել AE=s և AG=t հեռավորությունները այնպես, որպեսզի T_B լարումն ունենա նախապես տրված T արժեքը։

Համաուռության համար AB *նշանակենք* l: A *ընդունենք որպես մոմենտների կենտրոն, այն ժամանակ* (IX 12) *հավասարումներից երկրորդը կտա*

$$sQ+tP+lR_B=0:$$

Այստեղից

$$R_B=\frac{sQ+tP}{l}=T_B=T.$$

կամ

$$T=\frac{sQ+tP}{l}. \qquad (IX\ 14)$$

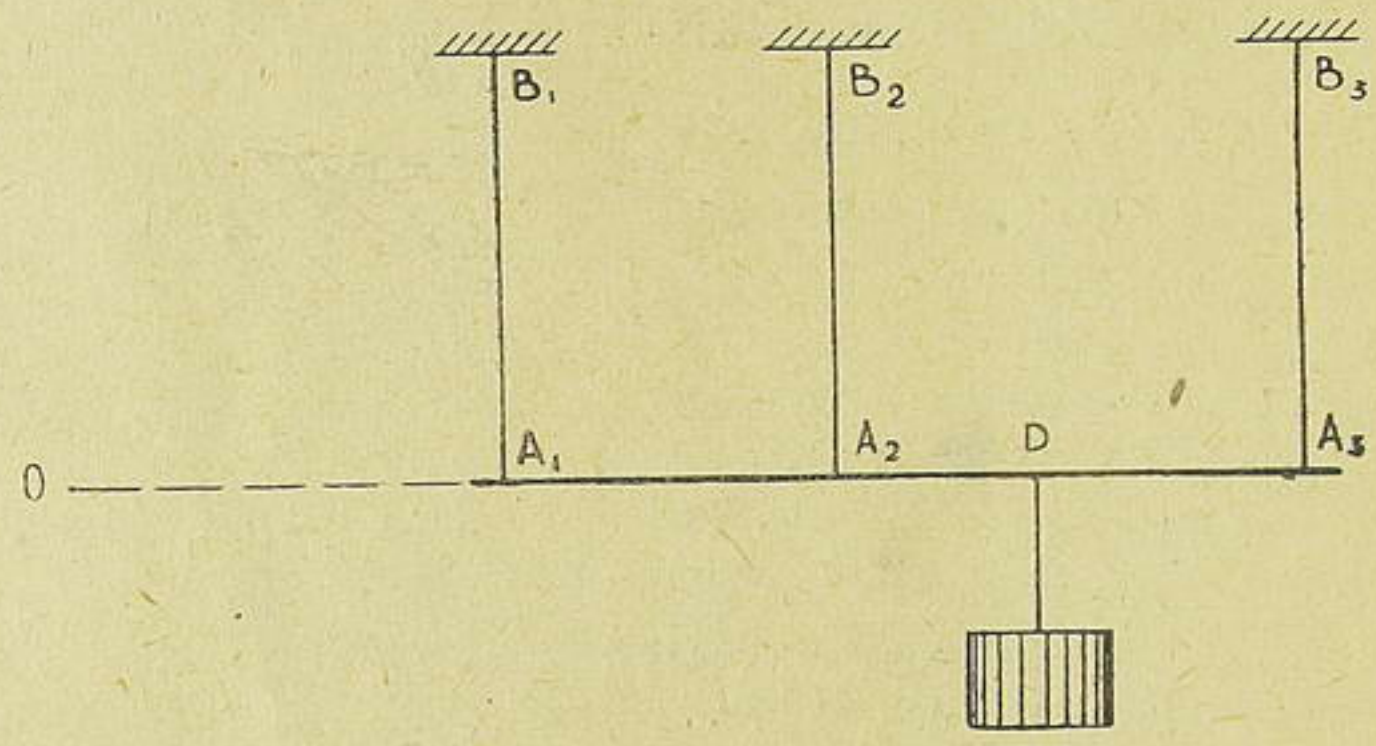
R_A*-ն որոշելու համար կարելի է օգտագործել* $R_A+Q+R_B=0$ *հավասարումը, քանի որ նախապես տրված է* R_B*-ի արժեքը* ($R_B=T$): *Իսկ* s *և* t *երկու անհայտների որոշման համար ունենք միայն մի հավասարում* (IX 14):

Դա այդպես էլ պետք է լինի, որովհետև մեր խնդրում երեք անհայտներ կան՝ R_A (*կամ* $T_A=-R_A$), s *և* t, *իսկ մենք ունենք միայն* (IX 12) *երկու անկախ հավասարումներ:*

Պետք է ի նկատի ունենալ, որ թելերը չեն դիմանում ճնշող ճիգերին: Այնպես որ T*-ին կարելի է տալ ամեն տեսակ դրական արժեքներ զերոյից մինչև* Q+P, *բայց* T*-ն չի կարող բացասական լինել:*

3°. Մի այլ դեպք, որտեղ անհայտների թիվը հավասարումների թվից ավելի է:

$A_1A_2A_3$ *ձողը* (*նկ. 229*) *կախված է երեք* (*ճկուն, անձգելի*) *և հավասար երկարություն ունեցող* B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3 *թելերից: D կետում*



նկ. 229

կախված է Q կշիռ ունեցող ծանրոց: Գտնել թելերի $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_3$ *լարումները: Ինչպես և 1° խնդրում, հավասարակշռության դիրքում թելերը պետք*

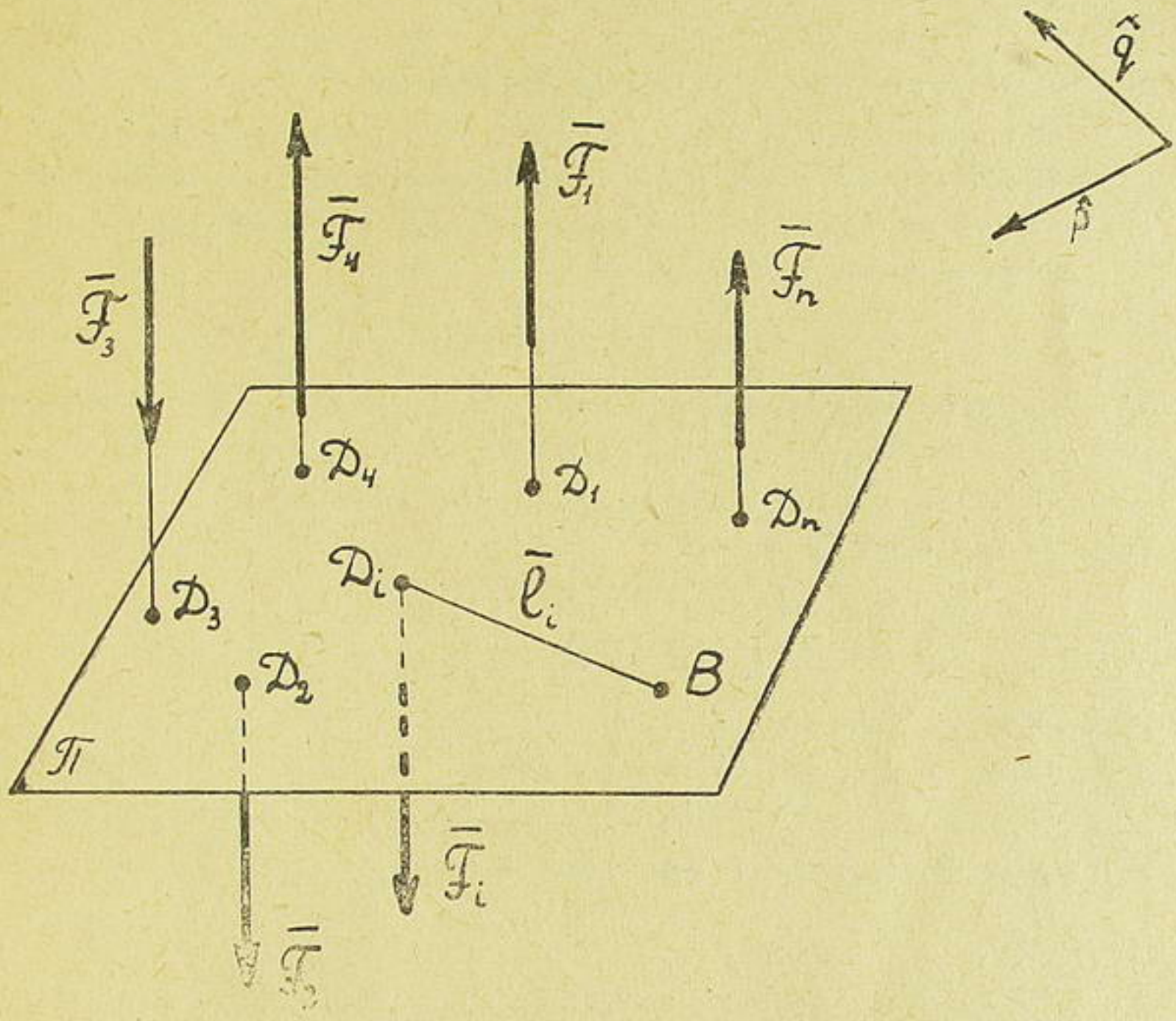
է ուղղաձիգ լինեն։ Այնպես որ $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, T_3 (կամ թելերի $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{R}_3$ հակազդումները, որոնք համապատասխանաբար հավասար են $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_3$ լարումներին) և $\overline{Q}$ ուղղաձիգ են ու դասավորված մեկ հարթության վրա։

Ունենք երկու հավասարումներ՝

$$R_1+R_2+R_3+Q=0,\quad a_1R_1+a_2R_2+a_3R_3+dQ=0,$$

այստեղ $a_1=OA_1$, $a_2=OA_2$, $a_3=OA_3$, $d=OD$. O-ն գտնվում է AB-ի շարունակության վրա. իսկ անհայտ հակազդումների թիվը հավասար է երեքի։

§ 68. Հավասարակշռության սկալար պայմաններն մի հարթության վրա չգտնվող զուգահեռ ուժերի դեպքում։ Այժմ անցնենք այն դեպքին, երբ սխեմային կիրառված $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,... $\overline{F}_n$ արտաքին ուժերը զուգահեռ են միմյանց, բայց չեն գտնվում մի հարթության վրա (նկ. 230)։



Նկ. 230

Այդ դեպքում, ինչպես և նախընթաց (§§ 66, 67) դեպքերում $\overline{F}=0$ վեկտորական հավասարումը համարժեք է մեկ սկալար հավասարման՝

$$F=\Sigma F_i=0.$$

Ցույց տանք, որ $\overline{M}_B=0$ հավասարումը համարժեք է երկու սկալար հավասարումների։

Մոմենտների B կենտրոնով անցկացնենք տվյալ ուժերին ուղղահայաց π հարթությունը։ Դիցուք $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$... $\overline{F}_i$ ... $\overline{F}_n$ ուժերի ազդման գծերը հատվում

են π-ի հետ $D_1, D_2 \dots D_i \dots D_n$ կետերում։ $\overline{BD}_i$-ն նշանակենք $\bar{l}_i$-ով։ Վերցնենք π-ին զուգահեռ $\hat{p}$ և $\hat{q}$ միավոր վեկտորները։ Այն ժամանակ կարելի է $\bar{l}_i$ վերլուծել $\hat{p}$ և $\hat{q}$-ին զուգահեռ բաղադրիչների, այնպես, որ $l_i = p_i\hat{p} + q_i\hat{q}$։ Բացի այդ $\overline{F}_i = \hat{F}F_i$, որտեղ $\hat{F}$ զուգահեռ է ուժերին։

Այսպիսով՝

$$\overline{M}_B(\overline{F}_i) = \hat{p} \times \hat{F} p_i F_i + \hat{q} \times \hat{F} q_i F_i ,$$

$$\overline{M}_B = \Sigma \overline{M}_B(\overline{F}_i) = \hat{p} \times \hat{F} \Sigma p F_i + \hat{q} \times \hat{F} \Sigma q_i F_i = 0,$$

և որովհետև $\hat{p} \times \hat{F} \neq 0$, $\hat{q} \times \hat{F} \neq 0$ և $\hat{p} \times \hat{F}$ ու $\hat{q} \times \hat{F}$ զուգահեռ չեն միմյանց, ապա $M_B = 0$ հավասարությունը համարժեք է երկու սկալար հավասարումների՝

$$\Sigma p_i F_i = 0, \quad \Sigma q_i F_i = 0:$$

Մեր կողմից ասացած արդյունքը նշանակում է, որ

Երբ տրոտաքին ուժերը զուգահեռ են, բայց չեն գտնվում մեկ հարթության վրա, ապա հավասարակշռության երկու վեկտո-
(IX, 15) րական անհրաժեշտ հավասարումները համարժեք են երեք անկախ սկալար հավասարումների՝

$$\Sigma F_i = 0, \quad \Sigma p_i F_i = 0, \quad \Sigma q_i F_i = 0:$$

Եթե կոօրդինատային սիստեմի O սկզբնակետը և OX, OY առանցքները գտնվում են π հարթության վրա (իսկ OZ առանցքը զուգահեռ է տրոտաքին ուժերին), ապա $OD_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i$ և այդ պատճառով էլ (IX, 15) երեք հավասարումները կգրվեն այսպես՝

$$\Sigma F_i = 0, \quad \Sigma x_i F_i = 0, \quad \Sigma y_i F_i = 0, \qquad (IX, 16),$$

քանի որ $F_i = Z_i = \overline{F}_i$-ի պրոեկցիան OZ-ի վրա։

[Հարկավոր է նկատել, որ կոօրդինատային սիստեմը կարող է ուղղանկյուն չլինել։ (IX, 16 հավասարումները արդարացի են ինչպիսին էլ որ լինի OX և OY առանցքների միջև եղած անկյունը։ Բայց $F_i = Z_i$, երբ $OZ \parallel \overline{F}_i$, այսինքն, երբ OZ ուղղահայաց է π-ին]։

Խնդիրներ.

1°. Կամայական ձևի ծանր թիթեղը կախված է B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3 երեք հավասար երկարության ճկուն, անձգելի թելերից (նկ. 231)։ Գիտենալով թիթեղի Q կշիռը և նրա ծանրության A կենտրոնը, գտնել թելերի $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_3$ լարումները։

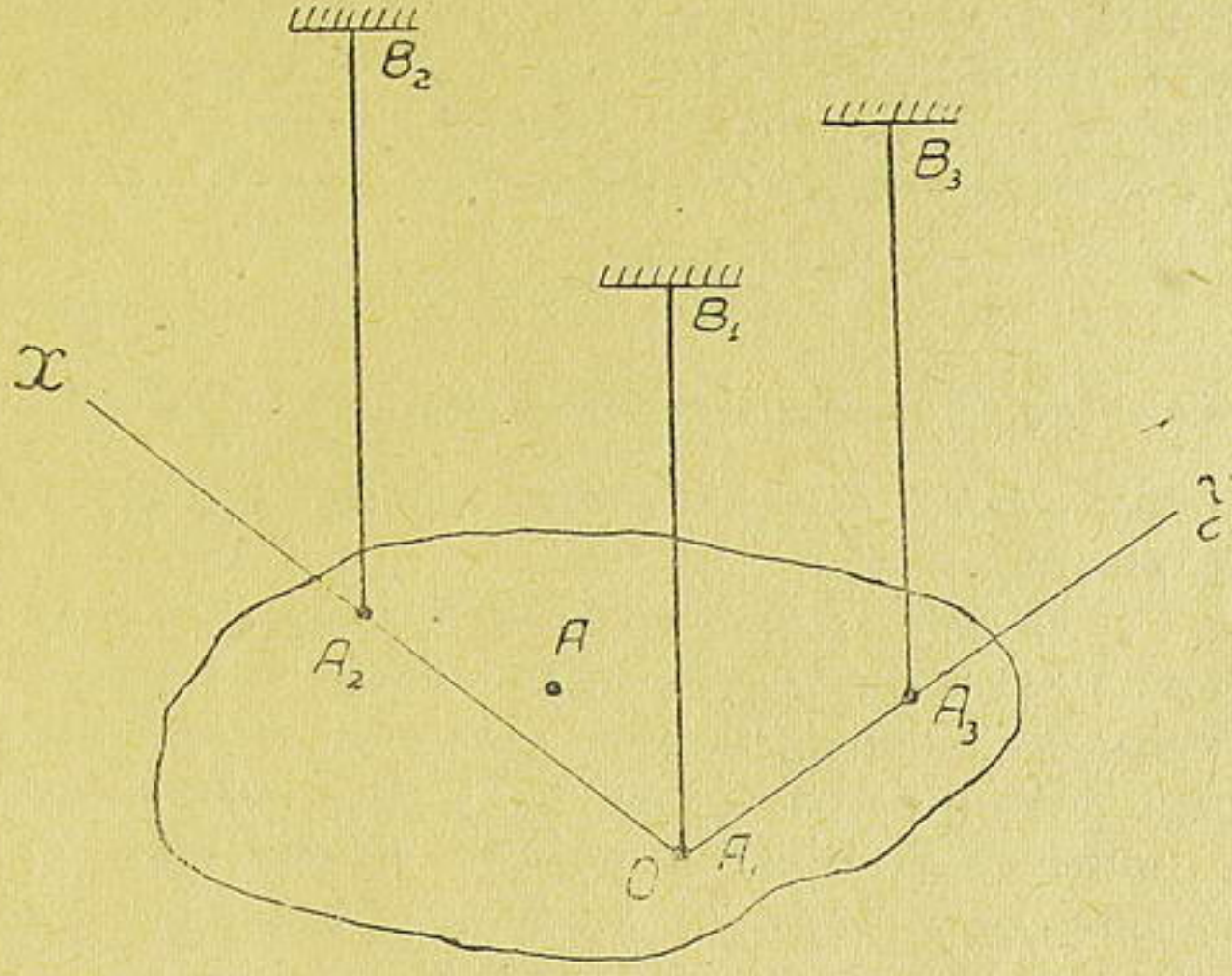
Դժվար չէ ցույց տալ, որ եթե B_1, B_2, B_3 կետերը գտնվում են հորիզոնական հարթության վրա, բոլոր երեք թելերն էլ ուղղաձիգ կլինեն։ Հետևապես թելերի $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{R}_3$ հակազդումները և թիթեղի $\overline{Q}$ կշիռը ուղղաձիգ են և այդ պատճառով էլ զուգահեռ են ($\overline{R}_1 = -\overline{T}_1$, $\overline{R}_2 = -\overline{T}_2$, $\overline{R}_3 = -\overline{T}_3$)։ Իսկ այդ դեպքում (IX, 16) հավասարումները կիրառելի են։ Թող

կոորդինատային O *սկզբնակետը թիթեղի վրա է. նշանակենք* A_1, A_2, A_3 *կետերի կոորդինատները համապատասխանաբար* x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3:

Այն ժամանակ (IX, 16) *երեք հավասարումները կտան՝*

$$R_1+R_2+R_3+Q=0,$$
$$x_1R_1+x_2R_2+x_3B_3+xQ=0,$$
$$y_1R_1+y_2R_2+y_3R_3+yQ=0.$$

Այս երեք հավասարումներից R_1, R_2, R_3 *անհայտները որոշվում են լիովին:*



Նկ. 231

Հաշվարկումները դյուրորեն կհեշտանան, եթե կոորդինատային սկզբնակետ համարենք A_1-*ը և* A_1X *ու* A_1Y *առանցքները համապատասխանաբար ուղղենք* A_1A_2 *և* A_1A_3-*ով: Այժմ* $x_1=y_1=0$. $y_2=0$, $x_2=A_1A_2$, $x_3=0$, $y_3=A_1A_2$ *և այդ պատճառով էլ հենց նոր ստացած հավասարումները կդրվեն այսպես՝*

$$\left.\begin{aligned} R_1+R_2+R_3+Q=0.\\ x_2R_2+xQ=0.\\ y_3R_3+yQ=0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{(IX, 17)}:$$

Այստեղից կունենանք

$$R_3=-\frac{y}{y_3}Q,\quad R_2=-\frac{x}{x_2}Q,\quad R_1=Q\left(\frac{y}{y_3}+\frac{x}{x_2}-1\right):$$

Որովհետև թիթեղն անընդունակ են ընդդիմանալու ճնշման, ապա $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$ *հակազդումները պետք է ուղղված լինեն վերև և ծայրահեղ դեպքում երեքից մեկը կամ երկուսը կարող են վերածվել զերոյի: Հետևապես, եթե* Q *հաշվենք դրական, ապա* $R_1<0, R_2<0, R_3<0$: *Ուստի հավասարակշռու-*

թյան համար անհրաժեշտ է, որ $\frac{y}{y_3}$, $\frac{x}{x_2}$ հարաբերությունները դրական լինեն, իսկ $\left(\frac{y}{y_3}, \frac{x}{x_2} - 1\right)$ արտահայտությունը բացասական լիներ։ Այդ բոլոր պայմաններն էլ բավարարված կլինեն, եթե թիթեղի ծանրության A կենտրոնը գտնվում է $A_1A_2A_3$ եռանկյան ներսում։

Հավասարակշռությունը անհնար է, եթե ծանրության կենտրոնը $A_1A_2A_3$ եռանկյունուց դուրս է։ Վերջապես եթե A գտնվում է $A_1A_2A_3$ եռանկյան կողմերից մեկի վրա, ապա հակադիր գագաթում ամրացված թելի հակազդումը կզառնա զերո։ Իսկ եթե A-ն համընկնում է A_1 A_2 A_3 եռանկյան գագաթներից մեկի հետ, ապա երկու մյուս գագաթներում ամրացված թելերի հակազդումները հավասար կլինեն զերոյի։

Այն մասնավոր դեպքում, երբ թիթեղի ծանրության A կենտրոնը համընկնում է $A_1A_2A_3$ եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հետ,

$$x = \frac{x_2}{3}, \quad y = \frac{y_3}{3},$$

ուստի հավասարությունները կտան $R_1 = R_2 = R_3 = -\frac{Q}{3}$։

Այդ դեպքը տեղի է ունենում, եթե, օրինակ, թիթեղը համասեռ է և ունի $A_1A_2A_3$ եռանկյան ձևը։

Ակնհայտ է, որ եթե Q կշիռ ունեցող թիթեղը կախված լիներ ոչ թե երեք, այլ չորս զուգահեռ թելերից, ապա անկախ հավասարումների թիվը դարձյալ կմնար երեք, մինչդեռ հակազդումների թիվը կզառնար չորս։ Նրանց որոշելու համար բավական չեն երեք հավասարումները։

§ 69. Համասեռական պայմաններ ոչ զուգահեռ ուժերի դեպքում։ Դիցուք $\bar{F}_1 \ldots \bar{F}_i \ldots \bar{F}_n$ տրտաքին ուժերի ազդման գծերը գտնվում են մեկ (π) հարթության վրա, բայց այս անգամ զուգահեռ չեն միմյանց (նկ. 232)։

Մոմենտների B կենտրոնը վերցնենք π-ի վրա։ Յուրաքանչյուր ուժի մոմենտը π-ին ուղղահայաց կլինի՝

$$\bar{M}_B(\bar{F}_i) \perp \pi;$$

հետևապես $\bar{M}_B$ գլխավոր մոմենտ ուղղահայաց կլինի π-ին։ Այդ պատճառով էլ π-ին ուղղահայաց միավոր վեկտորը նշանակելով $\bar{p}$-ով, տեսնում ենք, որ քննարկվող դեպքում $\bar{M}_B = 0$ վեկտորական հավասարումը հավասարազոր է մեկ սկալար հավասարման,

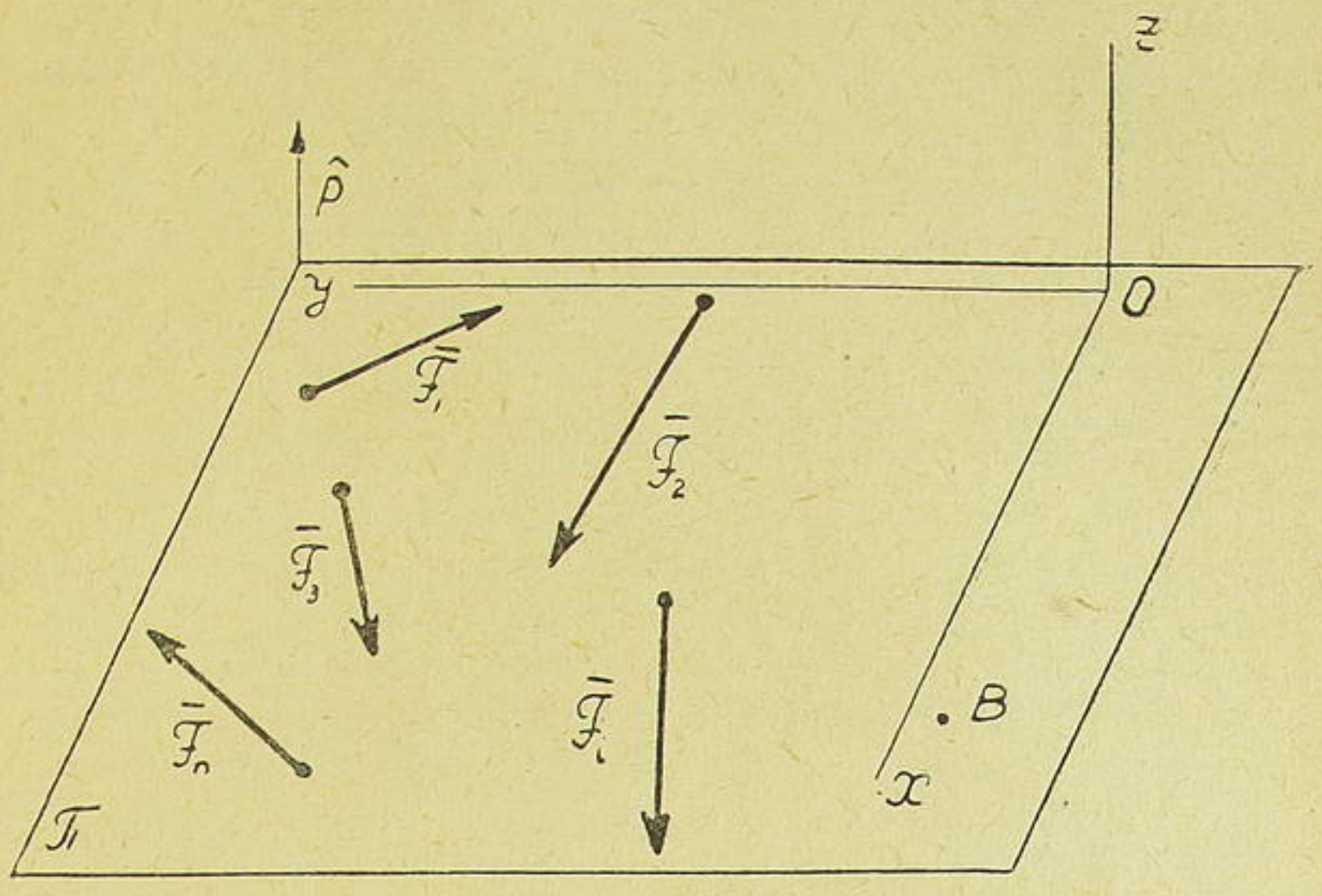
$$M_{B,p} = 0,$$

իսկ եթե որպես մոմենտների կենտրոն ընդունենք O և փոխադարձ ուղղահայաց OX, OY առանցքները դասավորենք π-ի վրա, իսկ OZ-ին էլ π-ին ուղղահայաց, ապա հենց նոր ստացած արդյունքի նման կգտնենք, որ $\bar{M}_B = 0$ հավասարումը հավասարազոր է մեկ սկալար հավասարման՝

$$M_{OZ} = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) = 0.$$

Ինչ վերաբերում է $\bar{F}=0$ հավասարմանն, ապա նա հավասարազոր է երկու սկալար հավասարումների՝

$$X=\Sigma X_i=0,\quad Y\Sigma Y_i=0,$$



Նկ. 232

որովհետև բոլոր ուժերն ուղղահայաց են OZ-ին և հետևապես $Z=\Sigma Z_i=0$ հավասարումը արդարացի կլինի անկախ այն բանից, հավասարակշռությունը տեղի ունի թե ոչ։

Ժուկովսկի՝

Երբ արտաքին ուժերը զտասավորված են մի հարթության վրա, բայց զուգահեռ չեն միմյանց, հավասարակշռության երկու վեկ-

(IX, 18) *տորական հավասարումները հավասարազոր են երեք սկալար հավասարումների՝*

$$X=\Sigma X_i=0,\quad Y=\Sigma Y_i=0,\quad M_{OZ}=\Sigma(x_i Y_i - y_i X_i)=0։$$

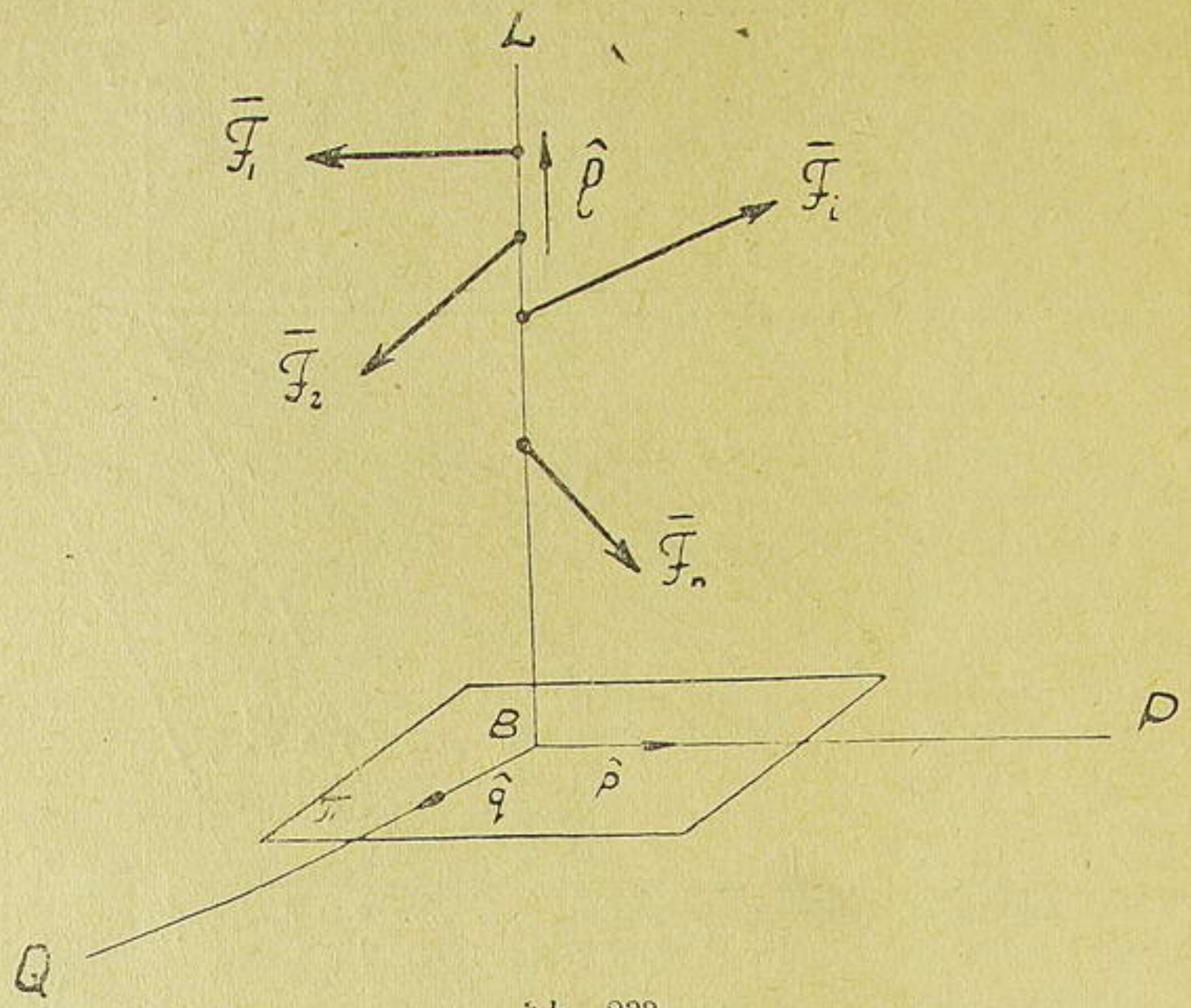
Քննարկված դեպքերը՝ §§ 67, 68, 69 շատ կարևոր են, որովհետև հաճախ են պատահում գործնականում։ Ծանոթանանք էլի երկու հնարավոր դեպքերի հետ, երբ հավասարակշռության երկու վեկտորական հավասարումներին հավասարազոր սկալար հավասարումների թիվը 4 կամ 5 է։

§ 70. Հավասարակշռության սկալար պայմաններց այլ դեպքերում։ *Ենթադրենք թե արտաքին ուժերը կոպլանար են, այսինքն զուգահեռ են ինչ որ π հարթության (նկ. 233), իսկ այդ ուժերի ազդման գծերը հատում են π-ին ուղղահայաց մի առանցք։*

Այդ առանցքը նշանակենք BL-ով, նրա միավոր վեկտորը՝ î։ B-ն ընդունենք որպես մոմենտների կենտրոն։ Որովհետև բոլոր ուժերի ազդման գծերը հատում են BL-ը, $M_{BL}=0$։

Բայց քանի որ այդ ուժերը ուղղահայաց են î-ին, ապա $F_1=\bar{F}\quad=0$։

π-ին զուգահեռ անցկացնենք BP *և* BQ *առանցքները։ Այդ առանցքների մխավոր վեկտորները համապատասխանաբար նշանակենք* $\hat{p}$ *և* $\hat{q}$։



նկ. 233

Հեշտ է տեսնել, որ

$$M_{bP}=0,\quad M_{BQ}=0,$$
$$F_p=\Sigma F_{ip}=0,\quad F_q=\Sigma F_{iq}=0$$

Հավասարումները $\bar{M}_B=0$, $\bar{F}=0$ *հավասարակշռության վեկտորական հավասարումների հետևանք են։ Իսկ* $M_{BL}=0$, $F_1=\Sigma F_{il}=0$ *հավասարումները բխում են նրանից, որ* $F_1 \dots F_i \dots F_n$ *ուժերը զուգահեռ են π-ին, և նրանց ազդման գծերն էլ հատում են* BL *առանցքը։ Այդ երկու հավասարումները տեղի կունենան և այն ժամանակ, երբ* $\bar{M}_B \neq 0$, $\bar{F} \neq 0$։ *Այստեղից պետք է եզրակացնել, որ՝*

(IX, 19) *Երբ արտաքին ուժերը զուգահեռ են ինչ որ π հարթության, իսկ նրանց ազդման գծերը հատում են π-ին ուղղահայց առանցքը, հավասարակշռության երկու վեկտորական հավասարումները հավասարազոր են չորս սկալար հավասարումների.*

$$M_{BP}=0,\quad M_{BQ}=0,\quad F_p=0,\quad F_q=0,$$

կամ

$$M_{OX}=0,\ M_{OY}=0,\ X=0,\ Y=0.$$

2°. *Ճիշտ այդպես էլ կարելի է համոզվել, որ*

(IX, 20) *Երբ արտաքին ուժերն ունեն միանգամայն կամայական ուղղություն, իսկ նրանց գծերը հատում են մի ինչ որ* BL *առանցք, ապա հավասարակշռության երկու վեկտորական հավասարումները հավասարազոր են հինգ սկալար հավասարումների՝*

$$M_{BP}=0,\ M_{BQ}=0,\ F_l=0,\ F_p=0,\ F_q=0.$$

Այստեղ BP *և* BQ *առանցքները կամայական են։*

Վերջապես,

Երբ տրտաքին ուժերը դուգահեռ են մի հարթության,
(IX, 21) *ապա հավասարակշռության երկու վեկտորական հավասարումները համարժեք են հինգ սկալար հավասարումների՝*

$$F_p=0,\ F_q=0,\ M_{BL}=0,\ M_{BP}=0,\ M_{BQ}=0:$$

Այստեղ BP *և* BQ *առանցքները դուգահեռ են π-ին,* BL *առանցքը դուգահեռ չէ π-ին և կարող է ուղղահայաց լինել նրան։*

ԳԼՈՒԽ X

ՈՒԺԱՍԻՍՏԵՄԻ ԳԼԽԱՎՈՐ ՄՈՄԵՆՏԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ **71. Տարբեր կետերի նկատմամբ վերցրած գլխավոր մոմենտների առնչությունները։** *Կամայական սիստեմին կամ նրա որևէ մասին կիրառված ուժերի համախումբը հաճախ անվանում են ուժասիստեմ։ Մենք արդեն տեսանք, որ նյութական կետերի սիստեմի հավասարակշռության համար անհրաժեշտ էր արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորի և գլխավոր մոմենտի զրո լինելը։ Ուսումնասիրենք կամայական սիստեմին կիրառված ուժերի գլխավոր մոմենտի հատկությունները։ Այդ մոմենտը կոչվում է ուժասիստեմի գլխավոր մոմենտ։*

Վերցնենք կամայական A *և* B *կետերը։* (VII 17)-ի *համաձայն*

$$\overline{M}_A(\overline{F}_{kA_k}) = \overline{AB} \times F_k + \overline{M}_B(\overline{F}_{kA_k}),$$

որտեղ F_k—*ուժասիստեմի ուժերից մեկը—կիրառված է* A *կետին։ Բոլոր ուժերի մոմենտների համար գրելով նման հավասարումներ և գումարելով նրանց, կստանանք՝*

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overline{M}_A(F_{kA_k}) = \sum_{k=1}^{k=n} \overline{AB} \times F_k + \sum_{k=1}^{k=n} \overline{M}_B(F_{kA_k}):\qquad (X\ 1)$$

Այդ հավասարության ձախ մասում մենք ունենք ուժասիստեմի ուժերի A *կետի նկատմամբ վերցրած մոմենտների գումարը, այսինքն ուժասիստեմի* $\overline{M}_A$ *գլխավոր մոմենտը։ Աջ մասի առաջին գումարում կարելի է* $\overline{AB}$ *արտադրիչը դուրս հանել գումարման նշանի տակից,* $\sum_{k=1}^{k=n} F_k$ *հավասար է ուժասիստեմի* $\overline{V}$ *գլխավոր վեկտորին։*

Այսպիսով՝

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overline{AB} \times \overline{F}_k = \overline{AB} \times V,$$

իսկ աջ մասի երկրորդ գումարն ուժասիստեմի $\overline{M}_B$ *գլխավոր մոմենտն է* B *կետի նկատմամբ։ Հետևապես* (X 1)-*ը կարելի է գրել այսպես՝*

$$\overline{M}_A = \overline{M}_B + \overline{AB} \times \overline{V}:\qquad (X\ 2)$$

Այդ շատ պարզ ֆորմուլը թույլ է տալիս ուսումնասիրելու ուժասիստեմի գլխավոր մոմենտի բոլոր հատկությունները։

(X 3) *Եթե ուժաբեռնվածքի գլխավոր վեկտորը զերո է, ապա նրա գլխավոր մոմենտը տարածության բոլոր կետերի նկատմամբ միևնույնն է։*

Իսկապես երբ $\bar{V}=0$, $\bar{M}_A=\bar{M}_B$, *բայց* A *և* B *բոլորովին կամայական կետեր են։ Հետևապես թեորեմն ապացուցված է։*

(X 4) *Եթե ուժաբեռնվածքի գլխավոր վեկտորը զերո չէ, ապա կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց նկատմամբ գլխավոր մոմենտը միևնույնն է, գլխավոր վեկտորին զուգահեռ ուղիղն է։*

Եվ իսկապես, թող A*-ն և* B*-ն* $\bar{V}$*-ին զուգահեռ ուղիղի երկու կամայական կետերն են, այն ժամանակ* $\overline{AB} \parallel \bar{V}$, $\overline{AB} \times \bar{V}=0$ *և այդ պատճառով էլ* $\bar{M}_A = \bar{M}_B$։

Այդ թեորեմի կարևորության պատճառով պետք է ուշադրություն դարձնել հետևյալին։

Վերցնենք մի քանի ուղիղներ λ, λ' λ'', *որոնք զուգահեռ են գլխավոր վեկտորին։ Թող* A *և* B *կետերը պատկանեն* λ *ուղղին,* A′, B′*—*λ' *ուղղին և այլն։* (X 4) *թեորեմից հետևում է, որ*

$$\bar{M}_A = \bar{M}_B,\ \bar{M}_{A'} = \bar{M}_{B'}$$

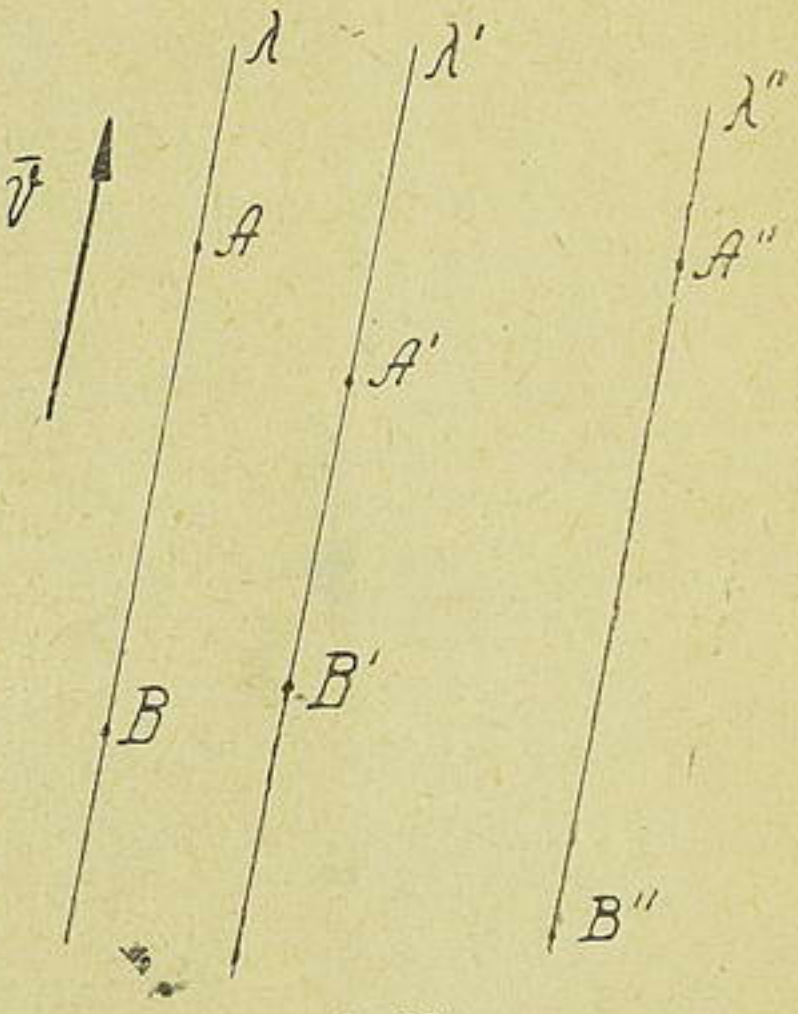
բայց $\bar{M}_A \neq \bar{M}_{A'}$։

Իսկապես (նկ. 234), ըստ (X 2)

$$\bar{M}_A = \bar{M}_{A'} + \overline{AA'} \times \bar{V},$$

ըստ որում $\overline{AA'}$ *չի կարող* $\bar{V}$*-ին զուգահեռ լինել։*

Հետևապես $AA' \times \bar{V}$ *զերո չէ և* $\bar{M}_A \neq \bar{M}_{A'}$, *այսինքն երբ ուժաբեռնվածքի գլխավոր վեկտորը զերո չէ, գլխավոր մոմենտը չի կարող միևնույնը լինել երկու կետերի նկատմամբ, որոնք չեն պատկանում* $\bar{F}$*-ին զուգահեռ ուղիղին։*



Նկ. 234

Գլխավոր մոմենտներից յուրաքանչյուրը վերլուծենք երկու բաղադրիչների այնպես, որ բաղադրիչներից մեկը զուգահեռ լինի գլխավոր վեկտորին, իսկ մյուսը՝ այդ վեկտորին ուղղահայաց (նկար 235) այնպես որ՝

$$\bar{M}_A = \bar{M}'_A + \bar{M}''_A,$$
$$\bar{M}_B = \bar{M}'_B + \bar{M}''_B,$$

որտեղ $\bar{M}'_A \parallel \bar{V}$, $\bar{M}'_B \parallel \bar{V}$,
$\bar{M}''_A \perp \bar{V}$ $\bar{M}''_B \perp \bar{V}$։

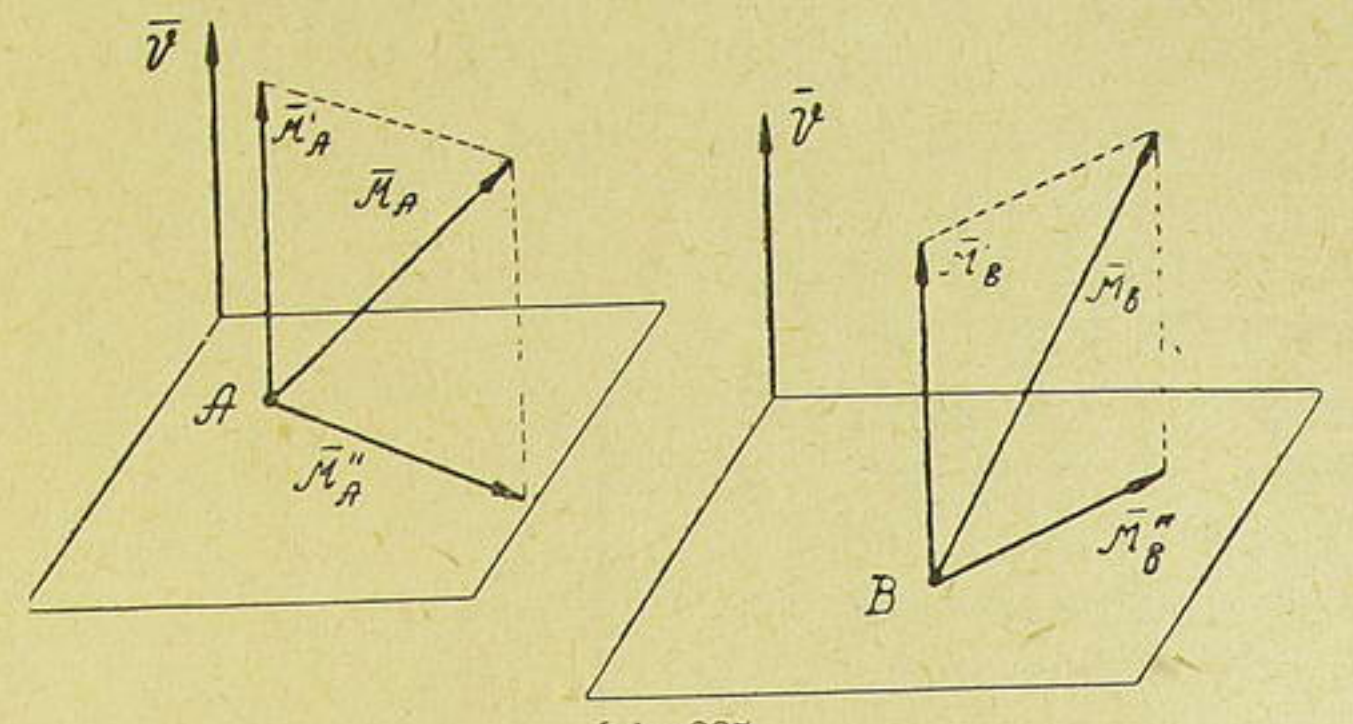
Աստից հետևում է, որ $\bar{M}'_A \parallel \bar{M}'_B$, *իսկ* $\bar{M}''_A$ *առհասարակ զուգահեռ չէ* $\bar{M}''_B$*-ին։*

Î միավոր վեկտորն ընտրենք այնպես, որ $\bar{V}=\hat{i}V$։ *Ինչպես արդեն հայտնի է [75 էջ § 33]՝*

$$\bar{M}'_A = \hat{i}\,(\bar{M}_A \cdot \hat{i}),\quad \bar{M}'_B = \hat{i}\,(\bar{M}_B \cdot \hat{i}):\qquad (X\ 5)$$

Այդ ֆորմուլների հիման վրա հեշտությամբ ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝

(X 6) *Գլխավոր մոմենտի գլխավոր վեկտորին զուգահեռ բաղադրիչը տարածության բոլոր կետերի նկատմամբ միևնույնն է, այսինքն, կամայական* A, B *կետերի համար* $\overline{M'}_A = \overline{M'}_B$:



Նկ. 235

Ապացուցման համար (X 2)-*ի երկու մասերն էլ սկալյարորեն բազմապատկենք* $\hat{i}$-*ով: Այն ժամանակ* $\overline{M}_A \cdot \hat{i} = \overline{M}_B \cdot \hat{i} + (\overline{AB} \times \overline{V}) \cdot \hat{i}$:

Այս հավասարության մեջ $(\overline{AB} \times \overline{V}) \cdot \hat{i} = 0$, *որովհետև* $\hat{i} \parallel \overline{V}$, $(\overline{AB} \times \overline{V}) \perp \hat{i}$ [*գլուխ* III § 29]:

Այդ պատճառով էլ

$$\overline{M}_A \cdot \hat{i} = \overline{M}_B \cdot \hat{i}$$

և (X 5) *կատա*

$$\overline{M'}_A = \overline{M'}_B,$$

այն, ինչ հարկավոր էր ապացուցել:

Այստեղից հետևում է, որ գլխավոր մոմենտների այդ բաղադրիչները կարելի է դրել առանց մոմենտների կենտրոնը ցույց տվող ինդեքսի, այսինքն՝

$$\overline{M'}_A = \overline{M'}_B = \overline{M'}_C = \overline{M'}: \qquad \ldots . \text{ (X 6')}$$

(X 6) *թեորեմից կարելի է եզրակացնել՝*

(X 7) *Եթե գլխավոր մոմենտը որևէ կետի նկատմամբ ուղղահայաց է գլխավոր վեկտորին, ապա այդ ուժասիստեմի գլխավոր մոմենտը յուրաքանչյուր կետի նկատմամբ ուղղահայաց կլինի գլխավոր վեկտորին:*

Իսկապես A *և* B *կամայական կետերի համար՝*

$$\overline{M}_A = \overline{M'} + \overline{M''}_A, \quad \overline{M}_B = \overline{M'} + \overline{M''}_B:$$

Եթե օրինակ՝ $\overline{M}_B \perp \overline{V}$, *ապա* $M' = 0$, *իսկ այդ դեպքում* $\overline{M}_A = \overline{M''}_A$ *այսինքն* $\overline{M}_A \perp \overline{V}$ *նույնպես:*

§ 72. Աբճատոճակաճ առաճցքի գոյությունը, դիրքը եվ հատկությունները: *Այժմ* (X 2) *ֆորմուլը գրենք այսպես՝*

$$\overline{M}'+\overline{M}''_A=\overline{M}'+\overline{M}''_B+\overline{AB}\times\overline{V}$$

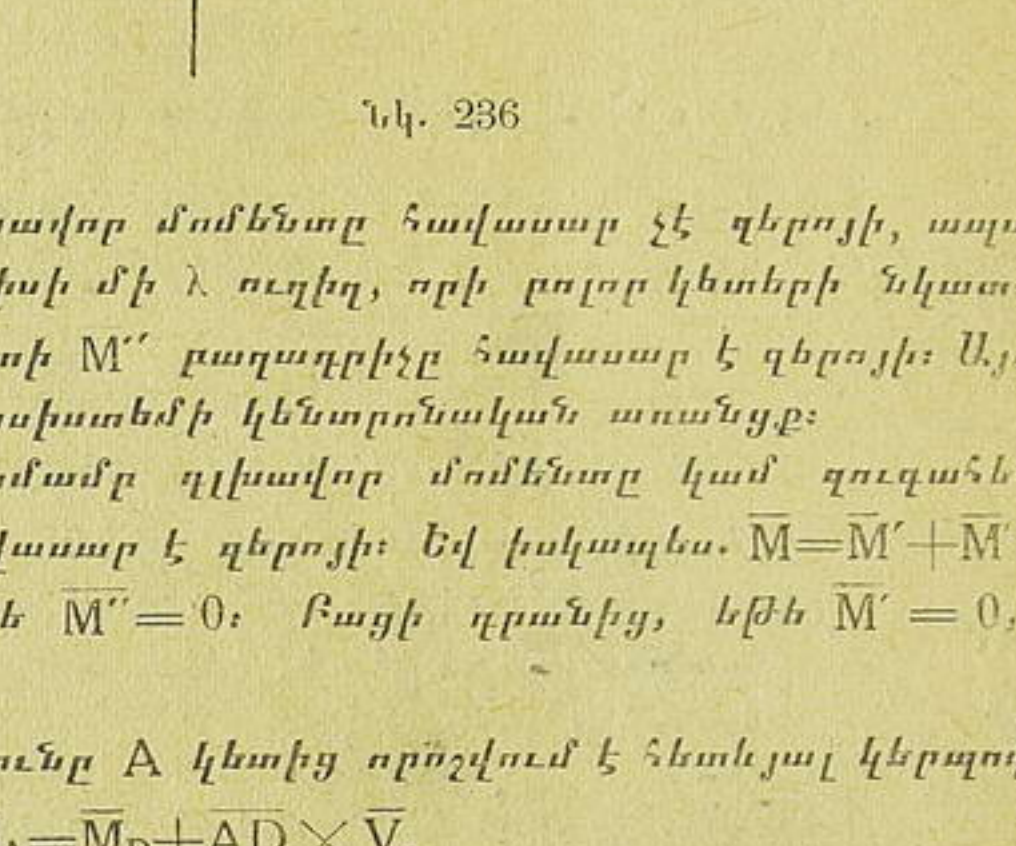
կամ ըստ (X 6′)*-ի*

$$\overline{M}''_A=\overline{M}''_B+\overline{AB}\times\overline{V} \qquad (X\ 6'')$$

(X 6′′)*-ում* $\overline{M}''_A$, M''_B *և* $AB\times\overline{V}$ *կոպլանար վեկտորներ են, որոնք ընդհանուր դեպքում զուգահեռ չեն միմյանց:*

Սակայն $\overline{AB}$ *վեկտորի փոփոխության հետ փոխվում է նույնպես և* $AB\times\overline{V}$ *արտադրյալի ուղղությունը (և չափը), միևյոլ ուղղահայաց* $\overline{V}$*-ին:*

Ակնհայտ է, որ կարելի է $\overline{AB}$*-ի ուղղությունն այնպես ընտրել, որ* $\overline{M}''_A$ *և* $\overline{AB}\times\overline{V}$ *վեկտորները համազուգահեռ լինեն միմյանց: Երբ* AB*-ի այդ ուղղությունը որոշված է, կարելի է նրա չափն այնպես ընտրել, որ* $\overline{M}''_A=\overline{AB}\times\overline{V}$*: Այն ժամանակ* (X 6′′)*-ի հիման վրա* $\overline{M}''_B=0$*:*



Նկ. 236

B *կետով անցկացնենք* $\overline{V}$*-ին զուգահեռ* λ *ուղիղը (նկ. 236): (*X 4*)-ի համաձայն* λ *ուղղի բոլոր կետերի նկատմամբ գլխավոր մոմենտը միևնույնն է: Եթե* $\overline{M}''_B=0$*, ապա* λ*-ի բոլոր կետերի նկատմամբ գլխավոր մոմենտ* $\overline{M}''$ *բազադրիչը հավասար է զրոյի: Հետևապես՝*

Եթե ուժապտուտիկի գլխավոր մոմենտը հավասար չէ զրոյի, ապա գոյություն ունի այնպիսի մի λ *ուղիղ, որի բոլոր կետերի նկատմամբ գլխավոր մոմենտի* M'' *բազադրիչը հավասար է զրոյի: Այդ ուղիղը կոչվում է ուժապտուտիկի կենտրոնական առանցք:* (X 8)

λ *ուղղի բոլոր կետերի նկատմամբ գլխավոր մոմենտը կամ զուգահեռ է գլխավոր վեկտորին կամ հավասար է զրոյի: Եվ իսկապես.* $\overline{M}=\overline{M}'+\overline{M}''$*: Այդ պատճառով էլ* $\overline{M}=\overline{M}'$*, եթե* $\overline{M}''=0$*: Բացի դրանից, եթե* $\overline{M}'=0$*, ապա* $\overline{M}=0$*:*

λ *ուղղի* $\overline{AD}$ *հեռավորությունը* A *կետից որոշվում է հետևյալ կերպով՝*

$$\overline{M}_A=\overline{M}_D+\overline{AD}\times\overline{V},$$

այստեղից

$$\overline{V}\times\overline{M}_A=\overline{V}\times\overline{M}_D+\overline{V}\times(\overline{AD}\times\overline{V}):$$

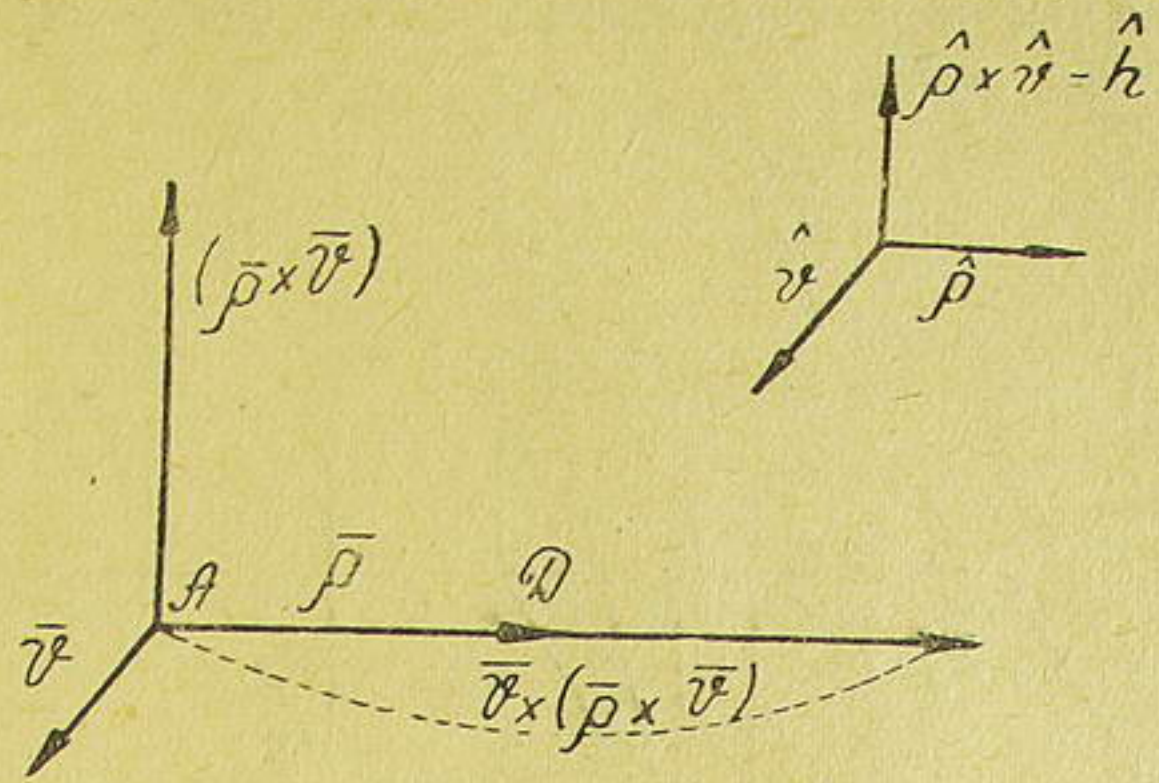
Որովհետև D *կետը պատկանում է* λ *ուղղին, ապա*

$$\overline{M}_D\parallel\overline{V}\ \text{և}\ \overline{V}\times\overline{M}_D=0,$$

իսկ

$$\overline{V} \times (\overline{AD} \times \overline{V}) = V^2 \overline{AD},$$

որովհետև $\overline{V} \perp \overline{AD}$ *(տես նկար 236, 237 և* III *գլխի 25 ֆորմուլը)։*



նկ. 237

Այսպիսով ստանում ենք

$$\overline{V} \times \overline{M}_A = V^2 \, AD,$$

$$\text{կամ } \overline{AD} = \frac{\overline{V} \times \overline{M}_A}{V^2} \quad \ldots \ldots \qquad (X\ 9)$$

Այդ ֆորմուլը լիովին որոշում է λ ուղղի հեռավորությունը A կետից։ Հարկավոր է ուշադրություն դարձնել այն բանին, որ $\frac{1}{V^2}$ *միշտ դրական է, այդ պատճառով էլ* $\overline{AD}$*-ի ուղղությունը կհամընկնի վեկտորական* $\overline{V} \times \overline{M}_A$ *արտադրյալի ուղղության հետ (և կարող է որոշվել համաձայն ձախ ձեռքի կանոնի, որում մեծ մատին, ցուցամատին և միջին մատին համապատասխանում են* $\overline{V}$, $\overline{M}_A$ *և* $\overline{AD}$ *վեկտորները)։*

Որովհետև համաձայն (X 9)-ի $\overline{AD}$*-ն ունի կատարյալ որոշ ուղղություն և չափ, ապա գոյություն ունի (X 9)-ը բավարարող միայն մի ուղիղ* λ*։*

Շնորհիվ այդ ուղղի կարևոր նշանակության, արժե ցույց տալ մի այլ էլ ավելի պարզ եղանակով, որ այդ ուղիղն իսկապես գոյություն ունի յուրաքանչյուր ուժասիստեմի համար, որի գլխավոր վեկտորը հավասար չէ զերոյի։

A-ից տանենք $\overline{V}$*-ին զուգահեռ* τ *ուղիղը (նկ. 238)։ Այդ ուղիղով* $\overline{M''}_A$*-ին ուղղահայաց տանենք* σ *հարթությունը։*

σ*-ի վրա դասավորված յուրաքանչյուր* B *կետի համար*

$$(\overline{AB} \times \overline{V}) \perp \sigma,$$

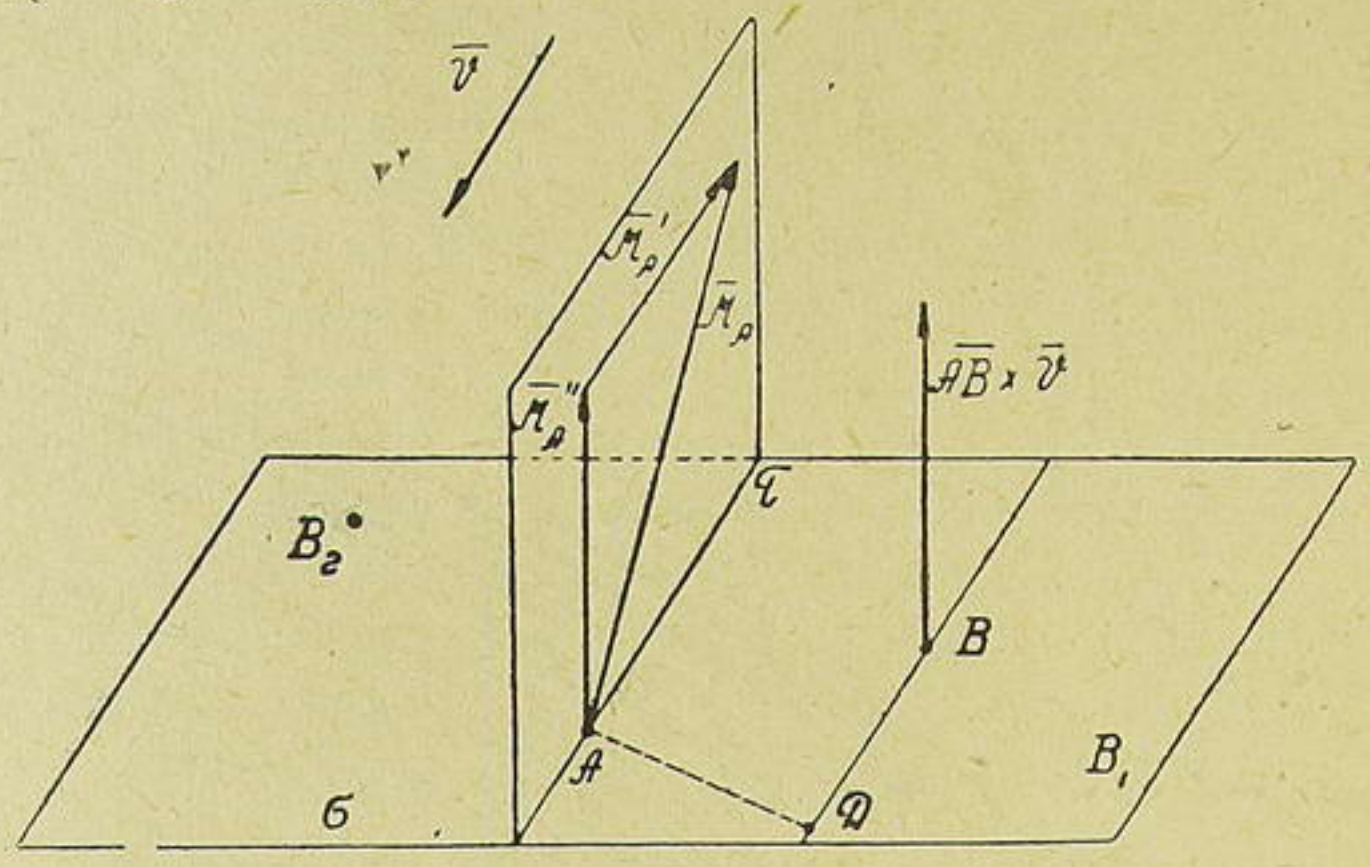
այսինքն՝

$$(\overline{AB} \times \overline{V}) \parallel \overline{M''}_A.$$

τ *ուղիղն ամբողջ* σ *հարթությունը բաժանում է երկու կիսահարթությունների. B կետը մի կիսահարթությունից մյուսին անցնելիս* $\overline{AB} \times \overline{V}$ *արտադրյալի իմաստը փոխվում է։ Մեր նկարում*

$$\overline{AB_1} \times \overline{V} \uparrow\uparrow \overline{M''}_A, \text{ իսկ } \overline{AB_2} \times \overline{V} \uparrow\downarrow \overline{M''}_A.$$

Այդ վեկտորական արտադրյալի չափը ուղիղ համեմատական է B կետի հեռավորությանը τ-ից։ Հետևապես σ հարթության վրա միշտ կարելի է գտնել այնպիսի B կետ, որպեսզի $\overline{AB}\times\overline{V}=\overline{M''}_A$։ Այդ կետով տարված ուղիղը կլինի հենց λ ուղիղը։



Նկ. 238

Նշանակենք λ′-ով $\bar{V}$-ին զուգահեռ, բայց σ-ի վրա չգտնվող ուղիղը (նկ. 239)։ Այդ ուղղի կամայական կետը նշանակենք B′-ով։ λ′-ի վրա չկա մի այնպիսի B′ կետ, որ $\overline{AB'}$ ուղղահայաց լինի $\overline{M''}_A$-ին, այդ պատճառով էլ $(\overline{AB'}\times\overline{V})$ չի կարող զուգահեռ լինել $\overline{M''}_A$-ին, և $\overline{AB'}\times\bar{V}=\overline{M''}_A$ հավասարությունը չի կարող տեղի ունենալ։

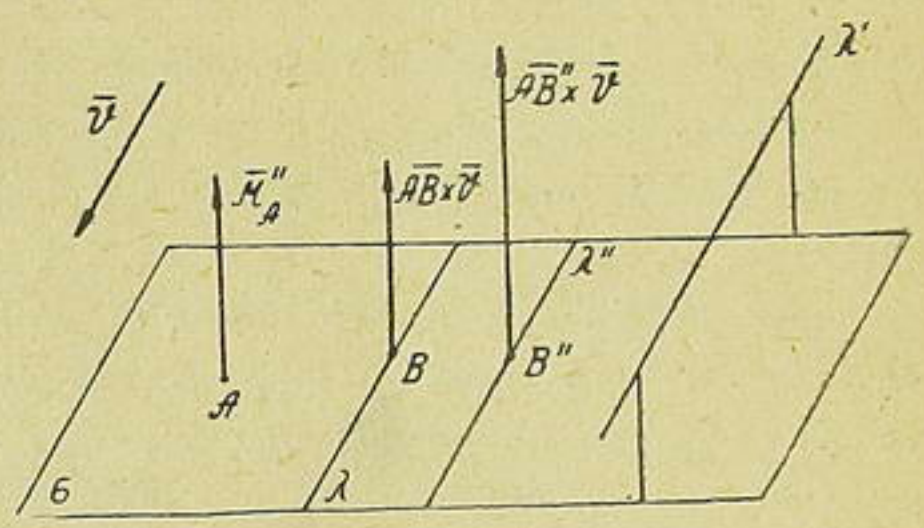
Իսկ եթե վերցնենք λ″ ուղիղը, որը զուգահեռ է $\bar{V}$-ին և պատավորված է σ-ի վրա, բայց A-ից ուրիշ հեռավորության վրա է գտնվում, քան λ ուղիղը, ապա λ″-ի կամայական կետը նշանակելով B″-ով, կունենանք

$$\overline{AB''}\times\bar{V}\parallel\overline{M''}_A,$$

բայց $|\overline{AB''}\times\bar{V}|\neq\overline{M''}_A,$

և հետևապես $\overline{AB''}\times\bar{V}=\overline{M''}_A$

հավասարությունը դարձյալ անհնարին է։



Նկ. 239

Այդպիսով λ-ը միակ ուղիղն է, որի բոլոր (B) կետերը բավարարում են

$$\overline{AB}\times\bar{V}=\overline{M''}_A \text{ համ } \overline{M''}_B=0$$

պայմանին։

Դիցուք O-ն շառավիղ վեկտորների և ուղղանկյուն կոորդինատային սիստեմի սկզբնակետն է։

Ենթադրենք

$$\overline{OA}=\bar{\varepsilon}_A,\ \overline{OD}=\bar{\varepsilon}_D,\ \overline{AD}=\overline{OD}-\overline{OA}=\bar{\varepsilon}_D-\varepsilon_A=\bar{\rho}:$$

Այն ժամանակ (X 9) բանաձևից ստանում ենք $\bar{\rho} = \overline{AD}$ հեռավորության համար կոորդինատային հետևյալ արտահայտությունները՝

$$\left.\begin{aligned} \rho_x = x_D - x_A &= \frac{V_y M_{A,z} - V_z M_{A,y}}{V^2_x + V^2_y + V^2_z} = \frac{V_y M_{A,z} - V_z M_{A,y}}{V^2} \\ \rho_y = y_D - y_A &= \frac{V_z M_{A,x} - V_x M_{A,z}}{V^2} \\ \rho_z = z_D - z_A &= \frac{V_x M_{A,y} - V_y M_{A,x}}{V^2}. \end{aligned}\right\} \quad (X\ 9')$$

Այդ բանաձևներում V_x, V_y, V_z, և $M_{A,x}$, $M_{A,y}$, $M_{A,z}$-ը գլխավոր վեկտորի և գլխավոր մոմենտի (A կետի նկատմամբ) պրոեկցիաներն են կոորդինատային առանցքների վրա։ Եթե կոորդինատային սկզբնակետը գտնվում է A-ում, ապա

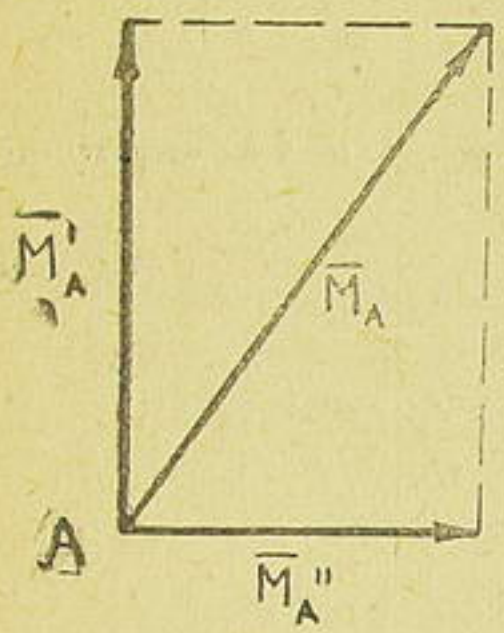
$$x_A = y_A = z_A = 0,$$

այդ պատճառով էլ

$$\rho_x = x_D, \quad \rho_y = y_D, \quad \rho_z = z_D,$$

Ըստ (X 8) սահմանման, λ ուղիղն այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնց նկատմամբ գլխավոր մոմենտի (գլխավոր վեկտորին ուղղահայաց) $\overline{M''}$ բաղադրիչը հավասար է զերոյի։

Հեշտ է ցույց տալ, որ λ ուղիղի բոլոր կետերի նկատմամբ գլխավոր մոմենտն ունի մինիմալ չափ (նկ. 240)։



նկ. 240

Եվ իսկապես, տարածության կամայական A կետի նկատմամբ $M_A = \bar{M}' + \bar{M}''_A$ և որովհետև $\bar{M}' \perp \bar{M}''_A$, ապա միշտ $M_A > M'$։ Հետևապես գլխավոր մոմենտի չափը մինիմալ արժեքի է հասնում այն կետերում, որոնցում $\bar{M}'' = 0$ և $M = M'$։ Հենց այդ կետերն էլ պատկանում են λ ուղղին։

Վերև ասածները կարելի է եզրափակել այսպես՝

Երբ ուժապտեցման գլխավոր վեկտորը հավասար չէ զերոյի, գոյություն ունեն այնպիսի D կետեր, որոնց նկատմամբ

$$\bar{M}''_D = 0,$$
$$\bar{M}_D = \bar{M}', \quad (X\ 10)$$

M_D-ն փոքրագույնն է։

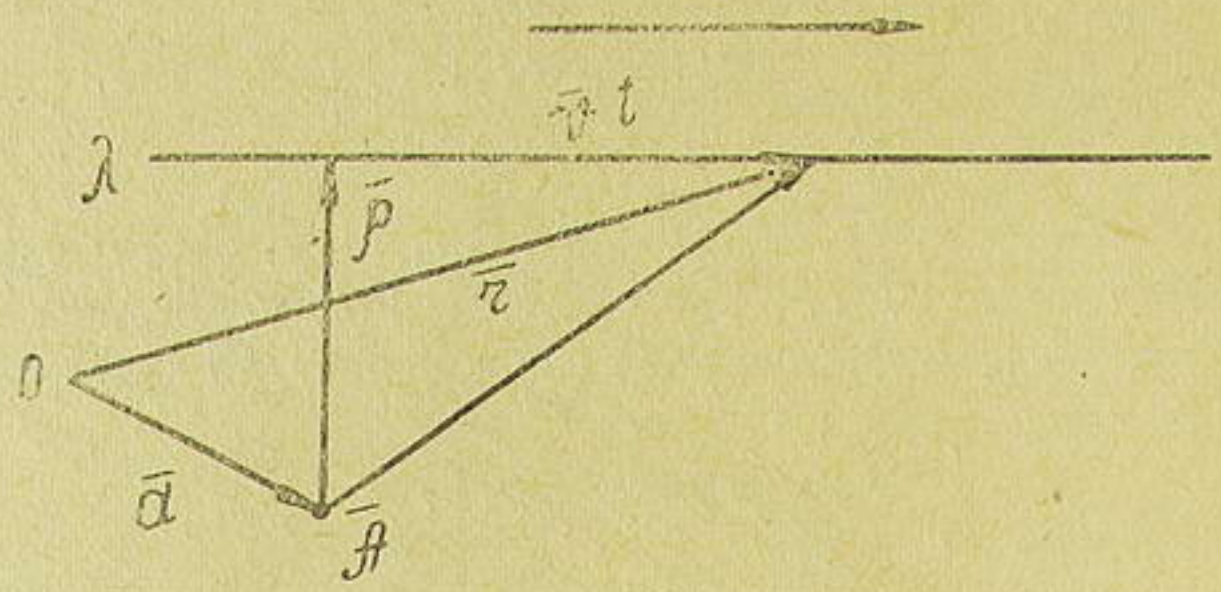
Այդ կետերի երկրաչափական տ ղը $\bar{F}$ գլխավոր վեկտորին զուգահեռ ուղիղն է և կոչվում է ուժապտեցման կենտրոնական պտուտակային առանցք։

Եթե հայտնի են $\bar{V}$ գլխավոր վեկտորը և $\bar{M}_A$ գլխավոր մոմենտը որևէ A կետի նկատմամբ, ապա կենտրոնական առանցքի դիրքը որոշվում է (X 9) կամ (X 9′) բանաձևերով։

Կենտրոնական առանցքի հավասարումն է՝

$$\bar{r}=\bar{a}+\rho+\bar{V}t, \quad \ldots\ldots \quad (X\ 11)$$

որտեղ $\bar{r}$-ը կենտրոնական առանցքի ընթացիկ կետի շառավիղ վեկտորն է, $\bar{a}$-ն A կետի շառավիղ վեկտորը, t-ն պարամետրը, իսկ $\bar{\rho}$-ն այդ առանցքի հեռավորությունն է A կետից (նկ. 241)։



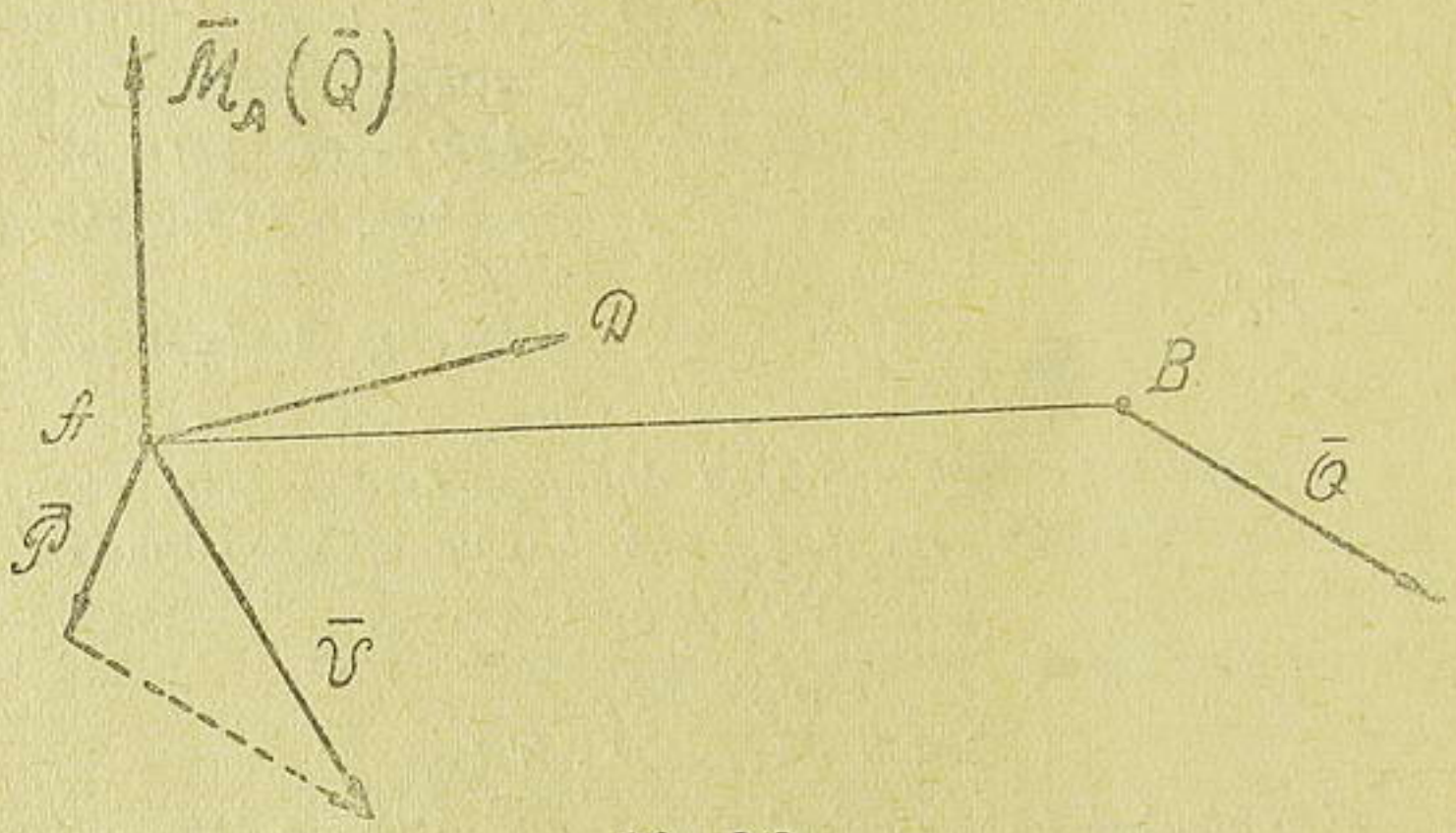
Նկ. 241

Կենտրոնական առանցքի հավասարումի կոորդինատային ձևը հետևյալն է՝

$$\frac{x-a_x-\rho_x}{V_x}=\frac{y-a_y-\rho_y}{V_y}=\frac{z-a-\rho_z}{V_z}, \quad \ldots\ldots \quad (X\ 11')$$

որտեղ ρ_x, ρ_y, ρ_z որոշվում են (X 9′) ֆորմուլներով։

Խնդիր. *Ուժաբեռումը բաղկացած է A և B կետերում համապատասխանաբար կիրառված $\bar{P}$ և Q ուժերից (նկ. 242)։*



Նկ. 242

1°. Որոշել այդ սխեմայի կենտրոնական առանցքի ($\bar{\rho}=\overline{AD}$) հեռավորությունը A կետից։

2°. Անմիջական հաշվով ցույց տալ որ $\bar{M}'_A=\bar{M}'_B=\bar{M}_D$։

1°. Այդ սիստեմի գլխավոր վեկտորն է $\bar{V}=\bar{P}+\bar{Q}$։ Համաձայն (X 9)-ի կենտրոնական առանցքի հեռավորությունը A-ից

$$\bar{\rho}=\overline{AD}=\frac{\bar{V}\times\bar{M}_A}{V^2}=\frac{\bar{V}\times(\overline{AB}\times\bar{Q})}{V^2}, \qquad (X\ 12)$$

որովհետև $\bar{M}_A=\bar{M}_A(\bar{P})+\bar{M}_A(\bar{Q})=0+\overline{AB}\times\bar{Q}$։

2°. $\bar{M}'_A=\hat{f}(\bar{M}_A\cdot\hat{f}),\quad \bar{M}'_B=\hat{f}(\bar{M}_B\cdot\hat{f}),$

որտեղ $\hat{f}$ միավոր վեկտորը որոշվում է $\bar{V}=\hat{f}V$ հավասարությունից։ Այդ պատճառով էլ $\bar{M}'_A=\bar{M}'_B$ հավասարությունը համարժեք է

$$\bar{M}_A\cdot\hat{f}=\bar{M}_B\cdot\hat{f}$$

հավասարության։ $\hat{f}$-ը փոխարինելով $\frac{\bar{V}}{V}$-ով և ինկատի ունենալով, որ

$$\bar{M}_A=\overline{AB}\times\bar{Q},$$
$$\bar{M}_B=\overline{BA}\times\bar{P}=\bar{P}\times\overline{AB},$$

կստանանք

$$\bar{M}_A\cdot\hat{f}=\frac{(\overline{AB}\times\bar{Q})\cdot\bar{V}}{V}=\frac{\overline{AB}\cdot(\bar{Q}\times\bar{V})}{V}$$

[տես (III, 5,) երես 66]։ Բայց $\bar{V}=\bar{P}+\bar{Q}$, այդ պատճառով էլ

$$\bar{Q}\times\bar{V}=\bar{Q}\times\bar{P}$$

և

$$\bar{M}_A\cdot\hat{f}=\frac{\overline{AB}\cdot(Q\times\bar{P})}{V}.$$

Ճիշտ նույն ձևով էլ

$$\bar{M}_B\cdot\hat{f}=\frac{\bar{V}\cdot(\bar{P}\times\overline{AB})}{V}=\frac{(\bar{Q}\times\bar{P})\cdot\overline{AB}}{V}=\frac{\overline{AB}\cdot(\bar{Q}\times\bar{P})}{V}.$$

Ուրեմն իսկապես, $\bar{M}'_A=\bar{M}'_B=\hat{f}\,\frac{[\overline{AB}\cdot(\bar{Q}\times\bar{P})]}{V}$ . . . . . (X 13)

Այժմ էլ ցույց տանք, որ $\bar{M}_D$ (մեր սիստեմի գլխավոր մոմենտը D կետի նկատմամբ) նույնպես արտահայտվում է (X 13)-ի աջ մասով։

$$\bar{M}_D=\overline{DA}\times\bar{P}+\overline{DB}\times\bar{Q}.$$

Բայց $\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD},\ \overline{DA}\times P=-\overline{AD}\times\bar{P},$

այդ պատճառով էլ

$$\bar{M}_D=-\overline{AD}\times(\bar{P}+\bar{Q})+\overline{AB}\times\bar{Q}.$$

Համառոտության համար $\overline{AB}\times\bar{Q}$ նշանակենք $\bar{S}$։ Այն ժամանակ ըստ (X 12)-ի $\overline{AD}=\frac{\bar{V}\times\bar{S}}{V^2}$։ Այդպիսով $\overline{MD}=\frac{\bar{V}\times(\bar{V}\times S)}{V^2}+\bar{S},$

կամ որովհետև

$$\bar{V}\times(\bar{V}\times\bar{S})=\bar{V}(\bar{V}\cdot\bar{S})-\bar{V}^2$$

[տես (III 25), երես 73]։

$$\bar{V}\cdot\bar{S}=\bar{V}\cdot(\overline{AB}\times\bar{Q})=\overline{AB}\cdot(\overline{Q}\times\bar{P}).$$

այդ պատճառով էլ

$$\bar{M}_D=\frac{\bar{V}(\bar{V}\cdot\bar{S})}{V^2}=\bar{M}'_A=\bar{M}'_B \quad . . . . \quad (X\ 14)$$

(X 14) և (X 13) *ֆորմուլները ցույց են տալիս, որ երբ ուժաստեմը բաղկացած է կամայական (A և B) կետերում կիրառված երկու կամայական ուժից* ($\bar{P}$ և $\bar{Q}$), *ապա* $\bar{M}_D$ *գլխավոր մոմենտը կենտրոնական առանցքին պատկանող կետի նկատմամբ զուգահեռ է գլխավոր վեկտորին, հետևապես* $M''_D=0$, *ինչպես և պետք է լինի* (X 8)-*ի հիման վրա։*

Գլխավոր մոմենտի գլխավոր վեկտորին զուգահեռ $\bar{M}'$ *բաղադրիչը A և B կետերում միևնույնն է և հավասար է* $\bar{M}_D$-*ի* [*թեորեմ* (X 6)]։

$\bar{P}$ *և* $\bar{Q}$ *ուժերի զուգահեռության դեպքում* $P \times \bar{Q}=0$ *և* (X 13), (X 14) *ֆորմուլները տալիս են*

$$\bar{M}_D = \bar{M}'_A = \bar{M}'_B = 0; \quad \ldots\ldots \quad (X\ 15)$$

Որովհետև D կետը պատկանում է կենտրոնական առանցքին, ապա (X 14) *և* (X 15)-*ի հիման վրա կարելի է եզրակացնել, որ կենտրոնական առանցքի որևէ կետի նկատմամբ երկու զուգահեռ ուժերի գլխավոր մոմենտը հավասար է զերոյի։*

Եթե $\bar{P}$ *և* $\bar{Q}$ *ուժերը զուգահեռ չեն, բայց դասավորված են մի հարթության վրա, ապա* $\overline{AB}$, $\bar{P}$ *և* $\bar{Q}$-*ն կոպլանար են, այդ պատճառով էլ* $\overline{AB} \cdot \bar{Q} \times \bar{P}=0$ *և մենք դարձյալ ստանում ենք* (X 15)-*ը։*

Այսինքն, եթե $\bar{P}$ *և* $\bar{Q}$ *ուժերը դասավորված են մի հարթության վրա, ապա կենտրոնական առանցքի յուրաքանչյուր կետի նկատմամբ այդ ուժերի գլխավոր մոմենտը հավասար է զերոյի։*

Այդ երկու դեպքերում էլ ($P \parallel \bar{Q}$, *և* $\bar{P}$ *ու* $\bar{Q}$-*ն մի հարթության վրա են*) (X 12) *ֆորմուլը թույլ է տալիս հաստատելու, որ կենտրոնական առանցքը դասավորված է* $\bar{P}$ *և* $\bar{Q}$ *ուժերի հարթության վրա։*

(X 12) *ֆորմուլը թույլ է տալիս նույնպես հաստատելու, որ բոլոր այն դեպքերում, երբ* $\bar{P}$ *և* Q *ուժերը ուղղահայաց են նրանց կիրառման կետերը միացնող* (AB) *ուղղին, D կետը գտնվում է այդ ուղղի վրա։*

Եվ իսկապես, թող

$$\overline{AB} \perp \bar{P}, \quad \overline{AB} \perp \bar{Q}$$

քանի որում $\bar{P}$ *և* $\bar{Q}$ *կարող են միևնույն հարթության վրա չլինել (նկ. 243)։ Այն ժամանակ*

$$\overline{AB} \perp \bar{V}. \qquad (\bar{V}=\bar{P}+Q);$$

Բացելով (X 12)-*ի աջ մասի կրկնակի վեկտորական արտադրյալը* [*տես* (III 25), *երես 73*], *և նկատի առնելով, որ* $Q(\overline{AB} \cdot \bar{V})=0$, *կունենանք*

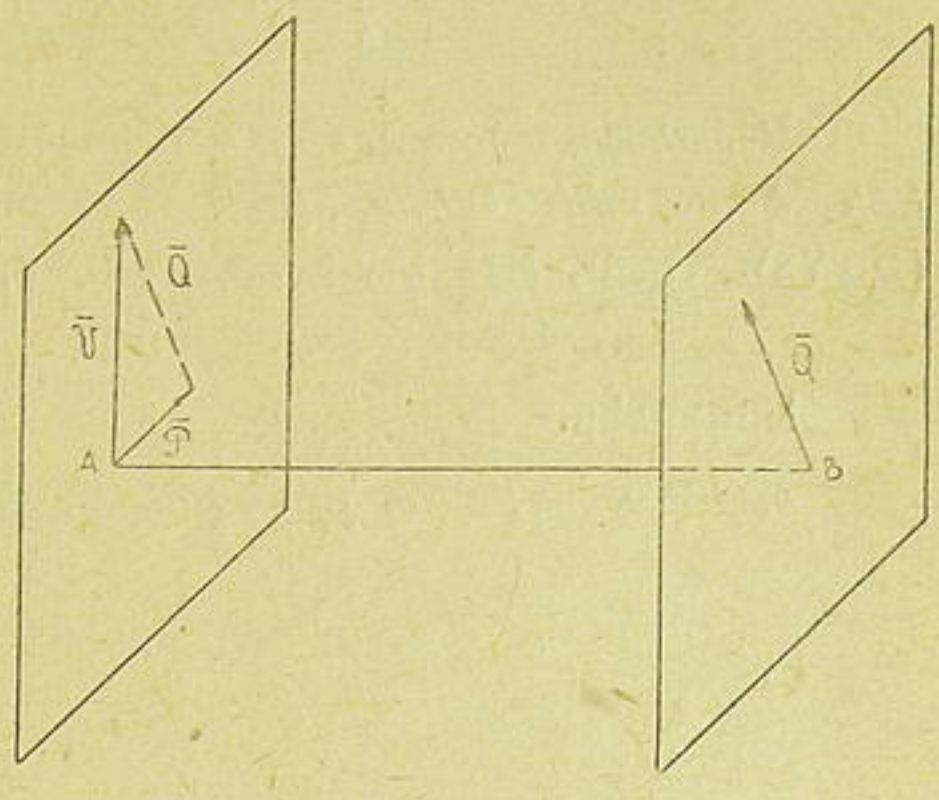
$$\bar{\rho}=\overline{AD}=\frac{\overline{AB}(\bar{V} \cdot \bar{Q})}{V^2}; \qquad (X\ 16)$$

(X 16)-*ից հետևում է, որ* $\overline{AB}$ *և* $\overline{AD}$-*ն կազմում են մեկ ուղիղ, այսինքն D-ն գտնվում է AB-ի վրա, կամ AB-ի շարունակության վրա։*

Խնդիր. Ուժաստեմը բաղկացած է n ուժերից, (նկ. 244) $P_1, \bar{P}_2, \ldots \bar{P}_{n-1}$ *և* $\bar{Q}$; $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots \bar{P}_{n-1}$ *ուժերը դասավորված են σ հարթության վրա, իսկ* $\bar{Q}$ *ուժի կիրառման կետը գտնվում է σ հարթությունից դուրս։ Կարելի՞ է արդյոք* $\bar{Q}$ *ուժը (և նրա կիրառման կետը) այնպես ընտրել, որ ուժաստեմի λ կենտրոնական առանցքը դասավորված լինի σ հարթության վրա։*

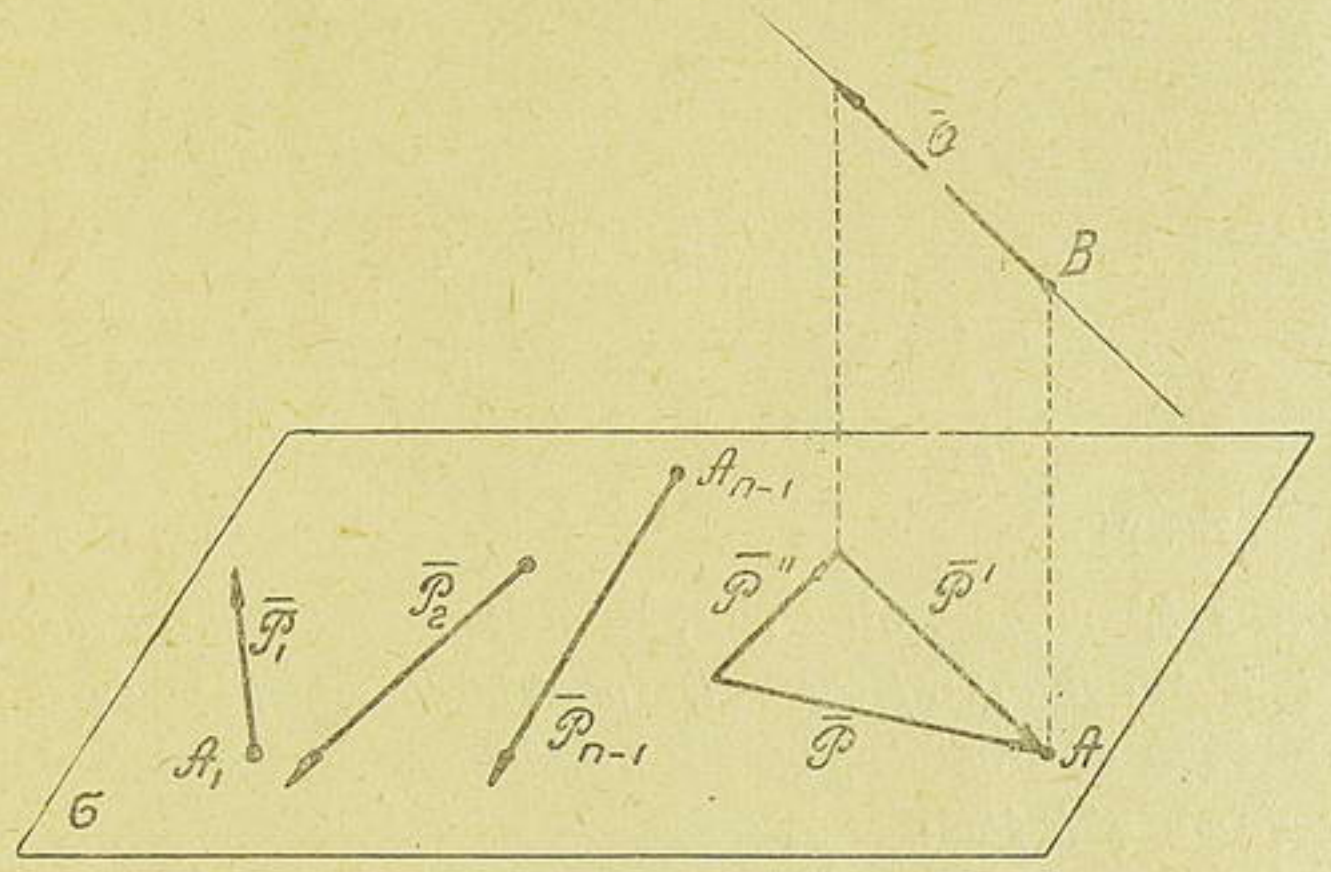
$\bar{P}_1, \bar{P}_2 \ldots \bar{P}_{n-1}$ *ուժերի երկրաչափական գումարը նշանակենք* $\bar{P}$, *այսինքն* $\bar{P}_1+\bar{P}_2+\ldots+\bar{P}_{n-1}=\bar{P}$: *Այն ժամանակ բոլոր* n *ուժերի գլխավոր վեկտորը կլինի* $\bar{V}=\bar{P}+\bar{Q}$: *Որովհետև կենտրոնական առանցքը զուգահեռ է գլխավոր վեկտորին, ապա* $\lambda \parallel \sigma$ *պայմանից հետևում է, որ* $\bar{V} \parallel \sigma$ *կամ* $(\bar{P}+\bar{Q}) \parallel \sigma$: *Բայց ըստ պայմանի* $\bar{P} \parallel \sigma$, *հետևապես,* $\bar{Q} \parallel \sigma$ *նույնպես: Այդպիսով* $\bar{Q}$ *ուժը պետք է զուգահեռ լինի* σ *հարթությանը:*

Ենթադրենք, որ Q *ուժը կիրառված է* B *կետում: B-ից իջեցնենք* σ*-ի վրա մի ուղղահայաց, որի հատման կետը* σ*-ի հետ նշանակենք* A: *Թող* $\overline{AB}=\bar{h}$: *Եթե λ-ը դասավորված է* σ *հարթության վրա, ապա նրա* $\overline{AD}=\bar{\rho}$ *հեռավորությունը* A *կետից ուղղահայաց կլինի* $\bar{h}$*-ին: Բայց* $\bar{\rho}=\dfrac{\bar{V}\times M_A}{V^2}$, *որտեղ* $\bar{M}_A$*-ն բոլոր*



Նկ. 243

(n) *ուժերի գլխավոր մոմենտն է A-ի նկատմամբ:* $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \ldots \bar{P}_{n-1}$ *ուժերի գլխավոր մոմենտը նշանակենք* $\bar{\mu}_A$*-ով: Որովհետև A կետի և* $\bar{P}_1 \ldots \bar{P}_{n-1}$ *ուժերը զանվում են* σ*-ի վրա,*



Նկ. 244

ապա

$$\bar{\mu}_A \perp \sigma, \quad \bar{M}_A(Q)=(\bar{h}\times\bar{Q}) \parallel \sigma:$$

Հետևապես

$$\mu_A=M_A+\bar{h}\times\bar{Q}$$

և

$$\bar{\rho}=\frac{\bar{V}\times(\bar{\mu}_A+\bar{h}\times\bar{Q})}{V^2}=\frac{\bar{V}\times\bar{\mu}_A+\bar{V}\times(\bar{h}\times\bar{Q})}{V^2}$$

Բացենք կրկնակի վեկտորական արտադրյալը, ի նկատի ունենալով, որ $\bar{h} \perp \bar{V}$ *և* $\bar{h} \cdot \bar{V} = 0$. *ապա կստանանք*

$$\bar{V} \times (\bar{h} \times \bar{Q}) = \bar{h}\,[(\bar{P} + \bar{Q}) \cdot \bar{Q}]:$$

Այդպիսով

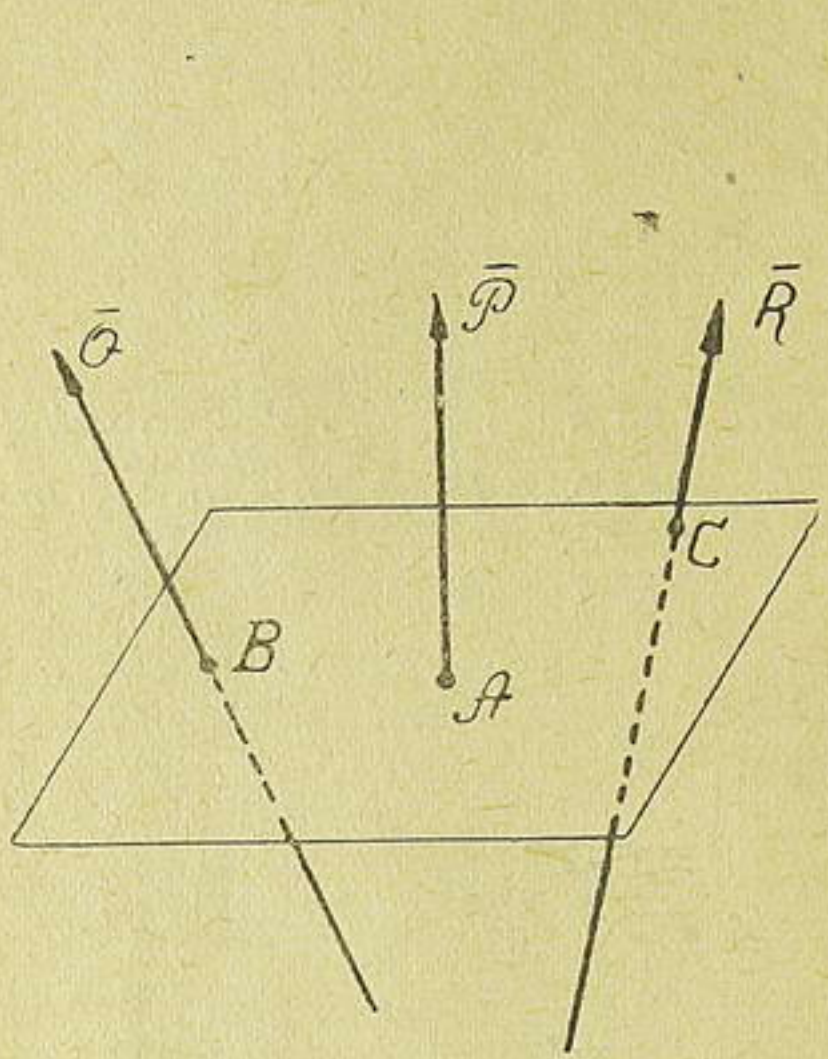
$$\bar{\rho} = \frac{\bar{V} \times \bar{M}_A + \bar{h}\,[(\bar{P} + \bar{Q}) \cdot \bar{Q}]}{V^2}:$$

Այստեղից պարզ է, որ $\bar{\rho}$*-ն ուղղահայաց կլինի* $\bar{h}$*-ին միայն այն դեպքում, երբ կոտորակի համարիչում երկրորդ գումարելին զերո է, այսինքն* $(\bar{P} + \bar{Q}) \cdot \bar{Q} = 0$: *Իսկ դա նշանակում է, որ* $P_Q = -Q$, *կամ, տես նկար 244,*

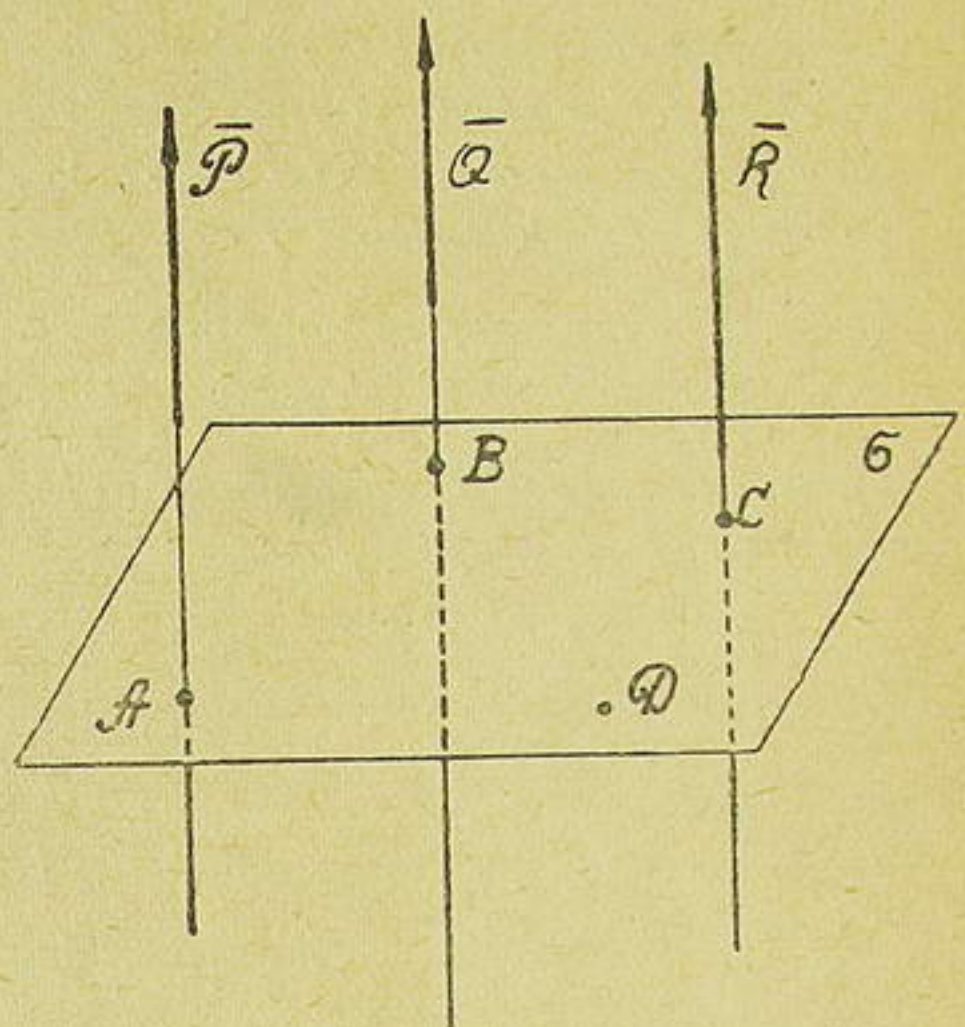
$$\bar{Q} + \bar{P}' = 0 \quad (\bar{P} = \bar{P}' + \bar{P}'' \perp \bar{P}'):$$

Խնդիրներ.

1. Մի ուղղի վրա չգտնվող A, B, C *կետերում (նկ. 245), համապա-*



Նկ. 245



Նկ. 246

տասխանաբար կիրառված են $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$ *ուժերը:* ABC *հարթությունը ուղղահայաց է* $\bar{P}$*-ին: Որոշել, թե ինչ պայմանների պիտի բավարարեն* $\bar{Q}$ *և* $\bar{R}$ *ուժերը, որպեսզի այդ ուժահամակարգի* λ *կենտրոնական առանցքը համընկնի* $\bar{P}$ *ուժի ազդման գծի հետ:*

2. $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$ *երեք զուգահեռ ուժերի ազդման գծերը հատում են այդ ուժերին ուղղահայաց* σ *հարթությունը (նկ. 246), համապատասխանաբար* A, B, C *կետերում: Գիտենալով, որ* $\overline{AB} = b$, $\overline{AC} = \bar{c}$, *որոշել այդ ուժահամակարգի կենտրոնական առանցքի* $\overline{AD}$ *հեռավորությունը* A *կետից:*

Որոշել, թե այդ ուժերի ինչ թվական արժեքների դեպքում D *կետը կհամընկնի* ABC *եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հետ:*

Հնարավոր է արդյոք այնպես ընտրել ուժերի թվական արժեքները, որ D *կետը լինի* BC *հատվածի միջնակետում:*

3. Միատեմի բոլոր n ուժերի ազդման գծերը զուգահեռ են h-ին ուղղահայց σ հարթության վրա։ Գիտենալով այդ ուժասիստեմի գլխավոր մոմենտը՝ $\bar{M}_B$-ն σ-ի վրա չգտնվող B կետի նկատմամբ, որոշել գլխավոր $\bar{V}$ վեկտորի ուղղությունը։ Ցույց տալ, որ եթե σ-ի վրա գտնվող A կետը ընտրված է այնպես, որ $\overline{AB} \parallel h$, ապա, իմանալով բացի $\bar{M}_B$-ից նաև $\bar{M}_A$ և $\overline{AB}$, կարելի է լուծին որոշել ($\bar{V}$) գլխավոր վեկտորը (այսինքն որոշել $\bar{V}$-ի մեծությունը, ուղղությունը և իմաստը)։

Ցուցմունք. *Օգտվել (X 7) թեորեմից։*

4. σ հարթությունը այնպիսին է, որ նրա վրա գտնվող որևէ A, B A_1, B_1, A_2, B_2 զույգ կետերի համար, որոնք բավարարում են

$$AB = A_1B_1 = A_2B_2 \dots$$

$$(\overline{AB} \neq \overline{A_1B} \neq \overline{A_2B_2})$$

պայմաններին, տեղի ունեն

$$|\bar{M}_A - M| = |\bar{M}_{A_1} - \bar{M}_{B_1}| = |\bar{M}_{A_2} - \bar{M}_{B_2}|, \dots$$

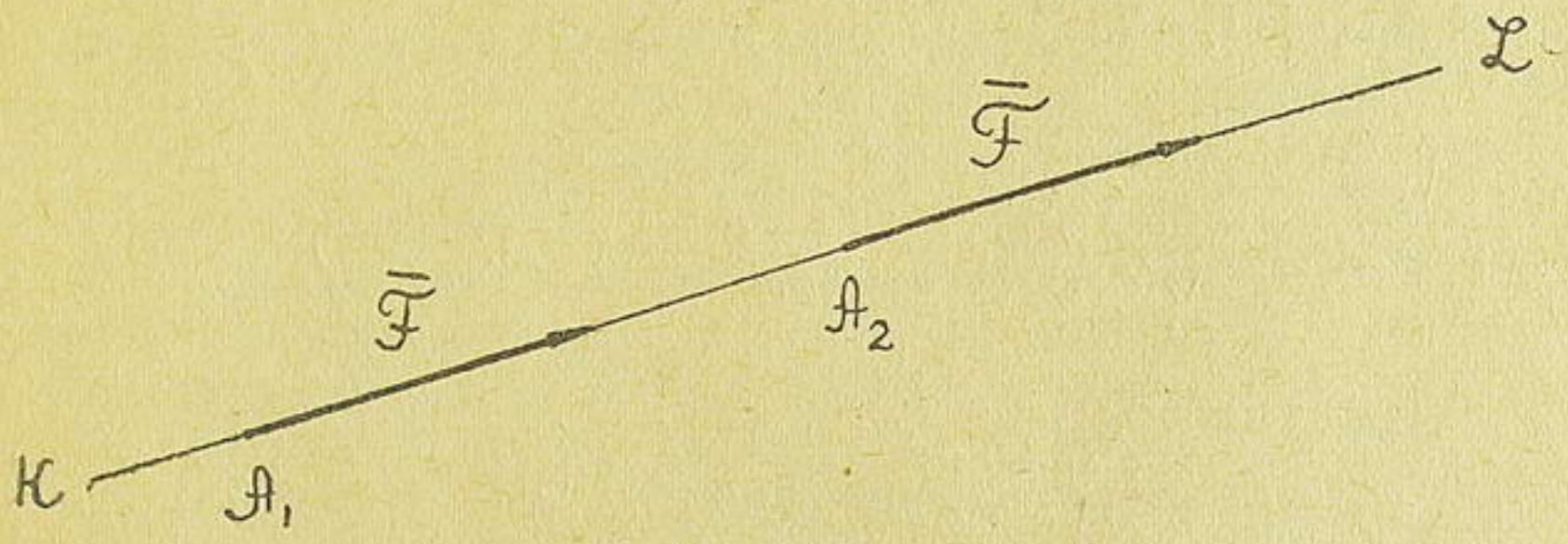
որտեղ $\bar{M}_A$ ուժասիստեմի գլխավոր մոմենտն է A կետի նկատմամբ և այլն։

Որոշել այն անկյունը, որը կազմում է գլխավոր վեկտորը σ հարթության հետ։

ԳԼՈՒԽ X

ԿԱՐԾՐ ՄԱՐՄՆԻՆ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ՈՒԺԵՐԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ

§ 73. Ուժի փոխադրման սկզբունքը։ *Մենք կարող ենք երևակայությամբ կատարել հետևյալ փորձը։ Դիցուք տեսինք թելը նրան կիրառված ուժերի ազդեցության տակ գտնվում է հավասարակշռության մեջ (նկ. 247)։ Թող A_1 կետին կիրառված են արտաքին $\bar{F}$ ուժը և ներքին ուժեր, որոնց համազորն է $\bar{f}_1$-ը. $\bar{F} + \bar{f}_1 = 0$։ Ներքին ուժերն առհասարակ կախված են մարմնի մասնիկների փոխադարձ դասավորումից։ Այդ պատճառով էլ եթե մենք հեռացնենք $\bar{F}$ ուժը, ապա $\bar{f}_1$-ը չի կարող անմիջապես զերո գառնալ և A_1 կետը կսկսի շարժվել $\bar{f}_1$-ի ուղղությամբ, $\bar{F}$-ին հակազուգահեռ։*



Նկ. 247

Եղթադրենք A_2 կետը գտնվում է $\bar{F}$ ուժի ազդման գծի վրա և որ $\bar{F}$ ուժը A_1 կետից հեռացնելիս մենք միաժամանակ A_2 կետում կիրառում ենք

$\bar{F}$-ին հավասար մի ուժ. մինչ այդ հավասարակշռության մեջ գտնվող A_2 կետը կսկսի շարժվել այդ նոր ուժի ուղղությամբ, տանելով իր հետ հարևան կետերը։

A_1 կետից $\bar{F}$ ուժի հեռացնելը և միաժամանակ $\bar{F}$-ի ազդման գծի վրա գտնվող A_2-ին նույնպիսի մի ուժ կի առնելը մենք կարող ենք համարել որպես $\bar{F}$ ուժի ակնթարթային տեղափոխություն, նրա ազդման գծով, A_1 կետից դեպի A_2 կետը։ Ընդորում A_1 և A_2 կետերը կսկսեն շարժվել հակառակ ուղղություններով, որի պատճառով էլ այդ կետերի միջև եղած հեռավորությունը կփոխվի և A_1A_2 ուղղի բոլոր կետերը կսկսեն շարժվել։ Մեր նպատակների համար կատարելապես բավական կլինի քննարկել ուժի ակնթարթային տեղափոխությունից հետո անմիջապես կատարվող շարժումը, իսկ հետագա շարժման ընթացքը մեզ համար ներկայումս հետաքրքրություն չի ներկայացնում և պիտի քննարկվի դինամիկայի մեջ։

A_1-ին մոտ գտնվող կետերի շարժման ուղղությունը միևնույնն է, ինչ A_1 կետի շարժման ուղղությունը, իսկ A_2-ին մոտիկ գտնվող կետերի շարժման ուղղությունը կհամընկնի այդ կետի շարժման ուղղության հետ։ Ակնհայտ է, որ A_1A_2 հատվածի մյջին կետը անշարժ կմնա։

Եթե այժմ ուժերին թելի փոխարեն վերցնենք արտաքին ուժերի ազդեցության տակ հավասարակշռության մեջ գտնվող մի անփոփոխելի ձող, ապա այդ ուժերից մեկի ակնթարթային տեղափոխությունը A_1-ից A_2 կետը չի կարող խախտել հավասարակշռությունը, որովհետև անփոփոխելի ձողում A_1A_2 հեռավորությունը չի կարող փոխվել, իսկ ձողը որպես ամբողջություն չի կարող շարժվել մի ուղղությամբ, որովհետև ուժի ակնթարթային տեղափոխության ընթացքում A_1A_2 հատվածի մյջին կետը պետք է անշարժ մնա։

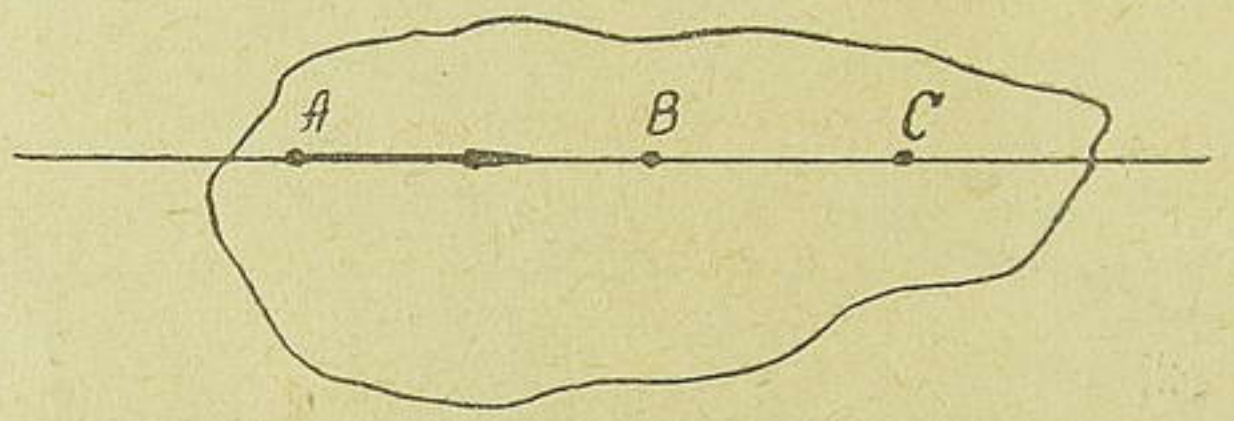
Մենք ընդունում ենք, որ ուժի տեղափոխությունը նրա ազդման գծով մի կետից դեպի մյուսը ոչ միայն չի կարող խախտել կարծր մարմնի հավասարակշռությունը, այլ նույնպես չի կարող ազդել կարծր մարմնի շարժման վրա, երբ այդ վեկտորը գտնվում է շարժման մեջ։

Այդպիսով մենք ունենք հետևյալ սկզբունքը՝

(XI 1) *Ուժի ազդեցությունը կարծր մարմնի վրա լիովին որոշվում է նրա չափով, ուղղությամբ և ազդման գծով և ամենևին էլ կախված չէ ուժի կիրառման կետից նրա ազդման գծի վրա։*

Երբեմն (XI 1)-ը անվանում են ուժի փոխադրման սկզբունք։

Օրինակ՝ (նկ. 248) $\bar{F}$ ուժը կարծր մարմնի վրա ունի միևնույն ազ-

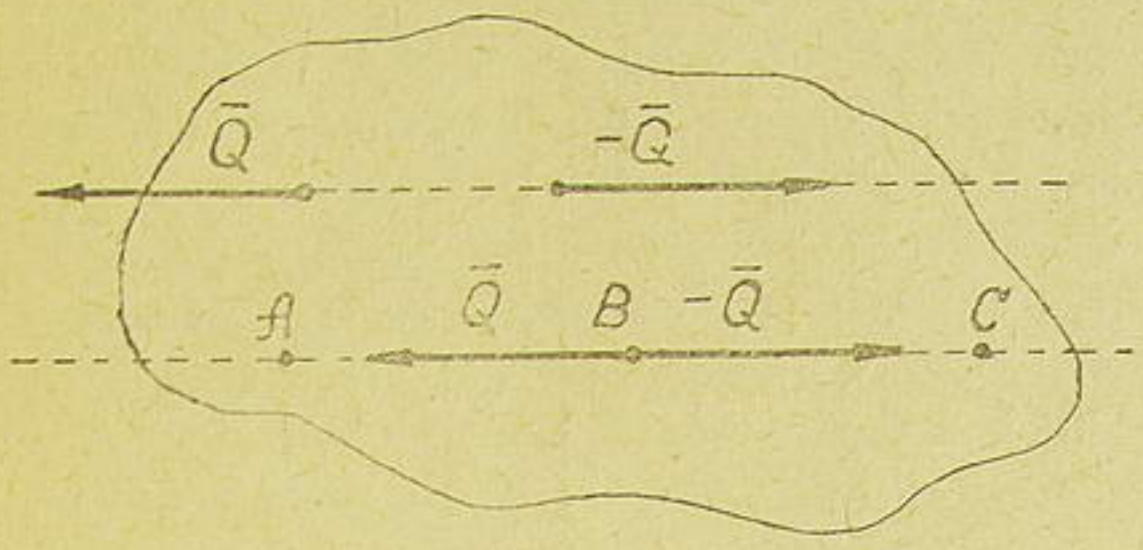


Նկ. 248

դեցությունը, անկախ նրանից, թե ուժը կիրառված է A, B, C-ում (այդ կետերը գտնվում են $\bar{F}$ ուժի ազդման գծի վրա)։

§ 74. Ուժի փոխադրմանց սկզբունքի հետեվանքները՝ տարրական օպերացիաներ։ (XI 1)-ի ամենակարևոր հետևանքը կայանում է նրանում, որ՝

(XI 2) *չխախտելով կարծր մարմնի հավասարակշռությունը (և չփոխելով նրա շարժումը) կարելի է այդ մարմնի կամայական A, C կետերում կիրառել երկու որևէ ուժեր $\bar{Q}$ և $(-\bar{Q})$, որոնց ազդման ընդհանուր գիծն է AC ուղիղը (նկ. 249)։*



նկ. 249

Եվ իսկապես, թող կարծր մարմինը գլանների հավասարակշռության մեջ։ Կամայորեն ընտրած նրա B կետում կիրառենք $\bar{Q}$ և $(-\bar{Q})$ ուժերը։ Դա չի խախտի հավասարակշռությունը։

Հետո այդ ուժերից մեկը (ենթադրենք $\bar{Q}$) իր ազդման գծով տեղափոխենք A կետը, իսկ մյուսը—նույնպես իր ազդման գծով —C կետը։ Համաձայն (XI 1)-ի կարծր մարմնի հավասարակշռությունն այդ օպերացիայից չի խախտվի։

Այդ երկու օպերացիաները [$\bar{Q}$ և $(-\bar{Q})$ ուժերի կիրառումը B կետում և այդ ուժերի տեղափոխումը նրանց ազդման ընդհանուր գծով A և C կետերը] կարելի է փոխարինել $\bar{Q}$ և $(-\bar{Q})$ ուժերի անմիջական հավասարակշռությամբ, այդ ուժերի ազդման ընդհանուր գծի վրա գտնվող A և C կետերին։

Դրանով է ապացուցվում (XI 2)-ը։

Հեշտությամբ ապացուցվում է մի ավելի ընդհանուր առաջադրություն,

Չխախտելով կարծր մարմնի հավասարակշռությունը և չազդելով նրա շարժման վրա, կարելի է այդ մարմնի $A_1, A_2, \ldots A_k$ գտնվող

(XI 3) *կետերում համապատասխանաբար կիրառել $F_1, F_2 \ldots F_k$ ուժերը, եթե այդ բոլոր ուժերի ազդման գծերը հատվում են մի A կետում և ուժերի գումարն էլ հավասար է զրոյի (նկ. 250)։*

Ապացուցման համար բավական է կարծր մարմնի A կետում կիրառել մի խումբ ուժեր, որոնց գումարը հավասար է զրոյի, և հետո այդ ուժերից յուրաքանչյուրն իր ազդման գծով համապատասխանաբար տեղափոխել $A_1, A_2, \ldots A_K$ կետերը։

Այդ երկու օպերացիաներից և ոչ մեկը չի խախտի կարծր մարմնի հավասարակշռությունը։

Սրդեն ասված է եղել, [§ 38, (IV 3)] որ՝

1°, Կամայական սիստեմի որևէ կետում կարելի է կիրառել (կամ հեռացնել) զրոյի համարժեք ուժերի մի խումբ։

2°, Կամայական սիստեմի որևէ կետին կիրառված որևէ ուժախումբ կարելի է փոխարինել մեկ ուժով—այդ ուժերի համազորով։

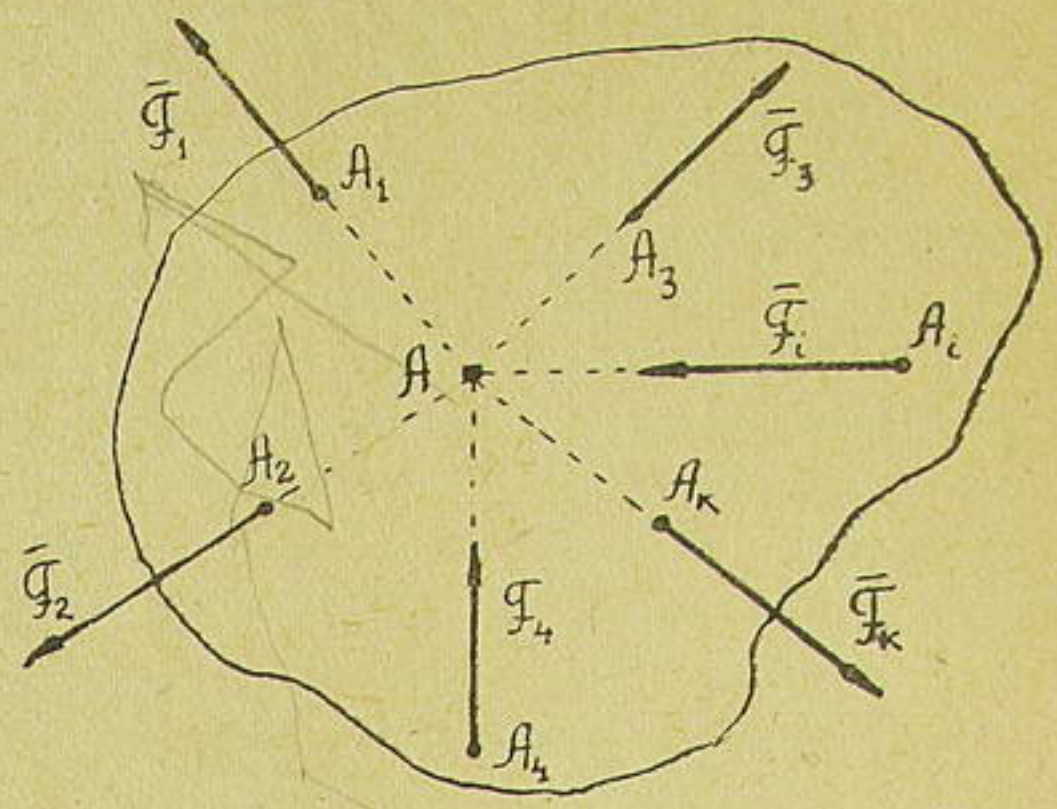
Եթե կամայական սիստեմի փոխարեն քննարկենք կարծր մարմինը, պա՞ տեղի կունենա ուժերի տեղափոխության սկզբունքը (XI 1) և (XI 2)-ը։

Այդպիսով, չխախտելով կարծր մարմնի հավասարակշռության և չազդելով նրա շարժման վրա, կարելի է կատարել հետևյալ օպերացիաները՝

I°. Կարծր մարմնի վրա վերցրած կամայական կետին կիրառել (կամ հեռացնել) զրոյի համարժեք մի խումբ։

2°. Կարծր մարմնի որևէ կետին կիրառված ուժերի մի խումբը փոխարինել մի ուժով, կամ ընդհակառակը մեկ ուժը փոխարինել մարմնի նույն կետին կիրառված մի քանի ուժերով։

3°. Ուժի կիրառման կետը տեղափոխել նրա ազդման գծով։



Նկ. 250

4°. Կարծր մարմնի A_1 և A_2 կամայական կետերին համապատասխանաբար կիրառել $\bar{Q}$ և $(-\bar{Q})$ ուժերը, որոնց ազդման գիծն է հանդիսանում A_1A_2 ուղիղը։

1°, 2°, 3° օպերացիաները կոչվում են տարրական օպերացիաներ։ 4° օպերացիան, ինչպես արդեն ասված է, 1° և 3°-ի հետևանքն է։ Մենք հաճախ պիտի օգտվենք 4°-ով, և որպեսզի հարմար լինի հիշատակելը, նրան նույնպես հաշվենք տարրական օպերացիաների շարքում։

§ 75. Համարժեք սիստեմներ։ *Ուժերի երկու սիստեմները համարժեք են համարվում, եթե նրանք առանձին-առանձին կիրառված լինելով միևնույն կարծր մարմնին, միևնույն ազդեցությունն ունեն նրա վրա։*

Եթե, օրինակ, կարծր մարմնին կիրառված ուժասիստեմը կարելի է փոխարինել մի ուրիշով, դրանով չխախտելով այդ մարմնի հավասարակշռությունը, ապա այդ երկու սիստեմները համարժեք են։

Այն դեպքերում, երբ գոյություն ունի միայն մեկ ուժ, որը համարժեք է ուժասիստեմին, այդ միակ ուժը կոչվում է սիստեմի համազոր։

Ենթադրենք տված են երկու ուժասիստեմներ։ Սիստեմներից մեկը նշանակենք (S), իսկ նրա գլխավոր մոմենտը B կետի նկատմամբ և գլխավոր վեկտորը՝ M_B և $\bar{V}$։ Մի ուրիշ սիստեմ, նրա գլխավոր մոմենտը B կետի նկատմամբ և գլխավոր վեկտորը համապատասխանաբար նշանակենք (σ), μ_B և $\bar{\varphi}$։

Թեորեմ.

(XI 5) *Համարժեք ուժասիստեմները պետք է ունենան միևնույն գլխավոր վեկտորը, միևնույն գլխավոր մոմենտը կամայական, բայց երկու ուժասիստեմի համար էլ ընդհանուր կենտրոնի նկատմամբ։*

Այսինքն, եթե (S) և (σ) սիստեմները համարժեք են, ապա

$$\bar{V} = \bar{\varphi}, \quad \bar{M}_B = \overline{\mu_B}.$$

Որպեսզի այդ ապացուցենք, քննարկենք ուժերի (—S) սիստեմը, որը կստացվի, եթե (S) սիստեմի ուժերի ազդման կետերը չփոխելով, ընդունենք նրա բոլոր ուժերը 180^0 վրա նրանց կիրառման կետերի շուրջը, այսինքն $\bar{F}_i, A_i$ ուժը փոխարինենք $(-\bar{F}, A_i)$-ով բոլոր i-երի համար: Ակնհայտ է, որ այդ ձևով ստացած (—S) սիստեմի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը կլինեն $(-\bar{V})$ և $(-\bar{M}_B)$: Կարծր մարմնին (S) և (—S) սիստեմների միաժամանակ կիրառումը չի խախտի նրա հավասարակշռությունը, որովհետև այդպիսով յուրաքանչյուր A_i կետում կիրառված կլինի զերոյի համարժեք ուժախումբ՝ $\bar{F}_i$ և $(-\bar{F}_i)$:

Բայց եթե (S) և (σ)-ն համարժեք սիստեմներ են, ապա կարելի է (S)-ը փոխարինել (σ)-ով: Հետևապես (σ) և (—S) սիստեմների միաժամանակյա կիրառումը նույնպես չի խախտի կարծր մարմնի հավասարակշռությունը և այդ պատճառով էլ այդ երկու սիստեմների գլխավոր վեկտորը և նրանց գլխավոր մոմենտը պետք է հավասարվեն զերոյի,

$$\bar{\varphi} + (-\bar{V}) = 0, \quad \bar{\mu}_B + (-\bar{M}_B) = 0,$$

կամ

$$\bar{\varphi} = \bar{V}, \quad \bar{\mu}_B = \bar{M}_B:$$

Այն, ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել:

(XI 5) Թեորեմից հետևում է, որ եթե երկու ուժերի սիստեմների գլխավոր վեկտորները հավասար չեն, կամ եթե հավասար չեն գլխավոր մոմենտները կամայական, բայց ընդհանուր կենտրոնի նկատմամբ, ապա սիստեմները չեն կարող համարժեք լինել:

Տարրական օպերացիաների մասին ասածները թույլատրում են անմիջապես եզրակացնելու, որ այդ օպերացիաների միջոցով մեկը մյուսից ստացած սիստեմները համարժեք են: Այդպիսի սիստեմները լիովին բավարարում են (XI 5) թեորեմի պահանջները, որովհետև տարրական օպերացիաներից և ոչ մեկը չի փոխում ոչ գլխավոր վեկտորը, ոչ էլ նրա գլխավոր մոմենտը:

Հետագայում մենք կուսումնասիրենք այն հարցը, թե որպիսի՞ք են մոմենտահավասարակ սիստեմները, որոնք համարժեք են տվյալ ուժասիստեմին:

Տվյալ սիստեմներին համարժեք ամենից հասարակ սիստեմներ գտնելու պրոցեսը կոչվում է ուժերի վերածում (կամ գումարում):

§ 76. Ուժերի համազորը և նրա ազդման գիծը: Ակնհայտ է, որ ուժերի ամենահասարակ սիստեմը—դա մեկ ուժն է: Այն դեպքերում, երբ գոյություն ունի միայն մեկ ուժ, որը համարժեք է սիստեմին, այդ մեկ ուժը, ինչպես ասված է եղել § 75, կոչվում է սիստեմի համազոր:

Շուտով մենք կտեսնենք, որ կարծր մարմնին կիրառած ոչ բոլոր ուժասիստեմները համազոր ունեն:

Որովհետև մի ուժից բաղկացած սիստեմի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը համապատասխանաբար հավասար են այդ ուժին և նրա մոմենտին, ապա (XI 5) թեորեմը մեզ բերում է հետևյալ կարևոր հետևանքին.

(XI 6) *Համազորը—երբ նա գոյություն ունի—հավասար է ուժահետաքի գլխավոր վեկտորին։*
Համազորի մոմենտը որևէ կետի նկատմամբ հավասար է տրված գլխավոր մոմենտին նույն կետի նկատմամբ։

Համազորը նշանակելով $\overline{F}$ *(իսկ տրված գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը* V *և* $\overline{M}_B$, *որտեղ* B-*ն կամայական կետ է), կարող ենք* (XI 6) *արտահայտել այսպես՝*

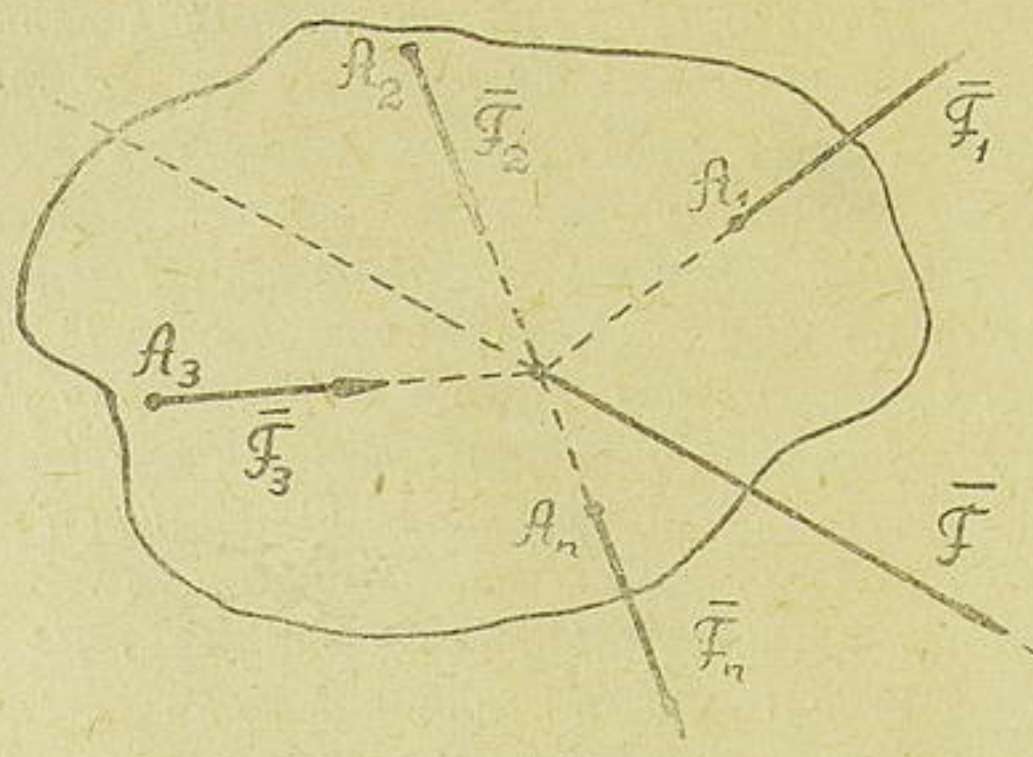
$$\overline{F} = \overline{V}, \quad \overline{M}_B(\overline{F}) = \overline{M}_B. \qquad (XI\ 7)$$

Այդ հավասարություններից երկրորդը հնարավորություն է տալիս, ինչպես կտեսնենք ներքևում, որոշելու համազորի տղման գիծը։

Նախքան ապացուցելու այն թեորեմը, որը սահմանում է, թե երբ ուժահետաքը համազոր ունի, քննարկենք մի քանի մասնավոր դեպքեր։

1°. Կարծր մարմնին կիրառած ուժերի սիստեմը, որոնց տղման գծերը հատվում են մի կետում, ունի համազոր, որի տղման գիծն անցնում է այդ կետով։

Թող A-*ն լինի ուժերի տղման գծերի հատման ընդհանուր կետը (նկ. 251)։*



նկ. 251

Որովհետև ուժերը կիրառված են կարծր մարմնին, ապա, համաձայն ուժերի տեղափոխության սկզբունքի (XI 1), *նրանցից յուրաքանչյուրը կարելի է իր տղման գծով տեղափոխել A կետը։ Այդպիսով բոլոր ուժերը կիրառված կլինեն մի կետում* (A), *իսկ այդպիսի ուժերը համաձայն մեր կողմից ընդունված սկզբունքի* [§ 38, (IV 3)] *ունեն* (F) *համազորը։ Որպես* $\overline{F}$*-ի կիրառման կետ կարող ենք ընտրել նրա տղման λ գծի վրա գտնվող որևէ կետ։*

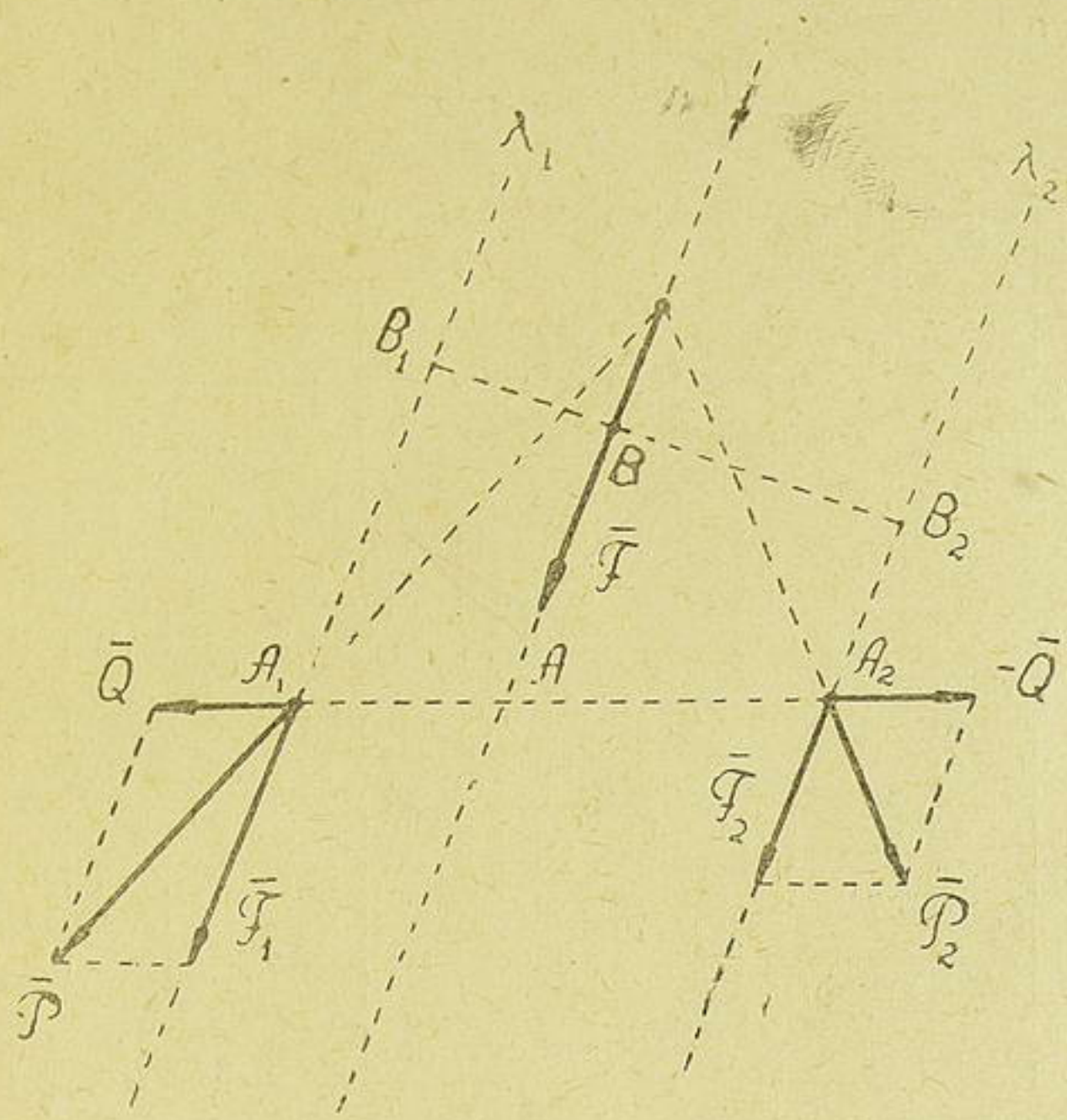
Ասածներից հետևում է, որ $\overline{F} = \overline{V}$*։ Օգտվելով Վարինյոնի թեորեմից, հեշտ է համոզվել, որ* $\overline{M}_B(\overline{F}) = \overline{M}_B$*։*

Այդպիսով համազորն իսկապես բավարարում է (XI 7) *պայմանը։*

2°. Կարծր մարմնի տարբեր կետերին կիրառված երկու զուգահեռ ուժերը, որոնց գումարը զերո չէ, ունեն համազոր։

Դիցուք զուգահեռ $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ ուժերը, որոնց λ_1 և λ_2 ազդման գծերը չեն համընկնում, կիրառված են կարծր մարմնին (նկ. 252, 253 ա, բ). 252 նկարում $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ համազուգահեռ են, 253 ա, բ նկարներում $\bar{F}_1 \uparrow\downarrow \bar{F}_2$:

Համազորի գոյությունն ապացուցված կլինի, եթե տարրական օպերացիաների միջոցով հաջողվի $\bar{F}_1$ և F_2 ուժերը փոխարինել $\bar{P}_1$ և $\bar{P}_2$ երկու ուժերով, որոնց ազդման գծերը հատվում են:



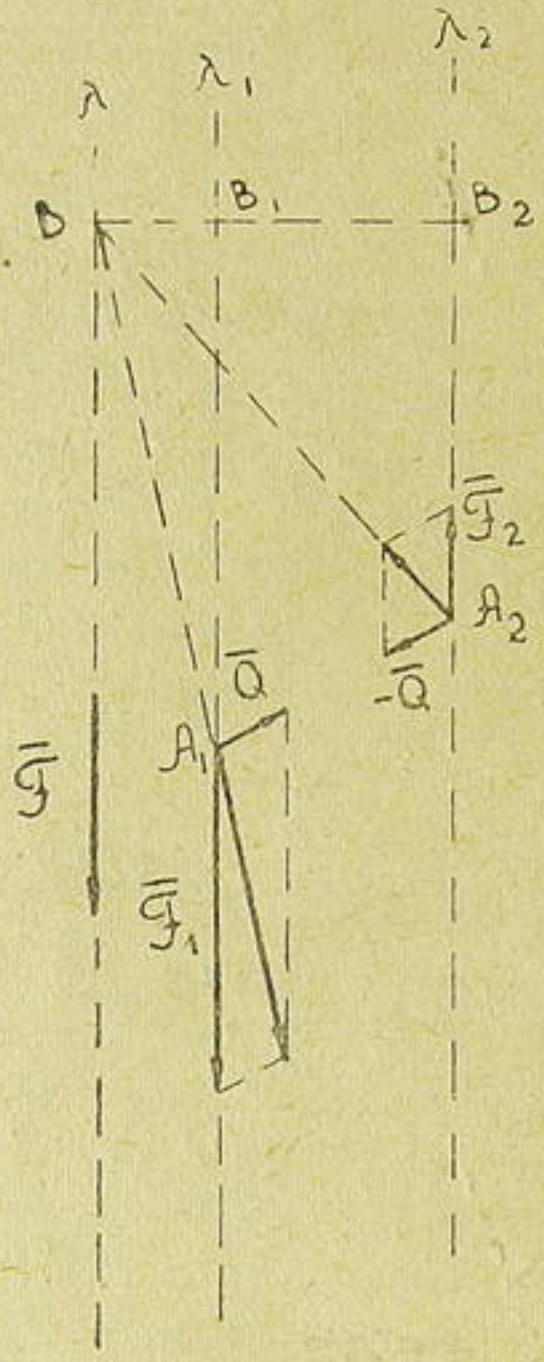
Նկ. 252

Իսկապես, տարրական օպերացիաների միջոցով մեկը մյուսից ստացած ուժախումբները համարժեք են: Այդ պատճառով էլ $\bar{P}_1$ և $\bar{P}_2$ ուժախումբը համարժեք է $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$-ին, իսկ 1⁰-ի հիման վրա $\bar{P}_1$ և P_2 համազոր ունենն:

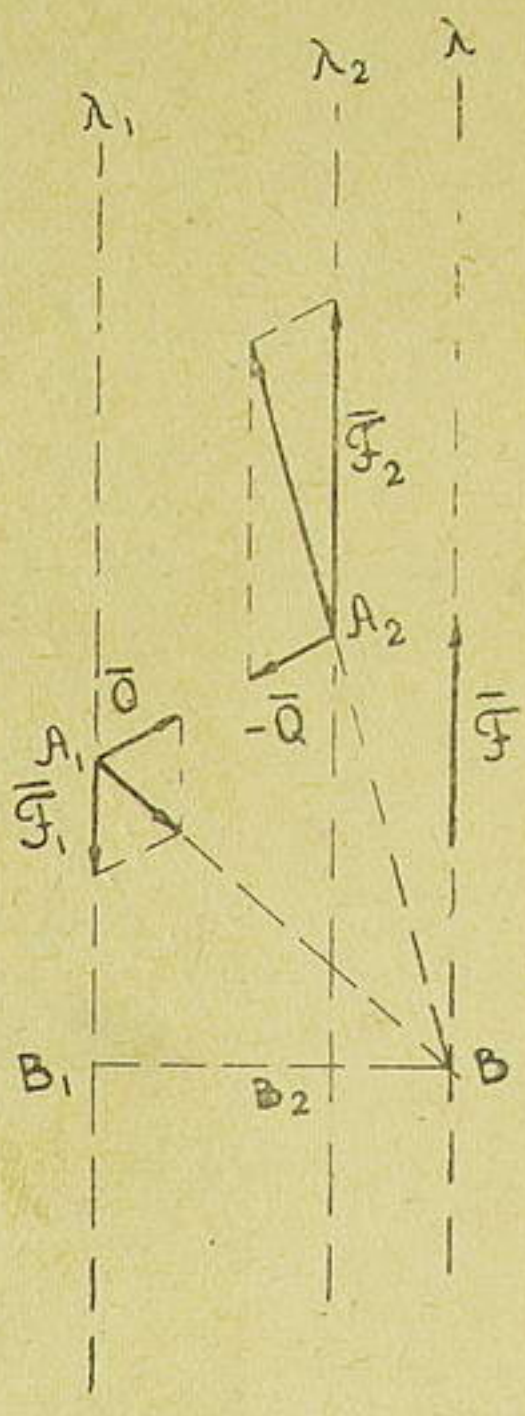
Որպես $\bar{F}_1$-ի կիրառման կետ ընդունենք կարծր մարմնի կամայից մեկը, որը պատկում է λ_1-ի վրա, օրինակ A_1-ը: Ճիշտ նույն ձևով էլ A_2-ը ընդունենք $\bar{F}_2$-ի կիրառման կետ: A_1 և A_2-ում համապատասխանաբար կիրառենք $\bar{Q}$ և $(-\bar{Q})$ ուժերը, որոնք ունեն միևնույն ազդման գիծը՝ A_1A_2 ուղիղը: Այդ ուժերի չափը կարող է լինել ամեն տեսակի:

$\bar{F}_1$ և $\bar{Q}$-ն կիրառված լինելով A_1 կետում, ունեն $\bar{P}_1 = \bar{F}_1 + \bar{Q}$ համազորը: $\bar{F}_2$ և $(-\bar{Q})$-ի համազորը կլինի $\bar{P}_2 = F_2 + (-\bar{Q})$: Ընդ որում $\bar{P}_1$ և $\bar{P}_2$ զուգահեռ չեն: A_1 և A_2 ուղիղը, հետևապես և $\bar{Q}$ ու $(-\bar{Q})$ ուժերը պատկում են F_1 և $\bar{F}_2$ ուժերի հարթության վրա: Այդ պատճառով էլ այդ նույն հարթության վրա դասավորված կլինեն $\bar{P}_1$ ու $\bar{P}_2$ ուժերը ազդման

գծերը։ Այդպիսով այդ ազդման գծերը կհատվեն և համաձայն 1°-ի $\bar{P}_1$ և $\bar{P}_2$ ուժերն ունեն $\bar{F}$ համազորը, որի (λ) ազդման գիծն անցնում է հատման կետով։ Եվ որովհետև $\bar{P}_1$ և P_2 ուժախտեռնը համարժեք է $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ ուժախտեռնին, ապա $\bar{F}$-ը հանդիսանում է նույնպես և այս վերջին ուժախտեռնի համազորը։



Նկ. 253 ա



Նկ. 253 բ

Ըստ (XI 7) $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$

{որովհետև $\bar{F} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = (\bar{F}_1 + \bar{Q}) + [\bar{F}_2 + (-\bar{Q})]$*},*

հետևապես համազորի λ ազդման գիծը զուգահեռ է λ_1 և λ_2-ին։

λ, λ_1, λ_2 ազդման գծերի փոխադարձ դասավորումը որոշելու համար օգտվենք Վարինյոնի, որ ըստ (XI 7)-*ի՝*

$$\bar{M}_B(\bar{F}) = \bar{M}_B = \bar{M}_B(\bar{F}_1) + \bar{M}_B(\bar{F}_2)։$$

Որպես մոմենտների B կենտրոն ընտրենք λ-ի կետերից մեկը։ Այն ժամանակ $\bar{M}_B(\bar{F}) = 0$ և մենք ունենք՝

$$\bar{M}_B(\bar{F}_1) + M_B(\bar{F}_2) = 0։ \qquad \text{(XI 8)}$$

B-ից տանենք ուժերի ազդման գծերին ուղղահայաց $B_1 B_2$ ուղիղը։ Ենթադրենք $\overline{BB_1} = h_1$, $\overline{BB_2} = h_2$. $\bar{h}_1 \parallel \bar{h}_2$.

(252 նկարում $\bar{h}_1 \uparrow\downarrow \bar{h}_2$, իսկ 253 ա, բ նկարներում $\bar{h}_1 \uparrow\uparrow \bar{h}_2$)։

Այն ժամանակ $\bar{M}_B(\bar{F}_1) = h_1 \times \bar{F}_1$, $\bar{M}_B(\bar{F}_2) = \bar{h}_2 \times \bar{F}_2$

և ըստ (XI 8)-ի՝

$$\bar{h}_1 \times \bar{F}_1 + \bar{h}_2 \times \bar{F}_2 = 0 \qquad \text{(XI 9)}$$

Որովհետև h_1 և h_2 ուղղահայաց են $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ ապա $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ վեկտորների թվական արժեքները նշանակելով h_1, h_2, F_1, F_2-ով, վերջին հավասարությունից կստանանք՝

$$\left.\begin{aligned} h_1 F_1 + h_2 F_2 &= 0. \\ \frac{BB_1}{BB_2} &= \frac{h_1}{h_2} = -\frac{F_1}{F_2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XI 10)}$$

կամ

(XI 9) և (XI 10)-ից հետևում է, որ եթե $\bar{F}_1 \uparrow\uparrow \bar{F}_2$ (նկ. 252), ապա $h_1 \uparrow\downarrow h_2$, այսինքն λ-ն գտնվում է λ_1 և λ_2 միջև, մենք հանգում ենք հետևյալ եզրակացության՝

(XI 11) Երկու համազուգահեռ ուժերի համազորի ազդման գիծը գտնվում է այդ ուժերի λ_1 և λ_2 ազդման գծերի միջև և λ_1 ու λ_2 միջև եղած հեռավորությունը բաժանում է ուժերին հակադարձ համեմատական մասերի՝

$$\frac{|BB_1|}{|BB_2|} = \frac{F_2}{F_1},$$

իսկ եթե $\bar{F}_1 \uparrow\downarrow \bar{F}_2$, ապա (XI 9) և (XI 10)-ից հետևում է, որ $\bar{h}_1 \uparrow\uparrow \bar{h}_2$: Ըստ արում հնարավոր են երկու դեպք՝

$|F_2| > |F_1|$ և, ըստ (XI 10)-ի $h_1 > h_2$ (նկ. 253 ա), կամ

$|F_2| < |F_1|$ և $h_1 < h_2$, (նկ. 253 բ),

երկու դեպքերում էլ համազորի ազդման գիծը չի հատավորված $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ ուժերի ազդման գծերի միջև, այլ միշտ գտնվում է այն ուժի ազդման գծի կողմը, որի չափը մեծ է:

Այսպիսով՝

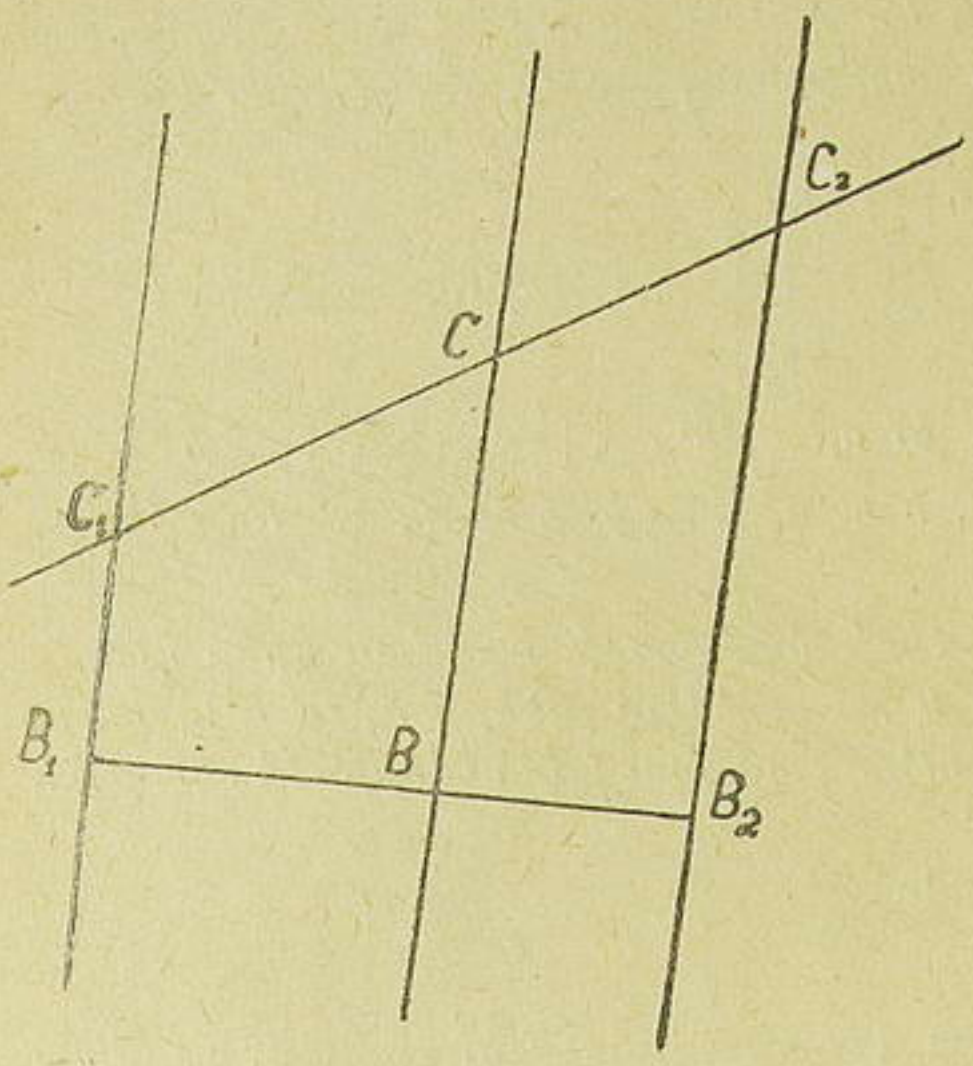
(XI 11) Երբ երկու հակազուգահեռ ($\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$) ուժերի գումարը զրո չէ, նրանց համազորի λ ազդման գիծը գտնվում է մեծ չափ ունեցող ուժի ազդման գծից դուրս և F_1, F_2 ուժերի միջև եղած հեռավորությունը արտաքին կերպով բաժանում է այդ ուժերին հակադարձ համեմատական մասերի:

Այսինքն՝

$$\frac{BB_1}{BB_2} = \frac{|F_2|}{|F_1|},$$

Հարկավոր է նկատել, որ երեք զուգահեռ ուղիղների միջև ընկած ամեն մի հատված, օրինակ C_1CC_2 (նկ. 253 գ), նրանց կողմից բաժանվում է նույնպիսի հարաբերությամբ, ինչպես և նրանց ուղղահայաց B_1BB_2 հատվածը: Այդ պատճառով էլ $\frac{BB_1}{BB_2}$ հարաբերությունը կարելի է փոխարինել $\frac{AA_1}{AA_2}$ հարաբերությամբ, որի մեջ A_1 և A_2-ը λ_1 և λ_2 ազդման գծերի այն կետերն են, որոնք մեր կողմից ընդունված են որպես $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ ուժերի կե-

բառման կետերը, իսկ A-ն երկու զուգահեռ ուժերի համազորի ազդման գծի և A_1A_2 հատվածի հատման կետն է։



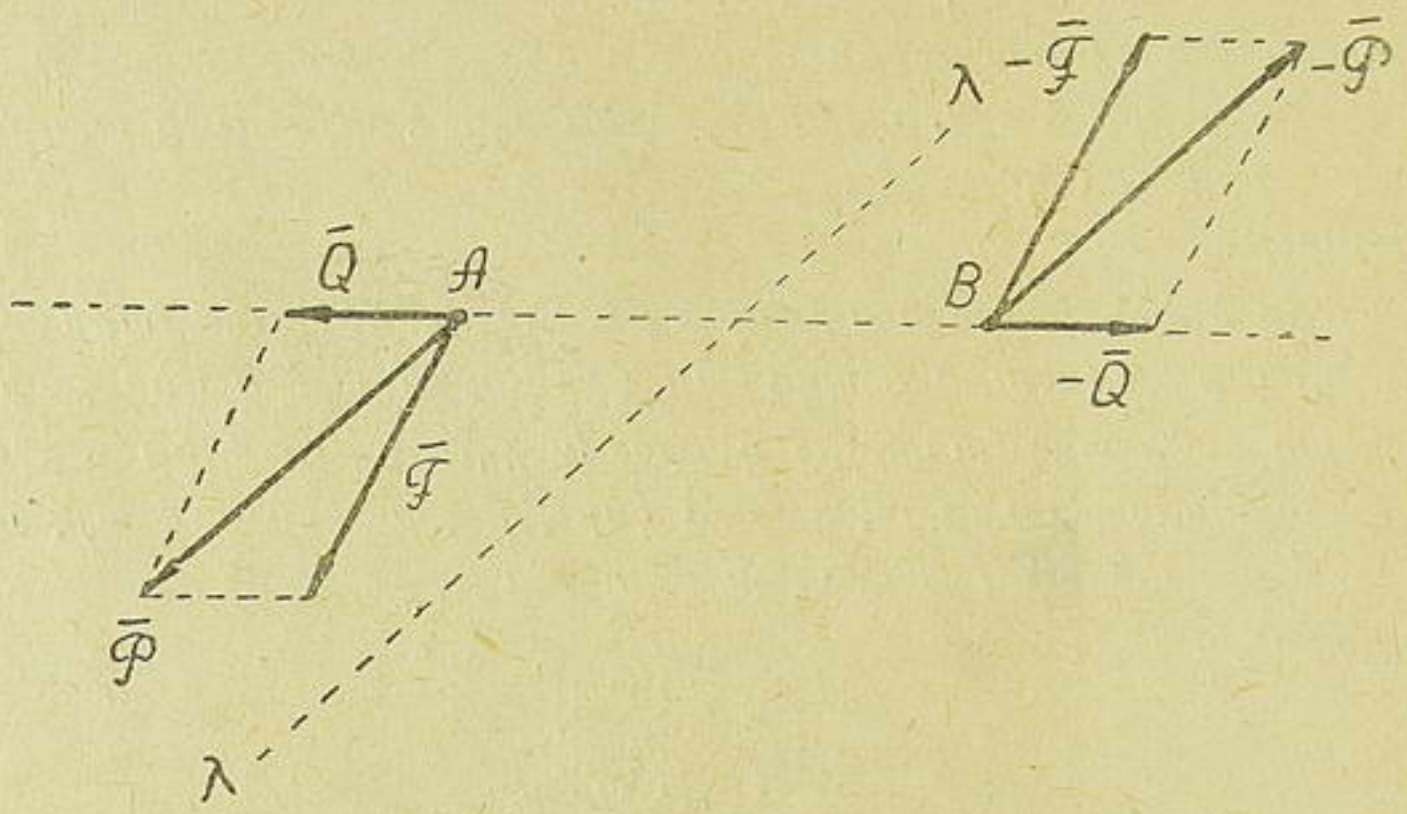
Նկ. 253 գ

Պետք է նկատել ունենալ նույնպես, որ եթե $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ համազուգահեռ են, ապա $F=F_1+F_2$ հավասարությունը տալիս է $F=F_1+F_2$. այդ դեպքում համազորի չափը հավասար է ուժերի բաղադրիչների չափերի գումարին։

Իսկ եթե $\bar{F}_1$ և F_2 հակազուգահեռ են, ապա $\bar{F}=F_1+\bar{F}_2$ հավասարությունից կստանանք $|F|=|F_1-F_2|$, այսինքն համազորի չափը հավասար է ուժերի բաղադրիչների չափերի տարբերության բացարձակ արժեքին։

§ 77. Զույգերի համարժեքությունը։ *Ինչպես տված է եղել VII գլխ. § 56 2°,*

Երկու հակազուգահեռ ուժերի սիստեմը, որոնց գումարը հավասար է զրոյի, իսկ ազդման գծերն էլ չեն համընկնում, կոչվում է զույգ (նկ. 254)։



Նկ. 254

Այն միջոցը, որով մենք § 76,2° $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ զուգահեռ ուժերը փոխարինեցինք նրանց համարժեք, բայց արդեն $\bar{F}_1$ և F_2 ուժերին ոչ զուգահեռ, $\bar{P}_1$ և $\bar{P}_2$ ուժերով, այստեղ կիրառելի չէ։

Եվ իսկապես, թող զույգը կազմված լինի $\bar{F}_1$ և $(-\bar{F}_2)$ ուժերից, որոնք կիրառված են կարծր մարմնի A և B կետերում։

A և B կետերում համապատասխանաբար կիրառենք $\bar{Q}$ և $(-\bar{Q})$ ուժերը, որոնք ունեն միևնույն ազդման գիծ՝ AB ուղիղը։

$\bar{F}$ և $\bar{Q}$ ուժերի համազորը նշանակենք $\bar{P}$: Այն ժամանակ $\bar{P}=\bar{F}+\bar{Q}$, իսկ B-ում կիրառված ուժերի համազորը կլինի $(-\bar{F})+(-\bar{Q})=-\bar{P}$: Այդպիսով, այժմ էլ դուրս է գալիս, որ A և B կետերում կիրառված են զրոյական զույգ կազմող $\bar{P}$ և $(-\bar{P})$ ուժերը: Մեզ չհաջողվեց տվյալ զույգը $(F_A-\bar{F}_B)$ փոխարինել մեկ ուժով:

Դա առաջ եկավ այն պատճառով, որ՝

Զույգը չի կարող համազոր ունենալ

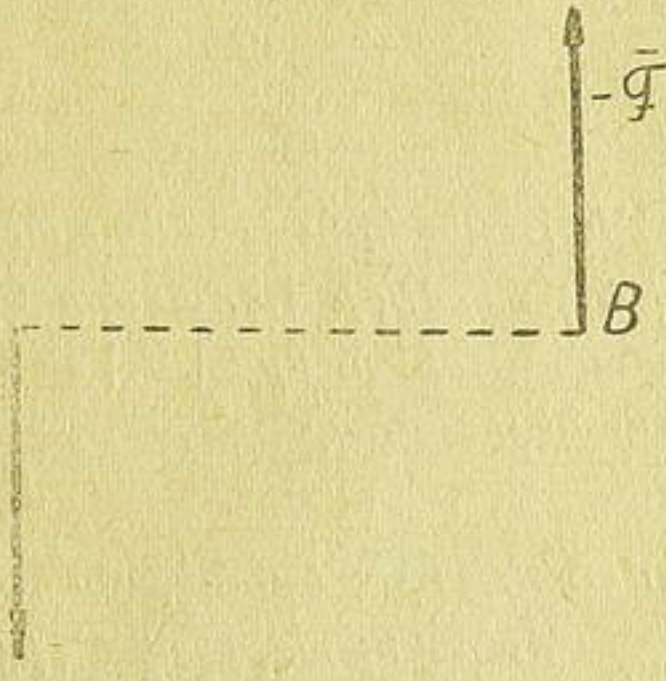
2°. Որպեսզի ապացուցենք այդ, ենթադրենք հակառակը: Ենթադրենք զույգն ունի $\bar{Q}$ համազորը, որի ազդման գիծն է λ: (XI 6) կամ (XI 7) թեորեմի հիման վրա [համազորի մոմենտը հավասար է ուժերի սիստեմի գլխավոր մոմենտին]

$$\bar{M}_H(\bar{Q})=\bar{M}_H(\bar{F}_A)+\bar{M}_H(-\bar{F}_B):$$

Այդ հավասարության աջ մասի գումարը զույգ կազմող $\bar{F}_A$ և $(-\bar{F}_B)$ ուժերի գլխավոր մոմենտն է: Այդ գումարը կոչվում է զույգի մոմենտ և հավասար է մոմենտների H կենտրոնից կախում չունեցող և զրոյից տարբեր $\overline{AB}\times(-\bar{F})$ արտադրյալին: Մինչդեռ $\bar{M}_H(\bar{Q})$ կախված է մոմենտների H կենտրոնից և զրո է դառնում, եթե H ընտրված է λ-ի վրա: Այդ դեպքում մենք կունենանք $0=\overline{AB}\times(-\bar{F})\neq 0$: Այդպիսով, այն ենթադրությունը, որ զույգը համազոր ունի, բերում է անհեթեթության, և, հետևապես սխալ է:

Քանի որ կարծր մարմնում ուժի կիրառման կետը նրա ազդման գծի վրա կարող է ընտրվել ըստ ցանկության, ապա սովորաբար զույգ կազմող $\bar{F}$ և $(-\bar{F})$ ուժերի կիրառման A և B կետերն այնպես են ընտրվում, որ AB հատվածը ուղղահայաց լինի ուժերի ազդման գծերին (նկ. 255): Այդ դեպքում AB հավասար է $\bar{F}$ և $(-\bar{F})$ ուժերի ազդման գծերի միջև եղած հեռավորությանը և կոչվում է զույգի բազուկ:

3°. Մեր կուրսից հենց նոր ստացած հետևանքը («զույգը չի կարող համազոր ունենալ») ցույց է տալիս, որ զույգին համարժեք սիստեմը պետք է բազկացած լինի առնվազն երկու ուժերից: Բայց համարժեք սիստեմներն ունեն միևնույն գլխավոր մոմենտները: Զույգի գլխավոր վեկտորը հավասար է զրոյի, գլխավոր մոմենտը միևնույնն է տարածության բոլոր կետերի նկատմամբ: Հետևապես, ճիշտ այդպես էլ պետք է լինեն զույգին համարժեք որևէ ուժասիստեմի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը: Այստեղից բղխում է հետևյալ կարևոր եզրակացությունը՝



Նկ. 255

(XI 12) Զույգին համարժեք ուժերի ամենապարզ սիստեմը նույնպես զույգ է: Այդ երկու զույգերը պետք է ունենան միևնույն մոմենտը:

Ինչպես մենք արդեն գիտենք, զույգի մոմենտն ուղղահայաց է նրա հարթությանը (գլ. VII 10 §§ 141)։ Այդ պատճառով էլզույգերը, որոնց հարթությունները զուգահեռ չեն, չեն կարող ունենալ հավասար մոմենտներ, և, նշանակում է, չեն կարող համարժեք լինել։

4°. Հետևյալ երեք թեորեմները մեզ հնարավորություն են տալիս շատ հասարակ և ընդհանուր ձևով արտահայտելու զույգերի համարժեքության պայմանները։

Թեորեմներ.

Տարրական օպերացիաների միջոցով կարելի է

ա. Զույգն իր հարթության վրա պտտել ծայրերից մեկի շուրջը

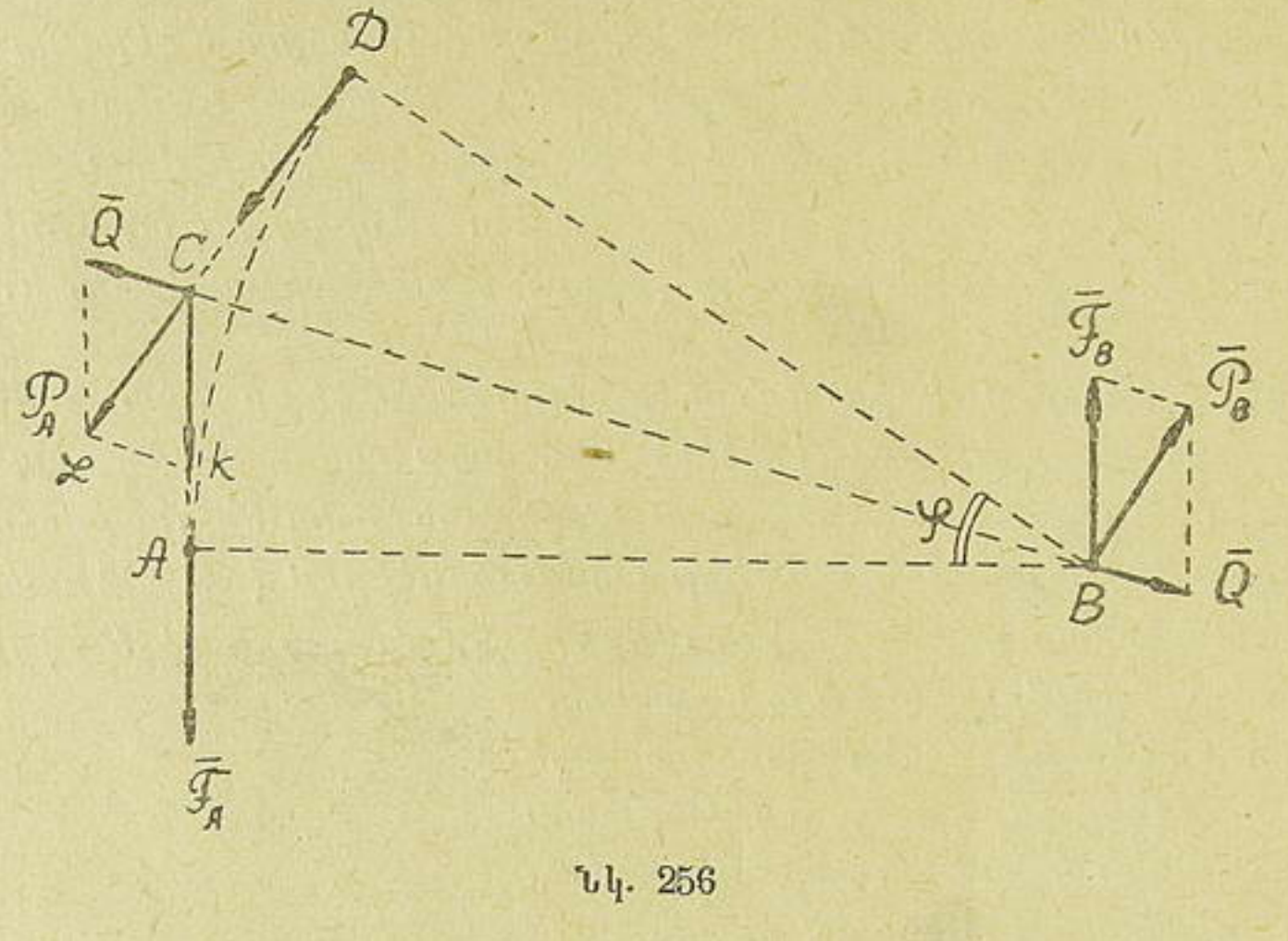
(XI 13) *որևէ անկյամբ,*

բ. Զույգը փոխադրել իրեն զուգահեռ ուղղությամբ,

գ. Կամայորեն փոխել զույգի բազուկը։

Ապացուցումն.

ա. Տանենք BA*-ի հետ* φ *անկյուն կազմող* BD=BA *հատվածը (նկ. 256), թող* BC*-ն* $<$DBA$=\varphi$ *անկյան կիսողը լինի։* $\bar{F}$ *ուժը* A*-ից փոխադրենք* C*-ն։*



նկ. 256

C *և* B *կետերում համապատասխանաբար կիրառենք* $\bar{Q}$ *և* $(-\bar{Q})$ *ուժերը,* $\bar{F}$ *և* $\bar{Q}$ *ուժերի համազորը նշանակենք* $\bar{P}$, $\bar{P}=\bar{F}+\bar{Q}$։ $\bar{Q}$ *ուժի չափն այնպես ընտրենք, որ* $|P|=|F|$*-ի։ Այն ժամանակ հավասարասրուն* CKL *եռանկյունը, որում*

$$\overline{CK}=\bar{F},\ \overline{KL}=\bar{Q},\ \overline{CL}=\bar{P},$$

նման է DBA *եռանկյան։* $\bar{P}\perp$BD *և* $\bar{P}$*-ի ազդման գիծն անցնում է* D*-ով։*

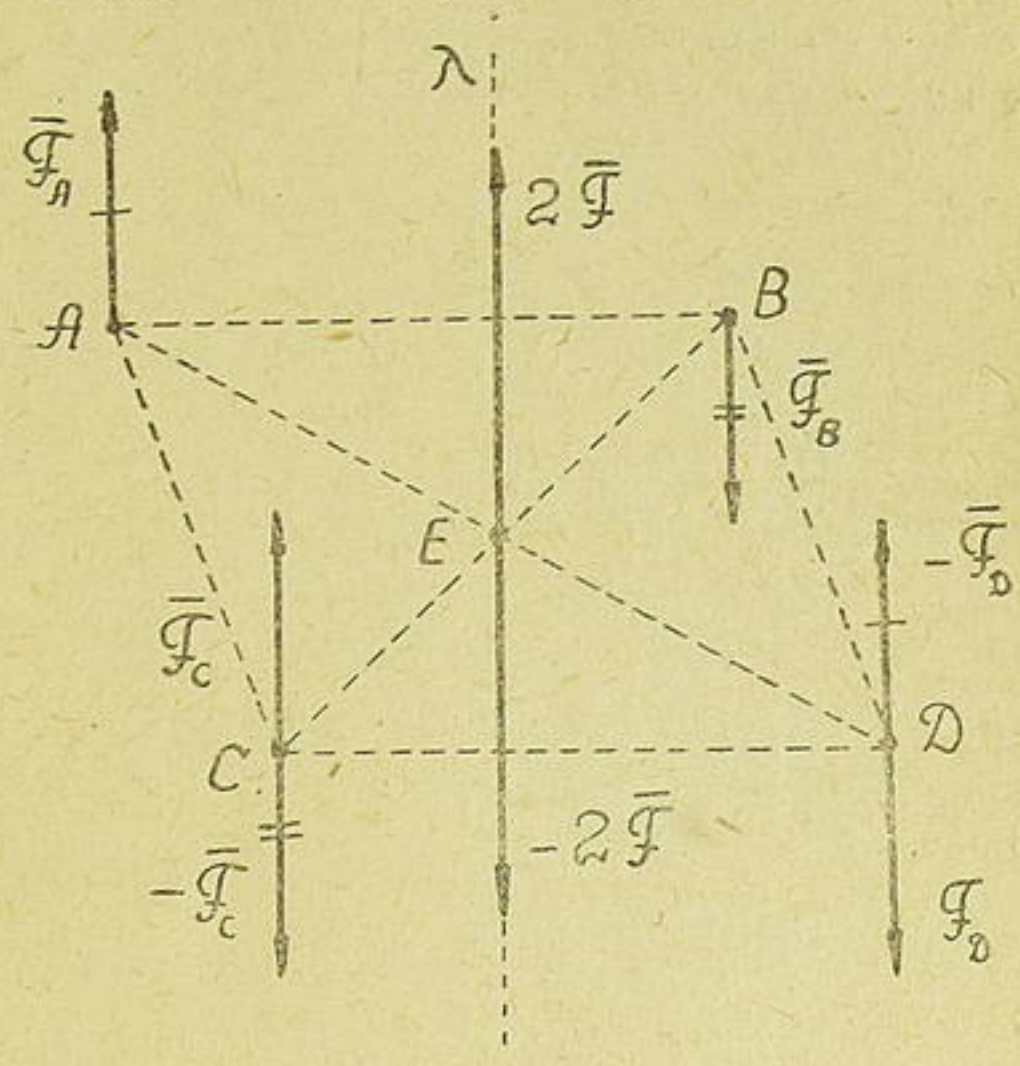
$\bar{P}$*-ն փոխադրելով* C*-ից* D*-ն և գումարելով* B*-ում կիրառված* $(-\bar{F})$ *և* $(-\bar{Q})$ *ուժերը, կստանանք* BD *բազուկ ունեցող* $(\bar{P}_D, -\bar{P}_B)$ *զույգը, որը հենց* $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ *զույգն է պտտված* B*-ի շուրջը կամայորեն ընտրված* φ *անկյամբ։*

բ. Կալծը մարմնի մեջ, որին կիրառված է AB *բազուկ ունեցող* $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$

զույգը, ընտրենք այնպիսի C և D կետեր, որ $\overline{CD}=\overline{AB}$ (նկ. 257)։ Այդ դեպքում ABCD-ն զուգահեռագիծ է և անկյունագծերից յուրաքանչյուրը հատման E կետում բաժանվում է երկու հավասար մասերի։

C կետում կիրառենք $\bar{F}$, $(-\bar{F})$ ուժերը։ Այդ նույն ուժերը կիրառենք և D-ում։ Որովհետև բոլոր ուժերն էլ կիրառված են միևնույն կարծր մարմնին, ապա $\bar{F}_A$ և $\bar{F}_D$ ուժերի համազորը, որի λ ազդման գիծն անցնում է E-ով։

$(-\bar{F}_B)$ և $(-\bar{F}_C)$ ուժերի $(-2\bar{F})$ համազորի ազդման գիծը նույնպես անցնում է E-ով և այդ պատճառով էլ ձուլվում է λ-ի հետ։ Հետևապես $2\bar{F}$ և $(-2\bar{F})$ ուժերը միմյանց համարժեք են զերո-յի, ուստի հետագա քննարկման ենթակա են միայն $\bar{F}_C$ և $(-\bar{F}_D)$ երկու ուժերը, որոնք կազմում են $(\bar{F}_C, -\bar{F}_D)$ զույգը։ Այդ զույգը նման է $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ զույգին։



Նկ. 257

$(\bar{F}_C, -\bar{F}_D)$ զույգը մենք կարող ենք առանձին, եթե $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ զույգը փոխադրենինք իրեն զուգահեռ։

Եթե C և D-ն գտնվում են $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ զույգի π հարթության վրա, ապա փոխադրումը կատարվում է π-ի վրա։ Իսկ եթե C և D-ն չեն գտնվում π-ի վրա, ապա $(\bar{F}_C, -\bar{F}_D)$ զույգի հարթությունը զուգահեռ է π-ին։

գ. $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ զույգի $(-\bar{F})$ ուժը փոխադրենք իր ազդման գծով B-ից C (նկ. 258)։ A և C կետերում կիրառենք $\bar{Q}$ և $(-\bar{Q})$ ուժերը, որոնց ընդհանուր ազդման գիծն է հանդիսանում AC։ $\bar{Q}$ ուժի չափն այնպես ընտրենք, որ $\bar{P}=\bar{F}+\bar{Q}$ համազորն ուղղահայաց լինի AC-ին։ $(-\bar{P})=(-\bar{F})+(-\bar{Q})$։

$\bar{P}_A$ և $(-\bar{P}_C)$ ուժերը կկազմեն մի զույգ, որի բազուկն է AC-ն։

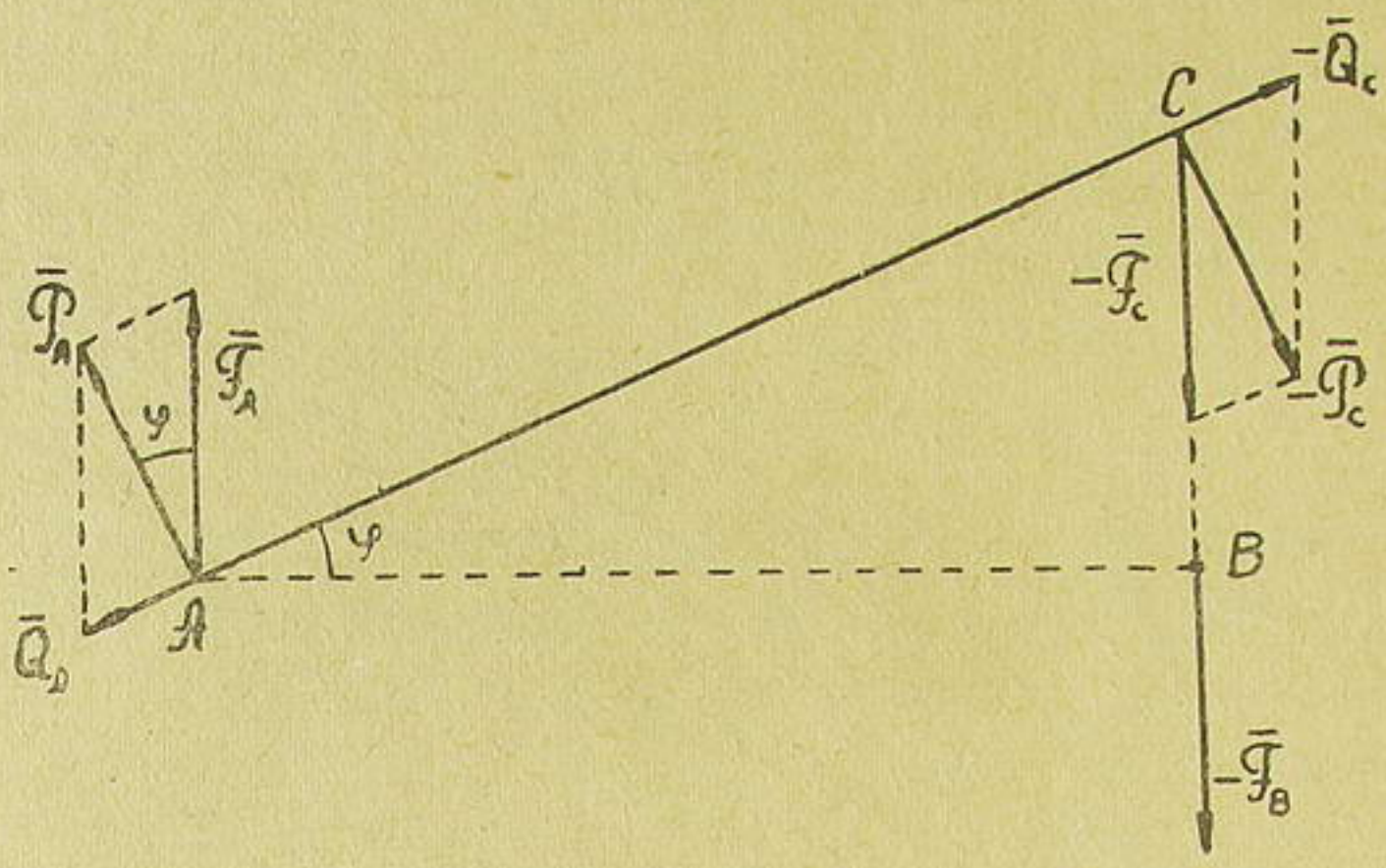
BAC անկյունը նշանակելով φ-ով, տեսնում ենք, որ

$$AC=\frac{AB}{\sin\varphi}, \text{ իսկ } P=F\sin\varphi,$$

Այսինքն, որքան անգամ մեծացվում է զույգի բազուկը, այնքան անգամ էլ փոքրանում է նրա ուժը։ Այդ հետևանքը անմիջապես բղխում է նրանից, որ տարրական օպերացիաները չեն փոխում զույգի մոմենտը, ուստի $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ և $(\bar{P}_A, -\bar{P}_C)$ զույգերի մոմենտների չափերը պետք է հավասար լինեն՝

$$AB\cdot F=AC\cdot P։$$

$(\bar{P}_A, -\bar{P}_C)$ *զույգի բազուկը* $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ *զույգի բազկի հետ կազմում է* φ *անկյունը։* (XI, 13, *ա*) *Թեորեմի հիման վրա մենք կարող ենք զույգը շրջել ցանկացած անկյամբ։ Այսպիսով մենք միշտ հնարավորություն ունենք ստացված զույգը շրջել այնպես, որ նրա բազուկը տվյալ զույգի բազկին հավասար լինի։*



նկ. 258

(XI 13) *Թեորեմը թույլատրում է եզրակացնելու, որ որքան էլ որ զանազանվեն երկու զույգերի բազուկները (թե ըստ մեծության, թե ըստ ուղղության), որքան էլ որ զանազանվեն նրանց ուժերը, տարրական օպերացիաների միջոցով այդ զույգերը կստացվեն մեկը մյուսից,* եթե միայն զույգերի մոմենտները հավասար են:

Բայց տարրական օպերացիաների միջոցով մեկը մյուսից ստացած ուժասիստեմները համարժեք են։ Այդպիսով հանգում ենք մի շատ կարևոր հետևանքի՝

(XI 14) *Հավասար մոմենտներ ունեցող բոլոր զույգերը համարժեք են։*

(XI 12)-*ից հետևում է, որ զույգերի համարժեքության անհրաժեշտ պայմանը հանդիսանում է նրանց մոմենտների հավասարությունը։ Այժմ էլ մենք տեսնում ենք* (XI 14)-*ից, որ այդ պայմանը և անհրաժեշտ է և բավարար։ Այդպիսով ուժերի զույգը բնորոշվում է իր մոմենտով։ Իսկ զույգի էլեմենտները՝ բազուկը, ուժերը, հարթությունը առանձին-առանձին վերցրած չեն կարող բնորոշել զույգը։*

§ 78. Զույգերի գումարումը։ *Այժմ անցնենք կամայական թվով զույգերից բաղկացած ուժասիստեմների քննարկմանը։ Թող այդ զույգերը լինեն* $(\bar{F}_A, -F_B)$, $(\bar{Q}_C, -\bar{Q}_D)$, $(P_E, -\bar{P}_G)$ ..... :

Ակնհայտ է, որ այդ սիստեմի գլխավոր վեկտորը հավասար է զերոյի։ Իսկ գլխավոր մոմենտը հավասար է զույգերի մոմենտների գումարին։ Եվ իսկապես, եթե H-*ը մոմենտների կենտրոնն է, ապա գլխավոր մոմենտը՝*

$$\bar{M} = \bar{M}_H(\bar{F}_A) + \bar{M}_H(-\bar{F}_B) + \bar{M}_H(\bar{Q}_C) + \bar{M}_H(-\bar{Q}_D) + \dots$$
$$= [M_H(\bar{F}_A) + \bar{M}_H(-F_B)] + [\bar{M}_H(Q_C) + \bar{M}_H(-\bar{Q}_D)] + \dots :$$

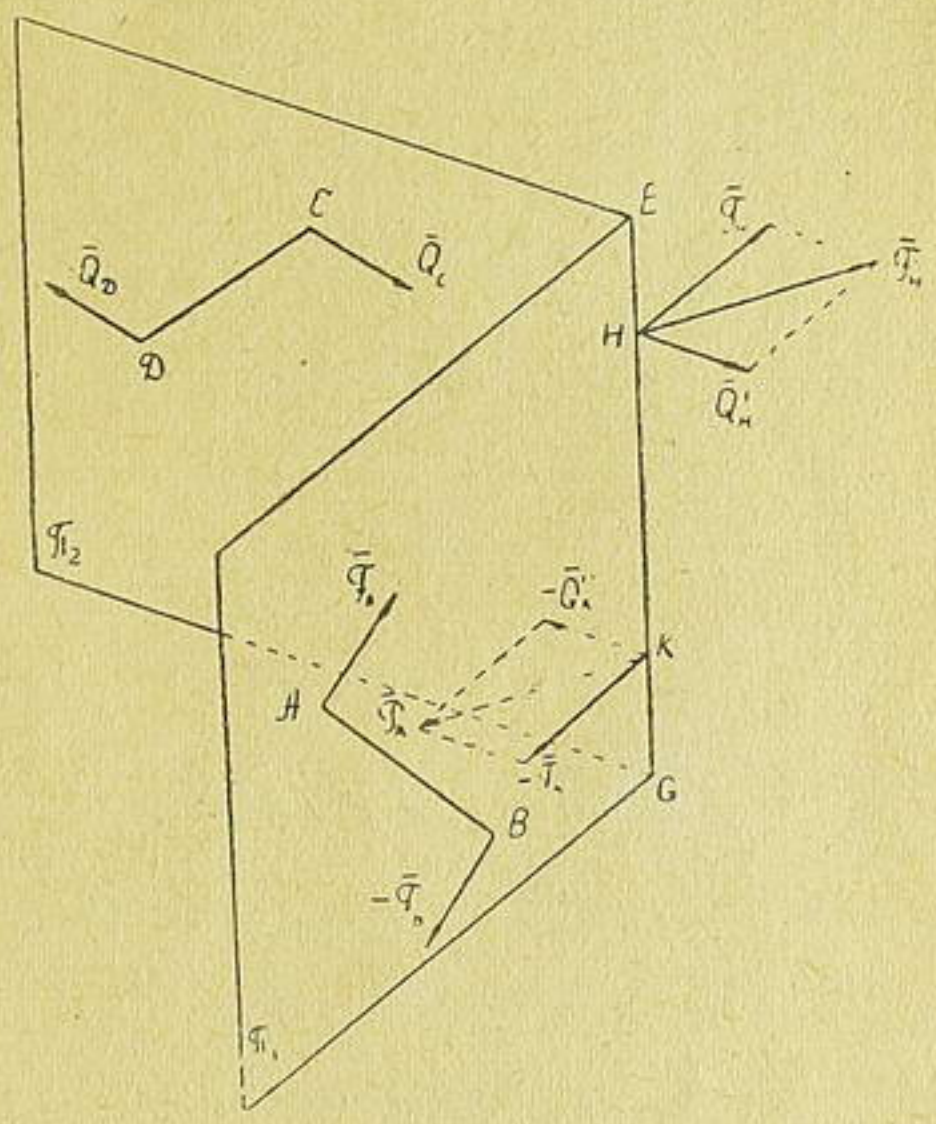
Առաջին քառակուսի փակագծում $\bar{F}_A$ և $(-\bar{F}_B)$ ուժերի մոմենտների գումարն է. այդ գումարը հենց $(F_A, -\bar{F}_B)$ զույգի մոմենտն է: Ճիշտ նույնպես երկրորդ քառակուսի փակագծի մոմենտների գումարը $(Q_C, -Q_D)$ զույգի մոմենտն է: Այդպիսով, իսկապես, մեր ուժախտեմի գլխավոր մոմենտը հավասար է այդ սխեմը կազմող զույգերի մոմենտների գումարին:

Թեորեմ.

(XI 15) *Կամայական թվով զույգերից բաղկացած ուժախտեմը համարժեք է մի զույգի, որի մոմենտը հավասար է կազմող զույգերի մոմենտների գումարին:*

Ապացուցենք այդ թեորեմը նախ այն դեպքի համար, երբ սխեմը բաղկացած է երկու զույգերից՝ $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ և $(\bar{Q}_C, -\bar{Q}_D)$:

Թող առաջին զույգի հարթությունը և մոմենտանիը լինեն π_1 և $\bar{M}_1$, իսկ երկրորդ զույգի հարթությունը և մոմենտը՝ π_2 և $\bar{M}_2$: Հնարավոր են երկու դեպքեր, կամ π_1 և π_2 հատվում են, կամ այդ հարթությունները զուգահեռ են: Ինչնարկենք նախ առաջին դեպքը (նկ. 259):



նկ. 259

Ենթադրենք π_1 և π_2 հատվում են EG ուղղի վրայով: Այդ ուղղի վրա, կամ նրան զուգահեռ, վերցնենք HK հատվածը: $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ զույգը փոխարինենք նրան համարժեք $(\bar{F}'_H, -\bar{F}'_K)$ զույգով, որի բազուկն է HK, մոմենտն էլ հավասար է $\bar{M}_1$, իսկ հարթությունը՝ $\pi'_1 \parallel \pi_1$:

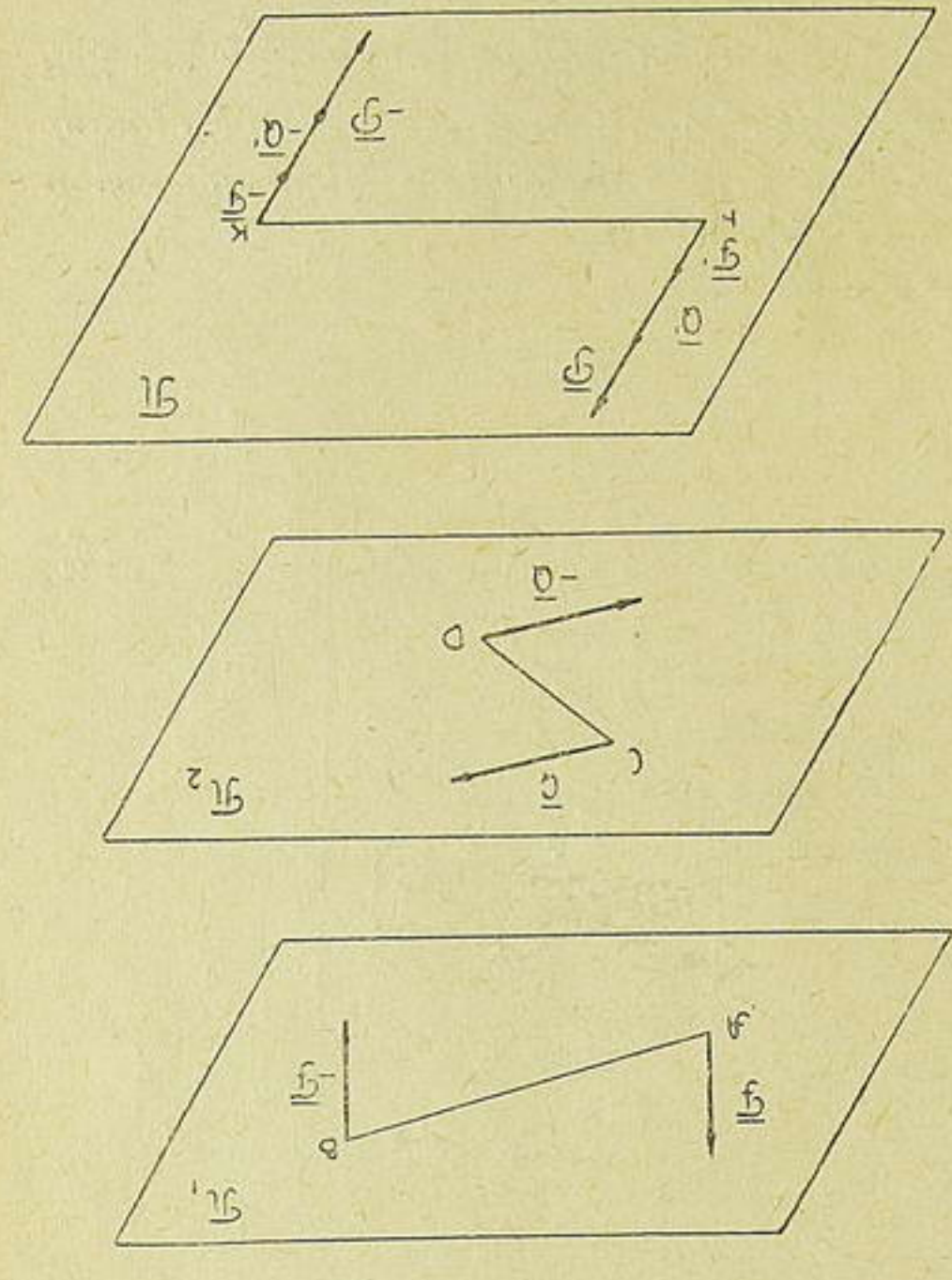
Ճիշտ նույն ձևով էլ $(\bar{Q}_C, -\bar{Q}_D)$ զույգը փոխարինենք նրան համարժեք $(\bar{Q}'_H, -Q'_K)$ զույգով, որի բազուկը, մոմենտը և հարթությունն են HK, $\bar{M}_2$ և π'_2. $\pi'_2 \parallel \pi_2$: (π'_1 և π'_2 համընկնում են π_1 և π_2 հետ, եթե HK վերցված է EG-ի վրա): Այժմ H կետում կիրառված են $\bar{F}'$ և $\bar{Q}'$ ուժերը, իսկ K-ում՝ $(-\bar{F}')$ և $(-\bar{Q}')$: Թող H և K-ում կիրառված ուժերի համազորները լինեն $\bar{P}=(\bar{F}'+\bar{Q}')$ և $(-\bar{P})=(-\bar{F}')+(-\bar{Q}')$ փոխարինելով $\bar{F}'$ և $\bar{Q}'$, $(-\bar{F}')$ և $(-\bar{Q}')$ ուժերը նրանց համազորներով, կստանանք $(P_H, -\bar{P}_K)$ զույգը, որը համարժեք է տրված $(F_A, -\bar{F}_B)$ և $(\bar{Q}_C, -\bar{Q}_D)$ զույգերին:

Այդպիսով (XI 15) թեորեմն ապացուցված է այն դեպքի համար, երբ սխեմը բաղկացած է երկու զույգերից, որոնց հարթությունները հատվում են:

Այժմ անցնենք երկրորդ դեպքին, երբ π_1 և π_2 զույգերի հարթու-

թյուններըը զուգահեռ են միմյանց, կամ մասնավոր դեպքում ի մի են ձուլվում (նկ. 260 ա, բ)։

Վերցնենք π_1, π_2 հարթություններին զուգահեռ կամայական HK հատվածը։ $(F_A, -\bar{F}_B)$ զույգը փոխարինենք նրան համարժեք $(\bar{F}'_H, -F'_K)$ զույգով, իսկ $(\bar{Q}_C, -\bar{Q}_D)$ զույգը $(\bar{Q}'_H, -Q'_K)$ համարժեք զույգով։ Այդ երկու զույգերն էլ կդասավորվեն HK բազուկով անցնող և π_1 ու π_2-ին զուգահեռ հարթության վրա։ Որովհետև զույգի ուժերն ուղղահայաց են նրա բազուկին, ապա $F'_H \uparrow\uparrow \bar{Q}'_H$, $(-F'_K)\uparrow\uparrow(-\bar{Q}'_K)$. $\bar{F}'_H$ և $\bar{Q}'_H$ ուժերը փոխարինելով նրանց համազոր P_H-ով, իսկ $(-F'_H)$ և $(-\bar{Q}'_K)$ ուժերը $(-\bar{P}_K)$ համազորով, կստանանք $(\bar{P}_H, -P_K)$ զույգը, որը համարժեք է տրված $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ և $(Q_C, -\bar{Q}_D)$ երկու զույգերին։



Նկ. 260 ա

Այդպիսով, ինչպես π_1 և π_2 հարթությունների զուգահեռության դեպքում, այնպես և այն դեպքում, երբ այդ հարթությունները հատվում են, միշտ գոյություն ունի մեկ զույգ, որը համարժեք է տվյալ զույգերին։ Տվյալ $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ և $(\bar{Q}_C, -\bar{Q}_D)$ զույգերի մոմենտները մենք արդեն նշանակել ենք $\bar{M}_1$ և $\bar{M}_2$, իսկ նրանց համարժեք $(P_H, -P_K)$ զույգի մոմենտը նշանակենք $\bar{M}$։

Ըստ (XI 5)-ի համարժեք սխեմաների գլխավոր մոմենտները պետք է հավասար լինեն։ Բայց մեզ մոտ $\bar{P}_H, -\bar{P}_K$ սխեմայի գլխավոր մոմենտը հավասար է $(P_H, -\bar{P}_K)$ զույգի $\bar{M}$ մոմենտին, իսկ $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ և $(\bar{Q}_C, -\bar{Q}_D)$ երկու զույգերի սխեմայի գլխավոր մոմենտը հավասար է այդ զույգերի $\bar{M}_1 + \bar{M}_2$ մոմենտների գումարին։ Հետևապես $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$։

Այդ հետևանքին կարելի է հանգել և այլ կերպ. $(\bar{F}'_H, -\bar{F}'_K)$ զույգերի մոմենտը հավասար է $\overline{KH} \times F'$։ Եվ որովհետև այդ զույգը համարժեք է $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ զույգին, որի մոմենտն է $\bar{M}_1$, ապա

$$\overline{KH} \times F' = \bar{M}_1;$$

Այդպես էլ

$$\overline{KH} \times Q' = M_2.$$

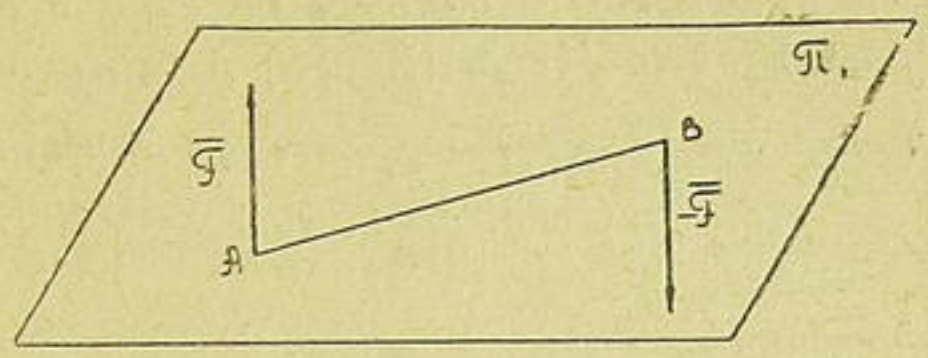
$(P_H, -\bar{P}_K)$ զույգի մոմենտը՝

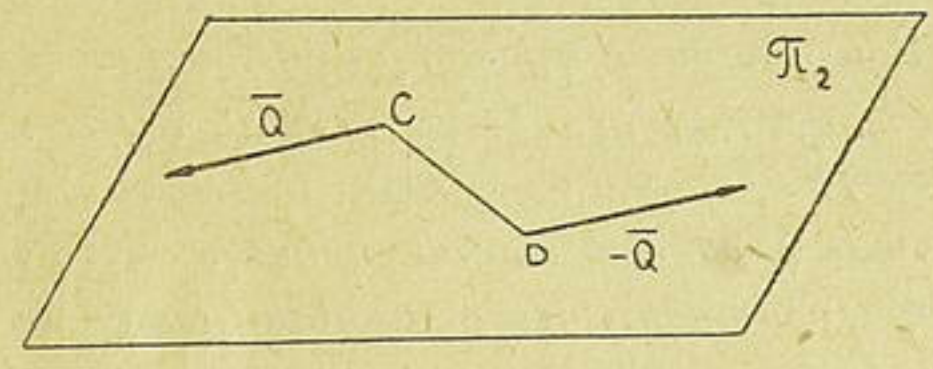
$$\bar{M} = \overline{KH} \times \bar{P} = \overline{KH} \times (\bar{F}' + \bar{Q}') = \overline{KH} \times \bar{F}' + \overline{KH} \times \bar{Q}' = \bar{M}_1 + \bar{M}_2;$$

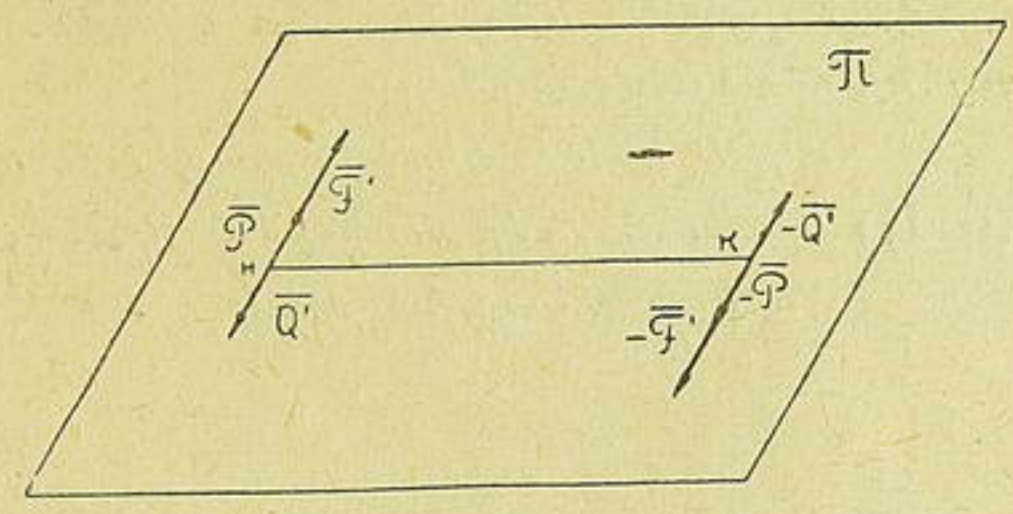
Սակայն պետք է ի նկատի ունենալ, որ եթե տրված զույգերի հարթությունները զուգահեռ են միմյանց, ապա $\overline{M}$, $\overline{M}_1$ *և* $\overline{M}_2$ *մոմենտները նույնպես զուգահեռ են միմյանց.*

($\overline{M}_1 \uparrow\uparrow \overline{M}_2 \uparrow\uparrow \overline{M}$ *260 ա. նկարում,* $\overline{M}_1 \uparrow\downarrow \overline{M}_2$ *260 բ. նկարում):*

Եթե սիստեմը բաղկացած է ոչ թե երկու, այլ n զույգերից, որոնց մոմենտներն են $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots \overline{M}_n$, *ապա հետևողականորեն փոխարինելով երկու զույգը մեկով, ինչպես հենց նոր էր ցույց տված, վերջի-*







Նկ. 260 բ.

նից վերջնա կատանանք տրված n զույգերին համարժեք մեկ զույգ: Այդ զույգի մոմենտն է՝

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M}_i:$$

Այդպիսով (XI 15) թեորեմն ապացուցված է լիովին:

Արդեն ասված է եղել, որ (կարծր մարմնին կիրառած) զույգը կատարելապես քնորոշվում է իր մոմենտով: Այստեղից պարզ է, որ n զույգերը մեկ զույգով փոխարինելու դեպքում, մեզ հարկավոր է միայն, տվյալ զույգերի մոմենտները գումարելով, որոշել նրանց համարժեք զույգի $\overline{M}$ *մոմենտը:*

Եթե համարժեք զույգի $\overline{M}$ *մոմենտը հավասար զրո՞ զար զերոյի, այդ կնշանակեր, որ ուժասիստեմը կազմված է զերոյի համարժեք n զույգերից:*

Կարծր մարմնին կիրառված մի քանի զույգերը մի զույգով փոխարինելու պրոցեսը կոչվում է զույգերի գումարում:

Թեորեմ.

(XI 16) *Յուրաքանչյուր ուժասիստեմ, որի գլխավոր վեկտորը զերո է, համարժեք է զույգի, որի մոմենտը հավասար է ուժասիստեմի գլխավոր մոմենտին:*

Դիցուք K կարծր մարմնին կիրառված են n ուժեր $\overline{F}_s, A_s$ *(այսինքն* A_1 *կետում կիրառված է* $\overline{F}_1$ *ուժը,* A_2 *կետում՝* $\overline{F}_2$ *ուժը,* A_s*-ում՝* $\overline{F}_s$ *և այլն) որոնց գլխավոր վեկտորը*

$$\overline{V} = \Sigma \overline{F}_s = 0:$$

K մարմնի կամայական B կետում կիրառենք $(-\bar{F}_1)$, $(-\bar{F}_2)$, ..., $(-\bar{F}_n)$ *ուժերը. այդ ուժախումբը համարժեք է զերոյի: Այժմ յուրաքանչյուր երկու ուժերը՝*

$$\bar{F}_{1A_1} \text{ և } (-\bar{F}_{1B}), \ldots\ldots \bar{F}_{s,A_s} \text{ և } (-\bar{F}_{sB}), \ldots, \quad \bar{F}_{n,A_n} \text{ և } (-\bar{F}_{nB}$$

կազմում են մեկական զույգ: Այսպիսով n ուժերը փոխարինվեցին n զույգերով, որոնք համաձայն (XI 15)*-ի համարժեք են մի զույգի:*

Քանի որ $(\bar{F}_{s,A_s}, -\bar{F}_{sB})$ *զույգի մոմենտն է*

$$\overline{BA}_s \times \bar{F}_s = \bar{M}_B(\bar{F}_{s,A_s}),$$

ապա համարժեք զույգի մոմենտը՝

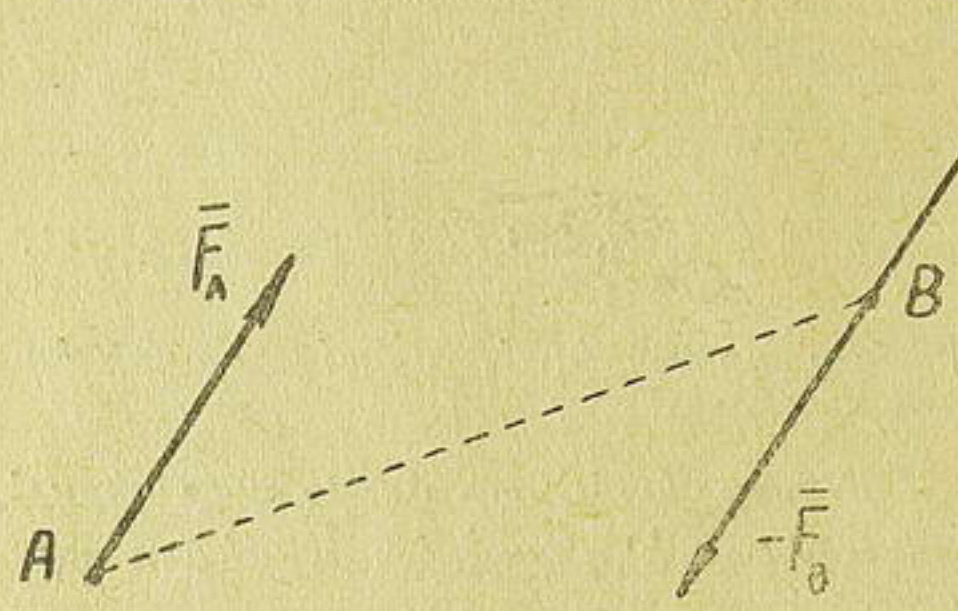
$\Sigma \bar{M}_B(\bar{F}_{s,A_s})$ *հավասար է ուժախտեմի* $\bar{M}_B$ *գլխավոր մոմենտին:*

Այս դեպքում գլխավոր մոմենտը տարածության բոլոր կետերի նկատմամբ նույնն է, որովհետև ուժերի գլխավոր վեկտորը՝ $\bar{V}=0$:

§ 79. Կարծր մարմնին կիրառած կամայական ուժախտեմի վերածումը: *§ 75-ում ապացած է եղել, որ տվյալ սիստեմին համարժեք ամենապարզ ուժախտեմներ գտնելու պրոցեսը կոչվում է ուժերի վերածում (կամ գումարում):*

Կամայական ուժախտեմի վերածմանն անցնելու համար ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

(XI 17) *Եթե A և B կետերը պատկանում են մի կարծր մարմնին, ապա* $\bar{F}_A$ *ուժը համարժեք է* $\bar{F}_B$ *ուժին և* $(\bar{F}_A, -\bar{F}_B)$ *զույգին, որի մոմենտը հավասար է* $\overline{BA} \times \bar{F} = \bar{M}_B(\bar{F}_A)$:



Նկ. 261

(Հիշենք, որ $\bar{F}_A$*-ն նշանակում է՝* $\bar{F}$ *ուժը կիրառված A կետում:* $\bar{F}_B$*-ն — միևնույն* $\bar{F}$ *ուժը, բայց կիրառված B կետում):*

Ենթադրենք տրված է $\bar{F}_A$ *ուժը (նկ. 261). B-ում կիրառենք, զերոյի համարժեք* $\bar{F}_B$ *և* $(-\bar{F}_B)$ *ուժախումբը:* $\bar{F}_A$ *և* $(-\bar{F}_B)$ *ուժերը միասին կազմում են մի զույգ: Այդպիսով թեորեմը ապացուցված է:*

Հարկավոր է ուշադրություն դարձնել այն բանին, որ, որքան B կետը հեռու է $\bar{F}_A$ *ուժի ազդման գծից, այնքան մեծ է* $\bar{M}=\overline{BA}\times\bar{F}$ *զույգի մոմենտը: Եթե B կետը գտնվում է* $\bar{F}_A$*-ի ազդման գծի վրա, ապա* $\overline{BA} \parallel \bar{F}$, $\overline{BA}\times\bar{F}=0$ *(նկար 262), իսկ զույգը, որի մոմենտը հավասար է զերոյի, համարժեք է զերոյի: Այդ պատճառով էլ այդ դեպքում* $\bar{F}_A$*-ն համարժեք է* $\bar{F}_B$*-ին, ինչպես և պետք է լինի ըստ ուժի փոխադրման սկզբունքի:*

Ընդհանուր դեպքում, երբ $\bar{F}_A$-ն փոխարինվում է $\bar{F}_B$ ուժով և $(\bar{F}_A - \bar{F}_B)$ զույգով, B կետը կոչվում է վերածման կենտրոն:

Մինչև այժմ մենք քննարկել ենք սիստեմների մասնավոր դեպքերը՝ երկու զուգահեռ ուժերի սիստեմը, զույգը, կամայական թվով զույգերից կազմված սիստեմը և ուժասիստեմը, որի գլխավոր վեկտորը զրո էր: Օգտվելով (XI 16)-ից, մենք կարող ենք ապացուցել ըստ ցանկության ընտրած որևէ սիստեմի համար արդյունքի մի շատ կարևոր թեորեմ:



ն. 262

(XI 18) **Կարծր մարմնին կիրառած որևէ n ուժերի սիստեմը համարժեք է կամայական B կետում կիրառած ուժի և զույգի համախմբին: Ուժը հավասար է սիստեմի գլխավոր վեկտորին, իսկ զույգի մոմենտը հավասար է սիստեմի գլխավոր մոմենտին B կետի նկատմամբ:**

Թող $\bar{V}$-ն սիստեմի գլխավոր վեկտորը լինի, իսկ $\bar{M}_B$-ն սիստեմի գլխավոր մոմենտը B կետի նկատմամբ: B կետում, որը պատկանում է նույն կարծր մարմնին, որի վրա ազդում է տվյալ ուժերի սիստեմը, կիրառենք վերոյի համարժեք F_B և $(-F_B)$ երկու ուժեր: Այդ ուժերն այնպես ընտրենք, որ

$$\bar{F}_B = \bar{V}, \quad (-\bar{F}_B) = (-\bar{V}):$$

n ուժերի տվյալ սիստեմը և $(-\bar{F}_B)$ ուժը միասին կկազմեն մի այնպիսի սիստեմ, որի գլխավոր վեկտորը՝ $\bar{V} + (-F_B) = 0$. համաձայն (XI 16)-ի այդ սիստեմը համարժեք է զույգի: Իսկ ուժասիստեմի $\bar{V}$ գլխավոր վեկտորին հավասար $\bar{F}_B$ ուժը կարելի է նրա ազդման գծով փոխադրել որևէ կետ:

$\bar{F}_B$ ուժի և զույգի համախումբը համարժեք է տվյալ n ուժերի սիստեմին:

Ապացուցենք, որ զույգի մոմենտը հավասար է սիստեմի $\bar{M}_B$ գլխավոր մոմենտին վերածման B կենտրոնի նկատմամբ: Եվ իսկապես, համարժեք սիստեմները պետք է ունենան միևնույն գլխավոր մոմենտները [(XI 5) թեորեմը]: Հետևապես զույգի մոմենտը նշանակելով $\bar{\mu}$-ով կունենանք՝

$$\bar{M}_B(\bar{F}_B) + \bar{\mu} = \bar{M}_B,$$

բայց $\bar{M}_B(\bar{F}_B) = 0$ և $\bar{\mu} = \bar{M}_B$. այդպիսով թեորեմը լիովին ապացուցվեց:

Կարևոր է ի նկատի ունենալ, որ ուժի և զույգի համախմբման մեջ սիստեմի գլխավոր վեկտորին հավասար ուժը ամենևին էլ կապված չէ վերածման կենտրոնից: Իսկ զույգի մոմենտը հավասար է սիստեմի գլխավոր մոմենտին և դրա համար էլ փոխվում է վերածման կենտրոնը փոխվելու հետ միասին:

(XI 18) *Թեորեմն ունի մի շարք կարևոր հետևանքներ։*

Միևնույն գլխավոր վեկտոր և ընդհանուր կենտրոնի նկատմամբ
(XI 19) *միևնույն գլխավոր մոմենտ ունեցող բոլոր ուժաստեմները հա-մարժեք են։*

Այժ ապացուցելու համար թննարկենք (S) և (σ) ուժաստեմները, որոնց գլխավոր վեկտորներն ու գլխավոր մոմենտներն են համապատաս-խանաբար $\overline{V}$, $\overline{M}_B$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\mu}_B$։

Համաձայն (XI 18)-*ի* (S)-*ը համարժեք է* $\overline{F}=\overline{V}$ *ուժին և զույգին, որի մոմենտն է* $\overline{M}_B$։

Իսկ (σ)-*ն համարժեք է* $\overline{Q}=\overline{\varphi}$ *ուժին և զույգին, որի մոմենտն է* $\overline{\mu}_B$։ *Որովհետև զույգը կատարելապես բնորոշվում է իր մոմենտով, ապա* $\overline{M}_B$ *և* $\overline{\mu}_B$ *հավասար մոմենտներ ունեցող այդ երկու զույգերը համարժեք են։ Բացի դրանից,* $\overline{V}=\overline{\varphi}$, *ուստի* $\overline{F}=\overline{Q}$, *և վերածման ընդհանուր կենտ-րոնի շնորհիվ այդ ուժերի ազդման գծերը համընկնում են։ Հետևապես* $\overline{F}$ *ուժը համարժեք է* $\overline{Q}$։

Այսպիսով ուժի և զույգի երկու համախմբերը համարժեք են։ Այդ պատճառով էլ (S) *ու* (σ) *սիստեմները նույնպես համարժեք են։*

(XI 5) *և* (XI 19)-*ի համեմատումը ցույց է տալիս, որ երկու սիս-տեմների գլխավոր վեկտորների միմյանց հավասար լինելը և գլխավոր մո-մենտների միմյանց հավասար լինելը հանդիսանում է այդ սիստեմների համարժեքության ոչ միայն անհրաժեշտ, այլ և բավարար պայմանը։*

§ 80. Դինամա. համազոր. կարծր մարմնի հավասարակշռության անհրաժեշտ եվ բավարար պայմանները։

1° *Ուժի և նրան ուղղահայաց հարթություն ունեցող զույգի համա-խումբը կոչվում է դինամա։ Ինչպես հայտնի է (գլ. X § 71) ուժաստե-մի կենտրոնական առանցքը հանդիսանում է այն D կետերի երկրաչա-փական տեղը, որոնց նկատմամբ սիստեմի գլխավոր մոմենտը զուգահեռ է գլխավոր վեկտորին՝* $\overline{M}_D \parallel \overline{V}$։

Այստեղից պարզ է, որ, եթե որպես վերածման կենտրոն ընտրված է կենտրոնական առանցքի կետերից մեկը, ապա կստանանք ուժ և այն-պիսի զույգ համախումբ, որպիսի զույգի $\overline{M}_D$ *մոմենտը զուգահեռ կլինի գլխավոր վեկտորին։*

Բայց զույգի մոմենտն ուղղահայաց է իր հարթությանը և դրա հա-մար էլ ուժը և այդպիսի զույգը կազմում են դինամա։

Այդ արդյունքը նշանակում է, որ՝

(XI 20) *Ուժերի յուրաքանչյուր սիստեմ, որի գլխավոր վեկտորը զերո չէ, կարող է վերածվել դինամայի։*

Դրա համար, ուժերի սիստեմը փոխարինելով ուժի և զույգի համա-խմբով, վերածման կենտրոնը պետք է ընտրել կենտրոնական առանցքի վրա։

2°. *Թեորեմ.*

Յուրաքանչյուր ուժաստեմ, որը բավարարում է $\overline{V}\neq 0$,
(XI 21) $\overline{V}\cdot\overline{M}_B=0$ *պայմաններին, որտեղ* $\overline{V}$-*ն գլխավոր վեկտորն է, իսկ* $\overline{M}_B$ *գլխավոր մոմենտն է կամայական B կենտրոնի նկատ-մամբ, ունի համազոր։*

Ինչպես հայտնի է (պլ. X § 72), եթե

$$\overline{V} \neq 0, \text{ և } \overline{V} \cdot \overline{M}_B = 0,$$

ապա կենտրոնական առանցքի որևէ D կետի նկատմամբ սիստեմի գլխավոր մոմենտը $\overline{M}_D = 0$: Բայց $\overline{M}_D$-ն հավասար է այն դինամայի պույդի մոմենտին, որը համարժեք է մեր սիստեմին: Իսկ պույդը, որի մոմենտը հավասար է զերոյի, համարժեք է զերոյի: Այդ պատճառով էլ, երբ՝

$$\overline{V} \neq 0, \ \overline{V} \cdot \overline{M}_B = 0$$

պայմաններըը բավարարված են, ուժասիստեմի համարժեք դինամատն պատնում է մեկ ուժ: Հենց այդ ուժն է սիստեմի համազորը: Հաճախորը հավասար է սիստեմի գլխավոր վեկտորին, իսկ նրա ազդման գիծն էլ հանդիսանում է այդ սիստեմի կենտրոնական առանցքը:

(XI 21)-ը մեզ թույլ է տալիս ցույց տալու մի քանի դեպքեր, երբ կարծր մարմնին կիրառված ուժերի սիստեմը համազոր ունի:

(XI 22) *Կամայական թվի զուգահեռ ուժերի սիստեմը, որի գլխավոր վեկտորը զերո չէ, համազոր ունի:*

Իսկապես թող A_1, A_2,…,A_n կետերում համապատասխանաբար կիրառված ուժերը միմյանց զուգահեռ լինեն, այսինքն մասամբ համազուգահեռ լինեն, մասամբ՝ հակազուգահեռ:

Ուժերից մեկին համազուգահեռ միավոր վեկտորը նշանակենք $\hat{i}$:

Այն ժամանակ ըստ ցանկության ընտրած $\overline{F}_S$ ուժի համար կարող ենք գրել $\overline{F}_S = F_S \hat{i}$, որտեղ F_S-ը այդ ուժի թվական արժեքն է: Այդ ուժի մոմենտը կամայական B կետի նկատմամբ:

$$\overline{M}_s(\overline{F}_s) = \overline{BA} \times \overline{F} = (F_s \overline{BA_s}) \times \hat{i}:$$

Հետևապես սիստեմի գլխավոր մոմենտը

$$\overline{M}_B = \Sigma \overline{M}_B(\overline{F}) = \Sigma (F_s \overline{BA_s} \times \hat{i}) = (\Sigma F_s \overline{BA_s}) \times \hat{i} \perp \hat{i}:$$

Իսկ գլխավոր վեկտորը

$$\overline{V} = \Sigma \overline{F}_s = (\Sigma F_s \hat{i}) = (\Sigma F) \hat{i} \parallel \hat{i}:$$

Եթե $M_B \perp \hat{i}$, իսկ $\overline{V} \parallel \hat{i}$, ապա ակնհայտ է, որ $\overline{V} \cdot \overline{M}_B = 0$: Եվ քանի որ զուգահեռ ուժերի դեպքում, որոնց համար $\overline{V} \neq 0$, տեղի ունի և $\overline{V} \cdot \overline{M}_B = 0$ պայմանը, ապա համաձայն (XI 21)-ի զուգահեռ ուժերի այդպիսի սիստեմը համազոր ունի: (XI 22)-ից հետևում է, որ

(XI 23) *Համազուգահեռ ուժերի սիստեմը միշտ համազոր ունի:*

Եվ իրոք, եթե բոլոր ուժերը համազուգահեռ են, նրանց գլխավոր վեկտորը չի կարող զերո լինել, այսինքն՝ (XI 22)-ում բերված միակ պայմանը պահպանված է: Հետևապես սիստեմը պետք է համազոր ունենա:

(XI 24) *Մի հարթության վրա դասավորված ուժերի սիստեմը համազոր ունի, եթե նրա գլխավոր վեկտորը զերո չէ:*

Այդ ապացուցելու համար մոմենտների B կենտրոնը վերցնենք սիստեմի բոլոր ուժերը պարունակող π հարթության վրա: Այն ժամանակ յուրաքանչյուր ուժի մոմենտը ուղղահայաց կլինի π-ին. այդ պատճառով էլ գլխավոր մոմենտը նույնպես ուղղահայաց կլինի π-ին: Իսկ սիստեմի

գլխավոր վեկտորը $\overline{V} \parallel \pi$: *Հետևապես* $\overline{V} \neq 0$ *պայմանի հետ միասին բավարարվում է և* $\overline{V} . \overline{M}_B = 0$ *պայմանը: (XI 21)-ի համաձայն այդ սիստեմը համազոր ունի:*

3°. Դիտենք այն դեպքը, երբ միաժամանակ թե $\overline{V}=0$ *և թե* $\overline{M}_B = 0$: *Որովհետև* $\overline{V}=0$ *ուժասիստեմը—համաձայն (X 16)-ի պետք է վերածվի զույգի: Քանի որ* $\overline{M}_B=0$ *զույգի երկու ուժերի ազդման գծերը համընկնում են: Այդպիսի երկու ուժերը կազմում են զրո ուժախումբ:*

Հետևապես կարծր մարմնին կիրառված ուժասիստեմը, որի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը հավասար են զրոյի, համարժեք է զրոյի:

Այդպիսի ուժասիստեմը չի թողնում ոչ մի ազդեցություն կարծր մարմնի վրա և չի խախտի վերջինիս հավասարակշռությունը:

Ասածից բղխում է, որ՝

$$\overline{V}=0 \text{ և } \overline{M}_B=0$$

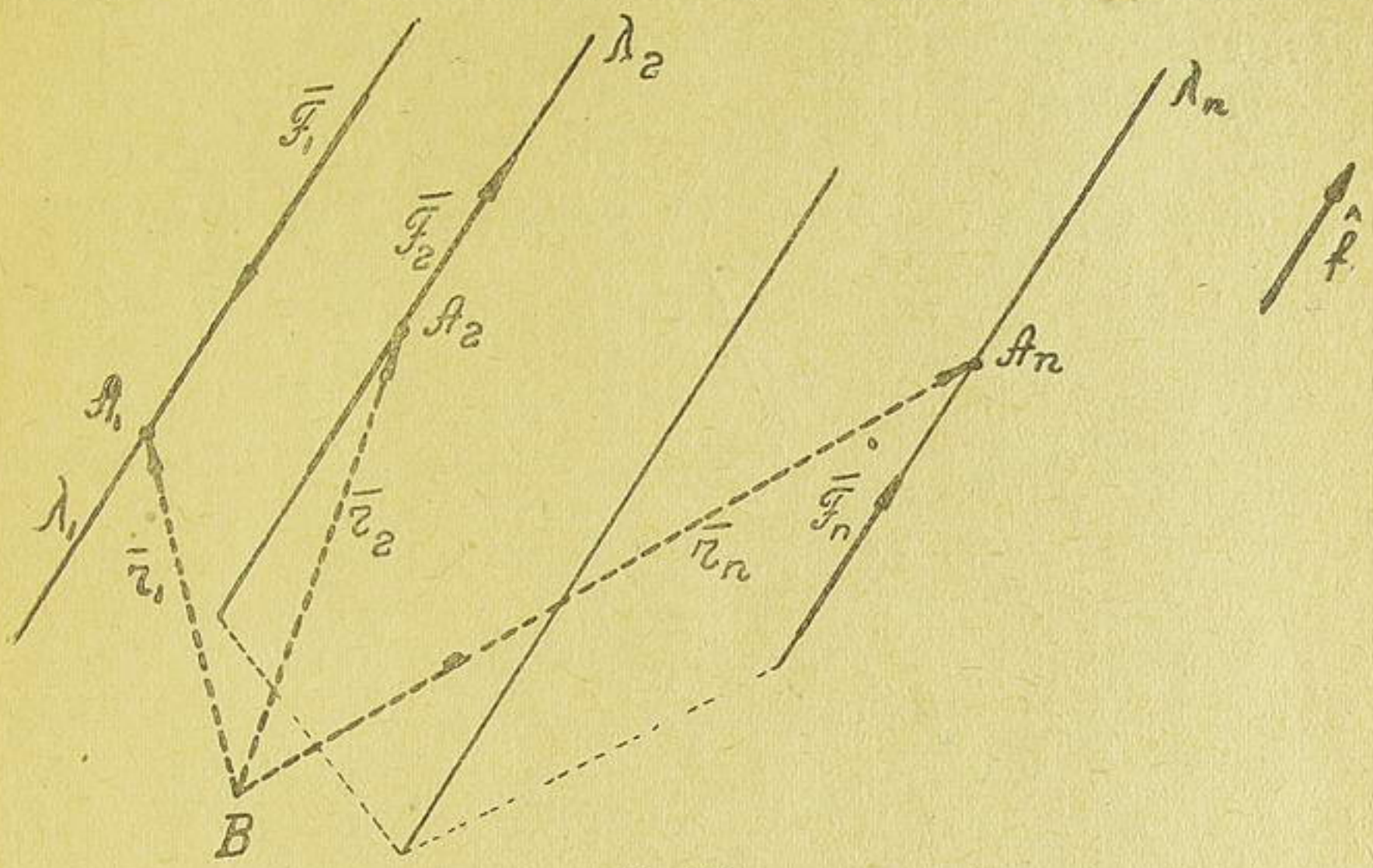
պայմանները ոչ միայն անհրաժեշտ են, այլ նաև բավարար են կարծր մարմնի հավասարակշռության համար:

ԳԼՈՒԽ XII

ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒԺԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆ

ԾԱՆՐՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ

§ 81. Զուգահեռ ուժերի գլխավոր վեկտորի եվ գլխավոր մոմենտի տրամաբանությունները: *Դիցուք կամքի մարմնին կիրառված է $F_1, F_2, \ldots F_n$ զուգահեռ ուժերի մի սիստեմ, որոնց ազդման գծերն են $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ (նկ. 263):*



Նկ. 263

Նշանակենք $\hat{i}$-ով որևէ միավոր վեկտոր, որը զուգահեռ է սիստեմի ուժերից մեկին (օրինակ, թող $\hat{i} \uparrow\uparrow \bar{F}_2$): Այն ժամանակ՝

$$F_1 = F_1\hat{i},\ \bar{F}_2 = F_2\hat{i},\ \ldots\ \bar{F}_s = F_s\hat{i},\ \ldots\ F_n = F_n\hat{i},$$

որտեղ $F_1, F_2, \ldots F_s, \ldots F_n$-ը $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots \bar{F}_s, \ldots \bar{F}_n$ ուժերի թվական արժեքներն են (նկ. 263-ում $F_1<0$, $F_2>0$, $F_n>0$):

Ուժերի այդ սիստեմի գլխավոր վեկտորը՝

$$\bar{V} = \Sigma\bar{F}_s = \Sigma F_s\,\hat{i} = (\Sigma F_s)\,\hat{i} = V\hat{i}, \qquad \text{(XII 1)}$$

որտեղ $V = \Sigma F_s$ $\bar{V}$-ի թվական արժեքն է:

Ընտրենք $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s \ldots \lambda_n$ *ազդման գծերի վրա մեկական՝* $A_1, A_2 \ldots A_s \ldots A_n$ *կամայական կետեր։*

Այն ժամանակ $\overline{F}_s$ *ուժի մոմենտը* B *կենտրոնի նկատմամբ՝*

$$\overline{M}_B(\overline{F}_s) = \overline{BA}_s \times \overline{F}_s = \overline{BA}_s \times F_s\hat{i} = (F_s\overline{BA}_s) \times \hat{i},$$

իսկ զուգահեռ ուժերի սիստեմի գլխավոր մոմենտը՝

$$\overline{M}_s = \Sigma(F_s\overline{BA}_s) \times \hat{i} = (\Sigma F_s\overline{BA}_s) \times \hat{i}$$

կամ $\overline{BA}_s$*-ը նշանակելով* $\bar{r}_s$ *(նկ. 363),*

$$\overline{M}_s = (\Sigma F_s\overline{BA}_s) \times \hat{i} = (\Sigma F_s\bar{r}_s) \times \hat{i}. \qquad \text{(XII 2)}$$

(XII 2)*-ից հետևում է, որ* $\overline{M}_B$*-ն կարող է դառնալ զրո միայն այն դեպքերում, երբ*

կամ $\Sigma F_s\bar{r}_s = 0$

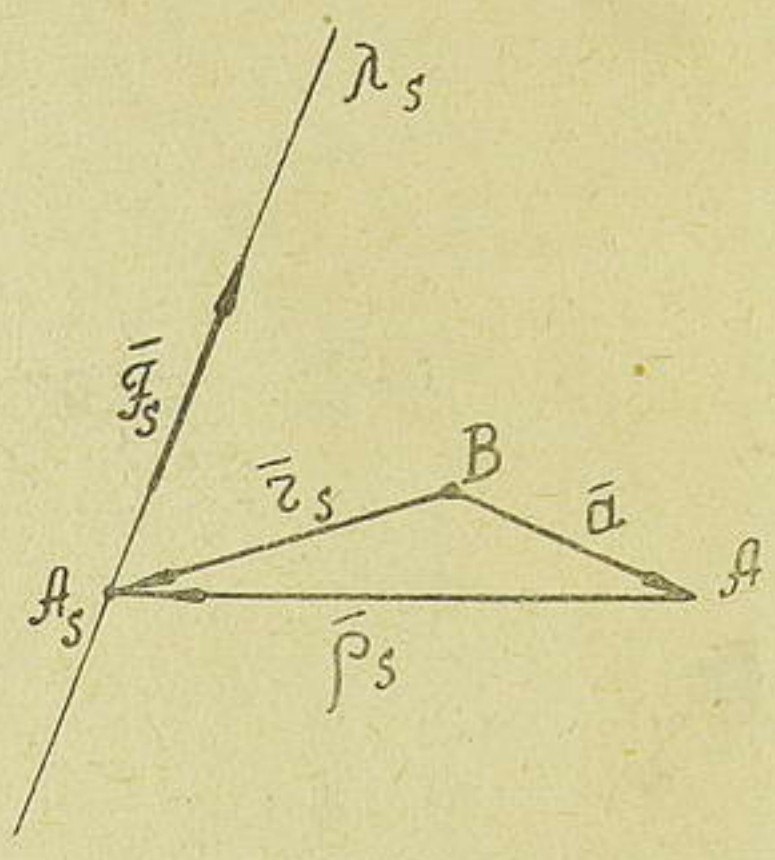
կամ $(\Sigma F_s\bar{r}_s) \parallel \hat{i}$։

§ 82. $\Sigma F_s\bar{r}_s$ **տիպի գումարի հատկությունները։** *Դիտենք* $\Sigma\Gamma\bar{r}_s$ *տիպի գումարների հատկությունները։*

Նշանակենք

$$\Sigma F_s\bar{r}_s = \bar{\omega}_B,$$

որտեղ (B) *ինդեքսով նշված է շառավիղ վեկտորների սկիզբը։*



Նկ. 264

1° դիցուք $\bar{r}_s = \overline{BA}_s$, $\bar{\rho}_s = \overline{AA}_s$ *(նկ. 264), ըստ որում* A *և* B*-ն տարածության որևէ կամայական կետեր են,* A_s*-ը* $\overline{F}_s$ *ուժի ազդման* λ_s *գծի վրա ընտրած կամայական մի կետ է, և* $\overline{BA} = \bar{a}$։

Ցույց տանք, որ $\bar{\omega}_B = \Sigma F_s\bar{r}_s$*-ը կախում ունի* $\bar{\omega}_A = \Sigma F_s\bar{\rho}_s$*-ից։*

Եվ իսկապես $\bar{r}_s = \bar{a} + \bar{\rho}_s$ *(նկ. 264), այդ պատճառով էլ՝*

$$\Sigma F_s\bar{r}_s = \Sigma F_s(\bar{a} + \bar{\rho}_s)$$

բայց $$\Sigma F_s \bar{a} = (\Sigma F_s)\,\bar{a} = V\bar{a}.$$

Հետևապես $$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A + V\bar{a}: \qquad (XII\ 3)$$

(XII 3) *բույց է տալիս, թե ինչպես է փոխվում* $\Sigma F_s \bar{r}_s$ *տիպի գումարը, եթե* F *ուժերի ազդման* λ_s *գծերի վրա ընտրած* A_s *կետերն անփոփոխ թողնելով, փոխենք շառավիղ-վեկտորների սկիզբը (այսինքն, որպես շառավիղ վեկտորների սկիզբ B-ի փոխարեն վերցնենք A կետը):*

$V=0$*-ի դեպքում* $$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A, \qquad (XII\ 4)$$

այսինքն՝

(XII 4′) *Եթե զուգահեռ ուժերի սիստեմի գլխավոր վեկտորը հավասար է զրոյի, ապա* $\Sigma F_s \bar{r}_s$ *գումարը կախում չունի շառավիղ-վեկտորների սկզբի ընտրությունից:*

2°. Ընտրենք $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_s \dots \lambda_n$ *ազդման յուրաքանչյուր գծի վրա ոչ թե մեկ, այլ երկուական կամայական կետեր՝* A_1 *և* A'_1*-ը* λ_1 *ազդման գծի վրա,* A_2 *և* A'_2*-ը* λ_2*-ի վրա և այլն (նկ. 265):*

Նշանակենք $\overline{BA}_s$*-ը* $\bar{r}_s$*-ով* $\overline{BA'}_s$*-ը* $\bar{r}'_s$*-ով.*

$A_1, \dots A_s, \dots A_n$ *կետերին համապատասխանում է*

$\bar{\omega}_B = \Sigma F_s \bar{r}_s$ *գումարը, իսկ* $A'_1, \dots A'_s, \dots A'_n$ *կետերին՝* $\bar{\omega}'_B = \Sigma F \bar{r}'_s$ *գումարը:*

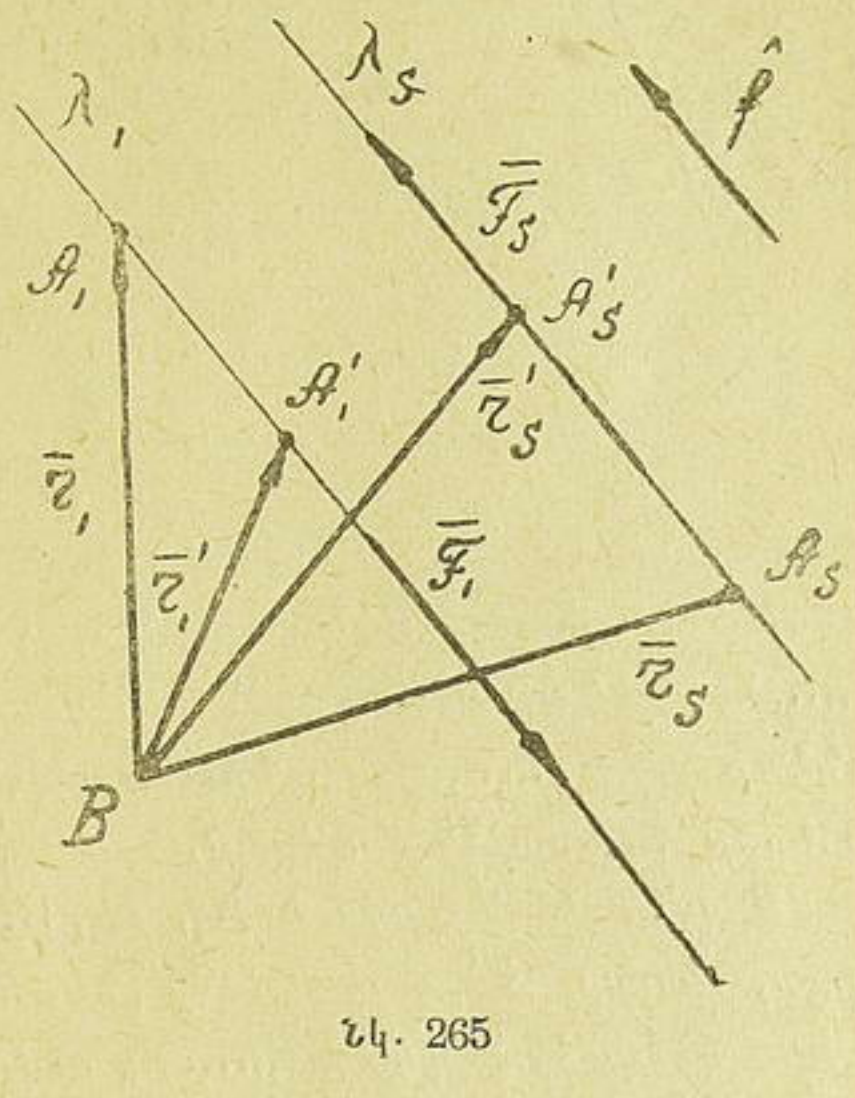
Հեշտ է համոզվել, որ ընդհանրապես

$\bar{\omega}_B \neq \bar{\omega}'_B$ *այսինքն, որ* $\Sigma F_s \bar{r}_s$ *գումարը կախում ունի զուգահեռ ուժերի ազդման* λ_s *գծերի վրա վերցրած* A_s *կետերի ընտրությունից:*

Եվ իսկապես $\bar{r}'_s - \bar{r}_s = \overline{A_s A'_s}$*:*

Որովհետև $\overline{A_s A'_s} \parallel \hat{i}$*, ապա կարելի է ընդունել,* $\bar{r}'_s - \bar{r}_s = \alpha_s \hat{i}$*:*

Այդ պատճառով էլ՝



Նկ. 265

$$\bar{\omega}'_B - \bar{\omega}_B = \Sigma F_s \bar{r}'_s - \Sigma F_s \bar{r}_s = \Sigma F_s (\bar{r}'_s - \bar{r}_s) = (\Sigma F_s \alpha_s)\,\hat{i}:$$

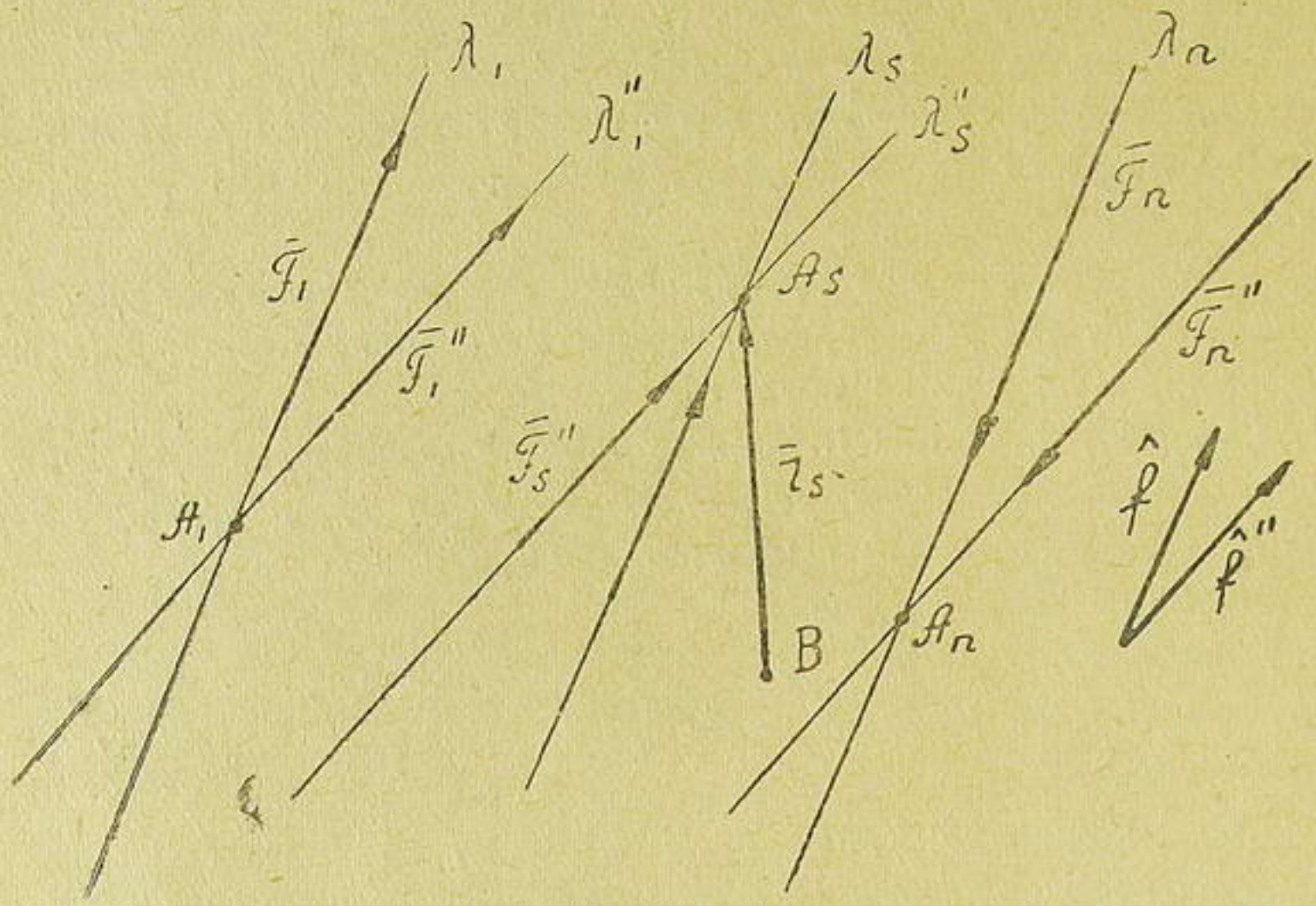
Ակնհայտ է, որ A_1 *և* $A'_1, \dots A_s$ *և* A'_s *կետերի կամայական ընտրության դեպքում* α_s *գործակիցները նույնպես կամայական են: Այդ պատճառով էլ* $\Sigma F_s \alpha_s$ *առհասարակ զերո չէ և մեր սահացած արդյունքը՝*

$$\bar{\omega}'_B - \bar{\omega}_B = (\Sigma F_s \alpha_s)\,\hat{i} \qquad (XII\ 5)$$

ցույց է տալիս, որ $\bar{\omega}'_B$ *և* $\bar{\omega}_B$ *վեկտորների տարբերությունն առհասարակ զուգահեռ է զուգահեռ ուժերի սիստեմի ազդման գծերին. այդ տարբերությունը հավասար է զերոյի միմիայն այն դեպքում, եթե* $\Sigma F_s \alpha_s = 0$*:*

3°. Ենթադրենք, թե բոլոր ուժերի ազդման գծերը պատված են մեկ-

նույն անկյամբ՝ տվյալ գծերից յուրաքանչյուրի վրա ընտրած կետի շուրջը (նկ. 266), (այսինքն λ_1-ը A_1-ի շուրջը ... λ_s-ը A_s-ի շուրջը) այնպես, որ նոր գիրքում ազդման բոլոր գծերը զարձյալ զուգահեռ են իրար.



Նկ. 266

Մինչ պատկերը մենք ունենք $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n$ ուժերը, նրանց ազդման $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ գծերը և $\bar{\omega}_B = \Sigma F_s \bar{r}_s$ գումարը: Պատկերից հետո ուժերն անվանենք $\bar{F}''_1, \ldots, \bar{F}''_n$, նրանց ազդման գծերը՝ $\lambda''_1, \ldots, \lambda''_n$, իսկ $\Sigma F''_s \bar{r}''_s$ գումարը նշանակենք ω''_s-ով:

Որովհետև B կետը և $A_1, A_2, \ldots A_s \ldots A_n$ կետերը չեն փոխել իրենց դիրքը, ապա $\bar{r}''_s = \overline{BA}_s = \bar{r}_s$ (նկ. 266): Բացի այդ, թեև $F''_1, \ldots F''_n$ ուժերը զուգահեռ չեն $\bar{F}_1, \ldots \bar{F}_n$ ուժերին և այդ պատճառով $F''_1 \neq F_1, \ldots \bar{F}''_n \neq \bar{F}_n$, սակայն ազդման գծերի պատյտի դեպքում ուժերի թվական արժեքները չեն փոփոխվում՝

$$F''_1 = F_1, \ldots F''_n = F_n:$$

Այդ պատճառով էլ

$$\bar{\omega}''_B = \Sigma F''_s \bar{r}''_s = \Sigma F_s \bar{r}_s = \bar{\omega}_B: \qquad \text{(XII 6)}$$

Այսպիսով, եթե ուժերի ազդման գծերի պատյտը չի խախտում նրանց զուգահեռությունը և ընդամին λ_s գծերից յուրաքանչյուրը պտտվում է A_s կետի շուրջը, որի $\overline{BA}_s$ հեռավորությունը նշանակված է $\bar{r}_s$-ով, ապա $\bar{\omega}_B = \Sigma F_s \bar{r}_s$ գումարը մնում է անփոփոխ:

Գայմանավորվենք հենց նոր նկարագրած զուգահեռ ուժերի սիստեմի ազդման գծերի պտույտը կայծության համար անվանել զուգահեռ ուժերի

պտույտ, իսկ A_s կետերը, որոնց շուրջն են պտտվում աղման գծերը՝ պտույտի կենտրոններ։

Ակներև է, որ զուգահեռ ուժերի պտտման դեպքում նրանց գլխավոր վեկտորը փոխվում է ($\bar{V}'' \neq \bar{V}$), մինչդեռ նրա թվական արժեքը չի փոխվում՝ $V'' = V$։

Իսկ ինչ վերաբերում է զուգահեռ ուժերի $\bar{M}_B$ գլխավոր մոմենտին, ապա նրանց պտտման դեպքում այդ մոմենտը չի փոփոխվում մխիթարյան երկու դեպքում։

Եվ իսկապես, համաձայն (XII 2)-ի մինչ պտույտը գլխավոր մոմենտը B կետի նկատմամբ՝

$$\bar{M}_B = (\Sigma F_s \bar{r}_s) \times \hat{i} = \bar{\omega}_B \times \hat{i}:$$

Մինչդեռ պտույտից հետո գլխավոր մոմենտը հավասար կլինի $\bar{\omega}''_B \times \hat{i}''$, որտեղ $\hat{i}''$-ը միավոր վեկտոր է, զուգահեռ ուժերին՝ նրանց պտույտից հետո (նկ. 266), իսկ $\bar{\omega}''_B = \bar{\omega}_B$, ինչպես այդ ապացուցված է վերևում [(XII 6)]։

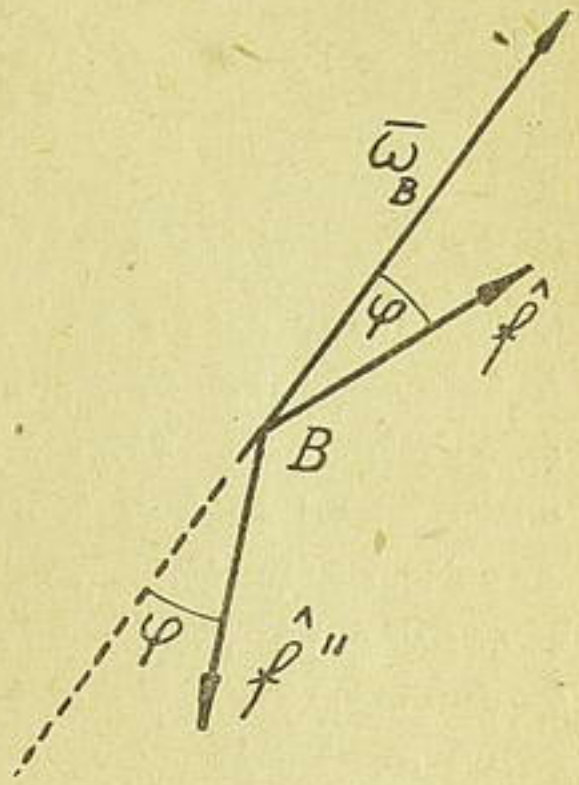
Եթե $\bar{\omega}_B = 0$, ապա ինչպես մինչ պտույտը, այնպես էլ պտույտից հետո գլխավոր մոմենտները հավասար են զերոյի և այդ պատճառով հենց իրար են հավասար։

Ուժերի գլխավոր մոմենտների հավասարությունը, պտույտից առաջ և հետո, տեղի ունի նաև այն ժամանակ, երբ (նկ. 267)

$$\sin(\bar{\omega}_B, \hat{i}) = \sin(\bar{\omega}_B, \hat{i}''),$$

այսինքն, երբ $\bar{\omega}_B$, $\hat{i}$ և $\hat{i}''$ կոպլանար են, իսկ զուգահեռ ուժերի պտտման անկյունը հավասար է՝

$$\pi - 2(\bar{\omega}_B, \hat{i}) = \pi - 2\varphi:$$



Նկ. 267

Մինչդեռ բոլոր այլ դեպքերում զուգահեռ ուժերի պտույտն ուղեկցվում է նրանց գլխավոր մոմենտի փոփոխմամբ։

§ 83. Աստատիկ և ոչ աստատիկ ուժախտեմներ։ Ինչպես հայտնի է, զուգահեռ ուժերի սիստեմը՝

ա. ունի համազոր, եթե գլխավոր վեկտորը զերո չէ.

բ. համարժեք է զույգի, եթե գլխավոր վեկտորը հավասար է զերոյի, իսկ գլխավոր մոմենտը զերո չէ.

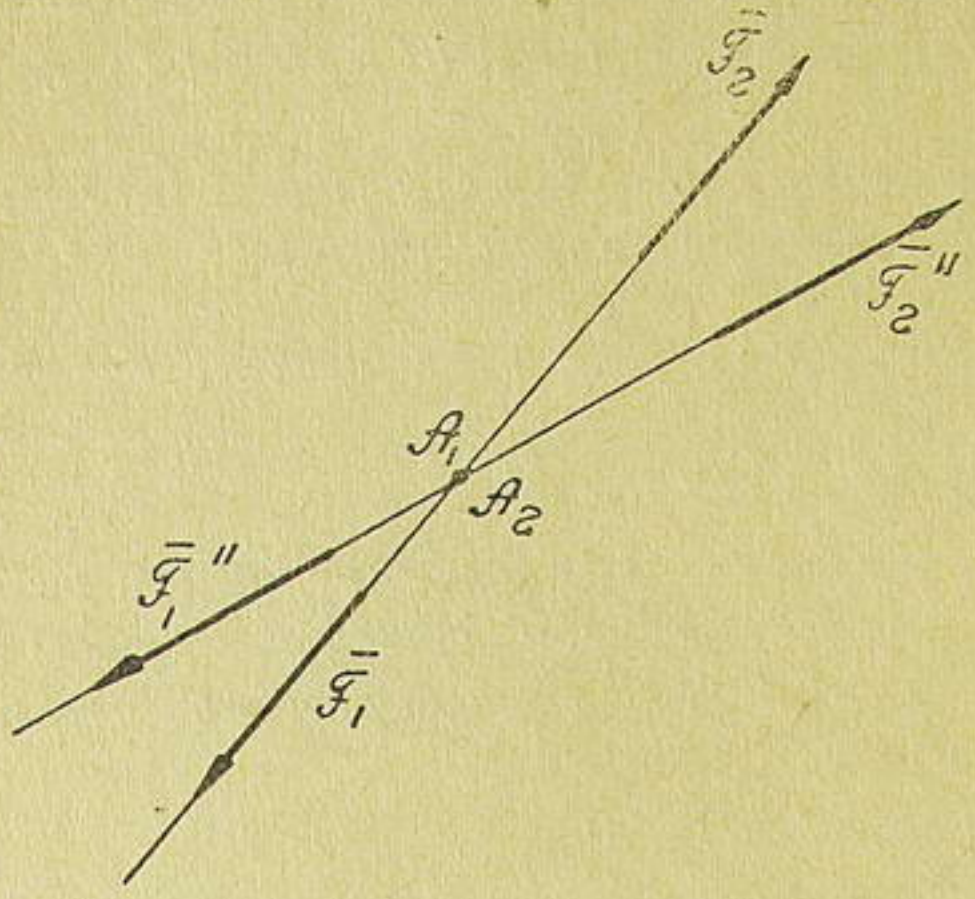
գ. համարժեք է զերոյի, եթե ինչպես գլխավոր վեկտորը, նույնպես և գլխավոր մոմենտը հավասար են զերոյի։

Վերջին դեպքում կարող է պատահել, որ պտույտից հետո զուգահեռ ուժերի սիստեմը միևնույն համարժեք զերոյի (նկ. 268 և 269)։

Հնարավոր է նաև, որ զերոյին համարժեք սիստեմը պտույտից հետո դառնա համարժեք զույգի (նկ. 270 և 271)։

Նկ. 268 և 270-ում սիստեմները կազմված են $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_2$ երկու ուժերից, բան որում $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$։ Այսպիսի սիստեմը համարժեք է զերոյի, եթե երկու ուժերի աղման գծերը համընկնում են։

Նկ. 268-ում պատյանների A_1 և A_2 կենտրոնները համընկնում են և դրա հետևանքով պատյանից հետո ուժերն ունեն նույնպես ազդման ընդհանուր կիր: Այս սխեմաը համարժեք է ներսի, թե պատյանից առաջ և թե պատյանից հետո:



Նկ. 268

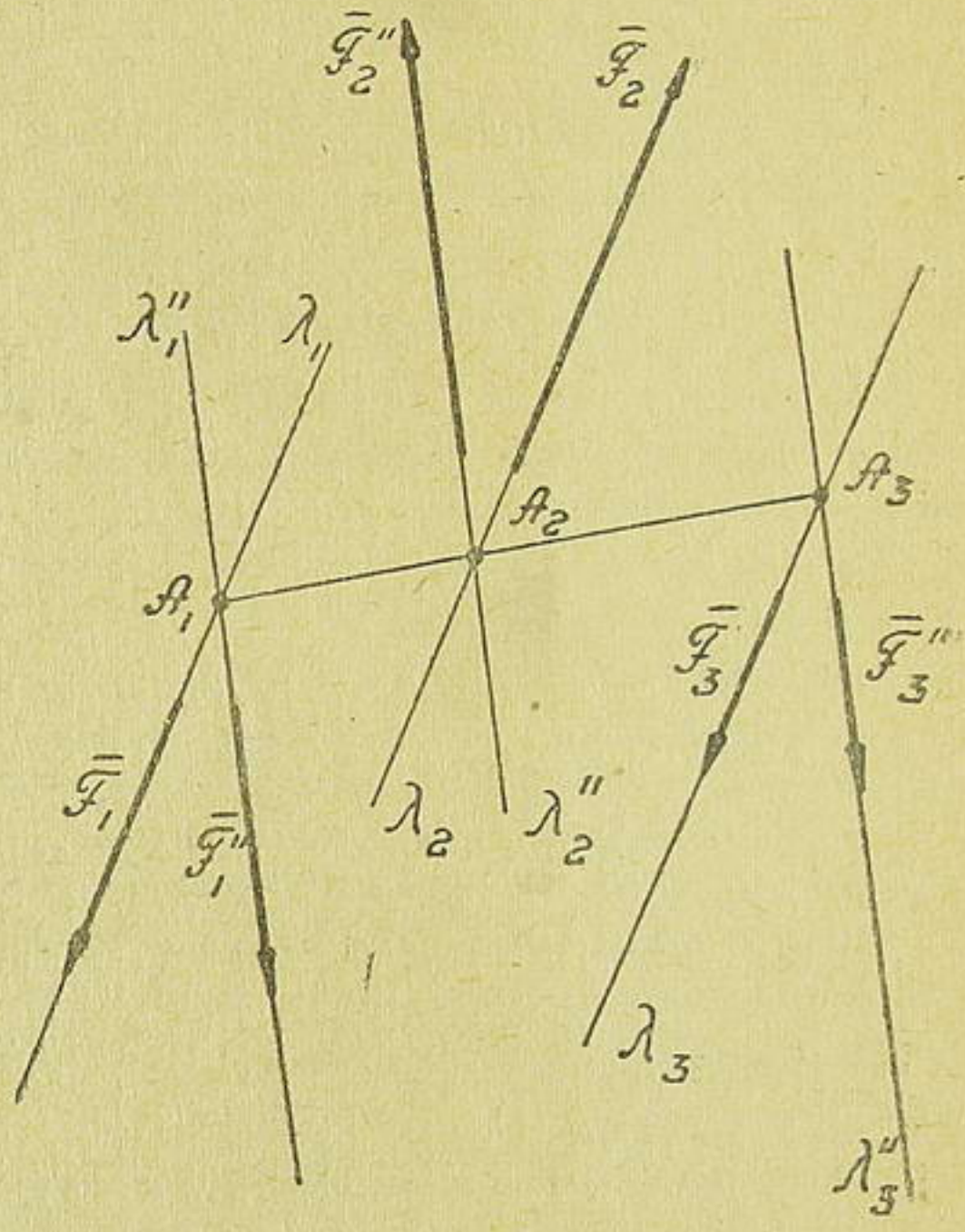
Նկ. 270-ում պատյանների A_1 և A_2 կենտրոնները չեն համընկնում: Այդ պատճառով էլ պատյանից հետո սխեմաը վեր է ածվում ուժազույգի:

Նկ. 269 և 271-ում $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ և $\bar{F}_3$ ուժերն այնպիսին են, որ մինչ պատյանը $\bar{V}=0$, $\bar{M}_B=0$:

Նկ. 269-ում պատյանի A_1, A_2, A_3 կենտրոնները տեղավորված են մի ուղղի վրա: Քանի որում զուգահեռ ուժերի ազդման գծերն ինչպիսի անկյունով էլ պատվեն, $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_3$ ուժերի համազորի ազդման կիրը միշտ անցնում է A_2-ով և համընկնում է $\bar{F}_2$ ուժի ազդման գծի հետ: Այդ պատճառով էլ նման դեպքում զուգահեռ ուժերի պատյանը չի խախտի այն հավասարակշռությունը, որ տեղի ունի մինչ պատյանը:

Մինչդեռ նկ. 271-ում պատյանի A_1, A_2, A_3 կենտրոնները մի ուղղի վրա չեն: $\bar{F}_1$ և F_3 ուժերի $\bar{F}_{13}$ համազորի ազդման գիծը կհատի A_1A_3 ուղիղը միշտ էլ մեկնուն A' կետում (որը որոշվում է $\frac{A_1A'}{A'A_3}=\frac{F_3}{F_1}$ պայմանից):

Եթե մինչ ուժերի պատյանը $\bar{V}=0$ և $\bar{M}_B=0$, ապա F_{13}-ի ազդման գիծը համընկնում է F_2-ի ազդման գծի հետ. այդ պատճառով էլ տեղի է ունենում

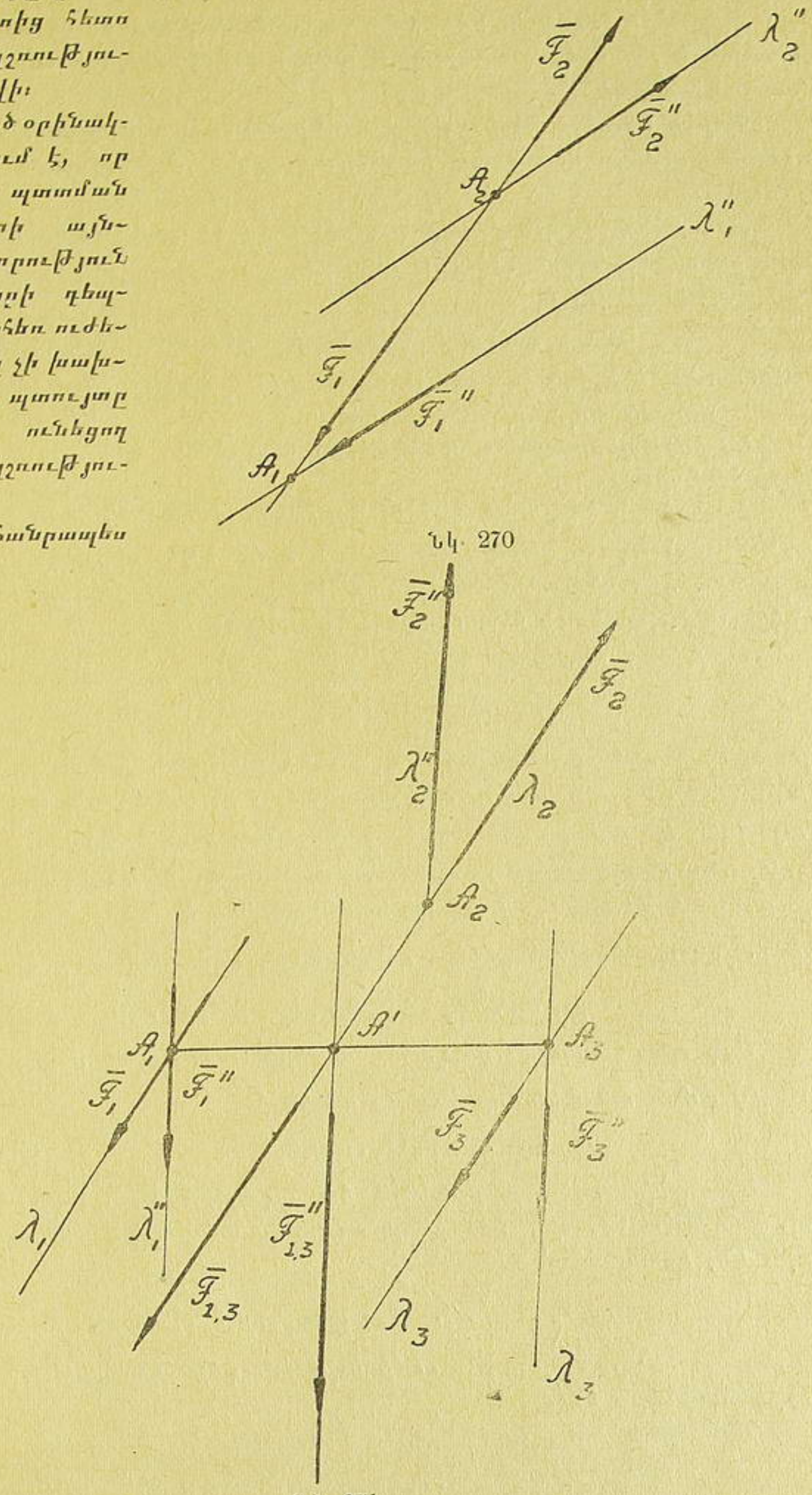


Նկ. 269

հավասարակշռություն: Մինչդեռ պատյտից հետո $\bar{F}''_{13}$ և $\bar{F}''_{2}$ ուժերի ազդման գծերը չեն համընկնում. այդ ուժերը կազմում են զույգ: Հետևապես պատյտից հետո հավասարակշռությունը կխախտվի:

Վերլուծած օրինակներից երևում է, որ հնարավոր է պատմական կենտրոնների այնպիսի ընտրություն կատարել, որի դեպքում զուգահեռ ուժերի պատյտը չի խախտում մինչ պատյտը զրոյություն ունեցող հավասարակշռությունը:

Իսկ ընդհանրապես



Նկ. 270

Նկ. 271

պատյտի կամայական կենտրոնների դեպքում, պատյտը խախտում է հավասարակշռությունը:

Զուգահեռ ուժերի սիստեմը, որը համարժեք է զերոյի, թե մինչ պատյտը և թե որևէ կամայական անկյունով պտտելուց հետո, կոչվում է աստատիկ սիստեմ:

Կարծր մարմնի հավասարակշռությունը, երբ մարմնին կիրառված է զուգահեռ ուժերի աստատիկ սիստեմ, կոչվում է աստատիկ հավասարակշռություն:

Զուգահեռ ուժերն լինչպիսի անկյունով էլ պտտելու լինենք, այդպիսի հավասարակշռությունը չի խախտվում:

Ապացուցենք, որ՝

Եթե զուգահեռ ուժերի սիստեմն աստատիկ է, ապա (XII 7) $\bar{\omega}_B = \Sigma F_s \bar{r}_s = 0$ *անկախ նրանից, թե որտեղ ենք ընտրել շառավիղ-վեկտորների B սկիզբը:*

Եվ իսկապես, աստատիկ սիստեմներում $\bar{V}=0$, $\bar{M}_B=0$ *ցանկացած B կետի համար:*

Համաձայն (XII 4′)-ի $\bar{\omega}_B$-ն էլ նույնպես կախում չունի B կետի ընտրությունից: Մյուս կողմից $\bar{M}_B = \bar{\omega}_B \times \hat{l}$ և, եթե սիստեմն աստատիկ է, ապա նրա գլխավոր մոմենտը թե մինչ պտույտը և թե որևէ կամայական անկյունով պտտելուց հետո հավասար է զերոյի:

Այսպիսով ստանում ենք՝

$$\bar{\omega}_B \times \hat{l} = \omega''_B \times \hat{l}'' = \bar{\omega}_B \times \hat{l}'' = 0,$$

որտեղ $\hat{l}''$-ը ուժերին զուգահեռ է պտույտից հետո, իսկ $\bar{\omega}''_B = \bar{\omega}_B$ համաձայն (XII 6)-ի: Պտտման անկյան կամայականության պատճառով, կամայական է նաև $\hat{l}''$ վեկտորը: Այդ պատճառով էլ $\omega_B \times \hat{l}'' = 0$ հավասարությունը հնարավոր է միայն այն ժամանակ, եթե $\omega_B = 0$:

Այսպիսով (XII 7) թեորեմն ապացուցված է:

$\bar{\omega}_B$-ի պրոեկցիան որևէ $\hat{\imath}$ ուղղության վրա հավասար է

$$\bar{\omega}_B \cdot \hat{l} = (\Sigma F_s \bar{r}_s) \cdot \hat{l} = \Sigma F_s (\bar{r}_s \cdot \hat{\imath}):$$

Այդ պատճառով էլ զուգահեռ ուժերի աստատիկ սիստեմի դեպքում $(\bar{\omega}_B = 0)$ ամեն տեսակի $\hat{l}$-ի համար ունենք՝

$$\bar{\omega}_B \cdot \hat{l} = \Sigma F_s (\bar{r}_s \cdot \hat{l}) = 0: \qquad \text{(XII 8)}$$

Մասնավորապես, ընդունելով հաջորդաբար $\hat{l}=\hat{\imath}$, $\hat{l}=\hat{\jmath}$, $\hat{l}=\hat{k}$, որտեղ $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$-ն BX, BY, BZ կոորդինատային առանցքների միավոր վեկտորներն են, կստանանք՝

$$\bar{r}_s \cdot \hat{\imath} = x_s, \quad \bar{r}_s \cdot \hat{\jmath} = y_s, \quad \bar{r}_s \cdot \hat{k} = z_s,$$

որտեղ x_s, y_s, z_s-ը $\bar{F}_s$ ուժի ազդման գծի պտույտի A_s կենտրոնի կոորդինատներն են:

Այդ պատճառով էլ (XII 8)-ը համարժեք է

$$\Sigma F_s x_s = 0, \quad \Sigma F_s y_s = 0, \quad \Sigma F_s z_s = 0 \qquad \text{(XII 9)}$$

հավասարությունների սիստեմին:

Այժմ պատկերացնենք զուգահեռ ուժերի ոչ աստատիկ սիստեմ, որը համարժեք է զերոյի, երբ ուժերը զուգահեռ են $\hat{i}$ միավոր վեկտորին։

Շնորհիվ այս սիստեմի ոչ աստատիկ լինելուն, կամայական որևէ անկյունով պտտվելուց հետո նա կդառնա համարժեք մի զույգի, որի մոմենտը հավասար է $\bar{\omega}_B \times \hat{i}''$ (որտեղ $\hat{i}''$-ը ուժերին զուգահեռ է պտույտից հետո)։

Այսպիսով $\bar{\omega}_B \times \hat{i} = 0$, իսկ $\bar{\omega}_B \times \hat{i}'' \neq 0$։

Այստեղից հետևում է, որ $\bar{\omega}_B \neq 0$, $\bar{\omega}_B \parallel \hat{i}$, այսինքն՝

(XII 10) *Զուգահեռ ուժերի ոչ աստատիկ սիստեմի համար, երբ այդ ուժերի գլխավոր վեկտորը հավասար է զերոյի, $\bar{\omega}_B$-ն տարածության բոլոր (B) կետերի համար նույնն է և տարբեր է զերոյից։*

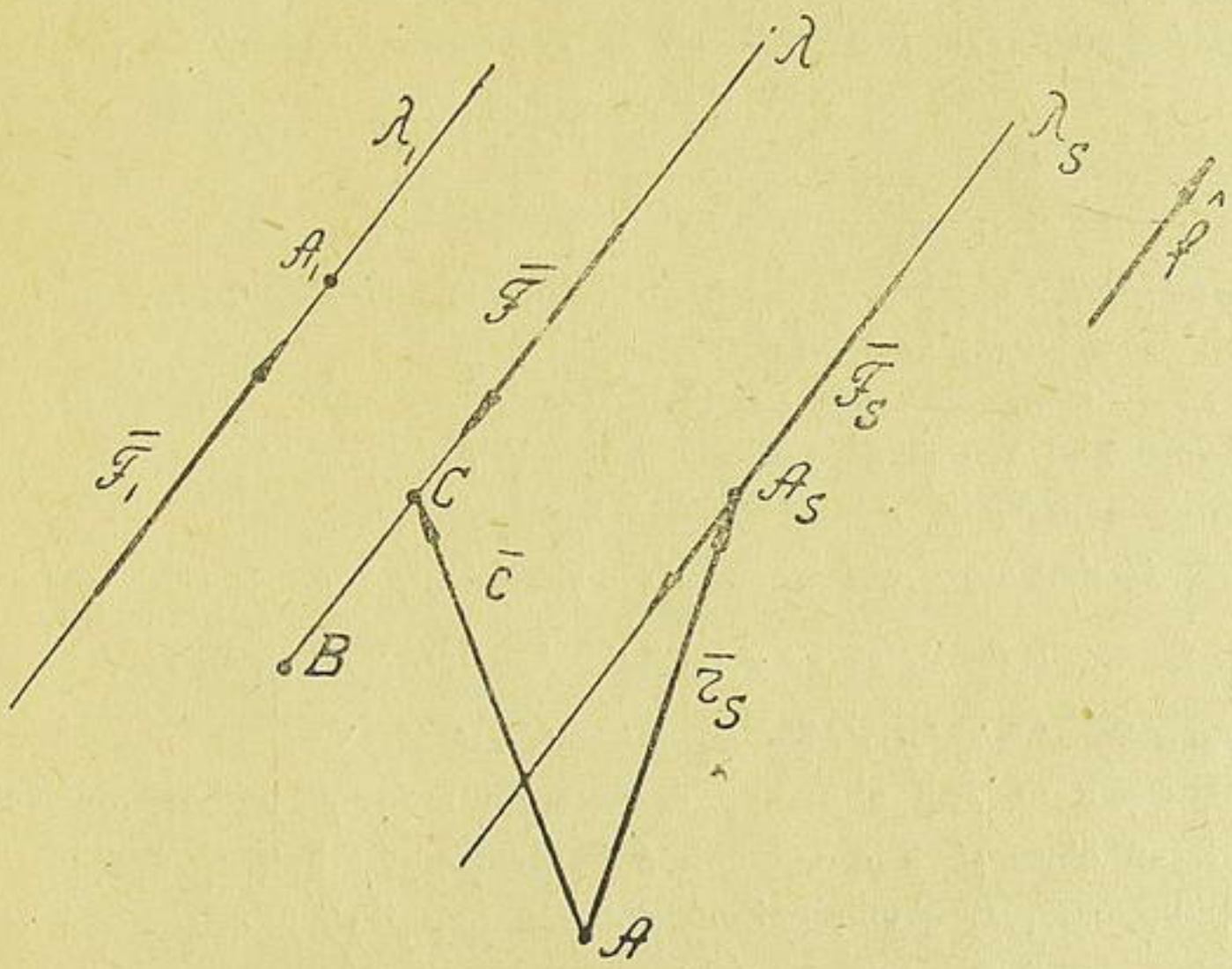
Այսպիսով՝

$$\bar{V} = 0, \quad \bar{\omega}_B = 0$$

հավասարությունների առկայությունը վկայում է սիստեմի աստատիկ լինելու մասին։

Մինչդեռ $\bar{V} = 0$ և $\bar{M}_B = 0$ հավասարությունները ցույց են տալիս միմիայն այն, որ երբ ուժերը զուգահեռ են $\hat{i}$ միավոր վեկտորին, ուժերի այդ սիստեմը համարժեք է զերոյի, սակայն որևէ անկյունով պտտելու դեպքում սիստեմը դադարում է զերոյին համարժեք լինելուց։

§ 84. Զուգահեռ ուժերի կենտրոնը։ *Այժմ դիտենք զուգահեռ ուժերի մի այնպիսի սիստեմ, որի գլխավոր վեկտորը զերո չէ։*



Նկ. 272

Այժմ սիստեմն ունի հատատար՝ $\bar{F} = \bar{V}$։ Նշանակենք λ-ով $\bar{F}$ հատատարի ազդման գիծը (նկ. 272)։ Վերցնենք λ-ի վրա B և C երկու կետեր։

Ըստ համազորի հատկության զուգահեռ ուժերի սիստեմի գլխավոր մոմենտը՝

$$\bar{M}_B = \bar{M}_B(\bar{F}) = 0, \quad \bar{M}_C = \bar{M}_C(\bar{F}) = 0,$$

քանի որ $\bar{M}_B = \bar{\omega}_B \times \hat{i}$, $\bar{M}_C = \bar{\omega}_C \times \hat{i}$:

Այսպես ուրեմն մենք ունենք՝

$$\bar{\omega}_B \times \hat{i} = 0, \quad \bar{\omega}_C \times \hat{i} = 0:$$

Այստեղից հետևում է, որ եթե B և C-ն վերցված են համազորի ազդման գծի վրա, ապա $\bar{\omega}_B \parallel \hat{i}$, $\bar{\omega}_C \parallel \hat{i}$,

բայց այդ, ըստ (XII 3)-ի $\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_C + \overline{BC}\,V$:

Այս հավասարության մեջ բոլոր վեկտորները $\hat{i}$-ին զուգահեռ են՝ $\bar{\omega}_B$ և $\bar{\omega}_C$-ի զուգահեռությունը քիչ առաջ ապացուցվեց, իսկ $\overline{BC} \parallel \hat{i}$, որովհետև B և C-ն վերցված են համազորի ազդման գծի վրա, որը զուգահեռ է $\hat{i}$-ին:

Այդ պատճառով միշտ էլ C կետն այնպես կարելի է ընտրել, որպեսզի տեղի ունենա $\bar{\omega}_B = \overline{BC}\,V$ հավասարությունը:

C կետի այդպիսի ընտրության դեպքում $\bar{\omega}_C = 0$:

C կետը, որի հատկությունն է՝ $\omega_C = \Sigma F_s \overline{CA}_s = 0$, (XII 11)
տեղավորված է համազորի ազդման գծի վրա և կոչվում է զուգահեռ ուժերի կենտրոն:

Հեշտ է համոզվել, որ երբ զուգահեռ ուժերի սիստեմի գլխավոր վեկտորը զրո չէ, ապա այդ սիստեմն ունի միմիայն մի կենտրոն:

Եվ իսկապես, ատրածության A ցանկացած կետի համար՝

$$\bar{\omega}_A = \omega_C + \overline{AC}\,V.$$

երբ
$$\bar{\omega}_C = 0, \quad \bar{\omega}_A = \overline{AC}\,V:$$

Որովհետև ոչ $\overline{AC}$ և ոչ V-ն հավասար չեն զրոյի, ապա $\bar{\omega}_A \neq 0$, այսինքն՝ C կետը միակն է:

Զուգահեռ ուժերի կենտրոն՝ C կետն առանձնացնենք, և D տառով նշանակենք համազորի ազդման λ գծի մի որևէ այլ կետ: Իսկ λ-ին չպատկանող ատրածության մի որևէ կետ նշանակենք B-ով:

Այն ժամանակ $DC \parallel \hat{i}$, $\overline{BC}$ զուգահեռ չէ $\hat{i}$-ին և այդ պատճառով էլ՝

$$\bar{\omega}_C = 0, \quad \bar{\omega}_D = \bar{\omega}_C + \overline{DC}\,V = \overline{DC}\,V, \quad \bar{\omega}_B = \overline{BC}\,V$$

հավասարություններից մենք եզրակացնում ենք՝

Զուգահեռ ուժերի սիստեմի համազորի ազդման գծի բոլոր D կետերի համար $\bar{\omega}_D$-ն զրո չէ և զուգահեռ է համազորին, իսկ համազորի ազդման գծին չպատկանող B կետերի համար $\bar{\omega}_B$-ն զրո՝ չէ և զուգահեռ չէ համազորին:

Նշանակենք (նկ. 272) $\overline{AA_s}$-ը $\bar{r}_s$-ով և $\overline{AC}$-ն $\bar{c}$-ով. կստանանք՝

$$\bar{\omega}_A = \Sigma F_s \bar{r}_s = \bar{c}\,\bar{V},$$

որտեղից $$\bar{c} = \frac{\Sigma F_s \bar{r}_s}{V} \qquad (XII\ 12)$$

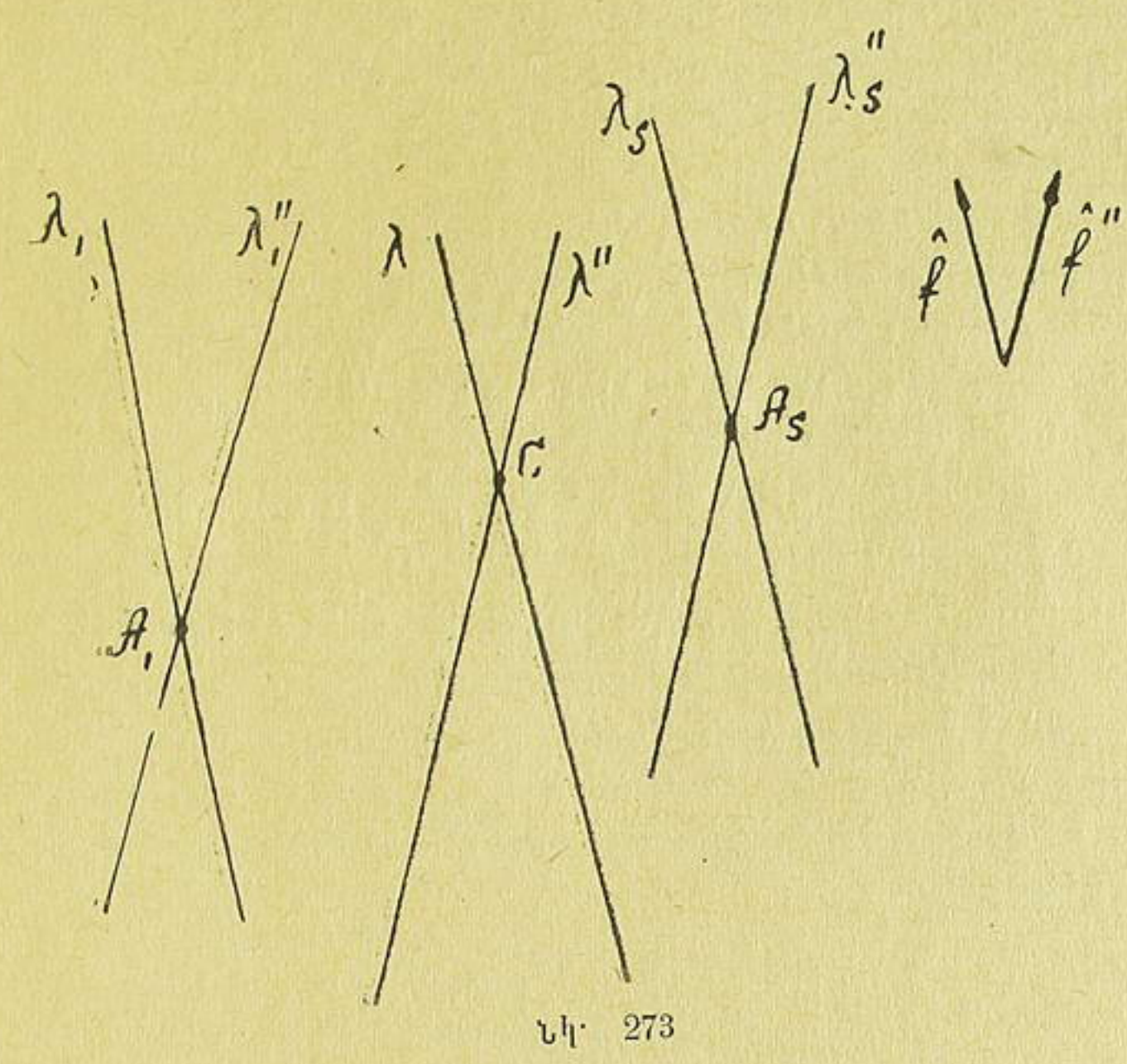
$$c_X = \frac{\Sigma F_s x_s}{V}, \quad c_Y = \frac{\Sigma F_s y_s}{V}, \quad c_Z = \frac{\Sigma F_s z_s}{V}, \quad (XII\ 13),$$

այստեղ $c_X = \bar{c} \cdot \hat{\imath}$, $x_s = \bar{r}_s \cdot \hat{\imath}$ և այլն, C և A_s կետերի կոորդինատներն են, երբ A ընդունվում է որպես կոորդինատների սկզբնակետ:

Զուգահեռ ուժերի C կենտրոնի ամենանշանակալից հատկությունը հետևյալն է՝

Զուգահեռ ուժերի սիստեմը որևէ անկյունով պտտելու դեպքում համագոքի ազդման գիծը պտտվում է միևնույն անկյունով C կենտրոնի շուրջը:

Որպեսզի համոզվենք դրանում, դիտենք զուգահեռ ուժերի սիստեմը մինչ պտույտը և պտույտից հետո (նկ. 273):



նկ. 273

$\bar{F}_s$ ուժը և նրա ազդման գիծը պտույտից հետո նշանակենք $\bar{F}''_s$ և λ''_s-ով: $\bar{F}''_s$ ուժերի համազորը կլինի $\bar{F}''$, իսկ նրա ազդման գիծը՝ λ'':

Սիստեմի գլխավոր մոմենտը C կետի նկատմամբ մինչ պտույտը հավասար է $\omega_C \times \hat{\imath} = 0$:

Գլխավոր մոմենտը C-ի նկատմամբ պտույտից հետո հավասար է $\omega''_C \times \hat{\imath}''$: Բայց ըստ (XII 6)-ի $\bar{\omega}''_C = \bar{\omega}_C = 0$: Հետևապես այդ մոմենտը հավասար է զերոյի, բայց որովհետև $\bar{M}_C = \bar{M}_C(F)$, ապա այդ կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, եթե $\bar{F}''$ համազորի ազդման λ'' գիծն անցնում է C կետով, այսինքն $\bar{F}_s$ ուժերի՝ A_s կետերի շուրջը պտտելու դեպքում $\bar{F}$ համազորը պտտվում է C-ի շուրջը միևնույն անկյունով:

Ինչպես հայտնի է [տես XI § 79)] ուժերի (զուգահեռ կամ ոչ զուգահեռ) ամեն տեսակի սիստեմի համազորի ազդման գիծը համընկնում է այդ սիստեմի կենտրոնական առանցքի հետ։ Այսպիսով համազորի ազդման գծի դիրքը որոշվում է B կամայական կետից ունեցած հեռավորության $\bar{\rho}=\overline{BD}=\frac{\bar{V}\times\bar{M}_B}{V^2}$ թյամբ։

Զուգահեռ ուժերի սիստեմի դեպքի համար մենք համազորի ազդման գծի որոշման մի այլ եղանակ ևս ունենք. այդ սիստեմի C կենտրոնից հարկավոր է գլխավոր վեկտորին զուգահեռ մի ուղիղ անցկացնել։

Առհասարակ D և C կետերը չեն համընկնում։

Առաջին ձևի առավելությունը կայանում է նրանում, որ նա պիտանի է ուժերի (ինչպես զուգահեռ, այնպես և ոչ զուգահեռ) բոլոր սիստեմների համար։ Սակայն զուգահեռ ուժերի սիստեմի դեպքում երկրորդ ձևն ավելի հարմար է, որովհետև C կենտրոնի դիրքը լրիվ կերպով բնորոշվում է պտույտի A_s կենտրոնների ընտրությամբ, $\bar{F}$ ուժերի թվական արժեքներով, և բոլորովին կախում չունի զուգահեռ ուժերի ուղղությունից։

§ 85. Զուգահեռ ուժերի կենտրոնը (շարունակություն)։ Դիցուք տված է n զուգահեռ ուժերի մի սիստեմ, որոնց գլխավոր վեկտորը զերո չէ։ Բաժանենք այդ սիստեմն ուժախմբերի այնպես, որպեսզի յուրաքանչյուր խմբի գլխավոր վեկտորը տարբեր լինի զերոյից։ Պարզության համար խմբերի թիվը վերցնենք հավասար երեքի։

Դիցուք առաջին խմբին են պատկանում $\bar{F}_1$, $\bar{F}\ldots$, $\bar{F}_k$ ուժերը, որոնց գլխավոր վեկտորն է $\bar{V}_{1,k}$ իսկ կենտրոնը՝ $C_{1,k}$։ Երկրորդ խմբի ուժերն են՝ $\bar{F}_{k+1}$, $\bar{F}_{k+2}\ldots\ldots$, $\bar{F}_m$. նրանց գլխավոր վեկտորն է $\bar{V}_{k+1,m}$, իսկ այդ ուժերի կենտրոնը՝ $C_{k+1,m}$։ Երրորդ խմբի ուժերն են՝ $\bar{F}_{m+1}$, $\bar{F}_{m+2},\ldots$, $\bar{F}_n$, գլխավոր վեկտորը՝ $\bar{V}_{m+1,n}$ իսկ ուժերի կենտրոնը՝ $C_{m+1,n}$։

Յուրաքանչյուր խմբի համազորը, այդ խմբի գլխավոր վեկտորը և կենտրոնն անվանենք խմբային համազոր, խմբային գլխավոր վեկտոր և խմբային կենտրոն։

$$V_{1,k}=\sum_1^k F_i,\quad V_{k+1,m}=\sum_{k+1}^m F_i,\quad V_{m+1,n}=\sum_{m+1} F_i.$$

Այդ պատճառով ամբողջ սիստեմի գլխավոր վեկտորի թվական արժեքը՝

$$V=\sum_1^n F_i=V_{1,k}+V_{k+1,m}+V_{m+1,n}.$$

Խմբային կենտրոնների շառավիղ-վեկտորների համար (XI 1. -ի կանոնները՝

$$\bar{c}_{1,k}=\frac{\sum_1^k F_i\bar{r}_i}{V},\quad \bar{c}_{k+1,m}=\frac{\sum_{k+1}^m F\bar{r}_i}{V_{k+1,m}},\quad \bar{c}_{m+1,n}=\frac{\sum_{m+1}^n F_i\bar{r}_i}{V_{m+1}}.$$

Այդ պատճառով ամբողջ սիստեմի կենտրոնի շառավիղ-վեկտորը՝

$$\bar{c} = \frac{\sum_{1}^{n} F\,\bar{r}_i}{V} = \frac{V_{1,k}\bar{c}_{1,k} + V_{k+1,m}\bar{c}_{k+1,m} + V_{m+1,n}\bar{c}_{m+1,n}}{V} \quad \text{(XII 14)}$$

Ակնհայտ է, որ (XII 14)-ի համարիչում գումարելիների թիվը միշտ էլ հավասար կլինի այն խմբերի թվին, որոնց վրա բաժանված է զուգահեռ ուժերի սիստեմը։

(XII 14)-ը կարելի է ձևակերպել այսպես՝

(XII 14′) Զուգահեռ ուժերի սիստեմի կենտրոնը համընկնում է խմբային համազորների կենտրոնի հետ, եթե այդ համազորների պատման կենտրոնները ընդունենք խմբային կենտրոններ։

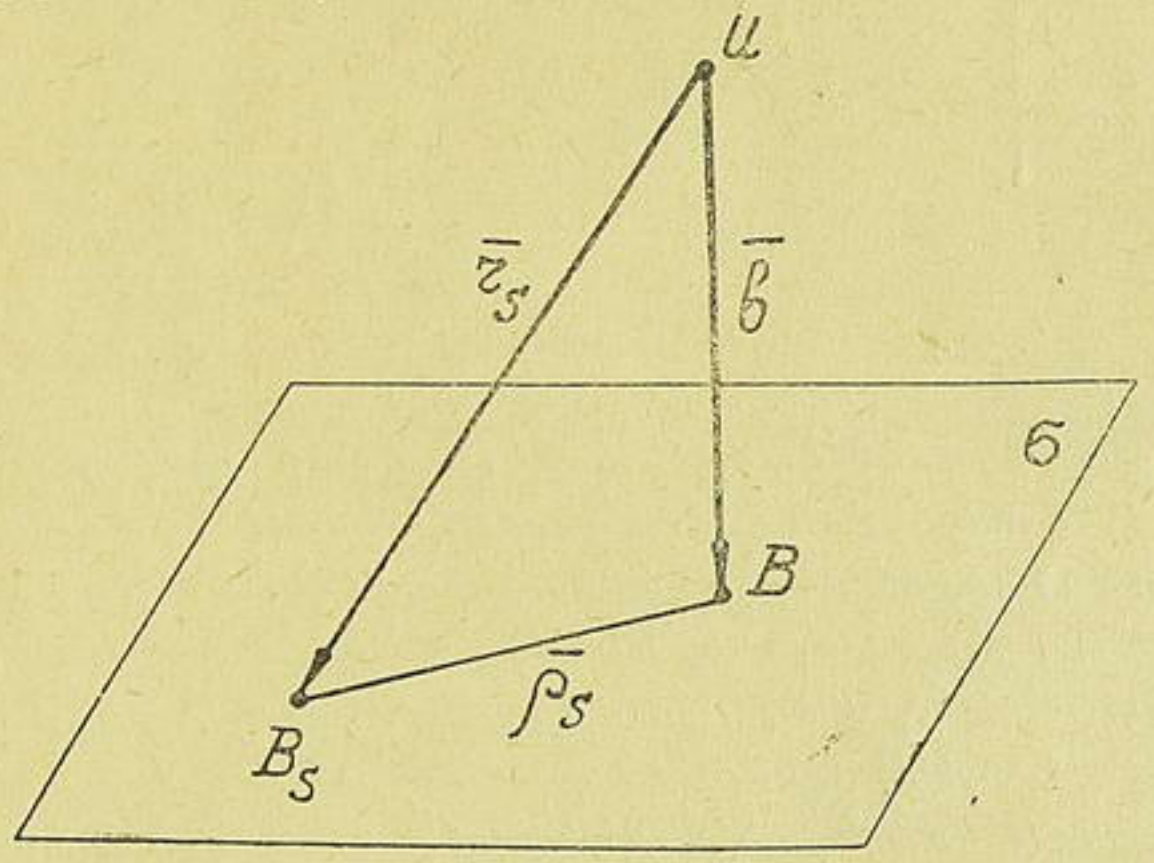
Այս թեորեմը հաճախ շատ օգտակար է և նրա կիրառման օրինակները կբերվեն հետագայում։

Թեորեմներ.

(XII 15) Եթե բոլոր զուգահեռ ուժերի պատման կենտրոնները տեղավորված են մի ուղղի վրա, ապա այդ ուղղի վրա էլ գտնվում է նաև սիստեմի կենտրոնը։

(XII 16) Եթե բոլոր զուգահեռ ուժերի պատման կենտրոնները տեղավորված են մի հարթության վրա, ապա այդ հարթության վրա էլ գտնվում է նաև սիստեմի կենտրոնը։

Այս երկու թեորեմները մեկնույն ձևով են ապացուցվում, դրա համար էլ բերվում է միայն (XII 16) թեորեմի ապացուցումը։



Նկ. 274

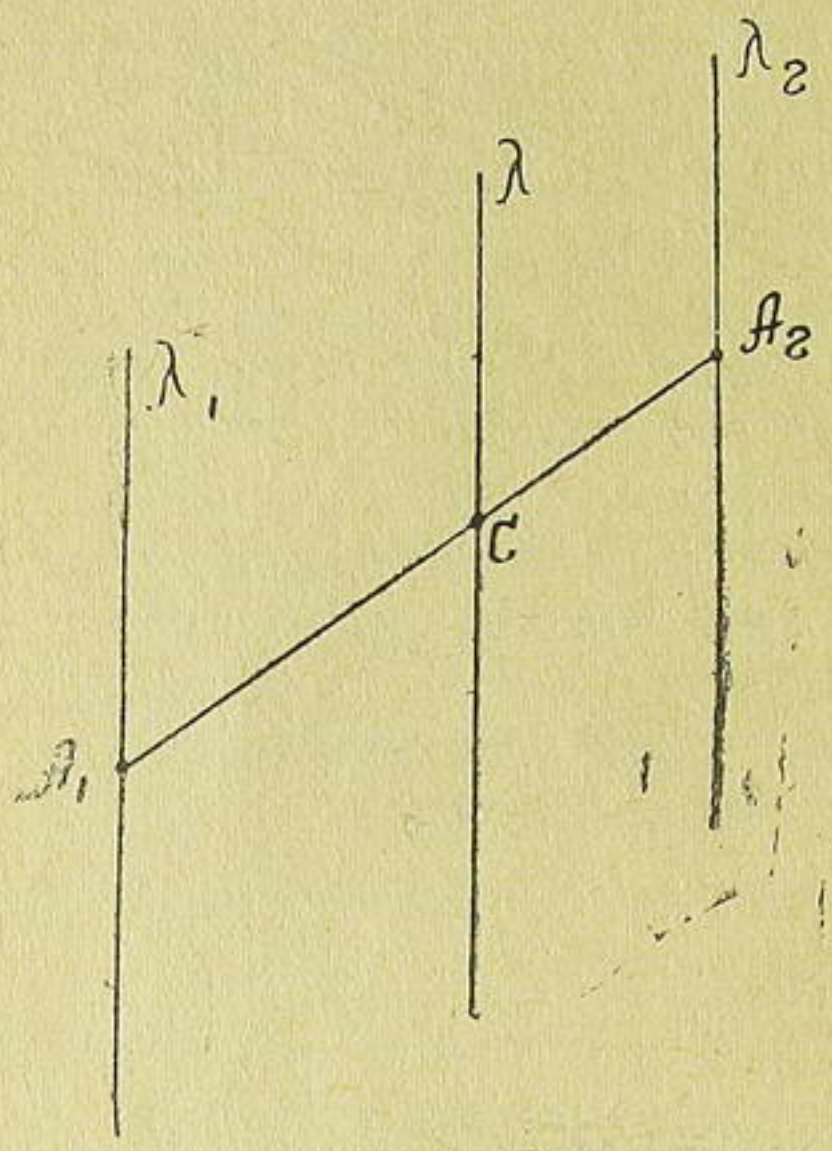
Ցույց տանք, որ այն կետը, որը չի գտնվում պատման բոլոր կենտրոնները պարունակող σ հարթության վրա, ուժերի այդ սիստեմի կենտրոնը լինել չի կարող։ Դիցուք U կետը չի գտնվում σ-ի վրա (նկ. 274)։

Այն ժամանակ $\bar{r} = \overline{UB_s}$ կարելի է վերածել $\bar{b} = \overline{UB}$ և $\bar{\rho}_s = \overline{BB_s}$ բաղադրիչների, ընդ որում $\overline{UB} = \bar{b}$ բոլոր (B_s) կետերի համար նույնն է և ուղղահայաց է σ-ին։ $\bar{\rho}_s = \overline{BB} \parallel \sigma$։

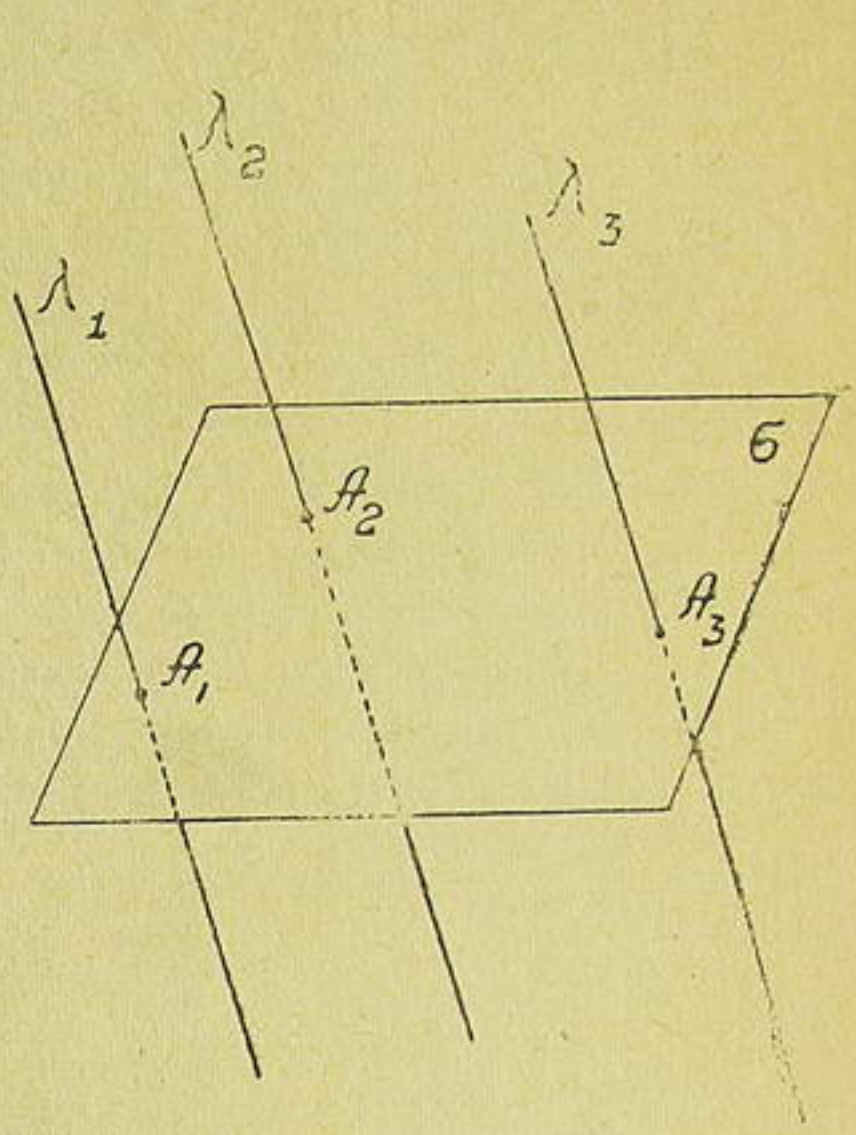
Այսպիսով՝

$$\bar{\omega}_U = \Sigma F_s \bar{r}_s = \Sigma F_s \bar{b} + \Sigma F_s \bar{\rho}_s = V\bar{b} + \Sigma F_s \bar{\rho}_s.$$

Որովհետև $V\bar{b} \neq 0$, *ապա* $\bar{\omega}_U \neq 0$: *Իսկ եթե* $\bar{\omega}_U \neq 0$, *ապա* U *կետը համաձայն սահմանման զուգահեռ ուժերի այդ սիստեմի կենտրոն լինել չի կարող: Հետևապես և ոչ մի կետ, որը չի գտնվում σ-ի վրա, չի կարող լինել զուգահեռ այն ուժերի սիստեմի կենտրոն, որոնց պատման կենտրոնները տեղավորված են σ-ի վրա: Այդ պատճառով էլ այդպիսի սիստեմի կենտրոնը պիտի գտնվի σ-ի վրա: Թեորեմն ապացուցված է:*



Նկ. 275



Նկ. 276

(XII 15)-*ից հետևում է, որ երկու զուգահեռ ուժերի կենտրոնը՝ զա այն* C *կետն է, որտեղ նրանց համազորը հատում է այդ երկու ուժերի պատման կենտրոններով անցկացրած ուղիղը (նկ. 275):*

Եվ իսկապես, մի կողմից զուգահեռ ուժերի կենտրոնը պիտի գտնվի համազորի աղդման գծի վրա, մյուս կողմից պատման A_1 *և* A_2 *կենտրոններով կարելի է անցկացնել միայն մի ուղիղ և, համաձայն* (XII 15)*-ի, երկու զուգահեռ ուժերի* C *կենտրոնը պիտի գտնվի այդ ուղղի վրա: Հետևապես* C*-ն գտնվում է համազորի աղդման գծի և* A_1A_2 *ուղղի հատման կետում:*

(XII 16)*-ից հետևում է, որ երեք զուգահեռ ուժերի կենտրոնը, որոնց պատման* A_1, A_2, A_3 *կենտրոնները չեն տեղավորված մի ուղղի վրա, գտնվում է* $A_1\,A_2\,A_3$ *հարթության վրա:*

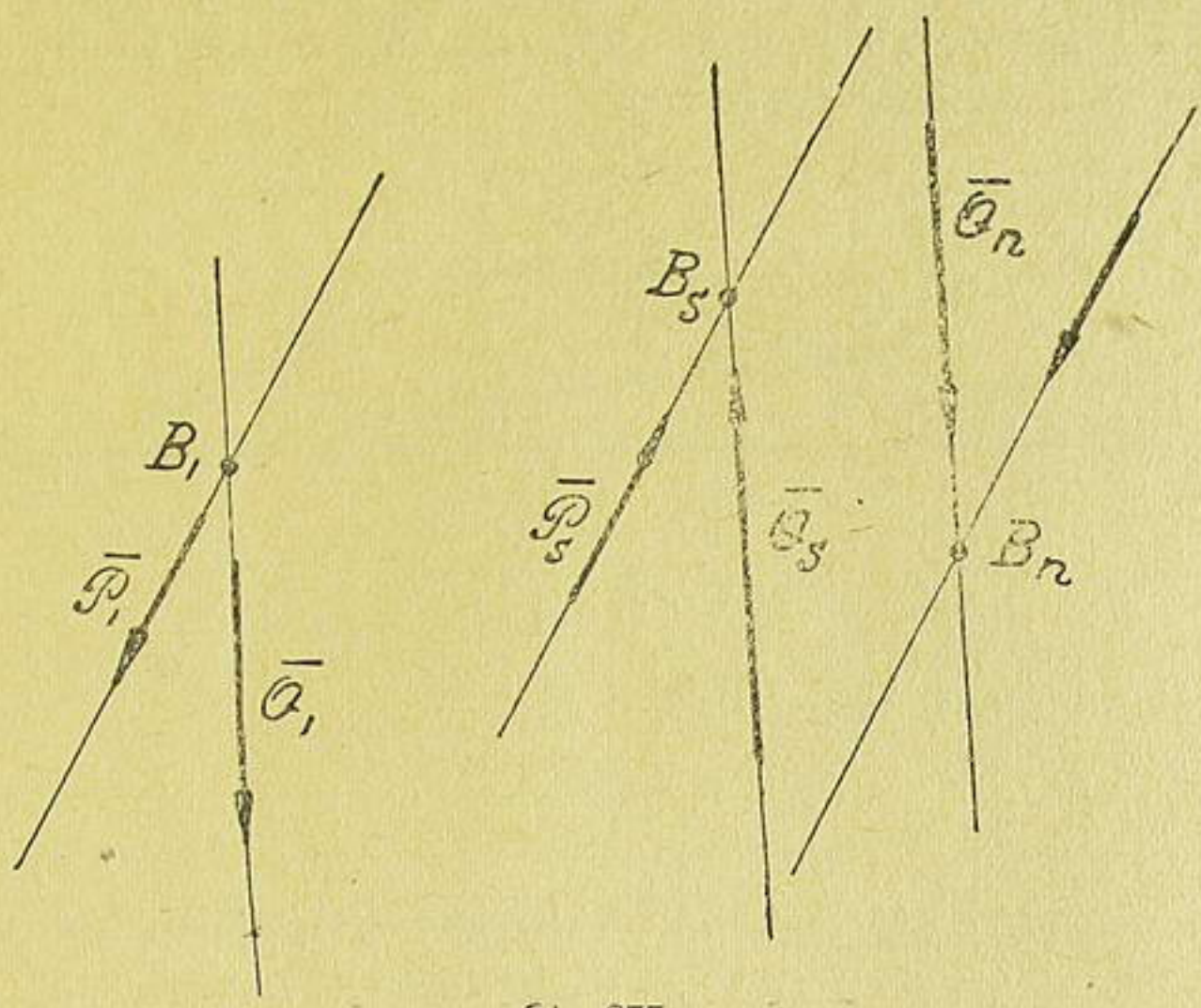
Եվ իսկապես (նկ. 276), եթե պատման A_1, A_2, A_3 *կենտրոնները չեն գտնվում մի ուղղի վրա, ապա նրանց վրայով կարելի է անցկացնել մի* (σ) *հարթություն: Համաձայն* (XII 16)*-ի այդ երեք զուգահեռ ուժերի կենտրոնը պիտի գտնվի σ-ի վրա:*

Թեորեմ

(XII 17) *Եթե* $\bar{P}_1, \ldots \bar{P}_s \ldots \bar{P}_n$ *և* $\bar{Q}_1, \ldots \bar{Q} \ldots \bar{Q}_n$ *զուգահեռ ուժերի սխեմաների համար են (նկ. 277), որ նույն ինդեքս ունեցող ուժերը (օրինակ,* $\bar{P}_1$ *և* $\bar{Q}_1$*) պատման միևնույն կենտրոնն ունեն և նույն ինդեքս ունեցող երկու ուժերի թվական արժեքների հարաբերությունը բոլոր ուժերի համար միևնույնն է, այսինքն*

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} = \ldots \frac{P_s}{Q_s} = \ldots \frac{P_n}{Q_n} = k,$$

ապա այդ սխեմաների կենտրոնները համընկնում են իրար հետ:



Նկ. 277

Եվ իսկապես, դժվար չէ համոզվել, որ երկու սխեմաների կենտրոնների շառավիղ-վեկտորներն համընկնում են:

$\bar{P}_1, \ldots \bar{P}_n$ *սխեմի կենտրոնի շառավիղ վեկտորը հավասար է* $\frac{\Sigma P_s \bar{r}_s}{\Sigma P_s}$*, բայց* $P_s = kQ_s$*:*

Այդ պատճառով էլ՝ $\frac{\Sigma P_s \bar{r}_s}{\Sigma P_s} = \frac{\Sigma_k Q_s \bar{r}_s}{\Sigma_k Q_s} = \frac{\Sigma Q_s \bar{r}_s}{\Sigma Q_s}$*:*

Վերջին հարաբերությունը հավասար է $\bar{Q}_1, \ldots Q_n$ *սխեմի շառավիղ-վեկտորին:*

Հետաքրքրություն է ներկայացնում այն դեպքը, երբ զուգահեռ ուժերը բոլորն էլ իրար հավասար են, այսինքն՝ $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = \ldots\ldots = \bar{F}_n$*:*

Այդ ուժերի թվական արժեքները նշանակելով φ-ով, կստանանք $V = n\varphi$ *և*

$$\bar{c} = \frac{\Sigma \varphi \bar{r}}{n\varphi} = \frac{\Sigma \bar{r}_s}{n} \qquad \text{(XII 18)}$$

Այդ դեպքում ընդունելով $\bar{CA}_s=\bar{\rho}_s$, *զուգահեռ ուժերի կենտրոնի սահմանման համաձայն, կարող են գրել՝*

$$\bar{\omega}_C=\Sigma\varphi\bar{\rho}_s=0,$$

կամ

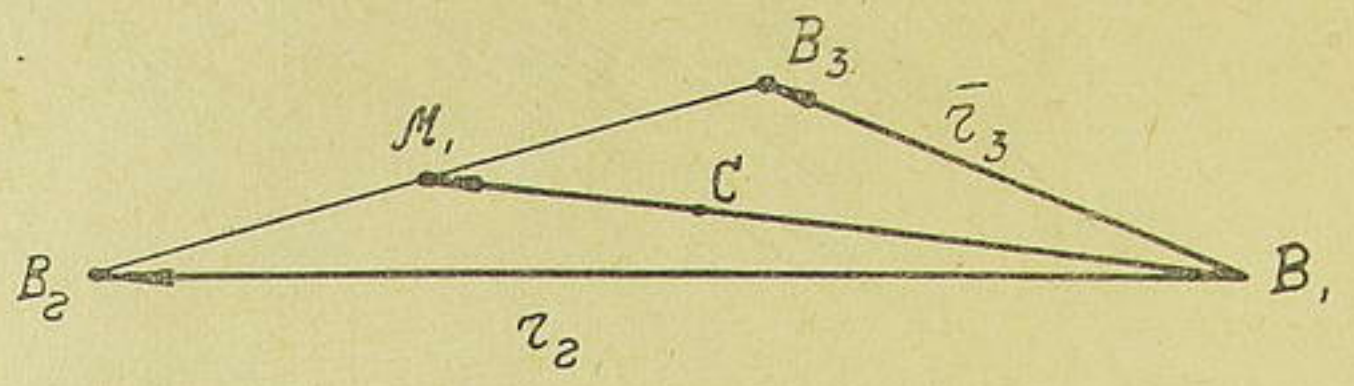
$$\Sigma\bar{\rho}_s=0 \qquad \text{(XII 19)}$$

Դիտենք մի քանի օրինակներ.

1°. Երկու հավասար (զուգահեռ) ուժերի կենտրոնը գտնվում է այդ ուժերի պատման կենտրոնները միացնող հատվածի միջնակետում:

Դա անմիջականորեն հետևում է (XII 18) *կամ* (XII 19)*-ից:*

2°. Երեք հավասար (զուգահեռ) ուժերի կենտրոնը, որոնց պատման կենտրոնները կազմում են եռանկյուն, գտնվում է այդ եռանկյան միջնագծերի հատման կետում (նկ. 278):



նկ. 278

Եվ իսկապես, քանի (XII 18)*-ի*

$$\bar{c}=\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{3}$$

Որպես շառավիղ վեկտորների սկիզբ ընդունելով B_1, *մենք ունենք՝*

$$\bar{r}_1=0,\ \bar{r}_2=\overline{B_1B_2}\quad \bar{r}_3=\overline{B_1B_3}=\overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}$$

Այդ պատճառով էլ՝

$$\bar{c}=\frac{2\overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}}{3}=\frac{2}{3}(\overline{B_1B_2}+\overline{B_2M_1})=\frac{2}{3}\overline{B_1M_1}=\overline{B_1C},$$

որտեղ B_1M_1*-ը* $B_1B_2B_3$ *եռանկյան միջնագիծն է:*

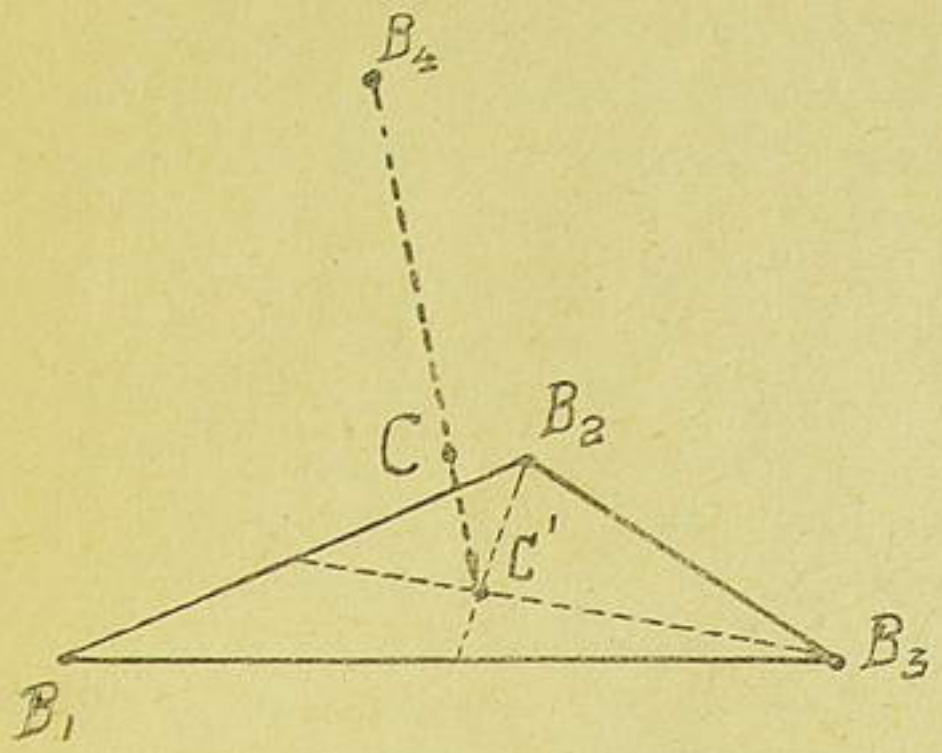
3°. k *և* (n—k) *ուժերի երկու խմբի բաժանած հավասար* n *ուժերի կենտրոնը գտնվում է այդ խմբերի կենտրոնները միացնող հատվածի վրա և այդ հատվածը բաժանում է խմբերի մեջ եղած ուժերի թվին (այսինքն* k *և* n—k) *հակադարձ համեմատական մասերի:*

Դա անմիջականորեն հետևում է (XII 14) *և* (XII 15) *թեորեմներից: Հարկավոր է միայն նկատի առնել, որ եթե φ-ն ուժերից որևէ մեկի թվական արժեքն է, ապա խմբերի գլխավոր վեկտորների թվական արժեքները կլինեն՝*

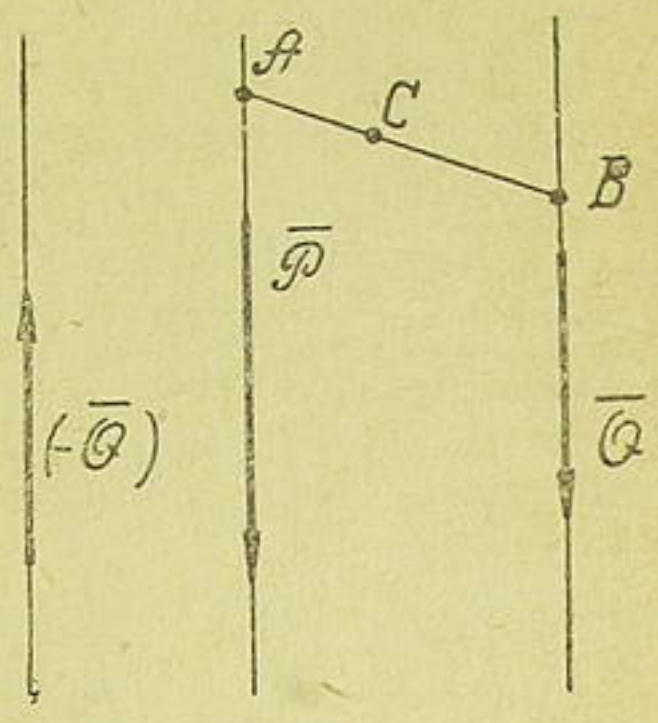
$$V'=k\varphi,\ V''=(n-k)\varphi:$$

Դիցուք, օրինակ՝ n=4, *մի խմբում կան երեք ուժեր* ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$), *մյուսում՝* $\bar{F}_4$ *ուժը (նկ. 279):*

Դիցուք C′-ը $B_1B_2B_3$ *եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է։ Այն ժամանակ, համաձայն թեորեմի, չորս հավասար ուժերի* C *կենտրոնը պտնվում է* B_4C'-*ի վրա, ըստ որում* $B_4C = \frac{3}{4}B_4C'$։



Նկ. 279



Նկ. 280

Խնդիրներ

1. C-*ն* $\bar{P}$ *և* $\bar{Q}$ *2 զուգահեռ ուժերի կենտրոնն է, որոնց պատման կենտրոններն են* A *և* B-*ն (նկ. 280)։* (—Q) *ուժի ազդման գիծը և պատման կենտրոնն այնպես ընտրել, որ* C-*ն լինի կենտրոն նաև* $\bar{P}$ *և* $(-\bar{Q})$ *ուժերի սիստեմի։*

2. Տված է $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \ldots \bar{F}_s \ldots \bar{F}_n$ *զուգահեռ ուժերի մի սիստեմ։ Ինչպես պետք է տեղավորված լինի* $\bar{F}_n$ *ուժի պատման* B_n *կենտրոնը, որպեսզի այդ սիստեմի կենտրոնը համընկնի* $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \ldots \bar{F} \ldots \bar{F}_{n-1}$ *ուժերի սիստեմի կենտրոնի հետ։*

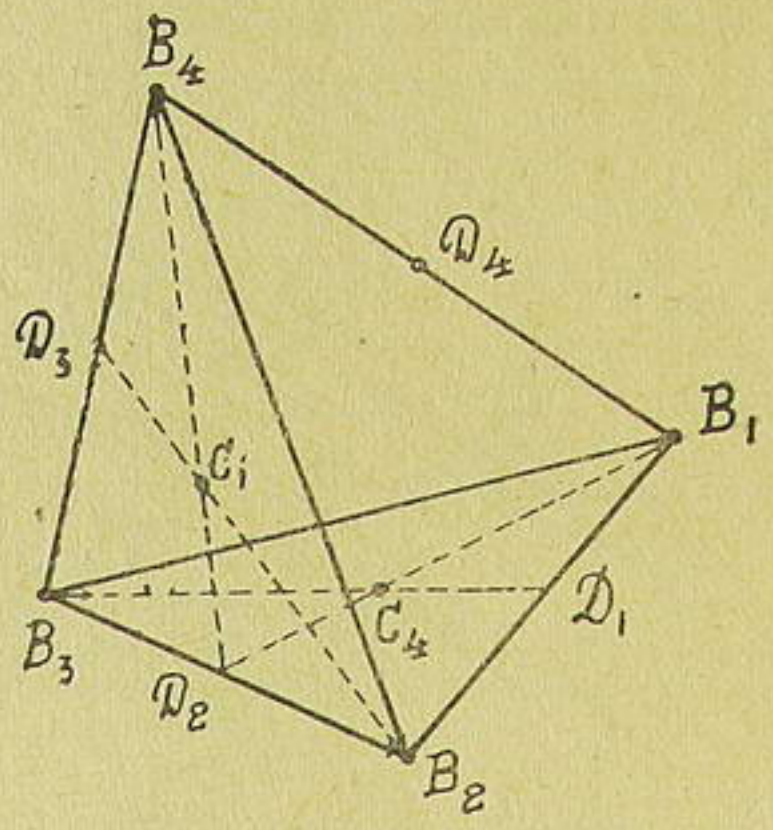
3. Զուգահեռ ուժերի սիստեմը, որի գլխավոր վեկտորը հավասար է զրոյի, բաժանված է երկու խմբի։ Ապացուցել, որ այդ սիստեմի աստատուն լինելու համար անհրաժեշտ է, որ այդ երկու խմբերի կենտրոնները համընկնեն։

4. Տված է չորս զուգահեռ ուժերի մի սիստեմ։ Ցույց տալ, որ եթե պատման բոլոր չորս կենտրոններն էլ չեն տեղավորված միևնույն հարթության վրա, ապա (ինչպիսի թվական արժեքներ էլ ունենան այդ ուժերը) այդ սիստեմն աստատուն լինել չի կարող։

5. Տված են չորս զուգահեռ ուժեր, որոնց պատման կենտրոններն են՝ B_1, B_2, B_3, B_4։ *Որպիսին է* $\bar{F}_4$ *ուժի թվական արժեքը, եթե այդ սիստեմի կենտրոնը պտնվում է* $B_1B_2B_3$ *հարթությունից կրկնակի անգամ պակաս հեռավորության վրա, քան* B_4 *կետը։*

6. Տված են B_1, B_2, B_3, B_4 *կամայական կետեր (նկ. 281), (որոնք կարող են գտնվել կամ չգտնվել մի հարթության վրա)։*
B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_1 *հատվածների միջնակետերը նշանակված են համապատասխանաբար* D_1, D_2, D_3, D_4-*ով։ Միջնագծերի հատման կետերը*

յուրաքանչյուր եռանկյան մեջ նշանակված են C տառով, որի ինդեքսը համընկնում է այդ եռանկյան չպատկանող գագաթի ինդեքսին՝ (օրինակ՝ $B_1B_2B_3$ եռանկյան մեջ C_4-ը)։ Օգտվելով հավասար (զուգահեռ) ուժերի կենտրոնի հատկություններից, ցույց տալ, որ D_1D_3, D_2D_4, B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 և B_4C_4-ը հատվում են մի կետում։



Նկ 281

7. Տված է զուգահեռ ուժերի մի սիստեմ, որի գլխավոր վեկտորը զրո չէ, իսկ ուղղությունը որոշվում է միավոր $\bar{i}$ վեկտորով։ Այդ սիստեմի կենտրոնի $\bar{c}$ շառավիղ-վեկտորը հայտնի է, երբ որպես բևեռ ընդունված է B կետը ($\bar{c} = \overline{BC}$)։ Որոշել սիստեմի կենտրոնական առանցքի $\overline{BD}$ հեռավորությունը B կետից։

8. Զուգահեռ ուժերի սիստեմի համազորի ազդման գծի հեռավորությունը B կետից հավասար է ā։ Այդ ուժերը որևէ անկյունով պտտելուց հետո հեռավորությունը B-ից մինչև համազորի ազդման նոր գիծը դարձավ հավասար ā′։ Գիտենալով ā և ā′-ն, որոշել այդ սիստեմի կենտրոնի շառավիղ-վեկտորը $\bar{c} = \overline{BC}$։

§ 86. Ծանրության կենտրոն։ Մենք արդեն գիտենք, որ յուրաքանչյուր մարմին կարելի է դիտել որպես նյութական կետերի համախումբ։ Ինչպես մարմիններում, որոնք կազմված են մոլեկուլներից, ատոմներից, նյութի բաշխումն ընդհատ է։ Այստեղ մենք որպես նյութական կետեր կարող ենք ընդունել ատոմները, մոլեկուլները։ Վերջավոր չափեր ունեցող մարմնի մեջ այդպիսի կետերի թիվը վերջավոր է, թեպետ և կարող է շատ մեծ լինել։

Սակայն մենք կարող ենք պատկերացնել նաև մարմնի մեջ նյութի անընդհատ բաշխումը։ Այդ դեպքում մենք մտքով մարմինը բաժանում ենք անսահման մեծ թվով մասերի, որոնք ունեն անսահման փոքր ծավալներ, և յուրաքանչյուր այդպիսի մաս մենք ընդունում ենք որպես նյու-

թական կետ։ Ընդամին վերջավոր չափեր ունեցող մարմնում նյութական կետերի թիվը անսահման մեծ է։

Նյութական կետի կշիռը, ինչպես այդ ասված էր արդեն գլխի սկզբում, դա այն ուժն է, որով կետը ձգվում է երկրագնդի կողմից։ Այդ ուժն ուղղված է ըստ ուղղաձիգի ցած[1]) և կիրառված է նյութական կետին։

Այս գլխում մենք կդիտենք միայն այն մարմինները, որոնց չափերը երկրի շառավղի համեմատությամբ փոքր են։ Այդպիսի մարմնի զանազան կետերի մոտ անցկացրած ուղղաձիգներն իրար հետ այնքան փոքր անկյուններ են կազմում, որ կարող են զուգահեռ համարվել։ Այդպիսի մարմիններում մարմին կազմող նյութական կետերի կշիռներն համազուգահեռ են։ Այդ պատճառով էլ համաձայն (XI 22)-ի՝ այդ ուժերը պետք համազոր ունենան։ Այդ համազորը կոչվում է մարմնի կշիռ։

Մարմինը կազմող նյութական կետերի ծանրության համազուգահեռ ուժերի սիստեմը մի փոքր տարբերվում է այն զուգահեռ ուժերի սիստեմներից, որոնք մենք դիտեցինք § § 81—85-ում։

Նախ և առաջ այդ պարագրաֆներում ենթադրվում էր, որ մեր հայեցողությամբ յուրաքանչյուր ազդման գծի վրա մեկական կետ ընտրելով՝ կարելի է բոլոր ուժերը որոշ անկյունով այնպես պտտել, որ պտտումից հետո ուժերը կրկին իրար զուգահեռ լինեն։

Մինչդեռ ծանրության ուժերի դեպքում նրանց պտույտն անկարելի է, որովհետև նրանք միշտ էլ ուղղաձիգ են։

Բայց չէ՞ որ զուգահեռ ուժերի պտտման դեպքում փոխվում է նրանց ազդման գծերի դիրքը մարմնում։ Այդ բանին մենք կարող ենք հասնել և ծանրության ուժերի դեպքում՝ պտտելով մարմինը մի որոշ անկյունով։

Երկրորդ՝ § § 81—85-ում մենք կարող էինք պտտման կենտրոնները մեր հայեցողությամբ ընտրել։ Մասնավորապես որպես պտտման կենտրոններ կարելի էր ընտրել զուգահեռ ուժերի կիրառման կետերը։

Մինչդեռ ծանրության ուժերի դեպքում այն կետը, որի միջով միշտ անցնում է որևէ նյութական կետի կշիռը, հանդիսանում է հենց ինքը՝ նյութական կետը։

Այդ պատճառով էլ A_i պտտման կամայական կենտրոններին այստեղ համապատասխանում են C_i նյութական կետերը։

Վերջապես, եթե ուժերի որևէ մասը հակազուգահեռ է ուժերի մյուս մասին, ապա այդպիսի սիստեմի գլխավոր վեկտորը կարող է հավասարվել զերոյի և այն ժամանակ սիստեմը չի ունենա ոչ համազոր (եթե այդ սիստեմի գլխավոր մոմենտը տարբերվում է զերոյից), ոչ էլ կենտրոն։ Մինչդեռ ծանրության համազուգահեռ ուժերի սիստեմը միշտ էլ համազոր ունի։

Պտտման A_i կամայական կենտրոնները փոխարինելով հենց իրենցով՝ C_i նյութական կետերով՝ մենք տեսնում ենք, որ ծանրության համազուգահեռ ուժերի սիստեմը միշտ կենտրոն ունի, որն անվանվում է

---

1) Իրականության մեջ կշռի ուղղությունը շեղվում է ուղղաձիգից։ Սակայն այդ շեղումը շատ փոքր է։ Շեղման պատճառները կարող են դիտվել դինամիկայի դասընթացում։

Ծանրության կենտրոն։ Համաձայն ընդունման որպես ծանրության կենտրոն հանդիսանում է տարածության այն C կետը, որը բավարարում է՝

$$\bar{\omega}_C = \Sigma P_i \overline{CC_i} = 0, \qquad \text{(XII 20)}$$

հավասարության, որտեղ P_i-ն C_i կետի կշռի չափն է։ (Որովհետև ծանրության ուժերը ենթադրվում են համազուգահեռ, ապա նրանց թվական արժեքներն ունեն միևնույն նշանը. այդ պատճառով էլ (XII 11)-ի մեջ մտնող ուժերի թվական արժեքները (XII 20)-ի մեջ կարող են փոխարինվել այդ ուժերի չափերով)։

Ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը կամայական B կետից որոշվում է՝

$$\left.\begin{aligned} \bar{c} = \overline{BC} &= \frac{\Sigma P_i \bar{r}_i}{P} \\ \text{կամ} \quad c_X = \frac{P_i x_i}{P}, \quad c_Y &+ \frac{P_i y_i}{P}, \quad c_Z = \frac{P_i z_i}{P} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII 21)}$$

Ֆորմուլներով, որտեղ՝

$P = \Sigma P_i$ *մարմնի կշռի չափին է,* $\bar{r}_i = \overline{BC_i}$, *իսկ* x_i, y_i, z_i*-ը* C_i*-ի կոօրդինատներն են, որը որպես կոօրդինատների սկզբնակետ ընդունված է B-ն։*

(XII 20) *և* (XII 21) *ֆորմուլները ճիշտ են ինչպես կետերի վերջավոր թվի և յուրաքանչյուր կետի վերջավոր կշռի դեպքում, այնպես և կետերի անսահման մեծ թվի դեպքում, երբ յուրաքանչյուր կետի (մարմնի անսահման փոքր մասի) կշիռն անսահման փոքր է։ Սակայն վերջին դեպքում* (XII 20) *և* (XII 21)*-ի աջ մասերում գտնվող գումարները հաշվելիս դիմում են ինտեգրման։*

dv *ծավալ ունեցող անսահման փոքր մասի կշիռը նշանակելով* dP, *կստանանք՝*

$$\left.\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{\int_o \bar{r} dP}{\int_o dP} = \frac{\int_o \bar{r} dP}{P} \\ \text{և} \qquad & \\ c_X = \frac{\int_o x dP}{\int_o dP}, \quad c_Y &= \frac{\int_o y dP}{\int_o dP}, \quad c_Z = \frac{\int_o z dP}{\int_o dP} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII 22)}$$

Այստեղ $\int_o$ *որոշյալ ինտեգրալ է, որի մեջ չեն նշված սահմանները, սակայն այնպես պիտի նրանք ընտրվեն, որ այդ ինտեգրալով ներկայացվող գումարում մասնակցեն մարմնի բոլոր անսահման փոքր մասերը։ Իսկ եթե ընտրված են արդեն սահմանները, ապա շրջանակի փոխարեն գրում են սահմանները, այսինքն* $\int_o$*-ի փոխարեն գրում են, օրինակ՝* $\int_{x_1=a}^{x_2=b}$.

Անհրաժեշտ է ընդգծել, որ բոլոր ընդհանուր դատողություններում մեջ (XII 20) *և* (XII 21) *ֆորմուլները կիրառելի են մարմնի մեջ նյութի՝ ինչպես ընդհատ, այնպես և անընդհատ բաշխման դեպքում։* (XII 22) *ֆորմուլներով անհրաժեշտ է օգտվել* $\bar{c}$, c_X, c_Y, c_Z*-ը հաշվելիս, մխիթարն երբ մարմնի մեջ նյութի բաշխումն անընդհատ է։*

§ 87. Ծավալային, մակերեվութային ու գծային տեսակարար կշիռներ. ծանրության կենտրոնի կոորդինատների տարբեր արտահայտություններ. *1°.* (XII 22) *Ֆորմուլները կարելի է մի փոքր ձևափոխել՝ օգտագործելով տեսակարար կշռի գաղափարը։*

Մարմինը մտքով բաժանենք մի քանի մասերի։ Դիցուք առաջին մասի ծավալն ու կշիռն է V_1 և P_1, երկրորդ մասի ծավալն ու կշիռը՝ V_2 և P_2 և այլն։ Կշռի հարաբերությունը ծավալին կոչվում է միջին տեսակարար կշիռ։

Այսպես՝ $\delta_1=\frac{P_1}{V_1}$, $\delta_2=\frac{P_2}{V_2}$ *և այլն*

կլինեն մարմնի առաջին, երկրորդ և այլ մասերի միջին տեսակարար կշիռները։ Եթե A կետը պարունակող մասի ծավալն անսահման փոքր է (dv), ապա այդ մասի կշիռը նույնպես կլինի անսահման փոքր (dP)։

$\delta=\frac{dP}{dv}$ *հարաբերությունը կոչվում է մարմնի տեսակարար կշիռ A կետում։ Եթե տարբեր կետերի համար δ-ն տարբեր է, ապա մարմինն անհամասեռ է։ Իսկ այն դեպքում, երբ բոլոր կետերի համար δ միևնույնն է, մարմինը համարվում է համասեռ*[1])։

$\delta=\frac{dP}{dv}$ *տեսակարար կշռի հասկացողությունից բնորոշումից հետևում է, որ* $dP=\delta dv$։ (XII 22) *Ֆորմուլում տեղադրելով dP-ի արժեքը՝ գտնում ենք՝*

$$c_X=\frac{\int_0 x\delta dv}{\int_0 \delta dv},\quad c_Y=\frac{\int_0 y\delta dv}{\int_0 \delta dv},\quad c_Z=\frac{\int_0 z\delta dv}{\int_0 \delta bv} \qquad \text{(XII 23)}$$

Համասեռ մարմնի դեպքում δ-ն, որպես հաստատուն արտադրիչ, կարող է դուրս բերվել ինտեգրալի նշանից։

δ-ով կրճատելուց հետո կստանանք՝

$$c_X=\frac{\int_0 xdv}{\int_0 dv},\quad c_Y=\frac{\int_0 ydv}{\int^0 dv},\quad c_Z=\frac{\int_0 zdv}{\int_0 dv} \qquad \text{(XII 24)}$$

Այս արտահայտությունները տեսակարար կշիռներ չեն պարունակում։ Դա նշանակում է, որ համասեռ մարմնի ծանրության կենտրոնի դիրքը կախում չունի նրա տեսակարար կշռից և լրիվ բնորոշվում է նրա ձևով։ Այդ պատճառով էլ միևնույն ձև ունեցող երկու համասեռ մարմինների ծանրության կենտրոնի դիրքը միևնույնն է։

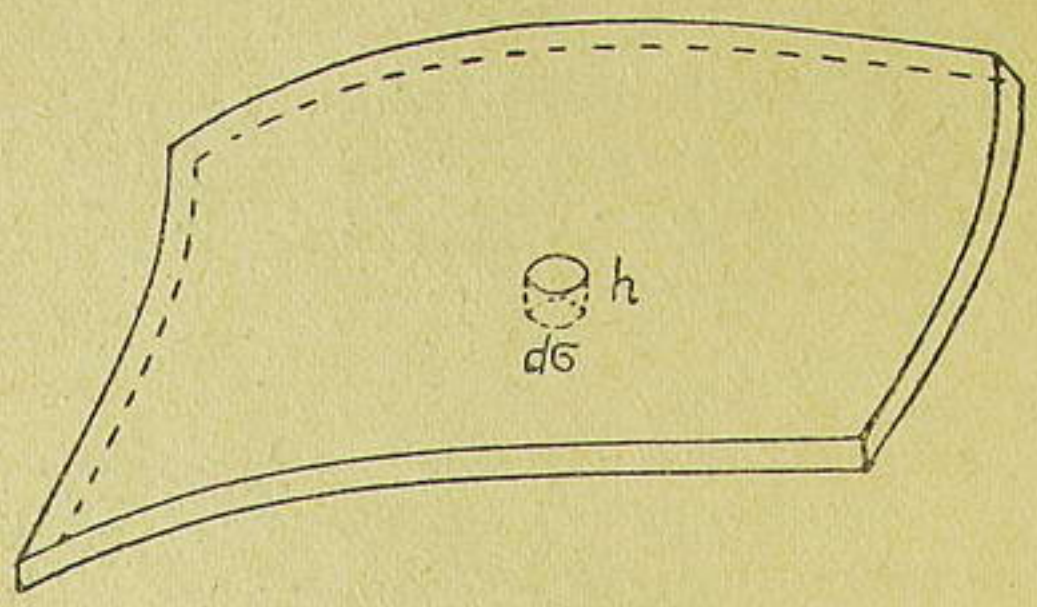
2°. Այն մարմիններին, որոնց տարածականությունը մի ուղղությամբ շատ փոքր է երկու այլ ուղղություններով տարածականության համեմատությամբ, անվանենք նյութական մակերևույթներ։

Որպես օրինակ այդպիսի մակերևույթների կարող են ծառայել թղթի

---

[1]) *Ֆիզիկայում, որն ուսումնասիրում է մարմնի բոլոր հատկությունները, համասեռ կոչվում է այն մարմինը, որի մեջ հատկություններից յուրաքանչյուրը բոլոր կետերում էլ միևնույնն է։ Ծանրության կենտրոնի տեսության մեջ մեզ միմիայն կշիռն է հետաքրքրում։ Այդ պատճառով էլ տեսակարար կշռի միևնույն լինելը բոլոր կետերում թույլ է տալիս մեզ մարմինը համարել համասեռ։*

քերթը, օդապարիկի թաղանթը և այլն, որոնց հաստությունը երկարության և լայնության համեմատությամբ շատ փոքր է։



Նկ. 282

Անսահման փոքր dσ *մակերեսին, շատ փոքր* h *բարձրության (հաստության) դեպքում, համապատասխանում է (նկ. 282) անսահման փոքր ծավալ՝* dv=hdσ։

Այդ պատճառով

$$dP=\delta dv=\delta h d\sigma$$

հδ արտադրյալը նշանակելով γ *տառով, կունենանք՝*

$$dP=\gamma d\sigma,\quad \frac{dP}{d\sigma}=\gamma$$

γ=δh-ը կոչվում է մակերևույթային տեսակարար կշիռ։ Ի դանազանություն մակերևույթային տեսակարար կշռից, δ-ն պետք է անվանել ծավալային տեսակարար կշիռ։ Եթե γ-ն նյութական մակերևույթի տարբեր կետերում տարբեր է, ապա այդ մակերևույթն անհամասեռ է։ Նյութական մակերևույթի բոլոր կետերում γ միևնույն լինելու դեպքում մակերևույթը կոչվում է համասեռ։ Համասեռության համար անհրաժեշտ է, որ hδ *արտադրյալը լինի հաստատուն։ Հետևապես հաստատուն δ-ի դեպքում պիտի հաստատուն լինի նաև* h *բարձրությունը (հաստությունը)։*

(XII 22) Ֆորմուլներում dP*-ի փոխարեն տեղադրելով* γdσ*-ն, նյութական մակերևույթների համար կունենանք՝*

$$c_x=\frac{\int_\sigma x\gamma d\sigma}{\int_\sigma \gamma d\sigma},\quad c_y=\frac{\int_\sigma y\gamma d\sigma}{\int_\sigma \gamma d\sigma},\quad c_z=\frac{\int_\sigma z\gamma d\sigma}{\int_\sigma \gamma d\sigma}\qquad (XII\ 25),$$

*Իսկ համասեռ նյութական մակերևույթի դեպքում (*γ=const*) կստանանք՝*

$$c_x=\frac{\int_\sigma x d\sigma}{\int_\sigma d\sigma},\quad c_y=\frac{\int_\sigma y d\sigma}{\int_\sigma d\sigma},\quad c_z=\frac{\int_\sigma z d\sigma}{\int_\sigma d\sigma}\qquad (XII\ 26)։$$

Այստեղ $\int_\sigma d\sigma$*-ն նյութական մակերևույթի մի կողմի մակերեսն է։*

3°. Այն մարմինները, որոնց տարածականությունը երկու ուղղությամբ համեմատաբար շատ փոքր է, քան երրորդ ուղղությամբ ունեցած տարածականությունը, կոչվում են նյութական գծեր։

Որպես օրինակներ այդպիսի գծերի կարող են ծառայել՝ թելը, լարը, ճոպանը, եթե նրա երկարությունը մեծ է, և այլն։

Նյութական գծի անսահման փոքր մասի ծավալը, կարտահայտվի այսպես՝ dv=τds *(նկ. 283), այստեղ* ds*-ը դիտվող մասի անսահման փոքր երկարությունն է, իսկ τ-ն է լայնական կտրվածքի շատ փոքր մակերեսը։*

Այդ մասի կշիռը՝

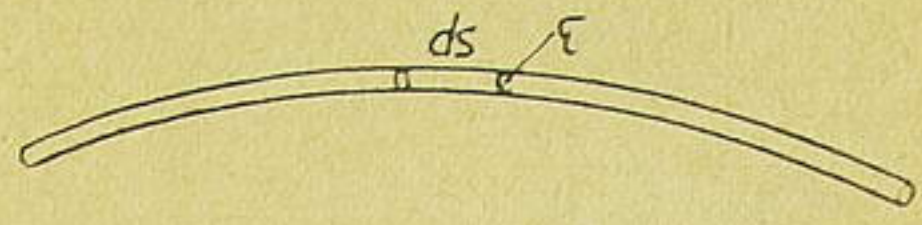
$$dP=\delta dv=\delta\tau ds$$

ծ տրտատիյալը նշանակելով β-ով, կունենանք՝

$$dP=\delta dv=\beta ds,\quad \beta=\frac{dP}{ds}$$

β-ն կոչվում է գծային տեսակարար կշիռ։

Եթե δ=δτ-ն նյութական գծի տարբեր կետերում միևնույնն է, ապա գիծը համարվում է համասեռ Հակառակ դեպքում նյութական գիծն անհամասեռ է։



նկ 283

(XII 22) *Ֆորմուլներում dP-ն, փոխարինելով βds-ով՝ առանում ենք՝*

$$c_X=\frac{\int_0 x\beta ds}{\int_0 \beta ds},\quad c_Y=\frac{\int_0 y\beta ds}{\int_0 \beta ds},\quad c_Z=\frac{\int_0 z\beta ds}{\int_0 \beta ds} \qquad \text{(XII 27)}$$

Եթե նյութական գիծը համասեռ է, β=const, ուստի՝

$$c_X=\frac{\int_0 x ds}{\int_0 ds},\quad c_Y=\frac{\int_0 y ds}{\int_0 ds},\quad c_Z=\frac{\int_0 z ds}{\int_0 ds} \qquad \text{(XII 28)}$$

որտեղ՝

$\int_0 ds$*-ը նյութական գծի երկարությունն է։*

§ 88. Սիմետրիայի էլեմենտներ ունեցող մարմինների ծանրության կենտրոնի գիրքը։ *Ապացուցենք սիմետրիայի էլեմենտներ ունեցող մարմինների ծանրության կենտրոնի վերաբերյալ մի քանի թեորեմներ։*

Մարմինն ունի՝

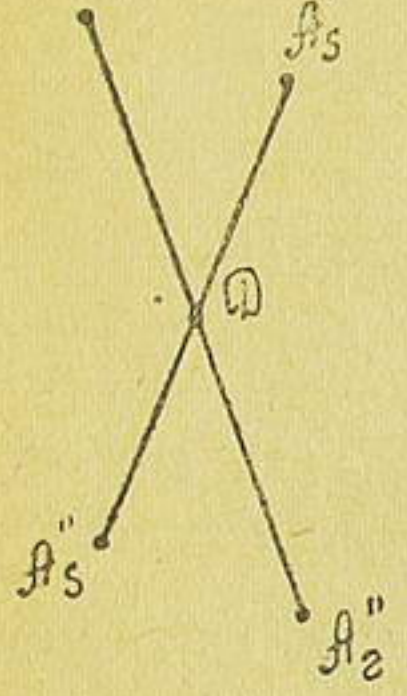
ա. Սիմետրիայի D կենտրոն, եթե յուրաքանչյուր A'_s կետին համապատասխանում է միանգամայն միանման A''_s կետ և $\overline{DA'_s}+\overline{DA''_s}=0$, այսինքն միատեսակ A'_s և A''_s կետեր միացնող հատվածն անցնում է D կետով և այդ կետում բաժանվում է հավասար մասերի (նկ. 284)։

բ. Սիմետրիայի λ առանցք, եթե յուրաքանչյուր A'_s կետին համապատասխանում է միանգամայն միանման A''_s կետ, ըստ որում $A'_sA''_s\perp\lambda$ և հատում է λ-ն մի այնպիսի A_s կետում, որ

$$\overline{A_sA'_s}+\overline{A_sA''_s}=0 \qquad \text{(նկ. 285)։}$$

գ. Սիմետրիայի σ հարթություն, եթե յուրաքանչյուր A'_s կետին համապատասխանում է միանգամայն միանման A''_s կետը, ըստ որում $A'_sA''_s\perp\sigma$ և հատում է σ-ն մի այնպիսի A_s կետում, որ

$$\overline{A_sA'_s}+\overline{A_sA''_s}=0 \qquad \text{(նկ. 286)}$$



նկ. 284

Թեորեմներ.

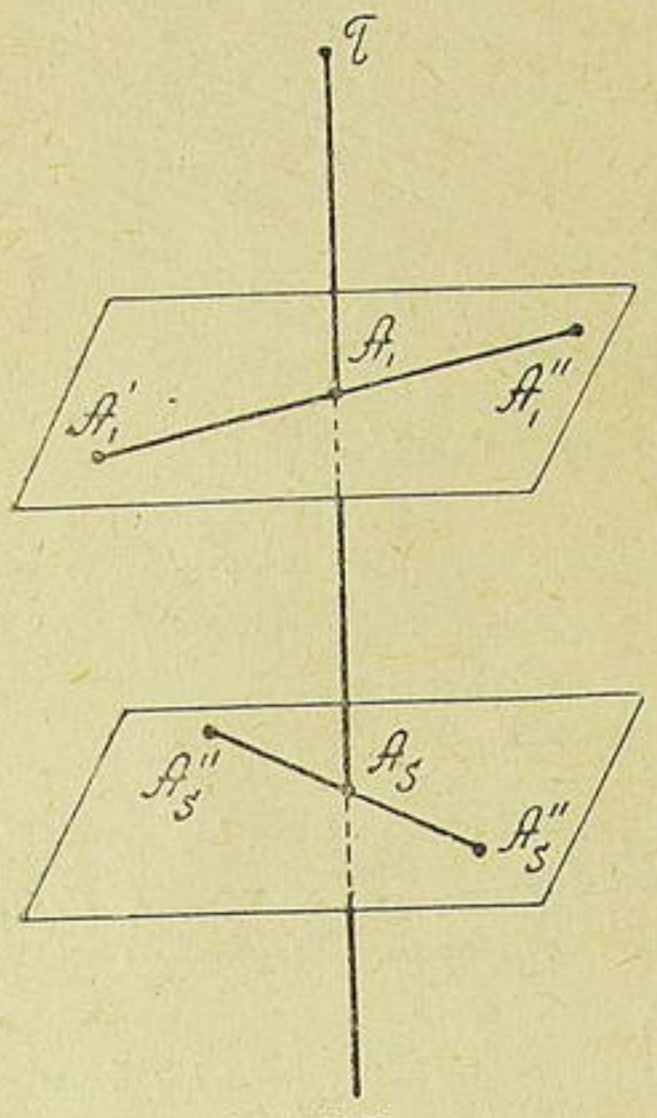
Եթե մարմնի մեջ գոյություն ունի՝

(XII 29) *ա. Սիմետրիայի կենտրոն, այդ կենտրոնը և ծանրության կենտրոնը համընկնում են։*

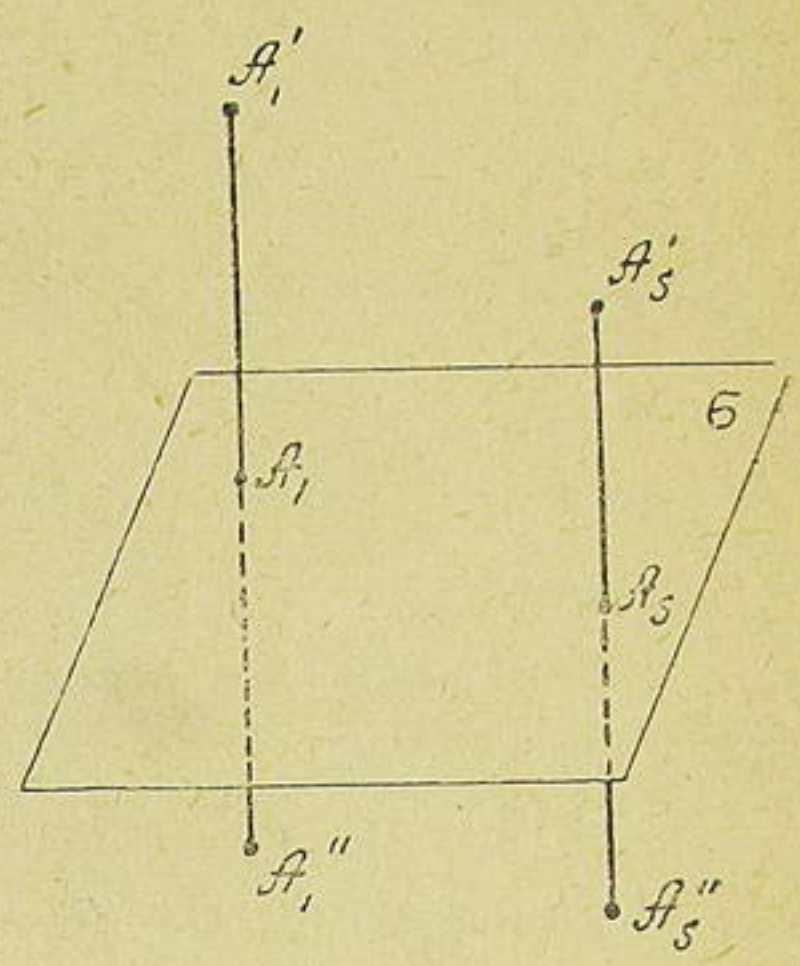
բ. Սիմետրիայի առանցք, ծանրության կենտրոնը գտնվում է այդ առանցքի վրա.

գ. Սիմետրիայի հարթություն, ծանրության կենտրոնը գտնվում է այդ հարթության վրա:

Որովհետև այս թեորեմները միևնույն ձևով են ապացուցվում, ապա բավական է բերել դրանցից մեկի ապացուցումը, օրինակ բ. թեորեմի ապացուցումը:



Նկ. 285



Նկ. 286

Դիցուք, մարմինը կազմված է n զույգ միանման կետերից՝ A'_1 *և* A''_1, A'_2 *և* $A''_2 \dots A'_n$ *և* A''_n:

կետերի յուրաքանչյուր զույգի կշիռները իրար հավասար են՝

$$P'_1 = P''_1,\ P'_2 = P''_2 \dots P'_n = P''_n.$$

Զույգ-զույգ հավասար 2n *ուժերի այս սիստեմը բաժանենք* n *խմբերի այնպես, որպեսզի յուրաքանչյուր խումբը կազմված լինի հավասար երկու ուժերից՝ միանման կետերի կշիռներից: Ըստ* (XII 18) *կամ* (XII 19)*-ի* P'_i *և* P''_i *երկու հավասար ուժերի կենտրոնը գտնվում է* $A'_iA''_i$ *հատվածի* A_i *միջնակետում: Բայց համաձայն սիմետրիայի առանցքի բնորոշման,* A_i *կետը գտնվում է այդ առանցքի վրա:*

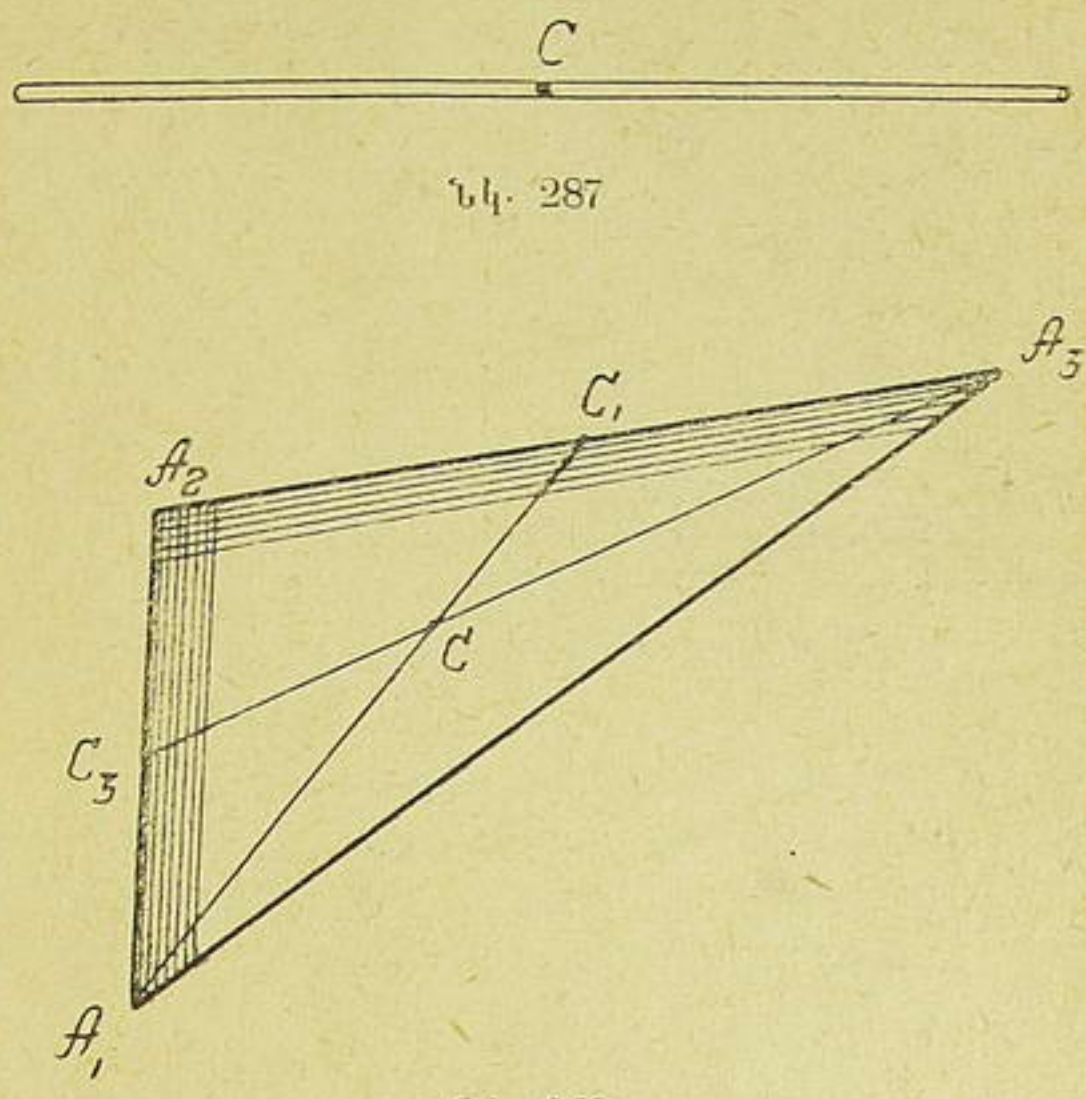
Այսպիսով ուժերի բոլոր խմբերի կենտրոնները գտնվում են սիմետրիայի առանցքի վրա: Այստեղից հետևում է ըստ (XII 15)*-ի, որ ամբողջ մարմնի ծանրության կենտրոնը գտնվում է սիմետրիայի առանցքի վրա:*

Ցույց տանք (XII 29 *ա*) *թեորեմի կիրառումները:*

Համասեռ նյութական ուղիղը (նկ. 287) *սիմետրիկ է իր C միջին կետի նկատմամբ: Հետևապես ըստ* (XII 29 *ա*)*-ի՝ նրա ծանրության կենտրոնը գտնվում է միջնակետում:*

Այս հնարանքը կարող է օգտագործվել համասեռ հարթ եռանկյունաձև (ɔ) թիթեղի ծանրության կենտրոնը գտնելու համար (նկ. 288)։

Եվ իսկապես, եռանկյունին մոտով բաժանենք մի շարք զուգահեռ անսահման բարակ A_1A_2, B_1B_2... շերտերի։ Յուրաքանչյուր այդպիսի շերտ կարելի է դիտել որպես համասեռ նյութական մի ուղիղ, որի ծանրության կենտրոնը գտնվում է այդ ուղղի միջնակետում։



նկ. 287

նկ. 288

Այսպիսով շերտերի ծանրության կենտրոնները գտնվում են A_3C_3 միջնագծի վրա։ Այդ պատճառով էլ ըստ (XII 15)-ի ɔ-ի՝ ծանրության կենտրոնն էս պիտի գտնվի A_3C_3-ի վրա։ Եռանկյունին բաժանելով A_2A_3 կողմին զուգահեռ շերտերի վրա, մենք հենց նույն ձևով կգտնենք, որ ɔ-ի ծանրության կենտրոնը պիտի գտնվի նաև A_1C_1 միջնագծի վրա։ Հետևապես ɔ-ի ծանրության կենտրոնը միջնագծերի հատման կետումն է։

Այնպես որ՝

$$c=\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3}{3},\quad c_X=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad c_Y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\quad c_Z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

որտեղ՝

$\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$-ը եռանկյան A_1, A_2, A_3 գագաթների շառավիղ-վեկտորներն են, իսկ x_1, y_1, z_1 և այլն... այդ կետերի կոօրդինատները։

Մենք տեսնում ենք, որ համասեռ եռանկյունի թիթեղի ծանրության կենտրոնը համընկնում է այդ եռանկյան գագաթներում տեղավորված երեք միանման կետերի ծանրության կենտրոնի հետ։

Մինչդեռ կամայական բազմանկյան և ունեցող համասեռ հարթ թիթեղի ծանրության կենտրոնը չի համընկնում այդ բազմանկյան գագաթներում տեղավորված միանման կետերի ծանրության կենտրոնների հետ։

Գիտենալով եռանկյունի թիթեղի ծանրության կենտրոնը՝ հեշտ է որոշել նաև տեսրաեդրի և ունեցող համասեռ մարմնի ծանրության կենտրոնը (նկ. 289)։

$A_1A_2A_3A_4$ տեսրաեդրը կարելի է բաժանել անսահման մեծ թվով անսահման բարակ եռանկյունաձև թիթեղների։ Այդ բոլոր թիթեղների ծանրության կենտրոնները գտնվում են A_1C_1 ուղղի վրա, որտեղ C_1-ն $A_2A_3A_4$ եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է։ Հետևապես, տեսրաեդրի ծանրության կենտրոնը գտնվում է A_1C_1 ուղղի վրա։

Սակայն նույն հենց տետրաեդրը կարելի է բաժանել եռանկյունաձև թիթեղների այնպես, որ նրանք մինչև զուգահեռ $A_3A_4A_1$ հարթությանը: Այդ պատճառով էլ տետրաեդրի ծանրության կենտրոնը պիտի գտնվի նաև A_2C_2 ուղղի վրա, որտեղ C_2-ը $A_3A_4A_1$ եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է:

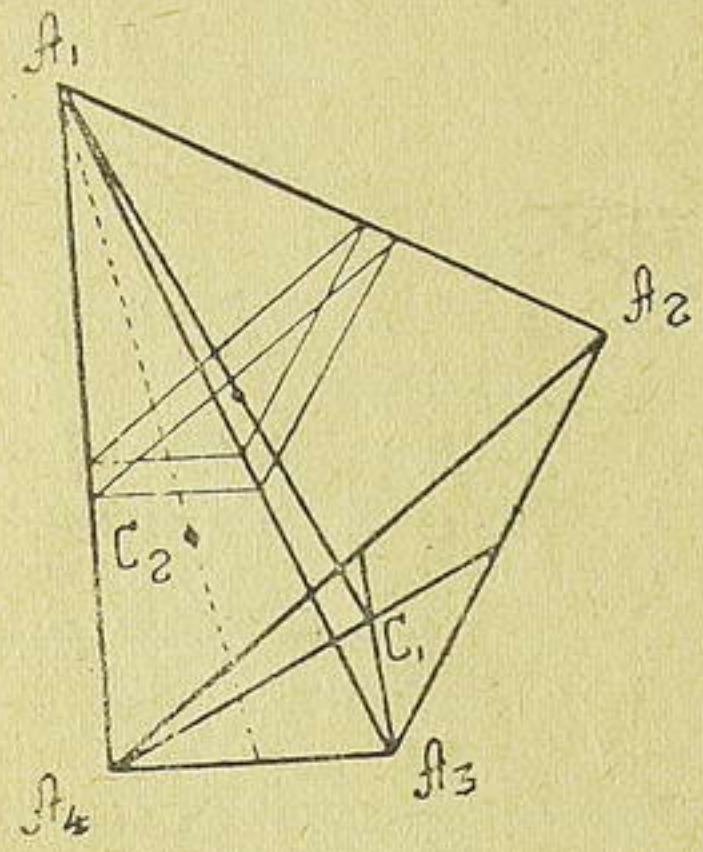
Այսպիսով, տետրաեդրի ծանրության C կենտրոնը գտնվում է A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 և A_4C_4 ուղիղների հատման կետում: Ըստ որում, ինչպես հայտնի է՝

$$A_1C : A_1C_1 = A_2C : A_2C_2 = A_3C : A_3C_3 = A_1C : A_4C_4 = \frac{3}{4},\ A_1C = \frac{3}{4} A_1C_1:$$

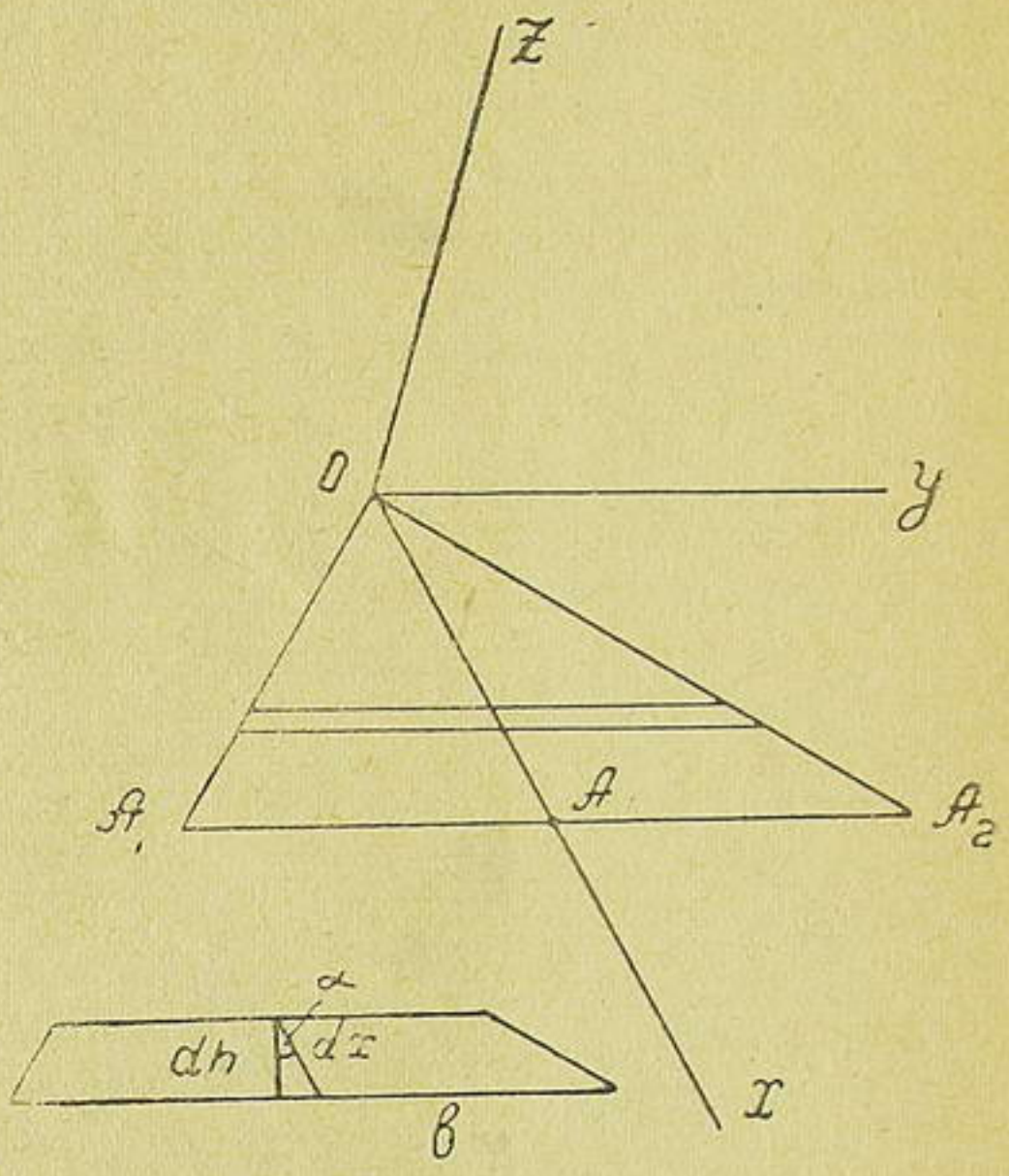
§ 89. (XII 24), (XII 26), (XII 28) Ջորմուլները կիրառելու օրինակներ:

1°. Համասեռ եռանկյունաձև հարթ թիթեղի ծանրության կենտրոնը:

Մենք հենց նոր տեսանք, որ այդ թիթեղի ծանրության կենտրոնը պիտի լինի OA միջնագծի վրա, նկ. 290: O-ն ընդունում ենք որպես կոորդինատների սկզբնակետ: Դիցուք OX առանցքն անցնում է A կետով, OY առանցքը զուգահեռ է A_1A_2 հիմքին, իսկ OZ-ը, հատնելով XOY հարթության հետ կազմում է մի կամայական անկյուն: Կոորդինատների այս սիստեմն ընդհանուր առմամբ կլինի շեղանկյուն: Որովհետև ծանրության կենտրոնը գտնվում է OX առանցքի վրա, ապա $c_Y=0$, $c_Z=0$: Որոշենք c_X-ը: Դրա համար պիտի բաժանենք թիթեղը անսահման բարակ շերտերի:



նկ. 289



նկ. 290

Շերտի dσ մակերեսը կլինի՝ $d\sigma = bdh$, որտեղ dh-ը շերտի բարձրությունն է, իսկ b-ն՝ շերտի երկարությունը:

Դիցուք OA_1 ուղղի հավասարումն է՝ $y=kx$.

Այն ժամանակ $b=2y=2kx$, $dh=dx\cos\alpha$,

Այդ պատճառով էլ $d\sigma=\cos\alpha\, 2kx\,dx=k\cdot\cos\alpha\, dx^2$,

$$xd\sigma=\cos\alpha\, 2kx^2dx=k\cdot\cos\alpha\,\frac{2}{3}\,dx^3,$$

$$\int_0 xd\sigma=\frac{2}{3}\,k\cdot\cos\alpha\int_0 dx^3,\quad \int_0 d\sigma=k\cdot\cos\alpha\int_0 dx^2,$$

Ըստ (XII 26)-*ի*

$$cx=\frac{\int_0 xd\sigma}{\int_0 d\sigma}=\frac{\frac{2}{3}\int_0 dx^3}{\int_0 dx^2}.$$

OA *միջնագծի երկարությունը նշանակենք* l-*ով։ Այն ժամանակ, որպեսզի այդ ինտեգրալներով ներկայացվող գումարներում մասնակցեն* OA_1A_2 *թիթեղի բոլոր անսահման փոքր շերտերը, որպես սահմաններ պիտի ընտրել* x=0, x=l, *և մենք կստանանք՝*

$$cx=\frac{\frac{2}{3}l^3}{l^2}=\frac{2}{3}l,$$

այսինքն՝ համասեռ եռանկյունաձև թիթեղի ծանրության կենտրոնը գտնվում է միջնագծի վրա, վերջինիս $\frac{2}{3}$- *երկարության հեռավորության մի, հաշվելով այն գագաթից, որտեղից անց է կացված միջնագիծը։*

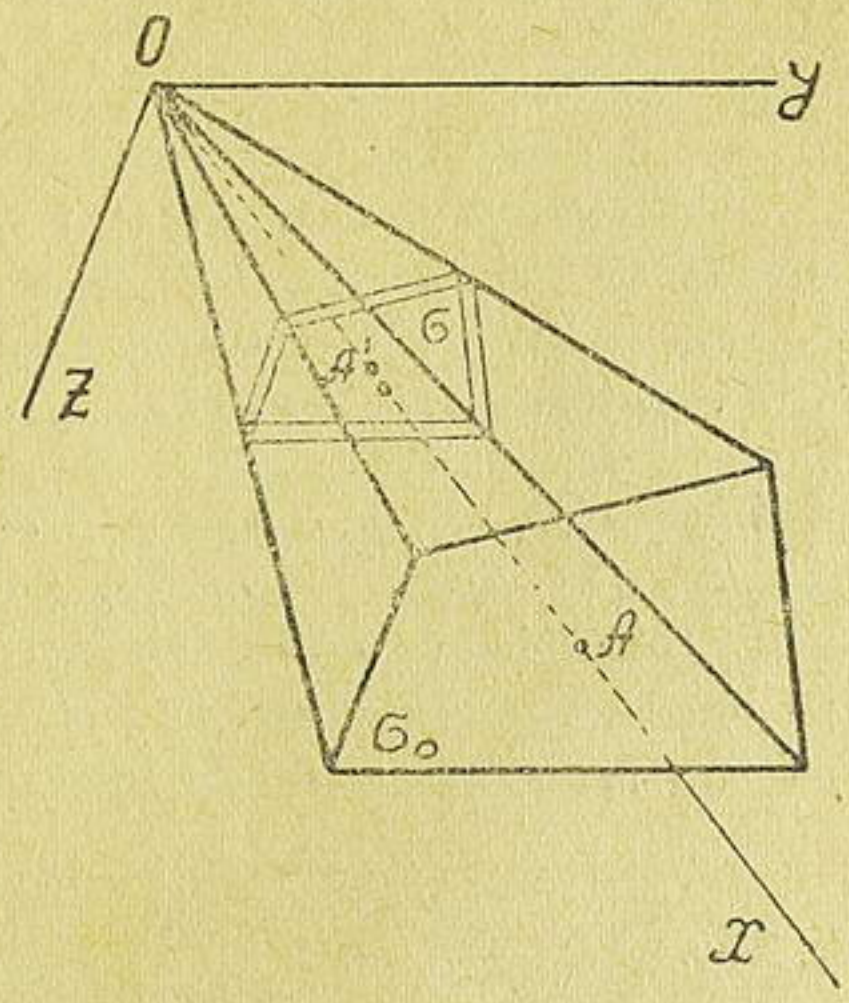
§ 88-ում այդ հետևանքին մենք այլ ճանապարհով հանգեցինք։

2°. *Կամայական բուրգի ձև ունեցող համասեռ մարմնի ծանրության կենտրոնը։*

Բուրգը բաժանենք անսահման մեծ թվով անսահման բարակ շերտերի, որոնք զուգահեռ են հիմքին (նկ. 291)։

σ *և* dh *հիմքի մակերես և բարձրություն ունեցող շերտի* dv *ծավալը կլինի՝* $dv=\sigma dh$։

Դիցուք բուրգի հիմքի մակերեսն է σ_0, *և A-ն հիմքի ծանրության կենտրոնն, երբ այդ հիմքը դիտվում է որպես նյութական մակերևույթ։ Այն ժամանակ OA-ի վրա կլինեն տեղավորված ինչպես բոլոր շերտերի (որոնց վրա բաժանել էինք բուրգը) ծանրության կենտրոնները, այնպես և ամբողջ բուրգի ծանրության կենտրոնը։ O-ն ընդունելով որպես կոորդինատների սկզբնակետ և A կետով անցկացնելով OX առանցքը, իսկ OY և OZ առանցքներն ընդունելով զուգահեռ բուրգի հիմքին, կունենանք՝*



նկ. 291

$$cy=0,\quad cz=0։$$

Որպեսզի cx-ը որոշենք, օգտվենք (XII 24) ֆորմուլից՝

$$xdv=x\sigma dh.$$

բայց $\sigma=\sigma_0\frac{x^2}{l^2}$, որտեղ՝

σ_0-ն բուրգի հիմքի մակերեսն է, իսկ $x=OA'$ և dx հավասար է անսահման բարակ շերտի հիմքերի միջև եղած OX առանցքի հատվածի երկարությանը:

$$l=OA,\quad dh=dx\cdot\cos\alpha,$$

Այսպիսով, $xdv=\frac{\sigma_0 x^3}{l^2}\cos\alpha\,dx=\frac{\sigma_0}{l^2}\cos\alpha\,\frac{dx^4}{4}$,

$$dv=\sigma dh=\frac{x^2}{l^2}\sigma_0\cos\alpha\,dx=\frac{\sigma_0}{l^2}\cos\alpha\,\frac{dx^3}{3},$$

Այդ պատճառով էլ՝

$$cx=\frac{\int_0 xdv}{\int_0 dv}=\frac{\int_0\frac{dx^4}{4}}{\int_0\frac{dx^3}{3}}=\frac{3}{4}\frac{\int_0^l dx^4}{\int_0^l dx^3}=\frac{3}{4}l=\frac{3}{4}OA,$$

այսինքն՝

Կամայական բուրգի ձև ունեցող մարմնի ծանրության կենտրոնը գտնվում է զագաթը հիմքի ծանրության կենտրոնի հետ միացնող հատվածի վրա, վերջինիս $\frac{3}{4}$ երկարության հեռավորության չափով՝ հաշվելով զագաթից:

Հեշտ է գտնել նաև հատած բուրգի ծանրության կենտրոնի դիրքը:

Եվ իսկապես, դիցուք OA ուղիղը հատում է բուրգի վերին հիմքը B կետում: Դիցուք $OA=a$, $OB=b$: Այն ժամանակ ինտեգրման ներքին և վերին սահմաններն ընդունելով՝ $x=b$, $x=a$, կստանանք՝

$$cx=\frac{3}{4}\,\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}:$$

Շնորհիվ այն բանի, որ այս ֆորմուլները դուրս բերելիս բուրգը ենթադրվում էր միանգամայն կամայական, այս ֆորմուլները ճիշտ են թե կամայական ուղղորդ ունեցող կոնի և թե հատած կոնի դեպքում:

3°. Շրջանագծի համասեռ նյութական աղեղի ծանրության կենտրոնը:

Դիցուք A_1AA_2-ը շրջանագծի աղեղ է, որի կենտրոնն է O-ն, միջնակետը A-ն (նկ. 292), իսկ սիմետրիայի առանցքը՝ OA-ն:

Այդ պատճառով աղեղի ծանրության կենտրոնը պիտի գտնվի OA-ի վրա: Որպեսզի որոշենք ծանրության կենտրոնի դիրքը, կիրառենք (XII 28) ֆորմուլը, իբրև OX առանցք ընդունելով սիմետրիայի OA առանցքը.

$$cx=\frac{\int_0 xds}{\int_0 ds}:$$

Այստեղ ds-ը աղեղի էլեմենտի երկարությունն է: r-ին հավասար շառավղի դեպքում՝

$$ds=rd\varphi,\quad x=r\cos\varphi:$$

Այդ պատճառով՝

$$xds = r^2 \cos\varphi\, d\varphi = r^2 d\sin\varphi$$

$$cx = \frac{r^2 \int_0 d\sin\varphi}{r \int_0 d\varphi},$$

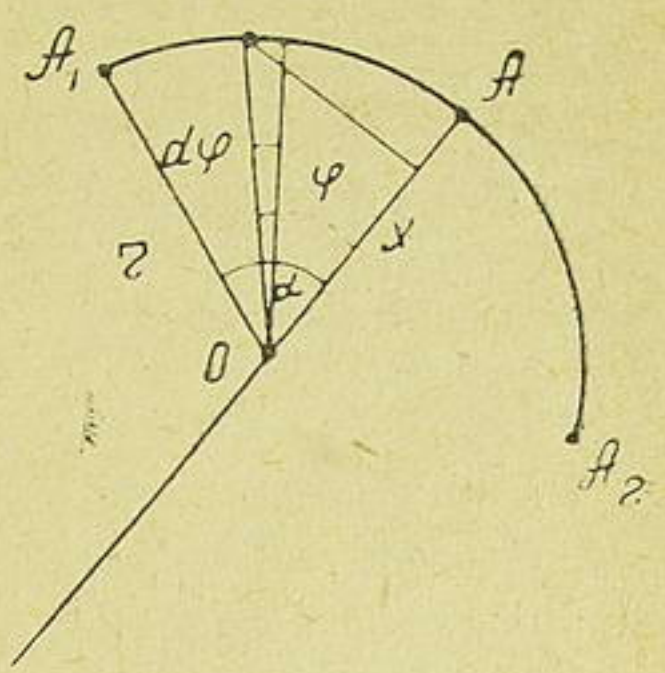
Եթե աղեղին համապատասխանող կենտրոնական անկյունը 2α է, այսինքն՝ $\angle A_1OA_2 = 2\alpha$ և անկյունները հաշվվում են OX առանցքից, ապա որպես ներքին և վերին սահմաններ հարկավոր է ընդունել՝ $\varphi = -\alpha$, $\varphi = \alpha$, և այն ժամանակ՝

$$cx = \frac{r[(\sin\alpha - \sin(-\alpha)]}{\alpha - (-\alpha)} = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

այսինքն՝

Շրջանագծի համասեռ նյութական աղեղի ծանրության կենտրոնը r շառավղի դեպքում գտնվում է «միջին» շառավղի վրա, շրջանագծի կենտրոնից $r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ հեռավորության վրա։

α-ն աղեղի կազմած կենտրոնական անկյան կեսն է։



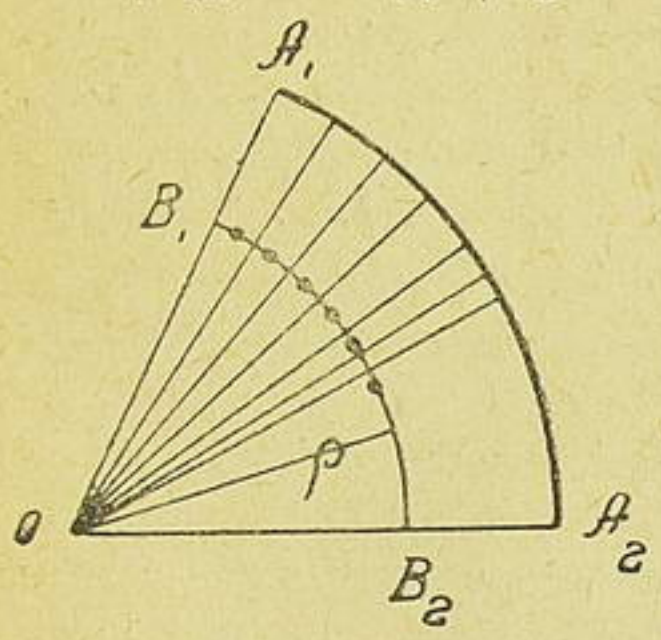
նկ. 292

Կիսաշրջանագծի դեպքում $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$cx = \frac{2r}{\pi}$. *լրիվ շրջանագծի դեպքում $\alpha = \pi$, $cx = 0$։*

4°. Շրջանային սեկտորի ձև ունեցող համասեռ նյութական մակերևույթի ծանրության կենտրոնը։

Դիցուք, OA_1A_2-ը շրջանի սեկտոր է։ A_1A_2 աղեղը բաժանենք անսահման փոքր մասերի (նկ. 293)։ Միացնելով յուրաքանչյուր մասի սկիզբը և վերջը O-ի հետ, կստանանք անսահման փոքր հիմք ունեցող անսահման մեծ թվով եռանկյուններ (որպես հիմքեր կարելի է ընդունել այն լարերը, որոնք ձգում են յուրաքանչյուր էլեմենտի սկիզբը և վերջը)։ Որովհետև յուրաքանչյուր եռանկյունաձև շերտի ծանրության կենտրոնը գտնվում է միջնագծերի հատման կետում, ապա բոլոր եռանկյունաձև շերտերի ծանրության կենտրոնների երկրաչափական տեղը կլինի B_1B_2 աղեղն այն շրջանագծի, որի շառավիղը՝



նկ. 293

$$\rho = OB = \frac{2}{3} OA = \frac{2}{3} r:$$

Այդ պատճառով էլ, եթե $2\alpha = \angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2$, ապա 3° և (XII 14')-ի հիման վրա՝

$$cx = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha} = \rho\frac{\sin\alpha}{\alpha};$$

Խնդիրներ.

1. Որոշել գրաֆիկ եղանակով հարթ, կամայական քառանկյան ձև ունեցող համասեռ նյութական մակերևույթի ծանրության կենտրոնը։

2. Համասեռ մի թիթեղ ունի հարթ քառանկյան ձև։ Ի՞նչպիսի պայմանի պիտի բավարարի այդ քառանկյունին, որպեսզի թիթեղի ծանրության կենտրոնը գտնվի անկյունագծերից մեկի վրա։

3. Ցույց տալ, որ այն նյութական կորի ծանրության կենտրոնը, որին ավելի քան երկու կետում չի կարող հասնել ոչ մի ուղիղ, գտնվում է այդ կորից դուրս։

4. Ապացուցել, որ հարթ կանոնավոր բազմանկյան ձև ունեցող համասեռ թիթեղի ծանրության կենտրոնը համընկնում է այդ բազմանկյան գագաթներում գտնվող միանման նյութական կետերի ծանրության կենտրոնի հետ։

5. Ցույց տալ, որ եթե համասեռ թիթեղն ունի հարթ, անկանոն և սիմետրիայի կենտրոն չունեցող բազմանկյան ձև, ապա այդ թիթեղի ծանրության կենտրոնը չի համընկնում այդ բազմանկյան գագաթներում գտնվող միանման նյութական կետերի ծանրության կենտրոնի հետ։

6. Զորս նյութական կետեր կազմում են հարթ անկանոն բազմանկյան գագաթները. մի անկյունագծի վրա տեղավորված կետերի կշիռները իրար հավասար են։ Որոշել կշիռների այն հարաբերությունը, որի դեպքում այդ կետերի ծանրության կենտրոնը համընկնում է այդ նույն բազմանկյան ձև ունեցող համասեռ թիթեղի ծանրության կենտրոնի հետ։

7. Որոշել՝

ա. համասեռ գնդաձև թաղանթի սեգմենտի,

բ. գնդային սեկտորի ձև ունեցող համասեռ մարմնի,

գ. պարաբոլով սահմանափակված համասեռ թիթեղի ծանրության կենտրոնները։

ԳԼՈՒԽ XIII

ԳՐԱՖՈՍՏԱՏԻԿԱՅԻ ՏԱՐՐԵՐԸ

§ 90. **Գրաֆոստատիկայի սահմանումը։** Գրաֆիկական ստատիկա, կամ կարճ, գրաֆոստատիկա անվանում են կարծր մարմնի ստատիկայի խնդիրները գրաֆիկորեն լուծելու եղանակների համախմբումը։

Գրաֆոստատիկան լայն տարածվել է այն պատճառով, որ պահանջելով ավելի քիչ ժամանակ, քան այդ նույն խնդրի անալիտիկ հաշիվների դեպքում, նա տալիս է գործնական նպատակների համար բավարար ճշտություն ունեցող արդյունք։

Ներկայումս գրաֆոստատիկան զարգացել և ծավալվել է այնքան, որ դարձել է ինքնուրույն դիսցիպլինա։

Այստեղ տրվելու են միայն գրաֆոստատիկայի ամենաանհրաժեշտ տարրական տեղեկությունները այն հերթականությամբ, որ բոլոր ուժերը դասավորված են մի հարթության վրա։

§ 91. **Երկու ուժերի համազորի կառուցումը։** Գրաֆոստատիկայի տարրական խնդիրն է համազորի որոշելը։ Այս խնդիրը լուծելու համար կարելի է օգտվել այն ձևով, որը կիրառում են երկու զուգահեռ ուժերի համազորը որոշելիս։ Նախ ձևակերպենք խնդիրը։

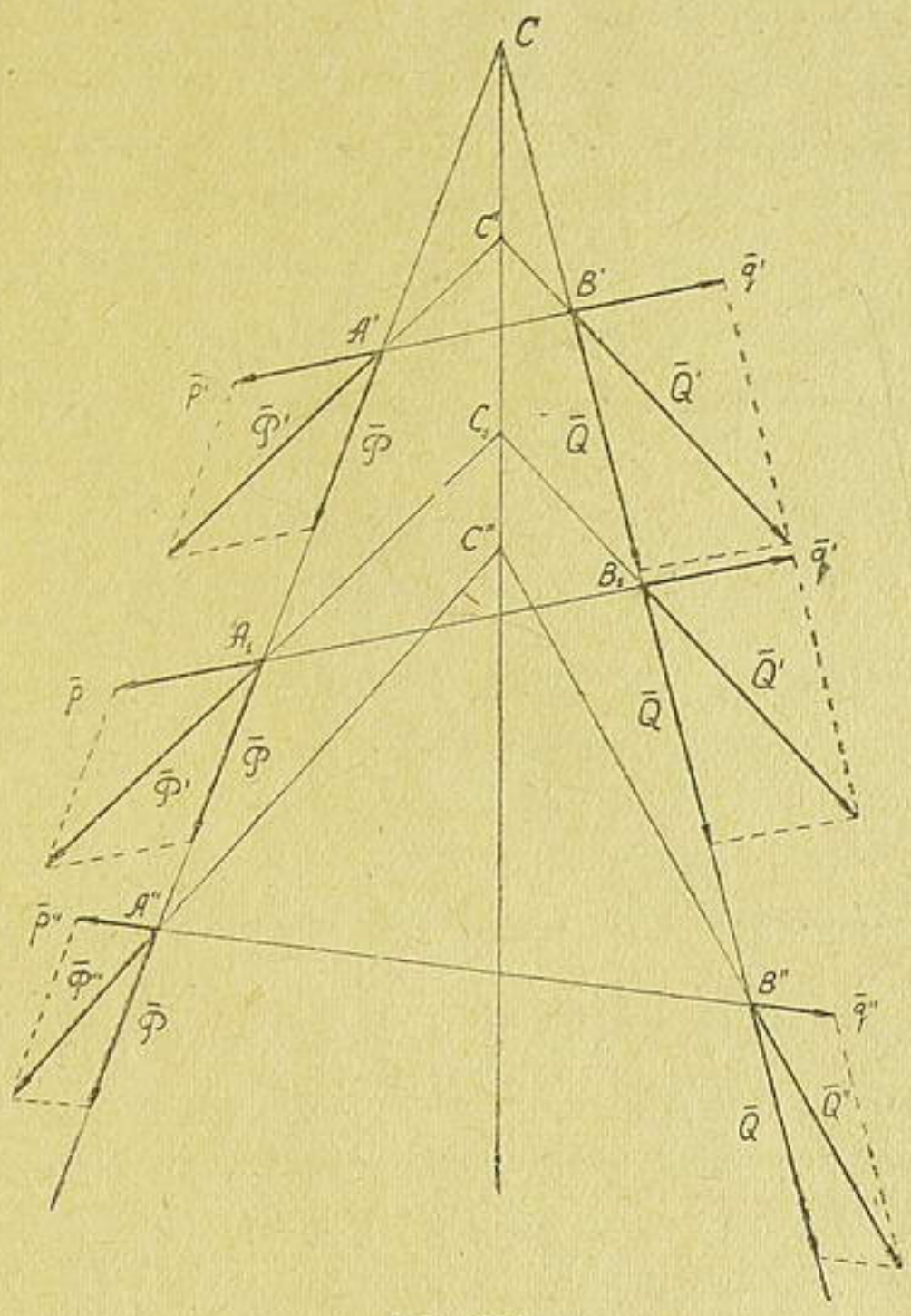
Կարծր մարմնին կիրառված են մի հարթության վրա գտնվող F_1, F_2...F_n ուժերը, որոնց չափերը, ուղղությունները և ազդման գծերը

տված են. որոշել դրաֆիկորեն այդ ուժերի համազորի չափը, ուղղությունը և ազդման դիծը։

Շատ կարևոր է այն հանգամանքը, որ ուժերը կիրառված են կարծր մարմնին, որովհետև այդ դեպքում կիրառման կետի դիրքը ազդման գծի վրա դեր չի խաղում։ Որպես կիրառման կետ կարելի է ընդունել ազդման գծի յուրաքանչյուր կետը։

Համազորը որոշելիս պետք է գտնել միայն նրա չափը, ուղղությունը և ազդման դիծը։

Սկսենք երկու ոչ-զուգահեռ, մի հարթության վրա գտնվող $\bar{P}$ և $\bar{Q}$ ուժերի դեպքից։ Եթե (նկ. 294)



նկ. 294

$$\overline{KL} = \bar{P},\ \overline{LM} = \bar{Q}$$

ապա $\overline{KM}$-ը կլինի $\bar{P}$ և $\bar{Q}$ ուժերի գլխավոր վեկտորը, որին հավասար է նրանց $\bar{R}$ համազորը։ Այս կառուցումը չի տալիս համազորի ազդման դիծը։ Միևջինա զուգահեռ է $\bar{R}$-ին և պետք է անցնի $\bar{P}$ և $\bar{Q}$ ուժերի ազդման գծերի հատման կետով։ Հետևապես, եթե $\bar{P}$ և $\bar{Q}$ ուժերի ազդման գծերը հատվում են գծապրի սահմաններում՝ C կետում, ապա անսահման ուղիղը $CD \parallel R$ կլինի համազորի ազդման դիծը։ Իսկ եթե $\bar{P}$ և $\bar{Q}$ ուժերի ազդման գծերի հատման կետը գծապրի սահմաններից դուրս է, կարելի է վարվել ստորև տված ձևով։

Կիրառենք կարծր մարմնի A′,B′ կետում $\bar{p}'$ և $\bar{q}'$ ուժերը, որոնք ունեն ազդման միևնույն գիծ՝ A′B′ ուղիղը, և բավարարում են

$$\bar{p}' + \bar{q}' = 0$$

պայմանին՝ p′,q′ ուժերի ազդիսի խումբը համարժեք է գերույի։ Թող P և p′ ուժերի համազորը լինի P′, իսկ Q′ լինի Q և q′-ի համազորը.

$$\overline{P}'=\overline{P}+\overline{p}', \qquad \overline{Q}'=\overline{Q}+\overline{q}'$$

Որովհետև p′ և q′ ուժերի խումբը չհամարժեք է գերույի, ապա P′ և Q′ ուժերի սիստեմը համարժեք է P, Q ուժերի սիստեմին։ Այդ պատճառով P′, Q′ ուժերն ունեն նույն R համազոր, ինչ որ P, Q ուժերը։

Հետևաբար P′, Q′ ուժերի ազդման գծերի C′ հատումը ինչպես նաև P, Q ուժերի ազդման գծերի C հատումը, կլինի այն կետը, որով անցնում է R համազորի ազդման գիծը։

Նկատենք, որ մենք կարող էինք իբրև p′, q′ ուժերի ազդման գիծ վերցնել A′B′-ի փոխարեն մի այլ A_1B_1 ուղիղ։ Այն դեպքում P′, Q′ ուժերի ազդման գծերը կլիներին $A_1\alpha_1$ և $B_1\beta_1$ ուղիղները և C′ կետի փոխարեն մենք կստանայինք C_1 կետը, որում այժմ հատվում են P′ և Q′ ուժերի ազդման գծերը։ Վերջապես կարելի կլինի p′, q′ ուժերի փոխարեն ընտրել գերույին համարժեք մի այլ խումբ ուժեր p″ և q″ և իրեն նրանց ընդհանուր ազդման գիծ՝ A″B″ ուղիղը։ Ճիշտ նույն եղանակով, ինչպես վերեվը մենք կստանայինք $\overline{P}''$ և Q″ ուժերի խումբը՝

$$\overline{P}''=\overline{P}+\overline{p}'', \qquad \overline{Q}''=\overline{Q}+\overline{q}''$$

որը նույնպես համարժեք է $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ ուժերին։ $\overline{P}''$ և $\overline{Q}''$ ուժերի ազդման գծերի հատման C″ կետը կպատկաներ $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ ուժերի համազորի ազդման գծին։

Այսպիսով մենք կարող ենք ըստ մեր հայեցողության ընտրել՝

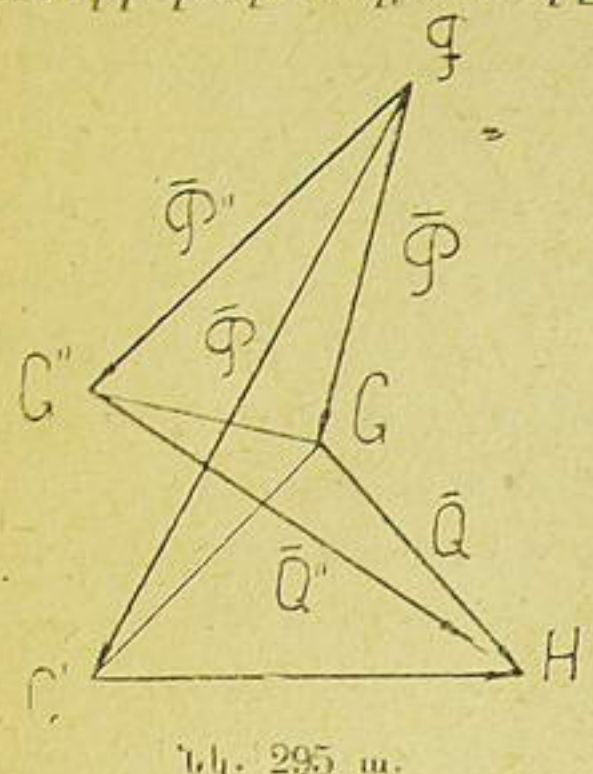
ա. գերույին համարժեք $\overline{p}$ և $\overline{q}$ ուժերի խումբը ($\overline{p}'$ և $\overline{q}'$ կամ $\overline{p}''$ և $\overline{q}''$ և այլն).

բ. այդ երկու ուժերի ընդհանուր ազդման գիծ դիրքը (այդ ուղիղը պարտադիր է ընտրած $\overline{p}$, $\overline{q}$ ուժերին, բայց կարող է լինել դասավորված ավելի բարձր, կամ ավելի ցածր. օրինակ՝ A′B′ կամ A_1B_1)։ Բոլոր դեպքերում էլ ստացված $\overline{P}'$, $\overline{Q}'$ (կամ $\overline{P}''$, $\overline{Q}''$) ուժերը կլինեն համարժեք արված $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ուժերի սիստեմին, իսկ այդ ուժերի ($\overline{P}'$, $\overline{Q}'$; $\overline{P}''$, $\overline{Q}''$, $\overline{P}$, $\overline{Q}$;) հատման կետը (C′, C_1, C″, C) միշտ կպատկանի $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ ուժերի համազորի ազդման գծին։

§ 92. Երկու ուժերի համազոր կառուցելու եղանակի պարզեցումը։ *Այսպիսով, համազորը գրաֆիկորեն որոշելու համար մեզ հարկավոր եղավ անել երկու գծագիր՝ մեկի միջոցով, որը կոչվում է ուժային բազմանկյուն, ստացվում է համազորի չափն ու ուղղությունը, իսկ մյուսը հնարավորություն է տալիս կառուցել համազորի ազդման գիծ կետերից մեկը, որ գտնվում է գծագրի թերթի սահմաններում։*

Այդ երկրորդ գծագրում գրաֆիկորեն գումարել ենք $\overline{P}$ և $\overline{p}'$, $\overline{Q}$, և $\overline{q}'$ ուժերը, որպեսզի ստանանք $\overline{P}'$ և Q′ ուժերը։ Սակայն մեզ հարկավոր են ոչ թե $\overline{P}'$, $\overline{Q}'$ ուժերը, այլ միայն նրանց ազդման գծերը (որոնք համընկնում են համազորի ազդման գծին պատկանող կետերից մեկում)։

Ցույց տանք, որ երկբոթեղ գծագիրը կարելի է ավելի պարզ դարձնել: Այդ նպատակով կառուցենք մի ընդհանուր կետից սկսած $\overline{P}$, $\overline{Q}$; $\overline{P}'$, $\overline{Q}'$; $\overline{P}''$, $\overline{Q}''$. ուժերի բազմանկյունները՝ (նկար 295 ա,բ):



նկ. 295 ա.

$$\overline{FG} = \overline{P},\ \overline{GH} = \overline{Q};$$

$$FG' = \overline{P}',\ G'H = \overline{Q}'$$

$$FG'' = \overline{P}'',\ G''H = \overline{Q}'':$$

Վերևում ցույց տված համաձայն՝

$$\overline{P}' = \overline{P} + \overline{p}',\quad \overline{Q} = \overline{Q} + \overline{q}',$$

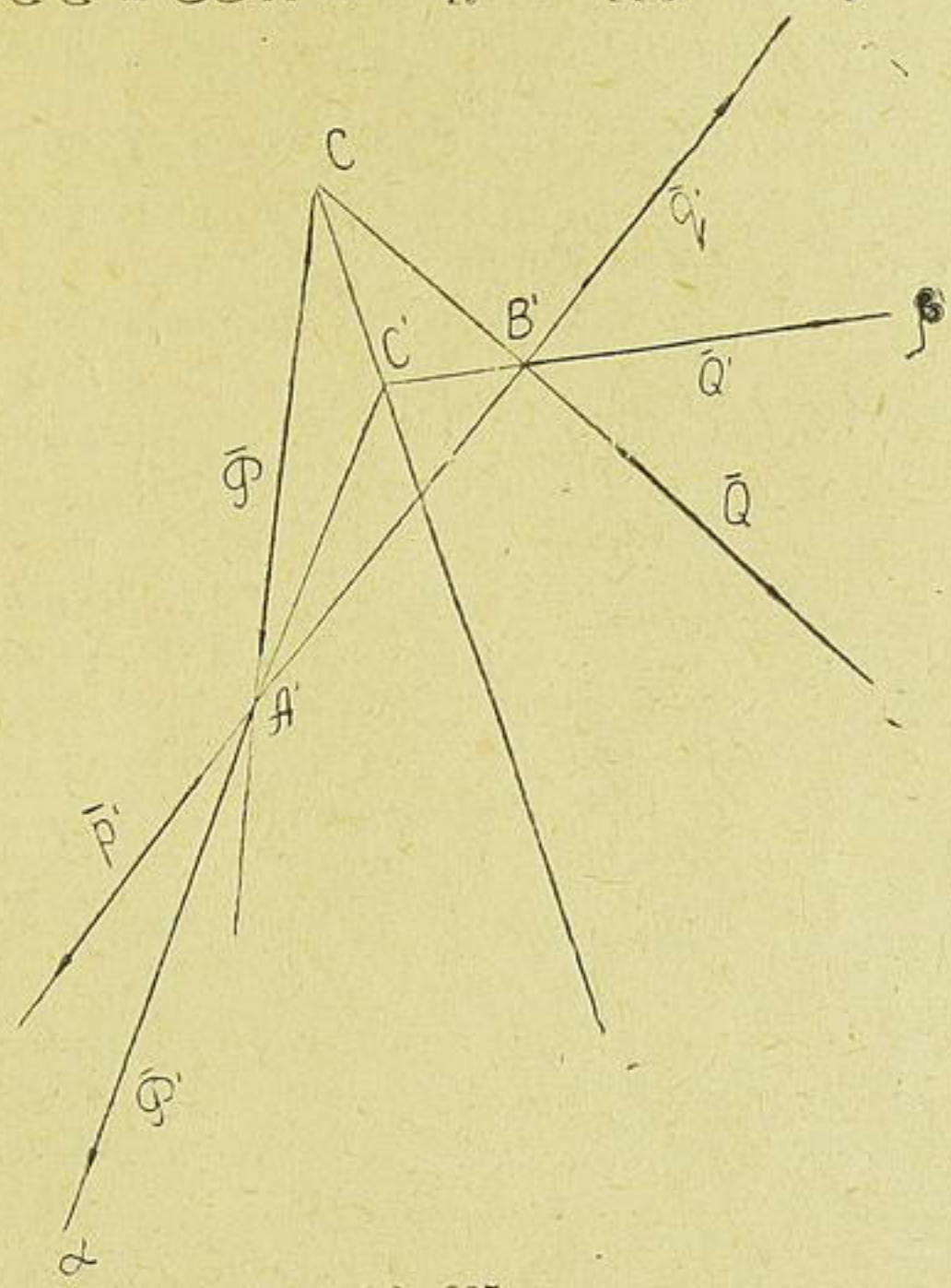
այնպես որ $\overline{p}' = \overline{GG'}$, $\overline{q}' = \overline{G'G}$,

Նման կերպով կստանանք, որ

$$\overline{p}'' = \overline{GG''},\quad \overline{q}'' = \overline{G''G}$$

Հետևապես, երբ $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ուժերի FGH բազմանկյունը կառուցված է, ապա G' և G'' կետերը նույնպես որոշված են $\overline{p}'$, $\overline{p}''$, $\overline{q}'$, $\overline{q}''$ ուժերը. կամ, ընդհակառակը, $\overline{p}'$, $\overline{p}''$, $\overline{q}'$, $\overline{q}''$ ուժերի ընտրությունով որոշված են G' և G'' գիրքերը:

FG'G և GG'H *եռանկյուններից ունենք՝*



նկ. 295. բ.

$\overline{FG} = \overline{FG'} + \overline{G'G}$ *կամ* $\overline{P} = \overline{P}' + \overline{q}'$

$\overline{GH} = \overline{GG'} + \overline{G'H}$ *կամ* $\overline{Q} = \overline{Q}' + \overline{p}'$,

այսինքն $\overline{P}$ ուժը վերլուծված է $\overline{P}'$ և $\overline{q}'$ ուժերի,

$\overline{Q}$ ուժը վերլուծված է $\overline{Q}'$ և $\overline{p}'$ ուժերի,

ընդ որում $\overline{p}' + \overline{q}' = 0$:

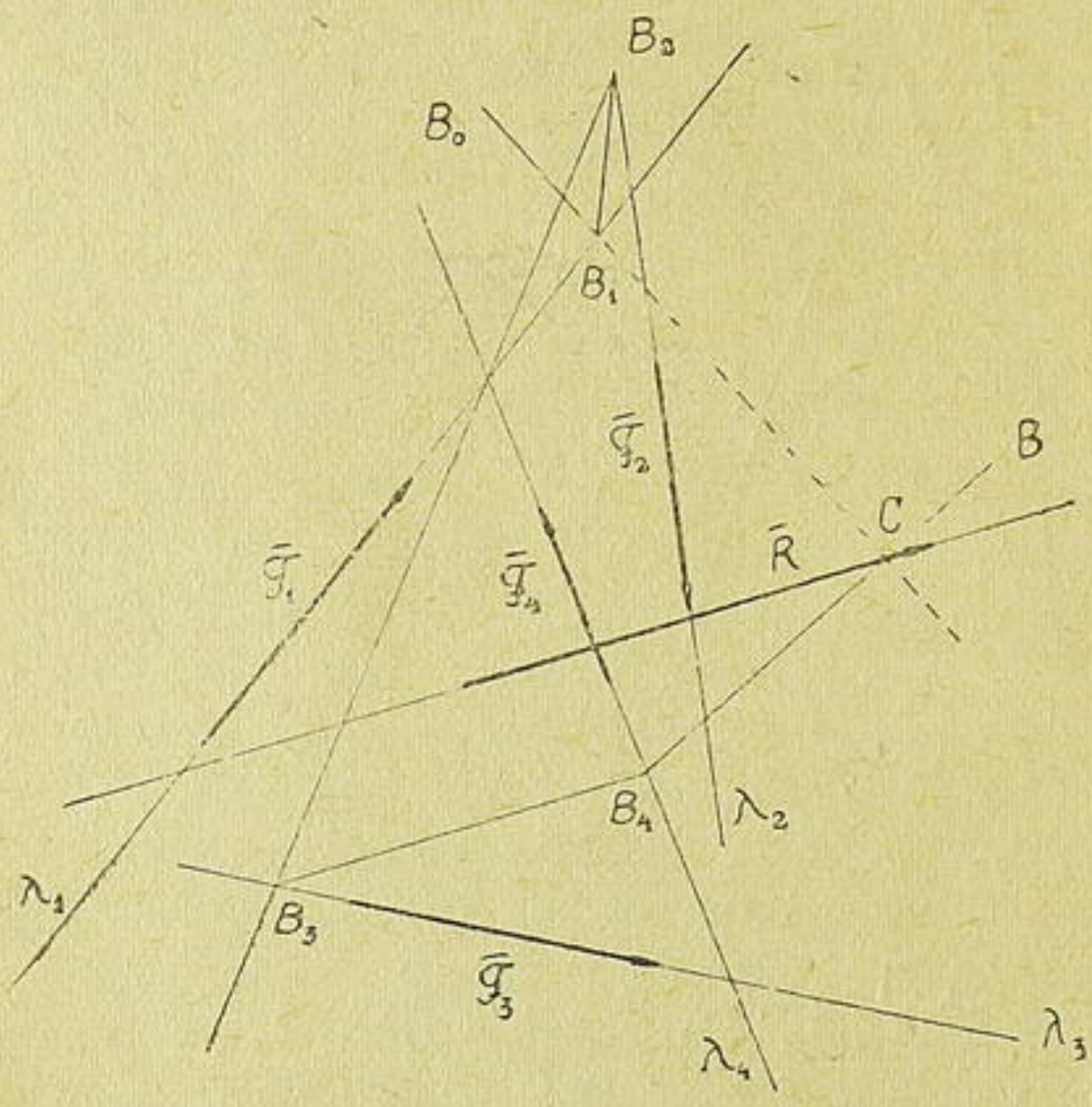
Այս վերջին պայմանից մեայն հետևում է, որ $\bar{p}'$, $\bar{q}'$ ուժերի ազդման գծերը միմյանց զուգահեռ են։ Եթե այժմ մենք պահանջենք, որ p', $\bar{q}'$ ուժերն ունենան ընդհանուր ազդման գիծ, ապա այդ ուժախումբը ($\bar{p}'$, $\bar{q}'$) կլինի համարժեք զերոյի, իսկ $\bar{P}'$,$\bar{Q}'$ ուժաստիճանը կլինի համարժեք $\bar{P}$,$\bar{Q}$ ուժաստիճանին։

$\bar{P}$,$\bar{P}'$,$\bar{p}'$ ուժերի ազդման գծերը հատվում են մի կետում, տես, օրինակ, նկար 294։ Նույնպես և $\bar{Q}$,$\bar{Q}'$, $\bar{q}'$ ուժերինը։

Այստեղից բղխում է, որ $\bar{P}'$ ուժի ազդման գիծ ընտրությամբ որոշվում է $\bar{Q}'$-ի ազդման գիծը։ Իսկապես, (նկար 295 բ) տանենք կամայական α կետից αA′ ուղիղը զուգահեռ G′F-ին. այս ուղիղը հատում է A′ կետում $\bar{P}$ ուժի ազդման գիծը։ Հետևապես, A′-ից պետք է անցնի $\bar{p}'$,$\bar{q}'$ ուժերի ազդման ընդհանուր գիծը. ուստի վերջինս A′B′ ուղիղն է, որ զուգահեռ է G′G-ին։ B′ կետից, որում A′B′-ը հատվում է $\bar{Q}$ ուժի ազդման գծի հետ, տանենք. B′β ուղիղը զուգահեռ G′H-ին B′β-ը պետք է լինի $\bar{Q}'$-ի ազդման գիծը։

Այսպիսով, երբ α կետի ընտրությամբ որոշվում են $\bar{P}'$ և $\bar{Q}'$ ուժերի ազդման գծերը և նրանց հատման C′ կետը. և թեպետ α կետի ընտրությունը միանգամայն կամայական է, ստացված C′ կետը միշտ կպատկանի $\bar{R}$ համազորի ազդման գծին։

§ 93. Համազորի կառուցման եղանակը ցնդիացուր դեպքում։ *Նման կառուցում կարելի է անել նաև այն դեպքում, երբ կարծր մարմնին կիրառված ուժերի թիվը երկուսից մեծ է։*



Նկ. 296 ա.

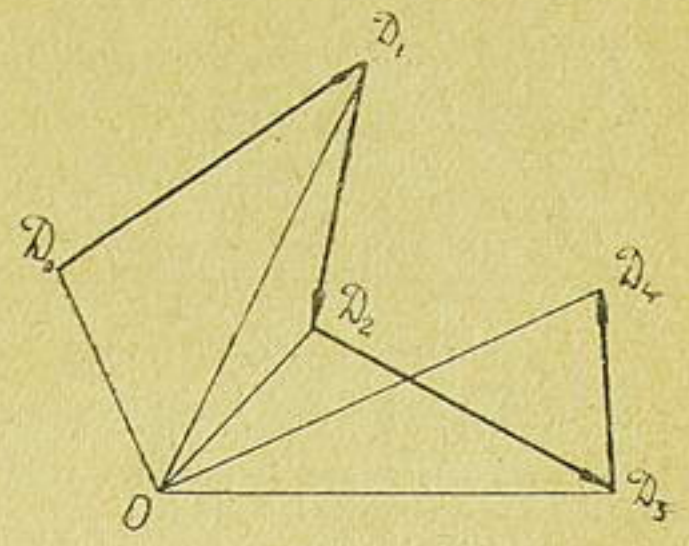
Դիցուք (նկար 296 ա), $\bar{F}_1$,$\bar{F}_2$,…, $\bar{F}_n$ կարծր մարմնին կիրառված ուժերն են, իսկ λ_1, λ_2,…,λ_n -այս ուժերի ազդման գծերը։ Կառուցենք ուժերի բազմանկյունը $D_0D_1D_2\ldots D_n$ (նկ. 296 բ), որում $\overline{D_0D_1}=\bar{F}_1$, $\overline{D_1D_2}=\bar{F}_2$, …., $\overline{D_{n-1}D_n}=\bar{F}_n$

կամայական ընտրած O կետը միացնենք OD_0, $OD_1\ldots OD_n$ ուղիղներով ուժերի բազմանկյան $D_0,D_1\ldots D_n$ գագաթներին։ Նշանակենք $\overline{OD_i}$ վեկտորը $\bar{f}_i$, այնպես որ

$$\overline{OD_1}=\bar{f}_1,\ \overline{OD_2}=\bar{f}_2,\ \ldots\ldots,\overline{OD_n}=\bar{f}_n:$$

$\overline{OD_i}$-ին հակազուգահեռ վեկտորը $\overline{D_iO} = -\bar{f}_i$, այսինքն՝
$\overline{D_0O} = -\bar{f}_0$, $\overline{D_1O} = -\bar{f}_1, \ldots, \overline{D_{n-1}O} = -\bar{f}_{n-1}$
D_0OD_1 եռանկյունուց առանում ենք՝
$\overline{D_0D_1} = \overline{D_0O} + \overline{OD_1}$, կամ $\bar{F} = -\bar{f}_0 + \bar{f}_1$,
D_1OD_2 եռանկյունը տալիս է՝
$\overline{D_1D_2} = \overline{D_1O} + \overline{OD_2}$ կամ $\bar{F}_2 = -\bar{f}_1 + \bar{f}_2$:
Դիտարկելով մյուս եռանկյուններըլ՝ կստանանք՝

$$\bar{F}_3 = -\bar{f}_2 + \bar{f}_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{F}_{n-1} = -\bar{f}_{n-2} + \bar{f}_{n-1}$$
$$\bar{F}_n = -\bar{f}_{n-1} + \bar{f}_n:$$



Նկ. 296 բ.

Այսպիսով տված $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n$ ուժերից
յուրաքանչյուրը վերլուծվում է երկու բաղադրիչների:

Այժմ ենթադրենք, որ F_1 ուժի f_1 բաղադրիչը և $\bar{F}_2$ ուժի $(-\bar{f}_1)$ բաղադրիչն ունեն ընդհանուր ազդման գիծ: Այդ դեպքում $\bar{f}_1$ և $(-\bar{f}_1)$ ուժերի խումբը կլինի համարժեք զերոյի: Եթե նման ենթադրություն անենք մեկնումն ինդեքս ունեցող յուրաքանչյուր երկու՝ f_i, $(-\bar{f}_i)$ ուժերի նկատմամբ, կհանդենք հետևյալ արդյունքի՝

$$f_1, (-\bar{f}_1); \ \bar{f}_2, (-\bar{f}_2), \ldots\ldots; \ \bar{f}_{n-1}, (-\bar{f}_{n-1}):$$

ուժախմբերից յուրաքանչյուրը համարժեք է զերոյի և այդ $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ ուժասիստեմը (որում $\bar{F}_1 = -\bar{f}_0 + \bar{f}_1$, $\bar{F}_2 = -\bar{f}_1 + \bar{f}_2 \ldots\ldots$ $\bar{F}_n = -\bar{f}_{n-1} + \bar{f}_n$) համարժեք է $\overline{D_0O} = -\bar{f}_1$ և $\overline{OD_n} = \bar{f}_n$ ուժախմբին:

Ուստի այդ երկու ուժերը՝ $\overline{D_0O}$ և $\overline{OD_n}$ ունեն այն համազորը, ինչ որ ավյալ $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ ուժասիստեմը:

Երբ երկու ուժերի չափերը և ուղղությունները ավյալ են, նրանցից մեկի ազդման գծի դիրքի ընտրությամբ որոշվում է մյուսի ազդման գծի դիրքը:

Ընտրելով կամայորեն $\overline{D_0O}$ ուժի ազդման գծի դիրքը՝ կարելի է որոշել $\overline{OD_n}$ ուժի ազդման գծի դիրքը հետևյալ կերպ: Կամայական B_0 կետից (նկար 296 ա) տանենք B_0B_1 ուղիղը զուգահեռ D_0O-ին և դիտենք այդ որպես $\overline{D_0O}$ ուժի ազդման գիծը. B_1-ն այն կետն է, որում B_0B_1-ը հատվում է $\bar{F}_1$ ուժի λ_1 ազդման գծի հետ: Ինչպես ասվել է, $\bar{F}_1$ վերլուծված է $\overline{D_0O}$ և $\bar{f}_1$ ուժերի. հետևապես այդ երեք ուժերի ազդման գծերը պետք է հատվեն մի կետում (B_1), այնպես որ $\bar{f}_1$ և $(-\bar{f}_1)$ ուժերի ազդման ընդհանուր գիծը կլինի $B_1B_2 \parallel OD_1$:

Եթե B_1B_2-ը հատում է $\bar{F}_2$ ուժի ազդման λ_2 գիծը B_2 կետում, ապա B_2-ով պետք է նաև անցնի $\bar{f}_2$ և $(-\bar{f}_2)$ ուժերի ազդման ընդհանուր գիծը: Այդ ուղիղը կստանանք, տանելով $B_2B_3 \parallel OD_2$: Այսպես շարունակելով կըստանանք՝ $B_0B_1B_2 \ldots B_n$ B բեկյալը, որի կառուցման եղանակը հետևյալն է. կամայական B_0 կետից տանում ենք OD_0-ին զուգահեռ B_0B_1 ուղիղը. այս

ուղղի և F_1-ի ազդման գծի հատման B_1 կետից տարվում է OD_1-ին զուգահեռ B_1B_2 ուղիղը. այս ուղղի և F_2-ի ազդման գծի հատման B_2 կետից տարվում է OD_2-ին զուգահեռ B_2B_3 ուղիղը և այլն: $B_{n-1}B_n$ ուղիղը, որ զուգահեռ է OD_{n-1}-ին, հատում է F_n-ի ազդման գիծը B_n կետում. B_n-ից տարվում է OD_n ուժի ազդման գիծը՝ B_nB:

B_0B_1 և B_nB ուղիղների հատման C կետը պետք է պատկանի $F_1, F_2, \ldots F_n$ ուժերի R համազորի ազդման գծին, իսկ C-ից D_0D_n-ին զուգահեռ տարված ուղիղը կլինի այդ ազդման գիծը:

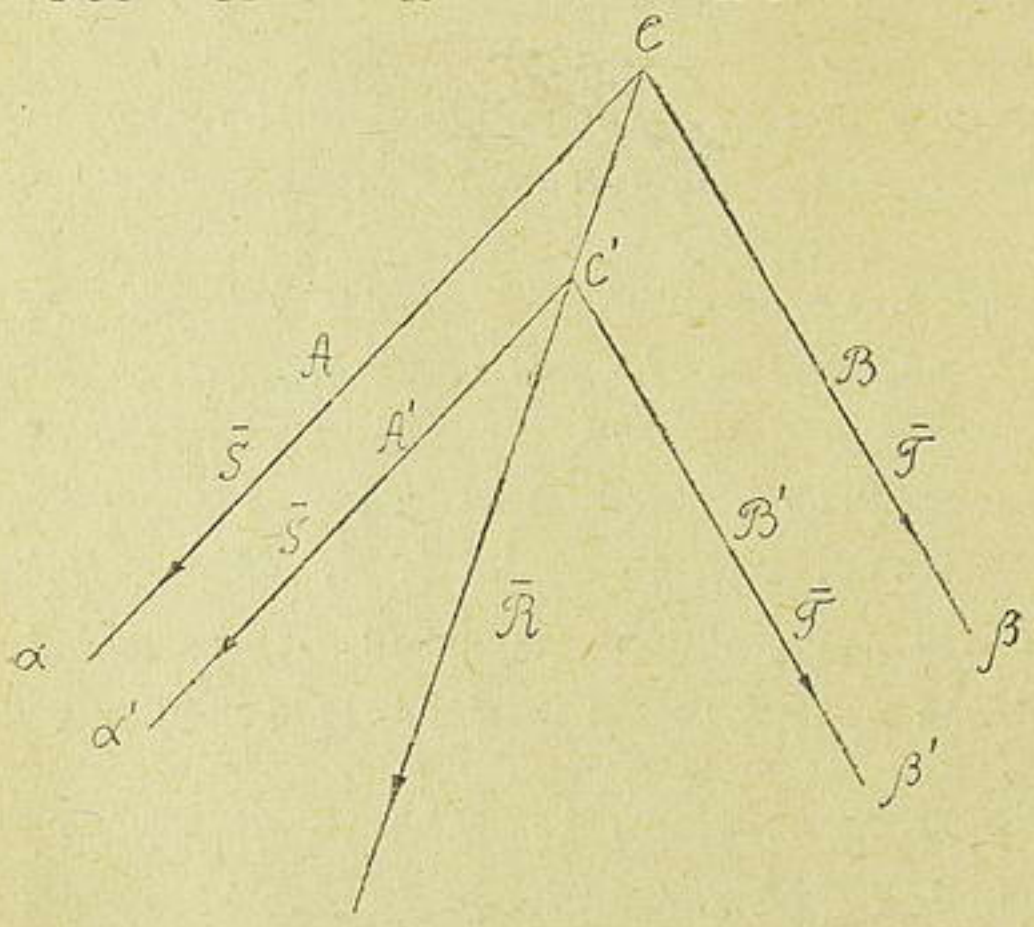
§ 94. Ուժային բազմանկյուն. բեվեռ, ճառագայթներ, պարանային բազմանկյուն: *Ուժային բազմանկյան գծագրի վրա կամայորեն ընտրված O կետը կոչվում է բևեռ. $OD_0, OD_1, \ldots, OD_n$ հատվածները, որոնք միացնում են բևեռը ուժային բազմանկյան գագաթներին, կոչվում են ճառագայթներ. $B_0B_1B_2 \ldots B_{n-1}B_nB$ բեկյալը, որի յուրաքանչյուր կողմը՝ B_0B_1, $B_1B_2, \ldots, B_nB$ զուգահեռ է համապատասխան ճառագայթին՝ $OD_0, OD_1, \ldots, OD_n$, B_0 կետի դիրքը կամայական է, իսկ մյուս կետերը՝ B_1, $B_2 \ldots B_n$ գտնվում են համապատասխանաբար $F_1, F_2, \ldots F_n$ ուժերի λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_n$ ազդման գծերի վրա, կոչվում է պարանային բազմանկյուն:*

Առաջից պարզ է, թե որն է այն միջոցը, որով դրաֆոստատիկայում որոշում են համազորը՝

ա. Տվյալ $F_1, F_2, \ldots F_n$ ուժերը փոխարինում են նրանց համարժեք երկու ուժերով $\overline{D_0O}$ և OD_n, որոնց չափը և ուղղությունը միանգամայն որոշվում են O բևեռի ընտրությամբ:

բ. Այդ ուժերից մեկի (օր. D_0O-ի) ազդման գծի դիրքը (B_0B_1) ընտրվում է կամայորեն, իսկ մյուսինը (B_nB) առանալու համար կառուցվում է $B_0B_1 \ldots B_nB$ պարանային բազմանկյունը:

գ. Համազորը հավասար է ուժերի բազմանկյան $\overline{D_0D_n}$ փակողին. համազորի ազդման գիծն այն ուղիղն է, որ զուգահեռ է D_0D_n-ին և անցնում է պարանային բազմանկյան ծայրային (B_0B_1 և B_nB) կողմերի հատման կետով:



Նկ. 297

2°. Ապացուցենք վերևում հիշված թեորեմը:

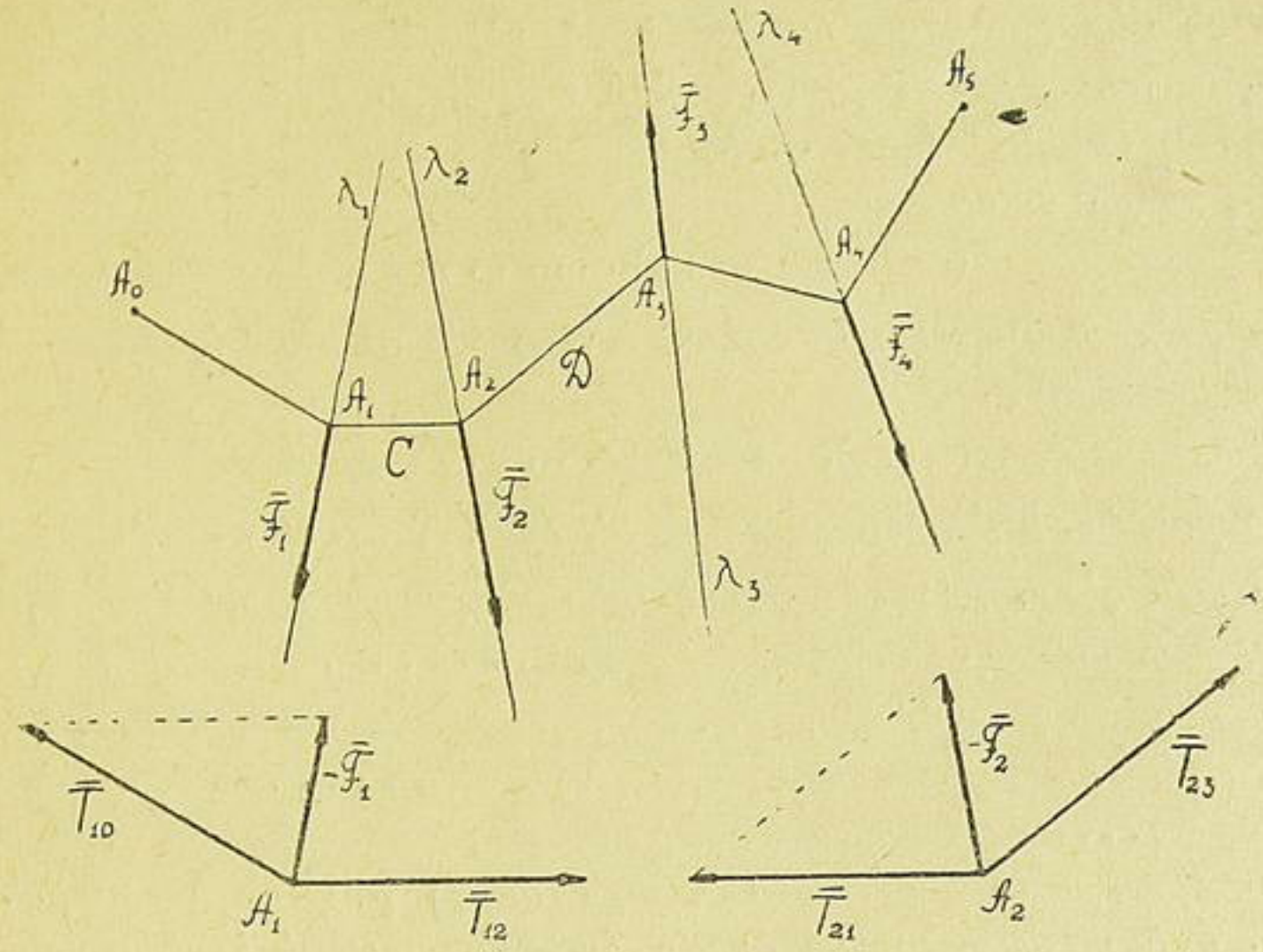
Դիցուք $\overline{R}$-ը S և T ուժերի համազորն է $R = S + T$ (նկ 297): Ցույց տանք, որ կամայորեն ընտրելով S-ի ազդման αA գծի դիրքը, հնարավոր է այնպես որոշել T-ի ազդման βB գծի դիրքը, որ R-ը հանդիսանա S-ի և T-ի համազորը:

Իսկապես որովհետև $\overline{R}$ հանդիսանում է $\overline{S}$ և T-ի համազորը, ապա

$\bar{R}$, $\bar{S}$, $\bar{T}$ *ուժերի ազդման գծերը պետք է հատվեն մի կետում։ Հետևապես, եթե* aA *ուղիղը հատում է* $\bar{R}$*-ի ազդման գիծը* C *կետում, ապա* $\bar{T}$*-ի ազդման գիծը* (βB) *նույնպես պետք է անցնի* C*-ով։*

Եթե որպես $\bar{S}$*-ի ազդման գիծ ընտրվեր* $\alpha' A'$ *ուղիղը, որը հատում է* $\bar{R}$*-ի ազդման գիծը* C' *կետում, ապա* $\bar{T}$*-ի ազդման գիծ կլիներ* C' *կետով անցնող* $\beta' B'$ *ուղիղը։*

3°. *Այժմ անցնենք բացատրել «պարանային բազմանկյուն» անվան ծագումը։ Ծկուն, անձգելի, անկշիռ թելը (նկար 298), որի ծայրերն անշարժ ամրացված են* A_0 *և* A *կետերում, իսկ* A_1, A_2,…,A_n *կետերում կիրառված են համապատասխանաբար* $\bar{F}_1$,$\bar{F}_2$,…,$\bar{F}_n$ *ուժերը, հավասարակշռության դեպքում առանում է* $A_0A_1A_2$…$A_n A$ *բեկյալի ձևը։*



Նկ. 298

Թելը չի ընդդիմանում ազդող ուժերին, այդ պատճառով հավասարակշռությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, եթե թելի բոլոր մասերը ձգված են։

Որովհետև թելն անկշիռ է, A_1, A_2…,A_n *կետից յուրաքանչյուրում ազդում են երեքական ուժեր. օրինակ՝* A_1 *կետում ազդում են* $\bar{T}_1$, $\bar{T}_{10}$, $\bar{F}_{12}$ *ուժերը, որոնց* $\bar{F}_1$*-ը կիրառված ուժն է,* $\bar{T}_{10}$—A_0A_1 *մասի լարումն է, իսկ* $\bar{T}_{12}$—A_1A_2 *մասի լարումն է։ Նման կերպով* A_2 *կետում ազդող ուժերն են* $\bar{F}_2$, $\bar{T}_{21}$,$\bar{T}_{23}$,……A_n *կետում՝* $\bar{F}_n$, $\bar{T}_{n,\,n-1}$, $\bar{T}_{n,a}$, *որտեղ,* $\bar{T}_{n,a}$,—$A_n A$ *մասի լարումն է։ Բոլոր մյուս կետերում ազդում են երկուական ուժեր. օրինակ՝* C *կետում ազդում են* $\bar{T}_{12}$ *և* $\bar{T}_{21}$ *լարումները,* D *կետում՝* $\bar{T}_{23}$ *և* $\bar{T}_{32}$ *լարումները և այլն։*

Հավասարակշռության հետևանքով՝

$$\bar{F}_1+\bar{T}_{10}+\bar{T}_{12}=0;\ \bar{F}_2+\bar{T}_{21}+\bar{T}_{23}=0\ldots\ldots,\bar{F}_n+\bar{T}_{n,n-1}+\bar{T}_{n,a}=0 \quad (\text{XIII } 1)$$

$$\bar{T}_{12}+\bar{T}_{21}=0;\qquad \bar{T}_{23}+\bar{T}_{32}=0\ldots\ldots,\bar{T}_{n-1,n}+\bar{T}_{n,n-1}=0 \quad (\text{XIII } 2)$$

(XIII 1)-ից հետևում է, որ

$$\begin{aligned}-\bar{F}_1&=\bar{T}_{10}+\bar{T}_{12}\\ -\bar{F}_2&=\bar{T}_{21}+\bar{T}_{23}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\\ -\bar{F}_n&=\bar{T}_{n,n-1}+\bar{T}_{u,a}\ ,\end{aligned}$$

Իսկ միևնույն ինդեքսներ ունեցող լարումները՝

$$\bar{T}_{12},\ \bar{T}_{21};\ \bar{T}_{23},\ \bar{T}_{32};\ \ldots\ldots\ \bar{T}_{n-1,n},\ \bar{T}_{n,n-1}$$

զույգ-զույգ վերցրած կազմում են զերո ուժախմբեր, որովհետև օրինակ համաձայն (XIII 2)-ի $\bar{T}_{12}+\bar{T}_{21}=0$ և այդ երկու լարումներն ունեն ազդման ընդհանուր գիծ՝ A_1A_2 ուղիղը։

Ստացից բխում է, որ

$$(-\bar{F}_1),\quad (-\bar{F}_2),\ldots\ldots,(-\bar{F}_n)$$

ուժախտեմը համարժեք է երկու՝ $\bar{T}_{10}$ և $\bar{T}_{n,a}$ լարումներին։

Մենք տեսնում ենք, որ

$$(-\bar{F}_1),\quad (-\bar{F}_2),\ldots\ldots,(-\bar{F}_n)$$

ուժերի նկատմամբ թեվի լարումները $\bar{T}_{10},\bar{T}_{12},\bar{T}_{23}\ldots\ldots,\bar{T}_{n,a}$ կատարում են ճիշտ այն դերը, ինչ դեր որ կարծր մարմնին կիրառված $\bar{F}_1,\bar{F}_2,\ldots\ldots\bar{F}_n$ ուժերի նկատմամբ կատարում են $\bar{f}_0,\bar{f}_1,\ldots\ldots\bar{f}_n,\bar{f}$ ուժերը։

Պարզ է, որ թեվի $\bar{T}_{01},\bar{T}_{12}\ldots\ldots\bar{T}_{n,a}$ լարումների ազդման գծերը հանդիսանում են նրա ուղղագիծ A_0A_1 A_1A_2 $A_2A_3,\ldots\ldots A_nA$ մասերը. հետևապես $A_0A_1\ldots\ldots A_nA$ բեկյալը, որի ձևը թեվն ընդունում է հավասարակշռության վիճակում, կատարում է այն դերը, ինչ որ $B_0B_1B_2\ldots\ldots B_nB$ բեկյալը, որի յուրաքանչյուր կողմը հանդիսանում է համապատասխանաբար $\bar{f}_0,\bar{f}_1,\bar{f}_2\ldots\bar{f}_n,\bar{f}$ ուժերի ազդման գիծը։

Այս բեկյալների հատկություններն առաջին անգամ նկատվել են անկշիռ, ճկուն, անձգելի թելերի (կամ պարանների) հավասարակշռությունը ուսումնասիրելիս, և այստեղից է առաջացել «պարանային բազմանկյուն» անունը։

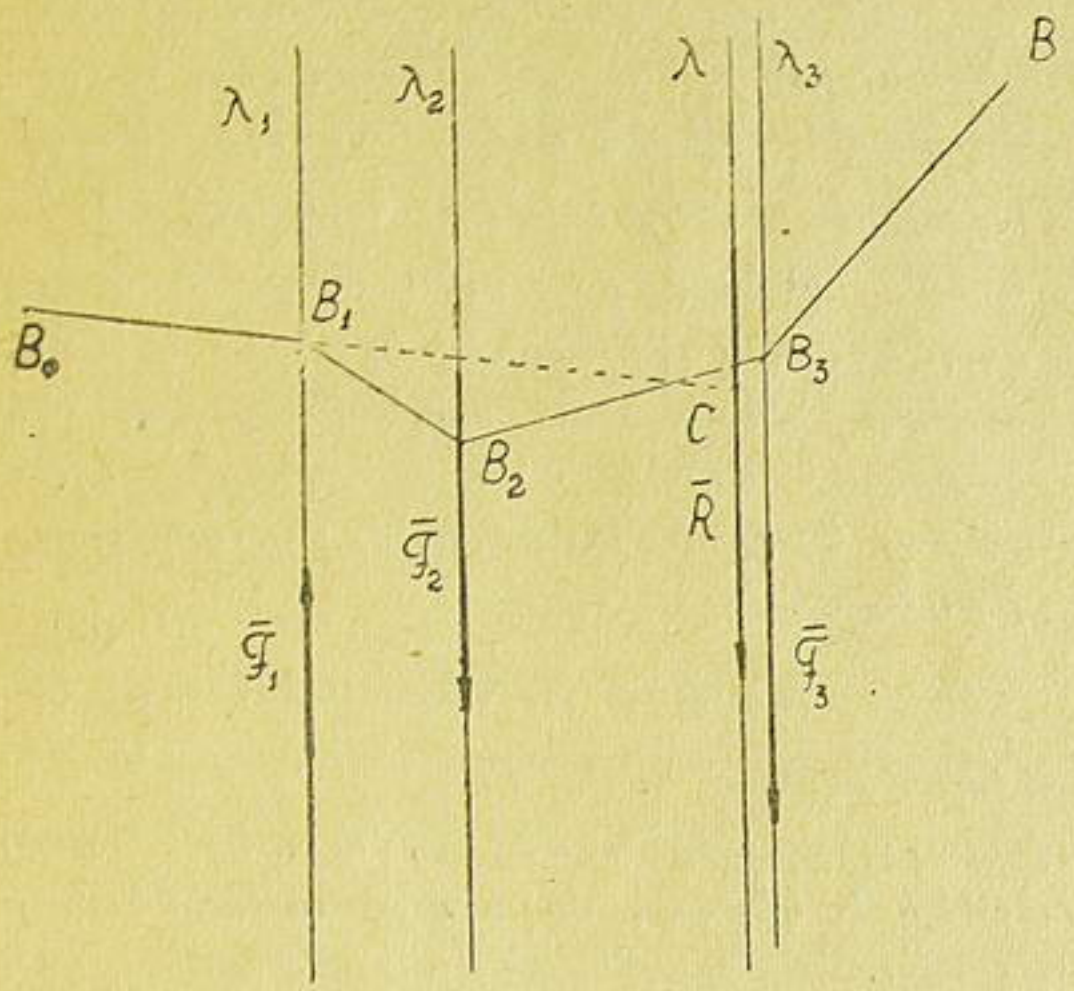
§ 95. Ուժախտեմի վերածումն երկու ուժերի մասնավոր դեպքերում. զույգ. հավասարակշռություն։ *Նկարագրված կառուցումը կարելի է կատարել կարծր մարմնին կիրառված հարթ ուժերի բոլոր դեպքերում և կայանում է նրանում, որ հարթ ուժախտեմը նախ վեր է ածվում երկու ուժերի՝ $\overline{D_0O}$ և $\overline{OD_n}$, որոնց ազդման գծերն են B_0B_1 և B_nB և ապա այդ երկու ուժերը փոխարինվում են մի ուժով։ Բայց պարզ է, որ այդ վերջին փոխարինումը հնարավոր է ոչ ամեն անգամ՝ հարթ ուժախտեմը կարող է նաև վերածվել զույգի, կամ լինել համարժեք զերոյի։*

Դիտարկենք տարբեր մասնավոր դեպքերը.

1°. Կարևոր, հաճախ պատահող մասնավոր դեպք հանդիսանում է այն,

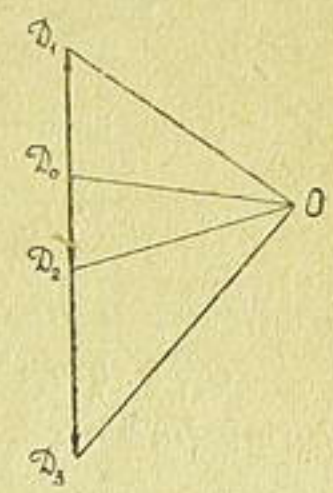
երբ բոլոր ուժերի ազդման գծերը զուգահեռ են, իսկ ուժերը՝ կամ բոլորը համազուգահեռ են, կամ նրանց մի մասը հակազուգահեռ է մյուսին։

Այս դեպքի միակ առանձնահատկությունն այն է, որ ուժերի բազմանկյունը վերածվում է մի ուղղի (նկար 299 ա, բ)։



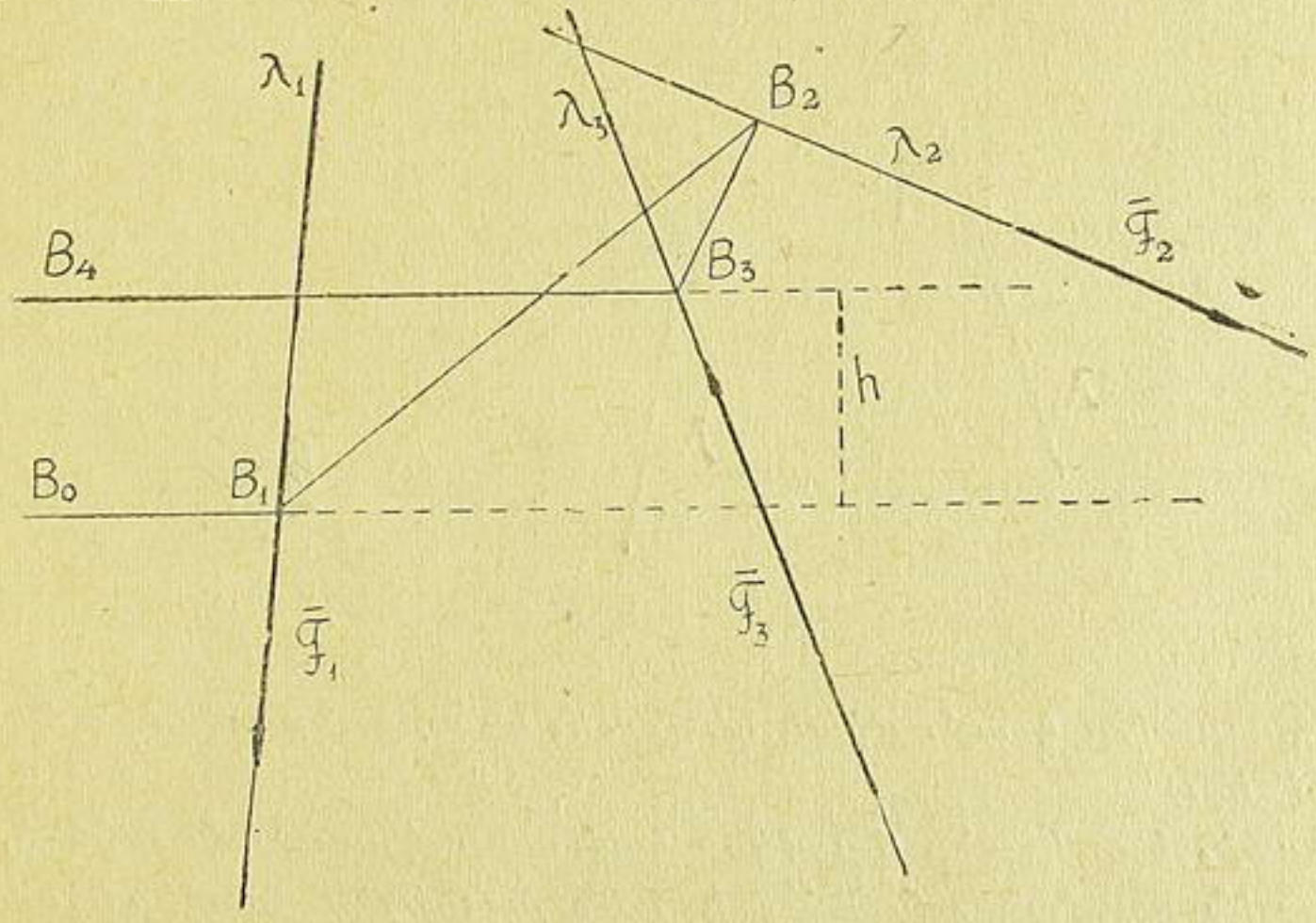
Նկ. 299 ա.

2°. *Մյուս շատ կարևոր դեպքն այն է, երբ տվյալ հարթ ուժերի գլխավոր վեկտորը զրո է։ Այս դեպքում (նկարներ 300 ա, բ, 301 ա, բ) ուժերի բազմանկյունը պետք է*



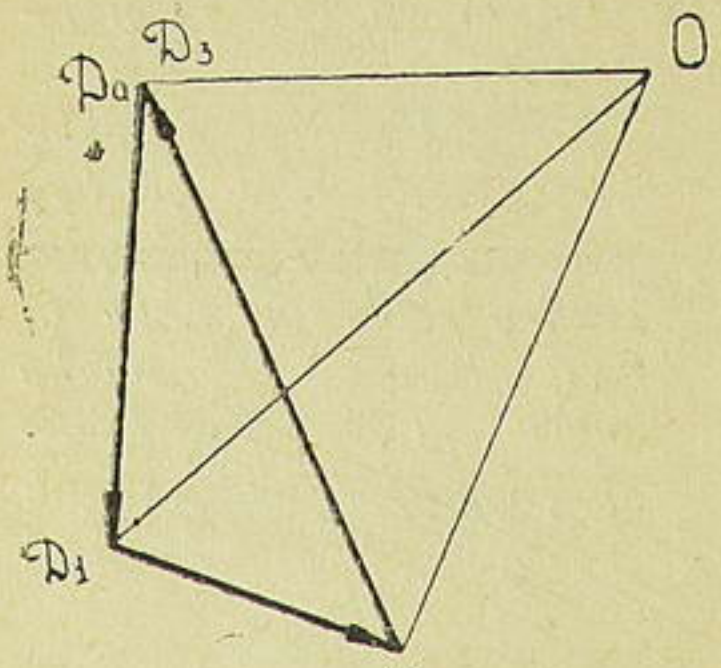
Նկ. 299 բ.

փակ լինի, այսինքն պետք է D_n կետը համընկնի D_0-ի հետ. միևժամանակ վերջին OD_n ճառագայթը համընկնում է առաջին OD_0 ճառագայթի հետ։ Որովհետև պարանային բազմանկյան առաջին կողմը (B_0B_1) զուգահեռ է առաջին ճառագայթին, իսկ վերջին կողմը ($B_n B_1$) զուգահեռ է վերջին ճառագայթին, ապա այժմ B_0B_1 և $B_n B$ ուղիղները չեն կարող հատվել. նրանք կամ զուգահեռ կլինեն, կամ կզանվեն մի ուղիղի վրա։



Նկ. 300 ա.

Երբ ուժաբեւռեմի դլխավոր վեկտորը զերո է, կամ ուժաբեւռեմը վերածվում է զույգի, կամ տեղի ունի հավասարակշռություն։ Վերջին դեպքում ուժաբեւռեմի դլխավոր մոմենտը նույնպես զերո է։



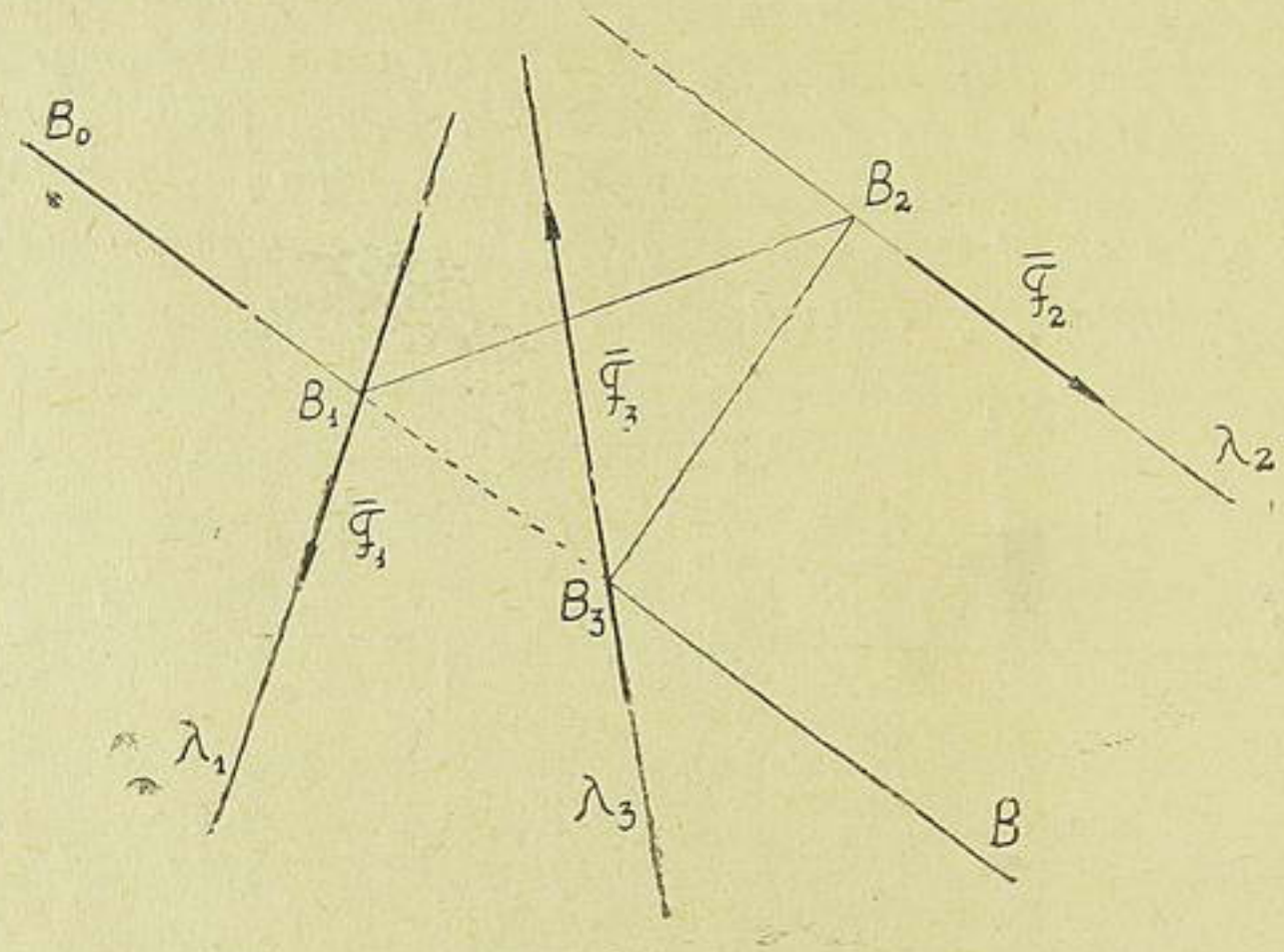
նկ. 300 բ

Եթե ուժաբեւռեմի դլխավոր վեկտորը զերո է, իսկ դլխավոր մոմենտը զերո չէ, ուժաբեւռեմը վեր է ածվում զույգի։ Ուստի այդպիսի ուժաբեւռեմին համարժեք $\overline{D_0O}$ և $\overline{OD_n}$ ուժերը նույնպես պետք է զույգ կազմեն, այդ պատճառով էլ $\overline{D_0O}$ և $\overline{OD_n}$ ուժերի B_0B_1 և B_nB ազդման գծերը չեն կարող համընկնել. այդ գծերի միջև պետք է լինի այնպիսի (h) հեռավորություն, որ

$$h\left|\overline{D_0O}\right| = h\left|\overline{OD_n}\right| = M.$$

որտեղ M-ն ուժաբեւռեմի դլխավոր մոմենտի չափն է։

Եթե կարծր մարմինը հավասարակշռության մեջ է, այսինքն նրան կիրառված ուժաբեւռեմը համարժեք է զերոյի, ապա այդ ուժաբեւռեմի դլխավոր մոմենտն էլ զերո է։ Բայց մենք վերածել ենք ուժաբեւռեմը երկու համապատասխան ուժերի $\overline{D_0O}$ և $\overline{OD_n}$, նկ. 301 ա, բ, (որում D_n-ը համընկնում է D_0-ի հետ)։ $\overline{D_0O}$ և $\overline{OD_n}$ ուժերի դլխավոր մոմենտի զերո

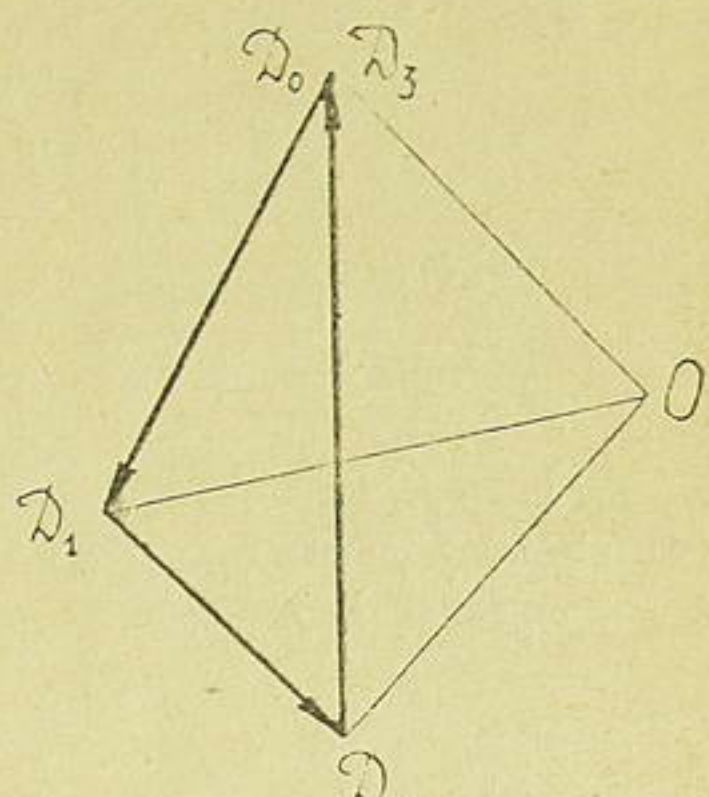


301 ա.

լինելը հնարավոր է այն միակ դեպքում, երբ նրանց ազդման գծերը համընկնում են։

Ուստի, երբ կարծր մարմինը հավասարակշռության մեջ է, պետք է պարանային բազմանկյան B_0B_1 և B_nB ծայրային կողմերը դանվեն մի ուղղի վրա։

Կամ ընդհակառակը՝ երբ ուժային բազմանկյունը փակ է, իսկ պարանային բազմանկյան ծայրային կողմերը զուգահեռված են մի ուղղի վրա, կարծր մարմինը, որին այդ ուժերը կիրառված են, պետք է գտնվի հավասարակշռության մեջ։

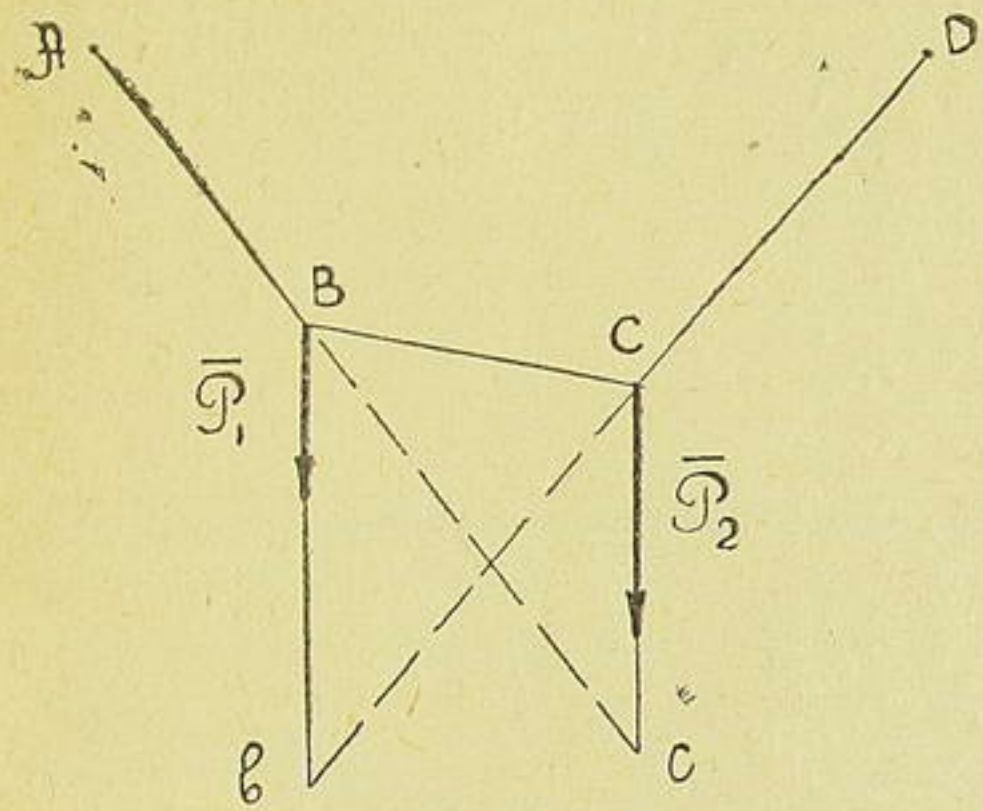


նկ. 301 բ.

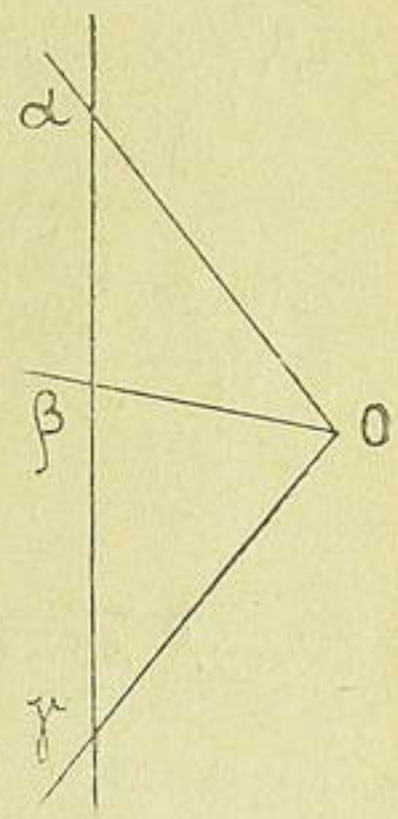
§ 96. Ծռգիրներ։ *Մոդիր. անկշիռ, ճկուն, անձգելի* ABCD *թելի ծայրերը (նկար 302 ա), ամրացված են* A *և* D *անշարժ կետերում, իսկ* B *և* C *կետերին կախված են* P_1 *և* P_2 *կշիռ ունեցող ծանրոցներ։ Որոշել* $\frac{P_1}{P_2}$ *հարաբերությունն այն դեպքում, երբ թելը կունենա նկարում պատկերացված ձևը։*

Նշանակենք թելի AB *մասի լարումը* B *կետում* $\bar{T}_a$, BC *մասի լարումը* B *և* C *կետերում՝* $\bar{T}_c$ *և* $\bar{T}_b$ *համապատասխանաբար, իսկ* CD*-ի լարումը* C *կետում՝* $\bar{T}_d$, *ընդորում՝*

$\bar{T}_a \parallel AB$, $\bar{T}_c \parallel BC$, $\bar{T}_b \parallel BC$, $\bar{T}_d \parallel CD$ *և* $\bar{T}_c + \bar{T}_b = 0$։



նկ. 302 ա



նկ 302 բ.

Մարքով անջատենք B *և* C *կետերը. B-ի հավասարակշռության պայմանը կլինի՝*

$$\bar{P}_1 + \bar{T}_a + \bar{T}_c = 0,$$

իսկ C-ինը՝

$$\bar{P}_2 + \bar{T}_d + \bar{T}_b = 0.$$

Կամայական O *կետից (նկար 302 բ) տանենք երեք ուղիղներ՝*

$$O\alpha \parallel AB,\ O\beta \parallel BC,\ O\gamma \parallel CD.$$

Հատենք այդ ուղիղները $\alpha\beta\gamma$ *ուղղաձիգով։ Կստացվեն երկու եռան-*

կյուններ $O\alpha\beta$, $O\beta\gamma$, *ընդ որում* $\triangle O\alpha\beta$ *նման է* $\bar{P}_1$, $\bar{T}_a$, $\bar{T}_c$ *ուժերի եռանկյանը, իսկ* $\triangle O\beta\gamma$ *նման է* $\bar{P}_2$ $\bar{T}_d$ $\bar{P}_b$ *ուժերի եռանկյանը։*

Եռանկյուններից նմանությունը տալիս է՝

$$P_1 : T_a : T_c = \overline{\alpha\beta} : O\alpha : O\beta,$$

$$P_2 : Td : T_b = \beta\gamma : O\gamma : O\beta,$$

կամ

$$\frac{P_1}{\alpha\beta} = \frac{T_c}{O\beta} = \frac{T_a}{O\alpha},$$

$$\frac{P_2}{\beta\gamma} = \frac{T_c}{O\beta} = \frac{T_d}{O\gamma};$$

Նկատի ունենալով, որ $\bar{T}_b + \bar{T}_c = 0$, $T_b = T_c$ *եզրակացնում ենք*

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}$$

$\frac{P_1}{P_2}$ *հարաբերությունը կարելի է որոշել նաև մի այլ եղանակով։ Տանենք (նկ. 302 ա),* Bb *և* Cc *ուղղաձիգ ուղիղները. AB-ի շարունակությունը կհատի* Cc *ուղղաձիգը* c *կետում, իսկ* DC*-ի շարունակությունը կհատվի* Bb*-ի հետ* b *կետում։*

$\triangle BCc$ *նման է* $\bar{P}_1, \bar{T}_a, \bar{T}_c$ *ուժերի եռանկյանը, իսկ* $\triangle CBb$ *նման է* $\bar{P}_2, \bar{T}d, \bar{T}_b$ *ուժերի եռանկյանը. հետևապես՝*

$$P_1 : T_a : T_c = Cc : Bc : BC,$$

$$P_2 : T_d : T_b = Bb : Cb : BC;$$

Այս հարաբերություններից կստացվի

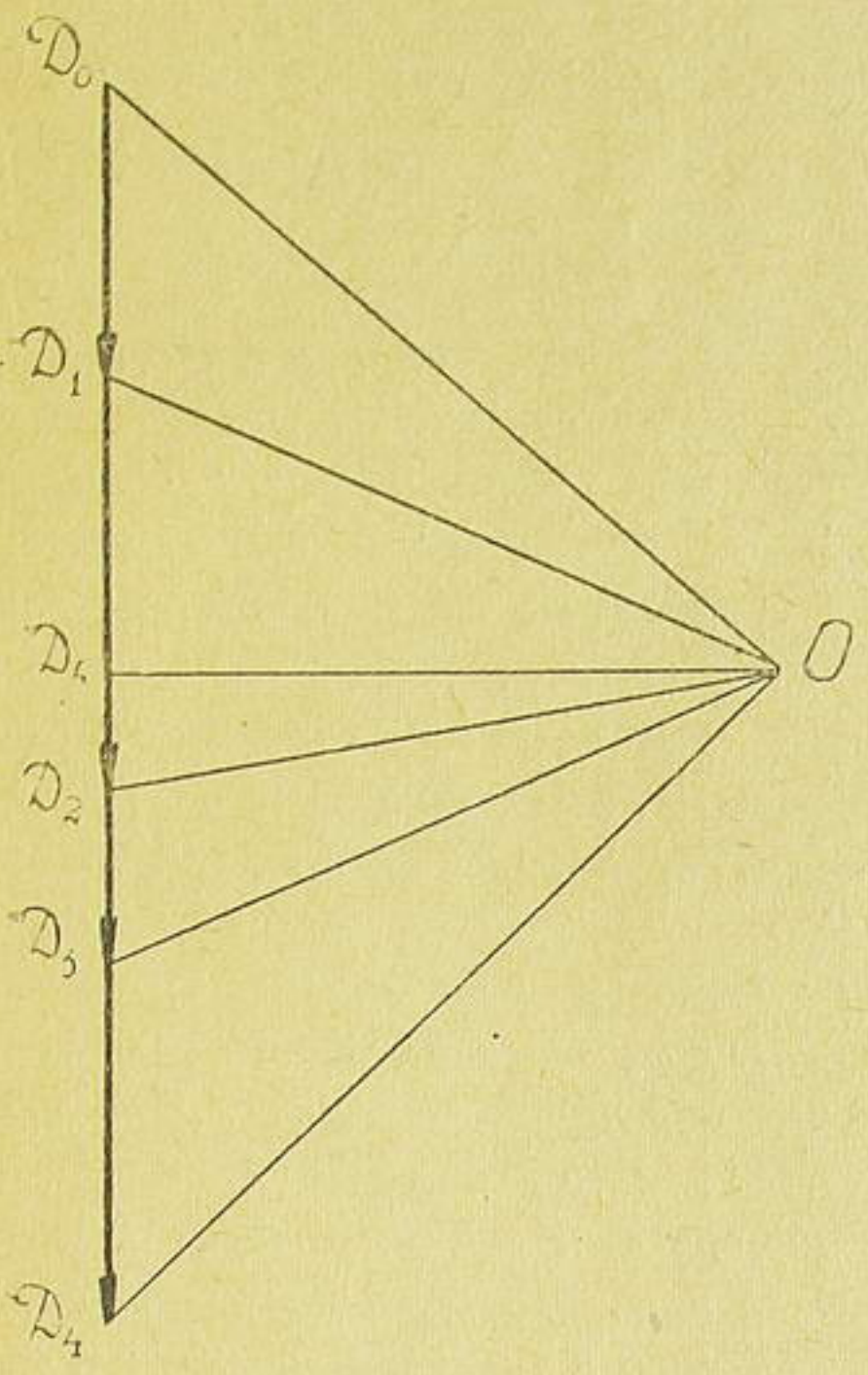
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{Cc}{Bb};$$

Նկ. 303 ա.

Վերջին արդյունքը շատ կարևոր դեր է խաղում վերերի կշեռքի տեսության մեջ։

Խնդիր.

Հնծանին, որը հենված է A և C կետերում (նկար 303 ա), կիրառված են 4 ուղղաձիգ ուժեր՝ $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4$: Որոշել $\overline{R}_a$ $\overline{R}_c$ հակազդումները: Այս խնդրում հնծանը գտնվում է հավասարակշռության մեջ $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4$ $\overline{R}_a$ և $\overline{R}_c$ ուժերի ազդեցության տակ: Հետևապես ուժային բազմանկյունը պետք է փակ լինի: Ընդունենք (նկար 303 բ),



նկ. 303 բ.

$$\overline{D_0D_1} = \overline{P}_1,\ \overline{D_1D_2} = \overline{P}_2,\ \overline{D_2D_3} = \overline{P}_3$$
$$D_3D_4 = \overline{P}_4,\ D_4\overline{D}_5 = \overline{R}_c,\ \overline{D_5D_6} = \overline{R}_a:$$

$\overline{R}_a$ և $\overline{R}_c$ հակազդումները դեռ անհայտ են, ուստի D_5 և OD_5 ճառագայթի դիրքերը հայտնի չեն. ուժային բազմանկյան փակ լինելու պատճառով D_6 կետը համընկնում է D_0-ի հետ:

Հավասարակշռության հետևանքով պարանային բազմանկյան առաջին (B_0B_1) և վերջին (B_6B) կողմերը պետք է գտնվեն մի ուղղի վրա:

Տանենք

$$B_0B_1 \parallel OD_0,\ B_1B_2 \parallel OD_1$$
$$B_2B_3 \parallel OD_2,\ B_3B_1 \parallel OD_3$$
$$B_4B_5 \parallel OD_4$$

OD_5 ուղղությունը դեռ անհայտ է, այդ պատճառով էլ չենք կարող տանել B_5B_6 հատվածը, որ զուգահեռ է OD_5:

Բայց B_6 կետը պետք է գտնվի R_a հակազդման ազդման գծի վրա, իսկ $B_0B_1B_6B$—մի ուղիղ է. ուստի B_6-ը կլինի B_0B_1-ի շարունակության հատման կետը $\overline{R}_a$-ի ազդման գծի հետ: Միացնելով B_6-ը B_5-ին՝ տանում ենք B_5B_6 հատվածը, որին զուգահեռ է OD_5 ճառագայթները: Տանելով $OD_5 \parallel B_5B_6$, որոշում ենք և D_5 կետի դիրքը և $\overline{R}_c = D_4D_5$ և $\overline{R}_a = D_5D_6 = D_5D_0$ հակազդումները:

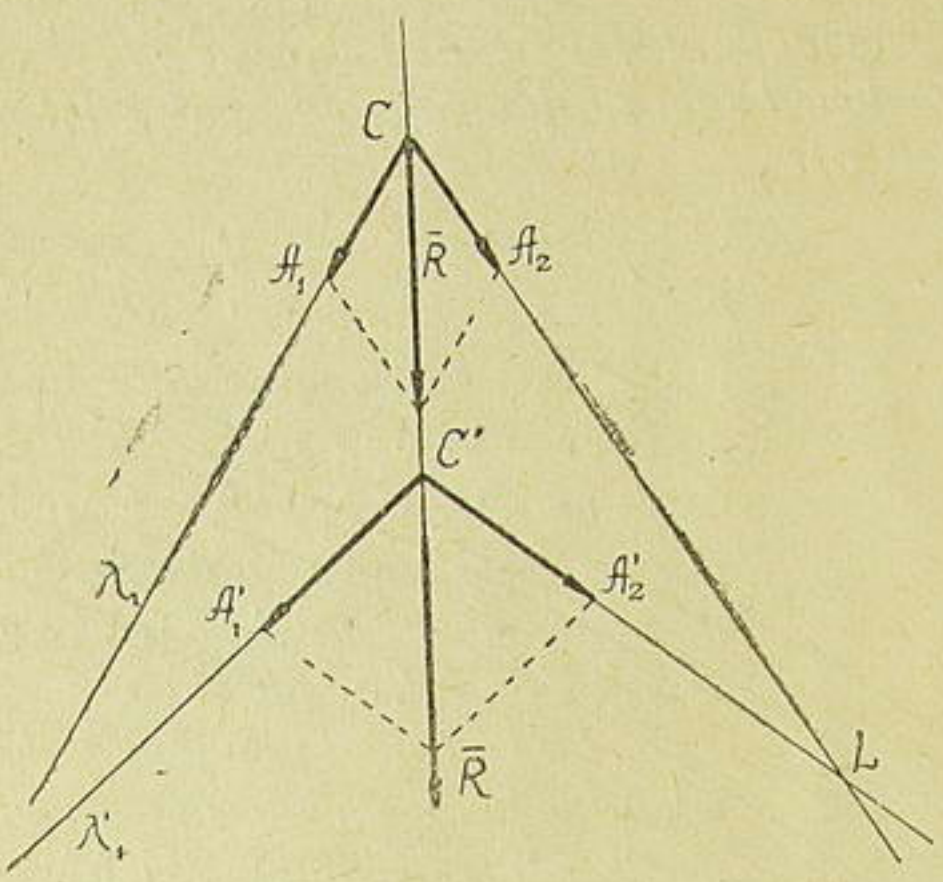
Խնդիր.

Տրված են երեք ուժերը, $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$, որոնց գլխավոր վեկտորը զրո չէ: Փոխարինել այդ ուժերը երկու ուժերով $\overline{P}_1$ և $\overline{P}_2$ այն դեպքում, երբ տրված է $\overline{P}_1$-ի ազդման գիծը λ_1 և այն L կետը, որով անցնում է $\overline{P}_2$ ուժի ազդման գիծը:

Ենթադրենք թե $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ ուժերի համազորը ($\overline{R}$) գտնված է (նկ. 304):

Այդ դեպքում տալով λ_1 և L կետը, կարելի է որոշել, թե $\overline{P}_1$ և թե $\overline{P}_2$: Իսկապես, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ուժախումբը համարժեք է $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ ուժախմբին, հետևապես $\overline{R}$-ը նաև P_1 և $\overline{P}_2$ ուժերի համազորն է: Այդ պատճառով $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ և $\overline{R}$-ի ազդման գծերը հատվում են մի կետում:

Նշանակենք C-ով $\overline{P}_1$-ի և $\overline{R}$-ի ազդման գծերի հատումը CL-ը կլինի $\overline{P}_2$-ի ազդման գիծը: Ունենալով λ_1 և CL ազդման գծերը, որոշում ենք $\overline{P}_1=\overline{CA}_1$ և $\overline{P}_2=\overline{CA}_2$ ուժերը:

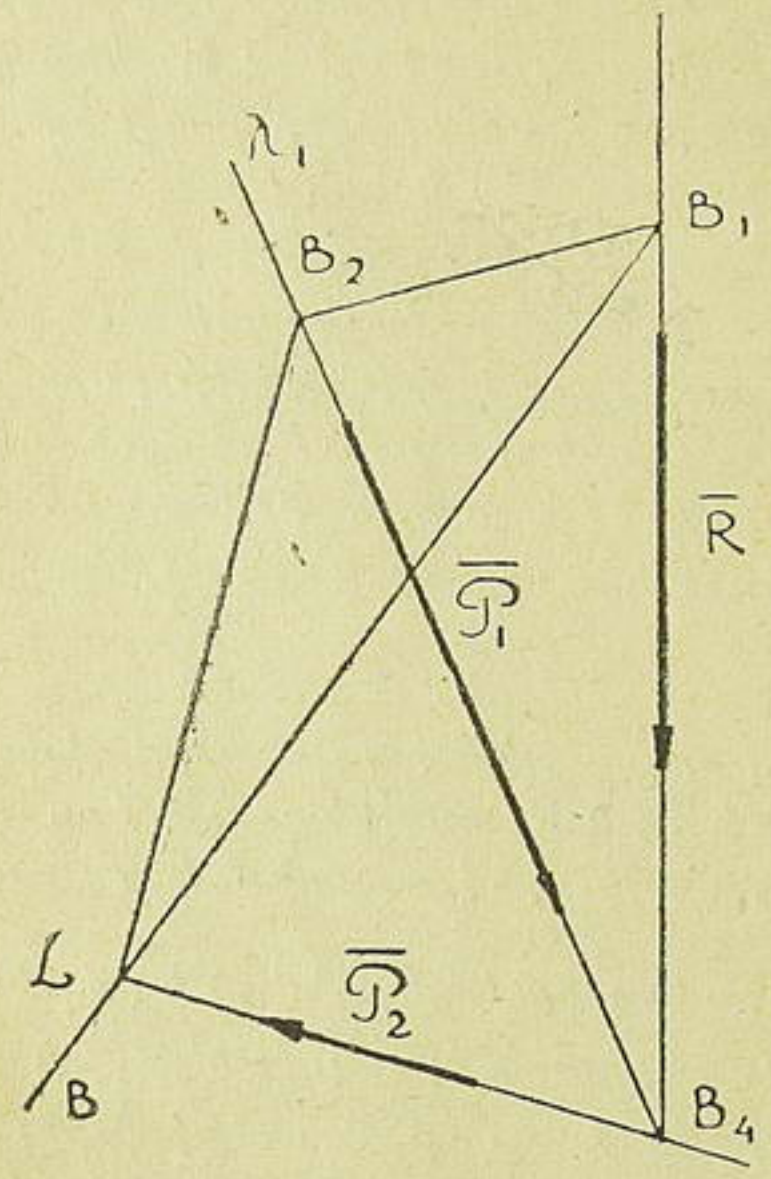


Նկ. 304

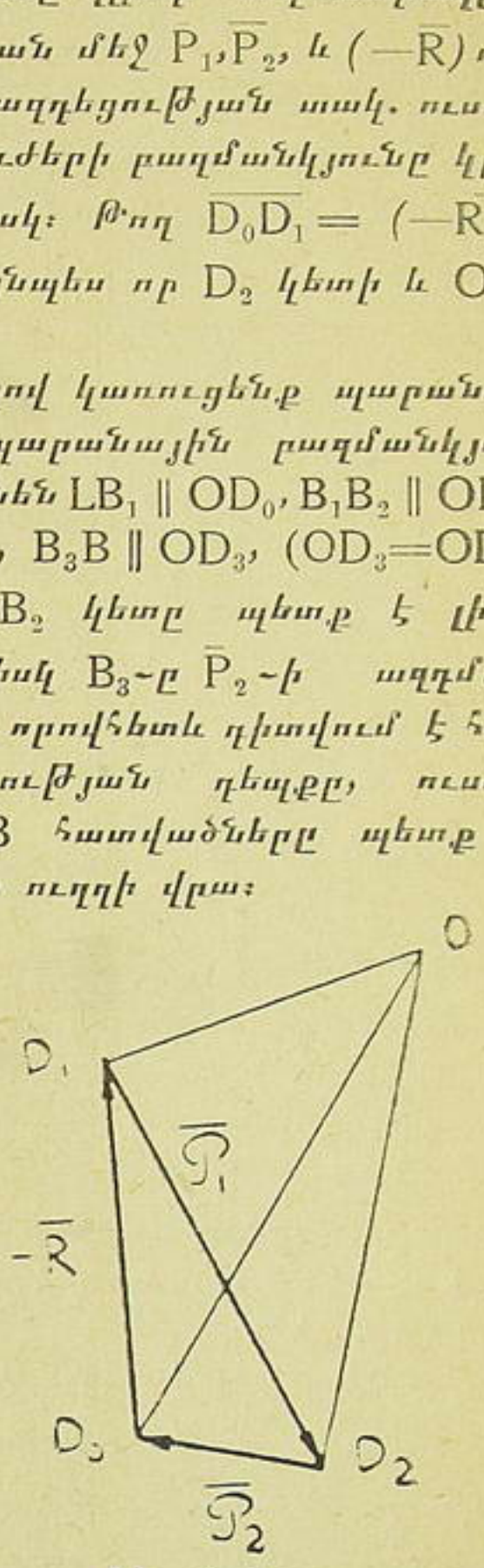
Եթե $\overline{P}_1$-ի ազդման գիծը լիներ λ'_1 և ոչ թե λ_1, ապա C-ի փոխարեն կստանայինք C′ կետը և $\overline{P}_2$-ի ազդման գիծը կլիներ C′L: Այժմ $\overline{P}_1=\overline{C'A'_1}$, $\overline{P}_2=\overline{C'A'_1}$:

Եթե, ունենալով $\overline{R}$-ը, ցանկանայինք խնդիրը լուծել գրաֆիկորեն, պետք է վարվեինք այսպես (նկար 305 ա,բ.). կարծենք մարմինը կլինի հավասարակշռության մեջ $\overline{P}_1,\overline{P}_2$, և $(-\overline{R})$ ուժերի ազդեցության տակ. ուստի այդ ուժերի բազմանկյունը կլինի փակ: Թող $\overline{D_0D_1}=(-\overline{R})$, $D_1D_2 \parallel \lambda_1$. $\overline{P}_1=\overline{D_1D_2}$ ուժի չափն անհայտ է, այնպես որ D_2 կետ և OD_2 ճառագայթի դիրքերը դեռ հայտնի չեն:

OD_2 ճառագայթի դիրքը որոշելու նպատակով կառուցենք պարանային բազմանկյունը, սկսելով L կետից: Թող պարանային բազմանկյան կողմերը լինեն $LB_1 \parallel OD_0$, $B_1B_2 \parallel OD_1$, $B_2B_3 \parallel OD_2$, $B_3B \parallel OD_3$, $(OD_3=OD_0)$ ընդսմում B_2 կետը պետք է լինի λ_1-ի վրա, իսկ B_3-ը $\overline{P}_2$-ի ազդման գծի վրա, և որովհետև դիտվում է հավասարակշռության դեպքը, ուստի LB_1 և B_3B հատվածները պետք է գտնվեն մի ուղղի վրա:



Նկ. 305 ա.

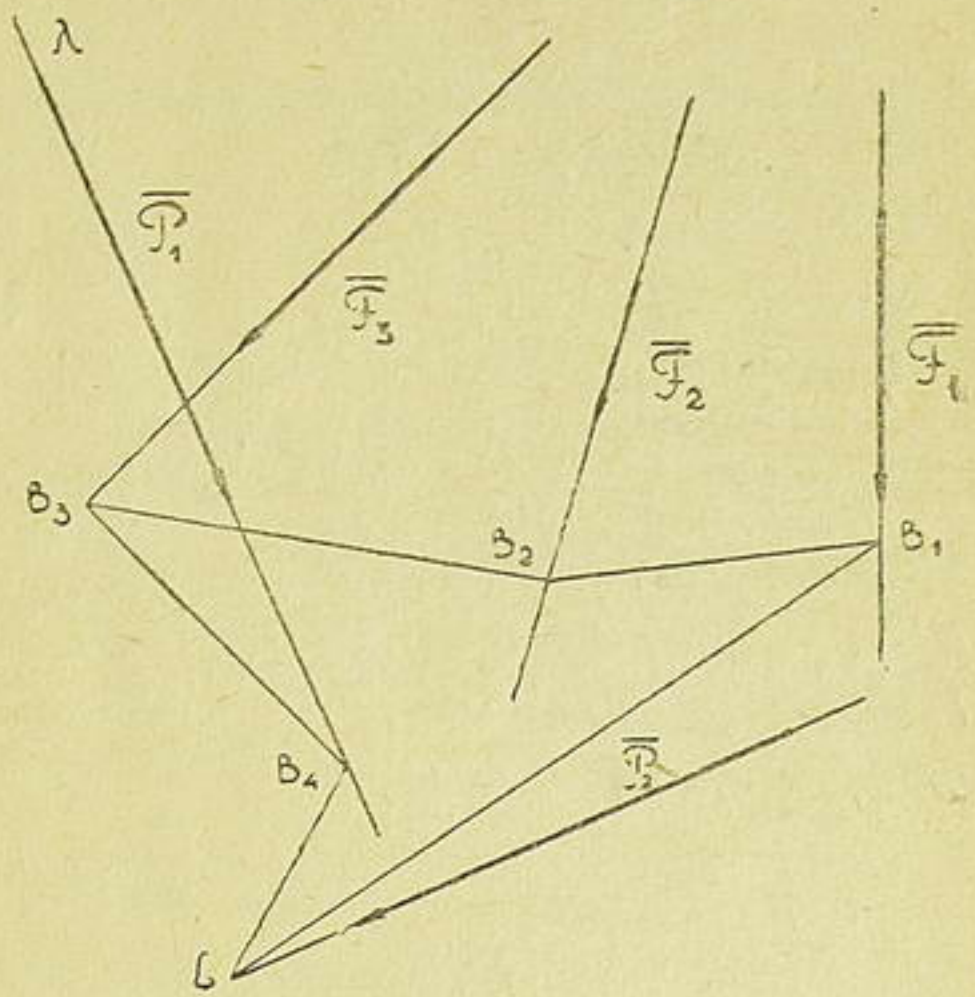


Նկ. 305 բ.

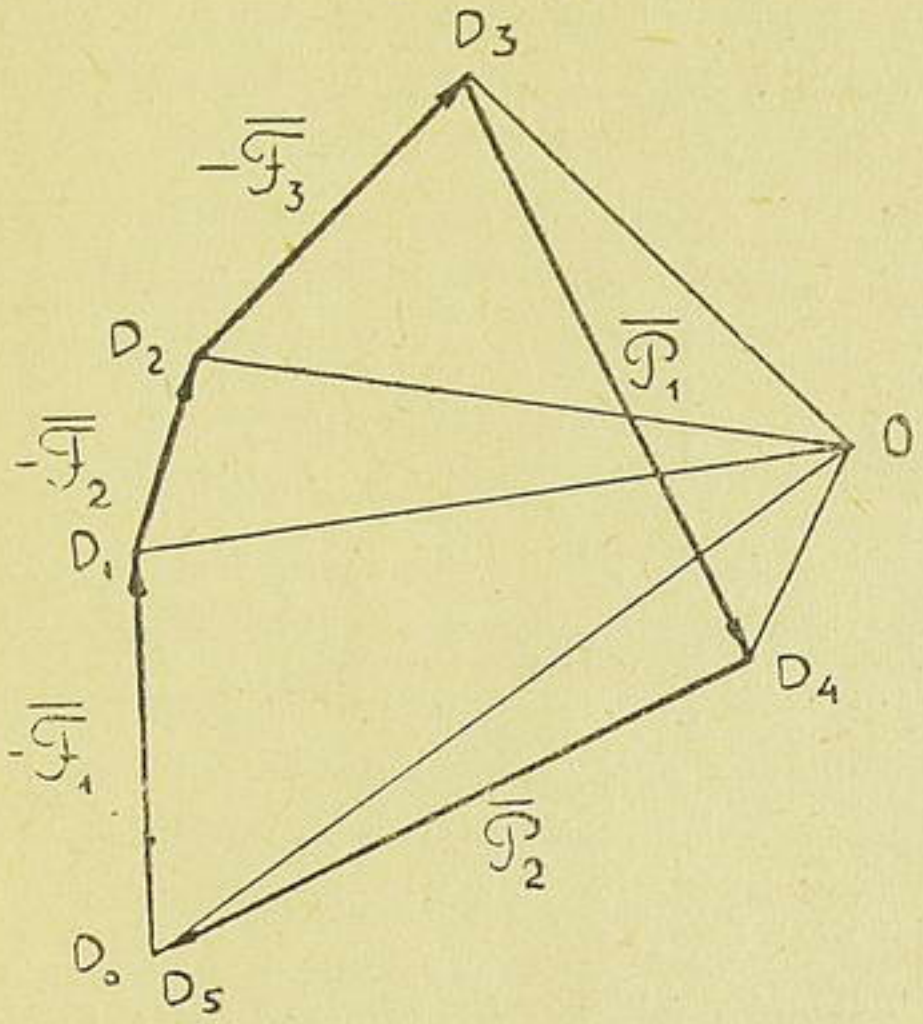
Բայց LB_1-ը զուգահեռ չէ $\bar{P}_2$-ին. այդ պատճառով B_3-ի և B_3B-ի վերաբերյալ պայմաններին բավարարելու միակ հնարավորությունն այն է, որ B_3-ը համապատկվի L-ի հետ։ Այդ դեպքում $OD_2 \parallel B_2L$։

Այսպիսով որոշվում են OD_2 ճառագայթի ուղղությունը, D_2 կետի դիրքը և միաժամանակ $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ ուժերը (նկ. 305 ա, բ)։

Երբ $\bar{R}$-ի փոխարեն տված են $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2, \bar{F}_3$ ուժերը, վարվում են նման ձևով (նկ. 306 ա, բ)։ Կազմում են $(-F_1)$, $(-F_2)$, $(-\bar{F}_3)$ ուժերի բազմանկյունը՝ $D_0D_1D_2D_3$. D_3-ից տանում ևն $D_3D_4 \parallel \lambda_1$. ընտրելով O բևեռը տանում են OD_0, OD_1, OD_2, OD_3 ճառագայթները. L-ից սկսում են կառուցել պարանային բազմանկյան-կոտրվը LB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 մինչև հասնելը λ_1-ի հետ B_4 կետում. միացնում են B_4 L-ին և տանում OD_4 ճառագայթը զուգահեռ LB_4-ին։ Այժմ $\overline{D_3D_4} = \bar{P}_1$, $\overline{D_4D_0} = \bar{P}_2$,



Նկ. 306 ա,



Նկ 306 բ.

Խնդիր.

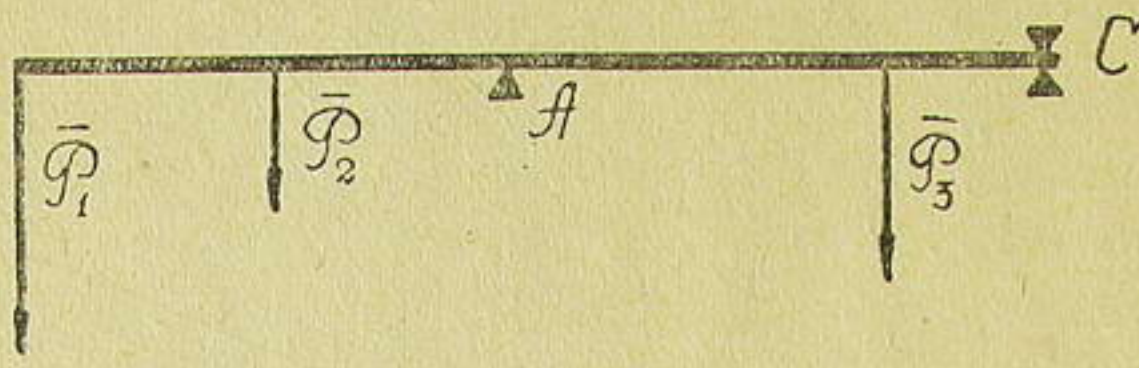
1. Հենծանին (նկար 307), որի հենակետերն են A և C, կիրառված են երեք ուղղաձիգ ուժեր $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$. կշիռն անտեսվում է. որոշել պրաֆիկորեն $R_a, \bar{R}$ հակազդումները։

2. Հարթ ուժաբեռնվածքի դևխավոր վեկտորը զրո է. իսկ դևխավոր մոմենտը $\bar{M} \neq 0$։ Կառուցում ենք ուժային բազմանկյունը D_0 կետից սկսած և վերջնում երկու բևեռներ O և O′ յուրաքանչյուր բևեռին համապատասխանում է պարանային մի բազմանկյուն՝ $B_0B_1 \ldots B_nB$ և $B'_0B'_1B'_2 \ldots B'_nB'$։ Գիտենալով, որ $\frac{D_0O}{D_0O'} = k$, որոշել $\frac{h}{h'}$ հարաբերությունը, որտեղ h հեռավորությունն է B_0B և B_nB անսահման ուղիղների միջև, իսկ h′ հեռավորությունն է $B'_0B'_1$ և B'_nB' ուղիղների միջև։

3. Տվյալ ուժաստեմի ուժային բազմանկյունը բաց է՝

ա. Ի՞նչպես պետք է ընտրել բևեռը, որ պարանային բազմանկյան առաջին և վերջին կողմերը զուգահեռ լինեն:

բ. Ի՞նչպես պետք է ընտրել բևեռը, որ պարանային բազմանկյան առաջին և վերջին կողմերը լինեն զուգահեռ համապատասխանաբար վերջին ազդման ձիծը բաժանի հավասար մասերի հեռավորությունը պարանային բազմանկյան այդ կողմերի միջև:



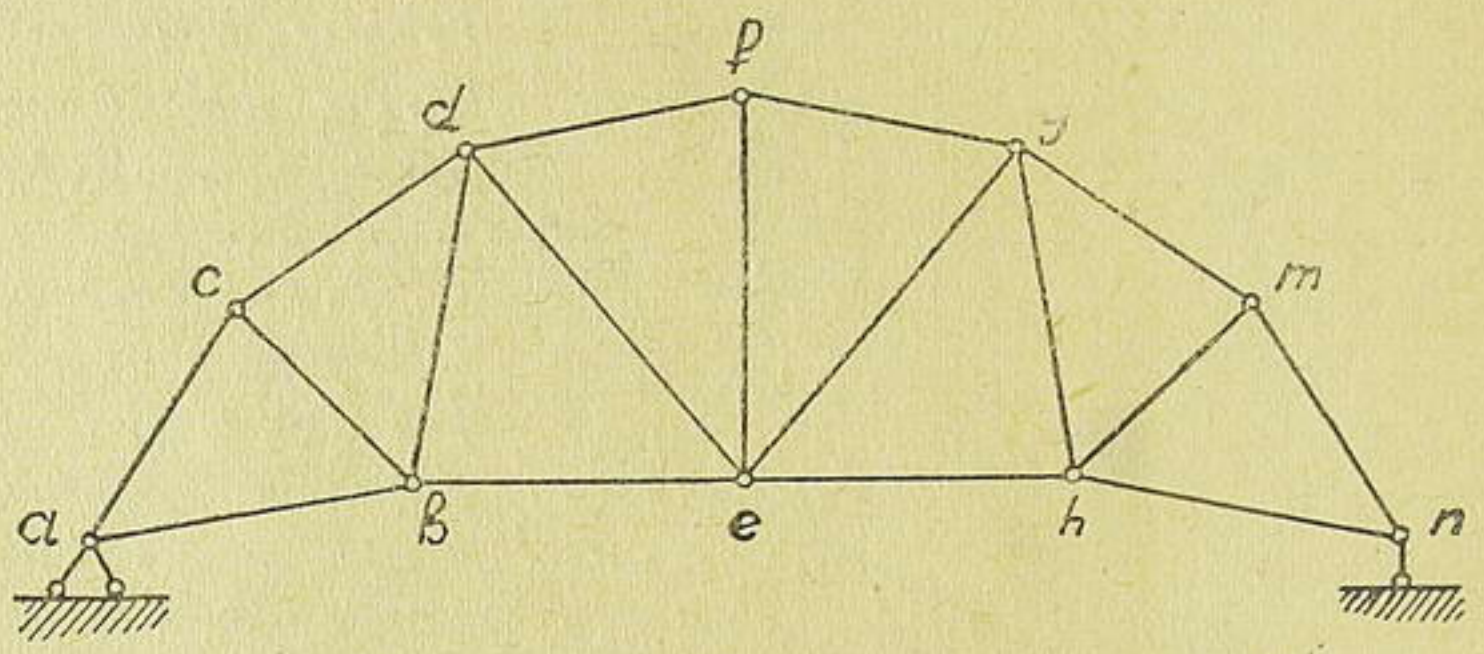
Նկ. 307

4. $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ հարթ ուժերի գլխավոր վեկտորը զերո չէ: Ինչպես պետք է ընտրել բևեռը, որ պարանային բազմանկյան առաջին և վերջին կողմերի կազմած անկյունը հավասար լինի $\bar{F}_1$ և $\bar{F}_n$ ուժերի ազդման գծերի միջև եղած անկյանը:

ՖԵՐՄԱՆՆԵՐ

§ 97. Պարզ Ֆերմաներ: Ֆերմա կոչվում է այնպիսի կառուցվածք, որը կազմված է ծայրերով միմյանց հետ հոդակապերով միացված ուղղագիծ ձողերից:

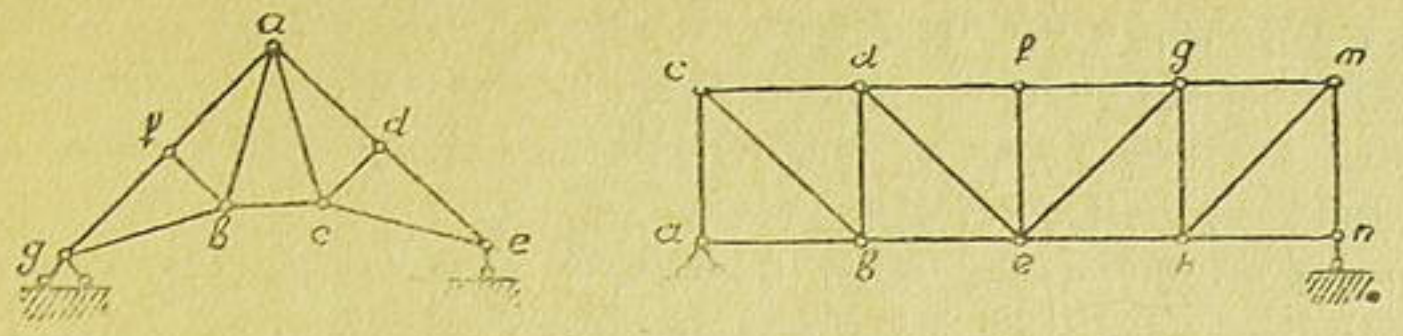
Հոդակապերն անվանում են հանգույցներ և ընդունում են, որ նրանց մեջ շփում առաջ չի գալիս: Ձողերի և հանգույցների դասավորությունն ընտրում են այնպես, որ ֆերման լինի երկրաչափորեն անփոփոխելի մի ֆիգուրա:



Նկ. 308

Ֆերմաները լինում են տարբեր ձևերի և բարդության: «Պարզ» կոչված բոլոր ֆերմաները կառուցվում են հետևյալ ընդհանուր եղանակով. վերցնում են մի եռանկյուն abc (նկար 308), որին cd և bd երկու ձողերով միացնում են d հանգույցը, ապա ստացված ֆիգուրին de և be ձողերով միացնում են նոր e հանգույցը և այսպես շարունակելով միացնում են բոլոր մնացած f, g, h, m, n հոդակապերը: Նույնպիսի հաջորդականությամբ կառուցելով, կարելի է ստանալ հետևյալ ֆերմաները (նկար 309):

Այսպես կառուցված ֆերմաների ձողերի թվի և հանգույցների թվերի միջև գոյություն ունի որոշակի առնչություն։



Նկ. 309

Իսկապես նշանակենք ձողերի թիվը m, *իսկ հանգույցների թիվը՝* n։ *Նկատի առնելով, որ հիմնական* abc *եռանկյունը պարունակում է երեք ձող և երեք հանգույց, տեսնում ենք, որ մնացած* (m—3) *ձողերը օգտագործվում են* (n—3) *հանգույցները միացնելու համար։ Բայց յուրաքանչյուր հանգույցը միացնելու համար օգտագործում են 2 ձող. ուրեմն* (n—3) *հանգույցներ միացնելու համար անհրաժեշտ կլինի* 2(n—3) *ձողեր. հետևապես*

$$m - 3 = 2(n-3),$$

կամ

$$m = 2n - 3: \qquad \text{(XIII 3)}$$

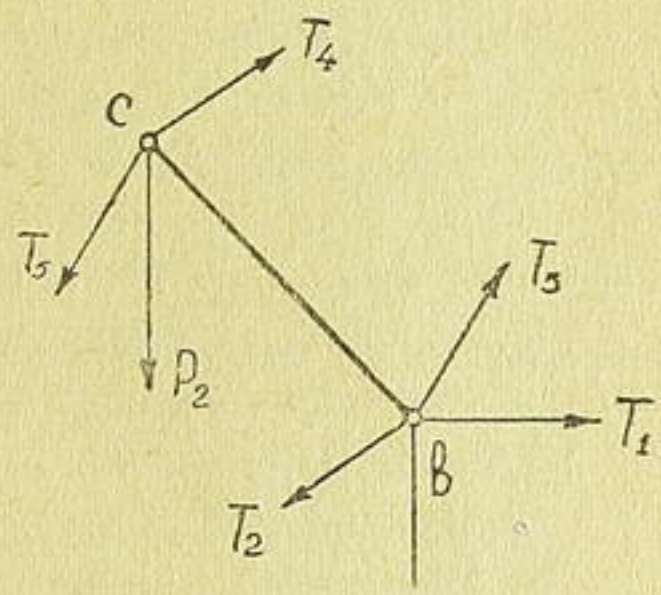
Ֆերմաների հաշվարկման ժամանակ սովորաբար ընդունվում է, որ

ա. ֆերմայի ձողերը անկշիռ են,

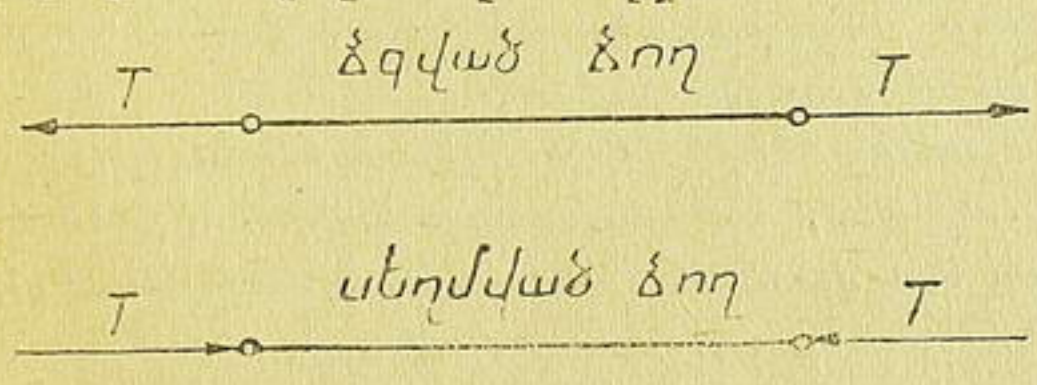
բ. արտաքին ուժերը կիրառված են միայն հանգույցներին,

գ. հոդակապերում շփում չի առաջանում։

Այդպիսի պայմաններում ֆերմայի յուրաքանչյուր ձողը կլինի կամ սեղմված կամ ձգված։ Իրոք, նկ. 310 ֆերմայի bc *ձողը, որի* b *և* c *հոդակապերին կիրառված են* $\bar{P}_1$ *և* $\bar{P}_2$ *արտաքին ուժերը և այդ հոդակապերը միացնող ձողերի* $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \bar{T}_4, \bar{T}_5$ *հակազդումները, ապա ձողի հավասարակշռության դեպքում* b *կետում կիրառված ուժերի համազորը* $\bar{F}_b$ *և* c *կետում կիրառված ուժերի* $\bar{F}_c$ *համազորը պետք է ունենան ազդման միևնույն գիծը՝* bc *ուղիղը, լինեն ըստ չափի հավասար և հակազուգահեռ՝* $F_b = F_c$, $F_b \uparrow\downarrow \bar{F}_c$։ *Այսպիսով,* bc *ձողը պետք է, իրոք լինի կամ սեղմված, կամ ձգված։*



Նկ. 310



Նկ. 311

Հոդակապերին ազդող ձողերի հակազդումներն անվանում են ձողերի ճիգեր։ Ճիգերը համարվում են դրական, երբ նրանք ձգում են ձողը և բացասական երբ ձողը, ընդհակառակը սեղմված է (նկար 311)։

§ 98. Ֆերմաների ստատիկական որոշելիության պայմանը։ *Ֆերմայի*

յուրաքանչյուր հանգույցի հավասարակշռության պայմանների թիվը հավասար է երկուսի, որովհետև նրա վրա ազդող արտաքին ուժերը և ձողերի ճիգերը գտնվում են մի հարթության վրա։ Կազմելով բոլոր n հանգույցների հավասարակշռության պայմանները, կստանանք 2n հավասարումներ, որոնց մեջ կմտնեն բոլոր m ձողերի ճիգերը, կիրառված բոլոր արտաքին ուժերը և հենարանային հակազդումները։

Որովհետև ֆերման հարթ է և նրա վրա կիրառված բոլոր արտաքին ուժերը գտնվում են ֆերմայի հարթության վրա, հետևապես ֆերմային կիրառված արտաքին ուժերը և հենարանային հակազդումները պետք է բավարարեն հավասարակշռության երեք հավասարումներին։

Այսպիսով, ֆերմայի բոլոր հանգույցների հավասարակշռության 2n հավասարումների մեջ մտնող կիրառված արտաքին ուժերը և հենարանային հակազդումները կապված են միմյանց հետ երեք հավասարումներով։ Այստեղից եզրակացնում ենք, որ 2n հավասարումներից միայն (2n—3) հավասարումներն են միմյանցից անկախ, այսինքն 2n հավասարումները հնարավորություն են տալիս որոշել միայն 2n—3 անհայտներ։

Այդ թիվը համապատասխանում է ֆերմայի ձողերի թվին (տես XIII 3). հետևաբար այդ հավասարումներից կարող ենք որոշել բոլոր ձողերի ճիգերը։

Այսպիսով, միայն ստատիկայի պայմաններից օգտվելով, հնարավոր է որոշել պարզ ֆերմաների բոլոր ձողերի մեջ առաջացող ճիգերը, կամ, այլ կերպ ասած, բոլոր պարզ ֆերմաները ստատիկորեն որոշելի են։

Գործնականում ֆերմաների ձողերի ճիգերի որոշման այս եղանակին դիմում են միայն այն դեպքերում, երբ հանգույցների թիվը (n) փոքր է։ Երբ հանգույցների թիվը մեծ է, այդ եղանակը պահանջում է շատ անհայտներով հավասարումների համատեղ լուծում, որը կապված է ժամանակի մեծ կորուստի հետ։

Այդ պատճառով ֆերմաների հաշվարկման համար մշակված են հատուկ ընդհանուր եղանակներ, որոնք հեշտացնում են խնդրի լուծումը։

Այստեղ բերվում են այդ եղանակներից երեքը՝

ա. Ռիտտերի եղանակը,

բ. Կուլմանի եղանակը,

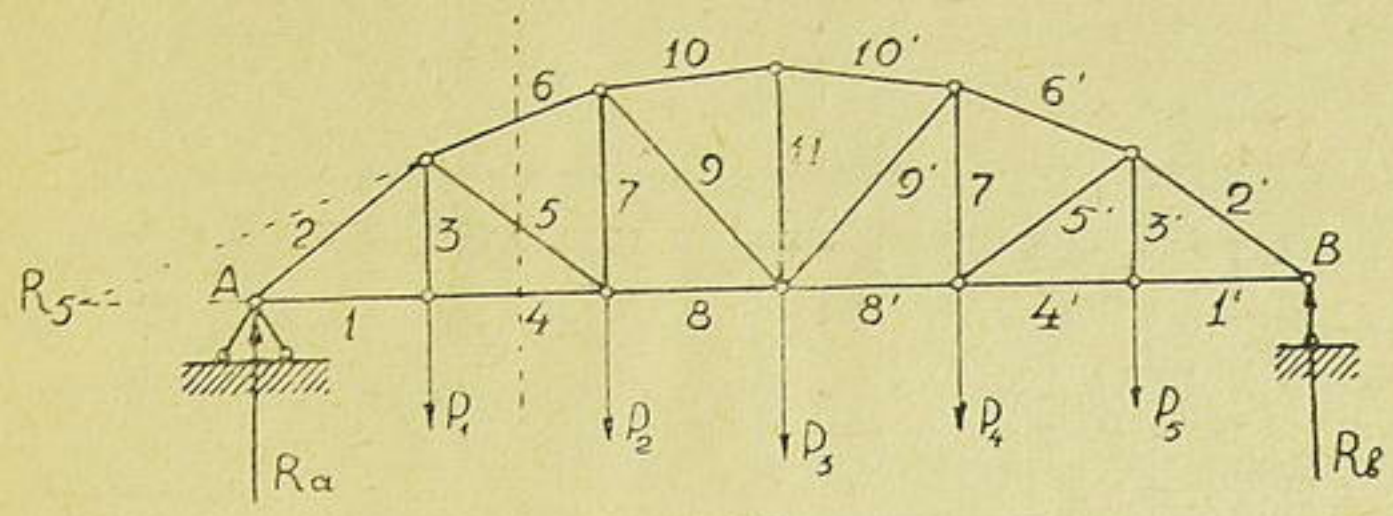
գ. Մաքսվելլ-Կրիմոնայի եղանակը։

§ 99. Ռիttերի եղանակը։ Ֆերմայի ձողերի ճիգերի որոշման այս եղանակը կայանում է հետևյալում։ Նախ որոշում են ֆերմայի հենարանային հակազդումները։ Այնուհետև մտքով հատում են ֆերման այնպես, որպեսզի հատվեն այն ձողերը, որոնց ճիգերը ենթակա են որոշման, և դիտում են հատած մասերից մեկի հավասարակշռությունը, փոխարինելով մյուս մասի ազդեցությունը կտրած ձողերի ճիգերով։

Հավասարակշռության հավասարումների թիվն է երեք և այդ պատճառով էլ ֆերման հատում են այնպես, որ հատվածքը կտրի երեք ձողեր. կտրած ձողերի անհայտ ճիգերը որոշվում են հավասարակշռության երեք հավասարումներից։

Օրինակ, դիցուք տված է նկ. 312 ֆերման, որի ներքևի հանգույցներին կիրառված են $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4, \overline{P}_5$ ուղղաձիգ ուժերը, և, դիցուք հարկավոր է որոշել 4, 5, 6 ձողերի ճիգերը։ Տանում ենք mn հատումը և դիտում

Ֆերմայի ձախ մասի հավասարակշռության ընդ որում $\bar{R}_a$ հակազդումը պետք է նախօրոք որոշված լինի:



Նկ. 312

4 ձողի T_4 ճիգը որոշելու համար մոմենտների կենտրոն ընտրում ենք 5 և 6 ձողերի հատման R_4 կետը, կազմում ենք ֆերմայի ձախ մասին կիրառված ուժերի գլխավոր մոմենտը և հավասարացնում այն զերոյի: Այսպես առացված հավասարման մեջ չեն մտնի 5 և 6 ձողերի T_5, T_6 ճիգերը, որովհետև նրանց ազդման գծերն անցնում են մոմենտների R_4 կենտրոնով:

Շնորհիվ այն հանգամանքի, որ թե ուժերը և թե մոմենտների կենտրոնը գտնվում են մի հարթության վրա, մոմենտները կլինեն միմյանց զուգահեռ: Այդ պատճառով կարելի է վերցնել մոմենտների թվական արժեքները և հավասարակշռության հավասարումը կլինի՝

$$M_{R_4}(\bar{T}_4) + M_{R_4}(\bar{R}_a) + M_{R_4}(\bar{P}_1) = 0: \qquad \text{(XIII 4)}$$

(XIII 4)-ից որոշվում է T_4 ճիգը:

Նույն կերպ 5 և 6 ձողերի ճիգերը կորոշվեն հետևյալ երկու հավասարումներից՝

$$M_{R_5}(\bar{T}_5) + M_{R_5}(\bar{R}_a) + M_{R_5}(\bar{P}_1) = 0$$

$$M_{R_6}(\bar{T}_6) + M_{R_6}(\bar{R}_a) + M_{R_6}(\bar{P}_1) = 0$$

որոնցում՝ R_5 4 և 6 ձողերի շարունակությունների հատման կետն է, իսկ R_6 է 4 և 5 ձողերի հատման կետը:

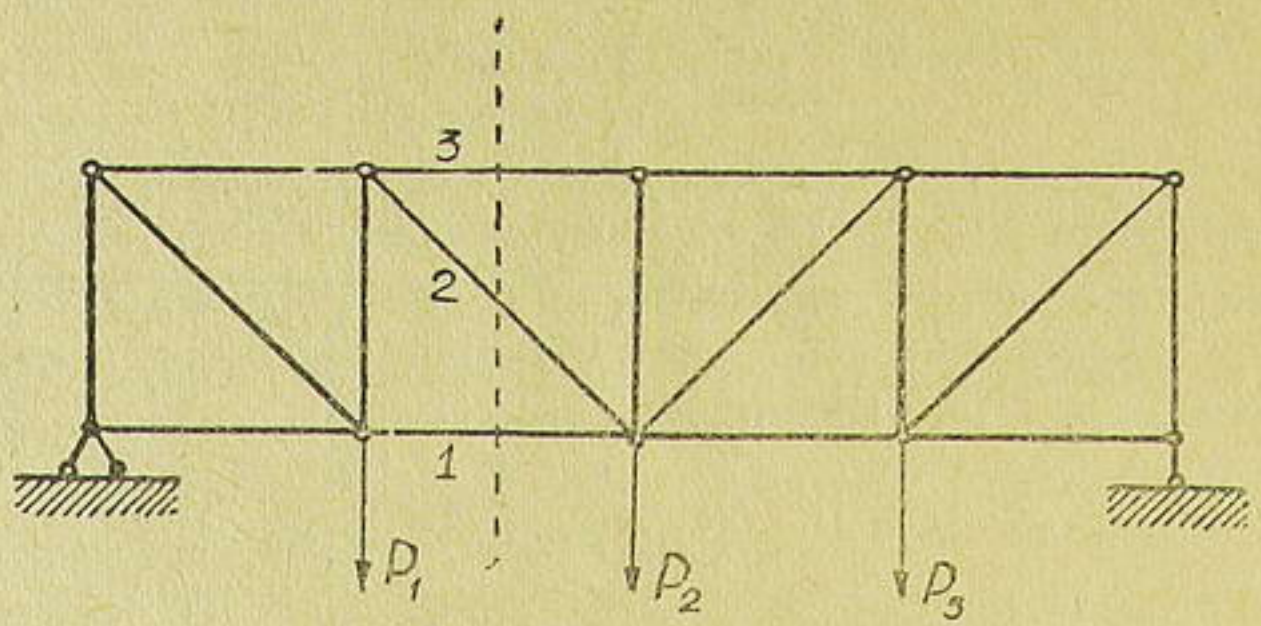
Մոմենտների այսպես ընտրված R_4, R_5, R_6 կենտրոնները կոչվում են Ռիտտերի կետեր:

Այսպես շարունակելով, կարելի է որոշել ֆերմայի բոլոր ձողերի ճիգերը: Ընդամենը կպահանջվի կազմել $(2n-3)$ հավասարումներ, որոնցից յուրաքանչյուրի մեջ կմտնի մեկ անհայտ:

Այս եղանակն անկիրառելի է, երբ ֆերմայի վերին և ներքին գոտիները միմյանց զուգահեռ են, որովհետև այդ դեպքում վերին և ներքին գոտիներին պատկանող կողմերը չեն հատվում. այդպիսի երկու կողմերին համապատասխանող Ռիտտերի կետը —ինչպես ասում են— կդնա անսահմանություն:

Օրինակ, 313 նկարի 2 ձողի մեջ առաջացող ճիգը որոշելու դեպքում

որպես Ռիտտերի կետ պետք է ծառայեր 1 և 3 ձողերի հատումը, իսկ այդ կետը գոյություն չունի՝ ձողերը չեն հատվում։ Բայց և այնպես 2 ձողի ճիգը կարելի է որոշել հետևյալ կերպ. պրոեկտենք ֆերմայի ձախ մասին



նկ 313

ազդող բոլոր ուժերը 1 և 3 ձողերին ուղղահայաց ուղղության վրա. 1 և 3 ձողերի ճիգերի պրոեկցիաները հավասար են զերոյի. կստացվի հետևյալ հավասարումը՝

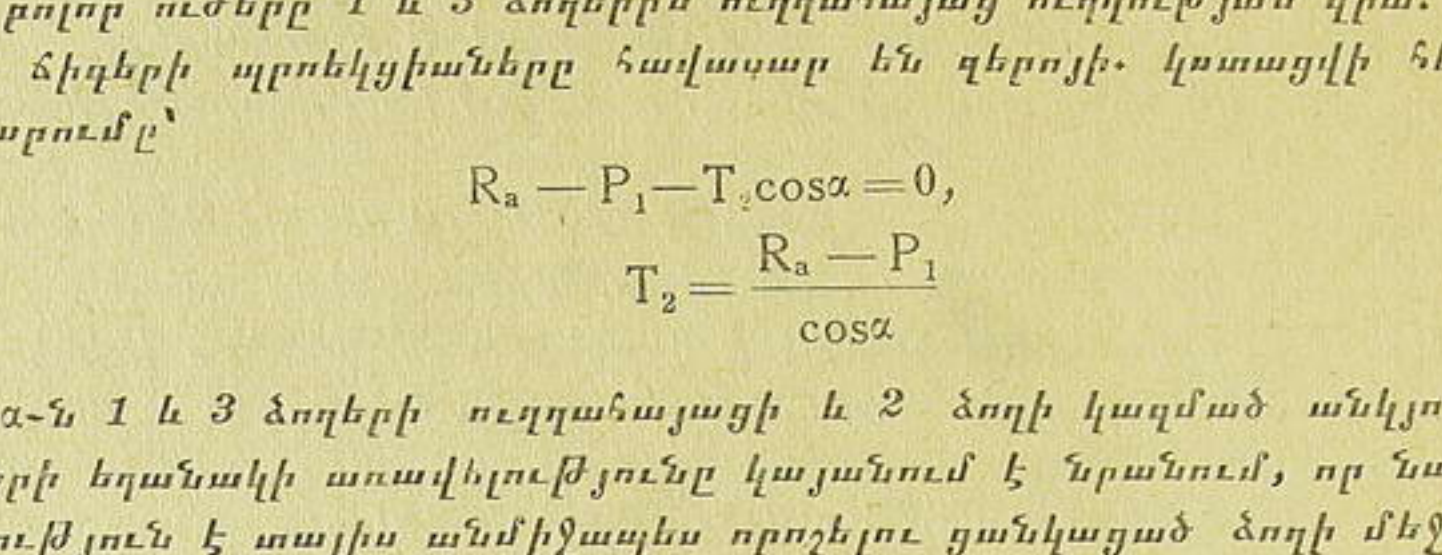
$$R_a - P_1 - T_2 \cos\alpha = 0,$$

կամ

$$T_2 = \frac{R_a - P_1}{\cos\alpha}$$

որտեղ α-ն 1 և 3 ձողերի ուղղահայացի և 2 ձողի կազմած անկյունն է։ Ռիտտերի եղանակի առավելությունը կայանում է նրանում, որ նա հնարավորություն է տալիս անմիջապես որոշելու ցանկացած ձողի մեջ առաջացող ճիգը։

§ 100. Կուլմանի եղանակը։ Կուլմանի եղանակը կիրառելիս, պետք է—ինչպես նաև Ռիտտերի եղանակի դեպքում—նախապես որոշել ֆերմայի հենարանային հակազդումները։ Հատում են ֆերման այնպես, որպեսզի հատվեն այն ձողերը, որոնց ճիգերն ուզում են որոշել, և դիտում են ֆերմայի հատած մասերից մեկի հավասարակշռությունը։ Սակայն հավասարակշռության պայմանները արտահայտվում են ոչ թե անալիտիկորեն—ինչպես այդ արվում է Ռիտտերի եղանակում—այլ գրաֆոստատիկորեն։



նկ. 314

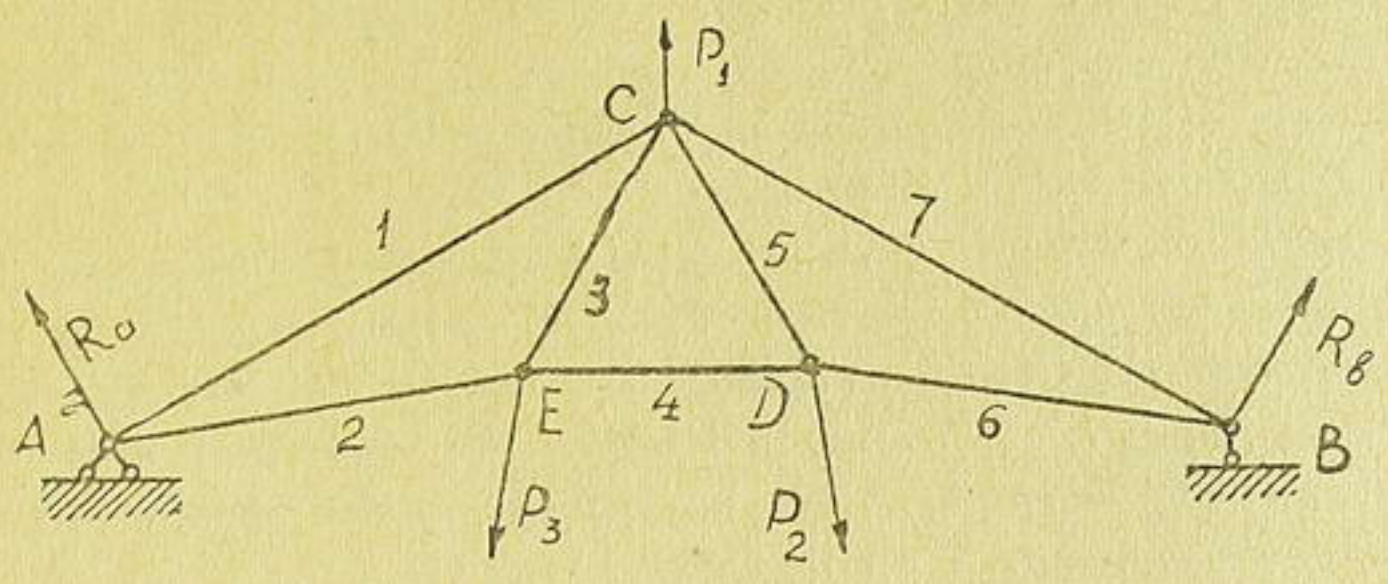
Օրինակ, նկար 314 ֆերմայի 1, 2, 3 ձողերի ճիգերը որոշելու համար

պետք է ֆերման հատել mn *հատվածքով այնպես, որ կտրվեն այդ 1, 2, 3 ձողերը, և պահանջել, որ ֆերմայի ձախ մասը գտնվի հավասարակշռության մեջ: Անվանենք* T_1 *և* T_2 *ճիգերի համազորը* T_{12}, *իսկ* R_a, P_1 *և* P_2 *դուգահեռ ուժերի համազորը՝* R: *Թող* R̄*-ի ազդման գիծը լինի* OM:

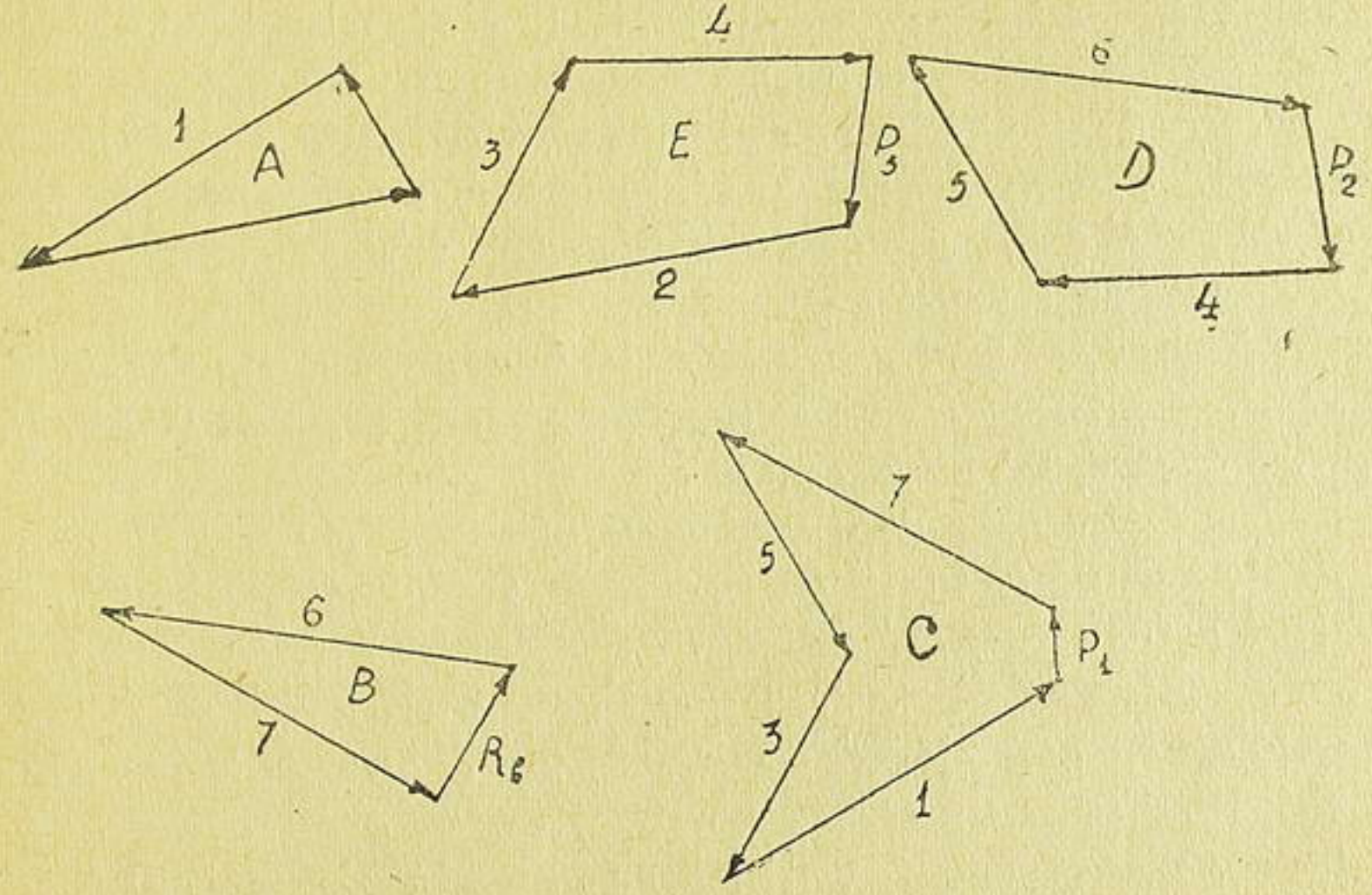
Ֆերմայի ձախ մասը պետք է գտնվի հավասարակշռության մեջ R̄, T_3 *և* T_{12} *ուժերի ազդեցության տակ, հետևապես այդ երեք ուժերի ազդման գծերը պետք է հատվեն մի կետում (տես § 62, VIII): Եթե* R̄*-ի և* T_3*-ի ազդման գծերը հատվում են* O *կետում,* T_{12}*-ի ազդման գիծն էլ պետք է անցնի* O*-ով: Այսպիսով որոշվում է* T_{12}*-ի ազդման գիծը: Ունենալով* R̄*-ը և* T_3 *ու* T_{12} *ուղղությունները, կառուցում ենք ուժային* OMN *եռանկյունը և որոշում՝* $T_3 = \overline{MN}$, $T_{12} = T_1 + T_2 = \overline{NO}$:

Այնուհետև, վերլուծելով $\overline{NO}$*-ն 1 և 2 ձողերի ուղղություններին ուղղահայաց բաղադրիչների, ստանում ենք* T_1 *և* T_2 *ճիգերը՝* $T_1 = \overline{LO}$, $T_2 = \overline{NL}$:

OMNL *ուժային բազմանկյունից երևում է, որ 3 և 2 ձողերը ձգված են, իսկ 1 ձողը սեղմված է:*



Նկ. 315 ա.



Նկ. 315 բ.

§ 101. Մաքսվելլ-Կրեմոնայի եղանակը: *Ենթադրենք (նկար 315 ա), ֆերման արտաքին* $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ *ուժերի և հենարանային* $\overline{R}_a$, $\overline{R}_b$ *հակազդումների ազդեցության տակ գտնվում է հավասարակշռության մեջ: Ֆերմայի ձողերի ճիգերը գրաֆիկորեն որոշելու համար կարելի է դիտել բոլոր հանգույցների հավասարակշռությունը: Օրինակ՝ A հանգույցին կիրառված* $\overline{R}_a$ *հակազդումը և 1, 2 ձողերի ճիգերը պետք է կազմեն փակ եռանկյուն, որը կկառուցվի, եթե հայտնի են* $\overline{R}_a$ *ուժը և 1, 2 ձողերի ուղղությունները: Այդ եռանկյունից որոշում են 1, 2 ձողերի ճիգերը:*

A հանգույցից անցնենք E-ին. նրան կիրառված ուժերից հայտնի են $\overline{P}_3$ *ուժը և 2 ձողի ճիգը, անհայտ են 3 և 4 ձողերի ճիգերը: Այդ չորս ուժերի փակ բազմանկյունուց որոշում ենք 3 և 4 ձողերի ճիգերը (տես նկար 315 բ): Նույն կերպ վարվելով, կորոշենք մյուս բոլոր ձողերի ճիգերը (տես նկար 315 բ):*

Վերջին B հանգույցի հավասարակշռությունը դիտելիս, տեսնում ենք, որ նրան կիրառված բոլոր ուժերը՝ $\overline{R}_b$ *հակազդումը և 6, 7 ձողերի ճիգերն արդեն հայտնի են. հետևաբար B հանգույցի ուժերի եռանկյունը կարող է ծառայել մյուս կառուցվածքների ճշտությունն ստուգելու համար:*

Յուրաքանչյուր ձողի սկիզբն ու վերջը պատկանում են երկու տարբեր հանգույցներին. այդ պատճառով միևնույն ձողի ճիգը մտնում է ուժային երկու բազմանկյունների մեջ:

Մաքսվելլը և Կրեմոնան առաջարկել են ֆերմայի ձողերի ճիգերը որոշելու մի եղանակ, որը հնարավորություն է տալիս բոլոր հանգույցներին վերաբերող ուժային բազմանկյուններն տանել մի գծագրի վրա: Այդ գծագրի վրա բոլոր ձողերի ճիգերը մտնում են մեկական անգամ: Նախքան այդ եղանակի տեսության անցնելը, բացատրենք գրաֆոստատիկայում գործածվող նշանակման մի նոր ձև:

Հարթության այն մասը, որը սահմանված է (նկար 316) 5 և 1 հանգույցներին կիրառված արտաքին $(\overline{P}_3, \overline{R}_a)$ *ուժերի ազդման գծերով և այդ հանգույցները միացնող ձողով, անվանենք A: Նման կերպ հարթության յուրաքանչյուր մասը, որ սահմանված է ֆերմայի գոտիներին պատկանող ձողով և ձողի ծայրերին կիրառված արտաքին ուժերի ազդման գծերով անվանենք B, C, D, E. իսկ ֆերմայի ձողերով կազմված եռանկյուններն անվանենք F, G, H:*

Այժմ յուրաքանչյուր արտաքին ուժ և յուրաքանչյուր ճիգ կարելի է նշանակել երկու տառով. օրինակ՝ $\overline{R}_a$ *հակազդումը կնշանակվի AB,* $\overline{P}_1$ *ուժը՝ BC, 1 ձողի ճիգը՝ BF և այլն:*

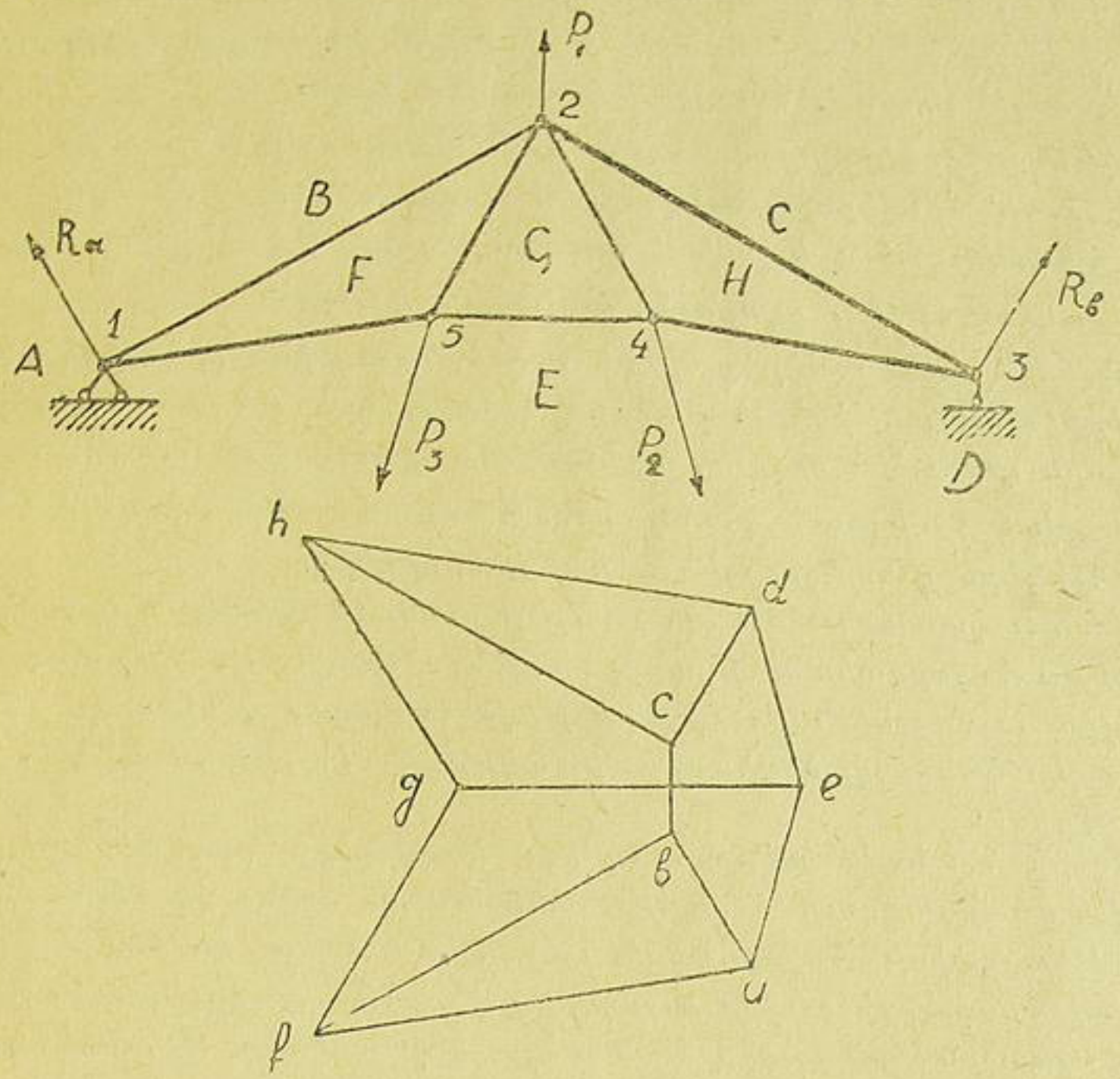
Անցնում ենք Մաքսվելլ-Կրեմոնայի դիագրամին:

Ամենից առաջ կազմում են արտաքին ուժերի բազմանկյունը, դասավորելով ուժերն այնպիսի հաջորդականությամբ, ինչպիսի հաջորդականությամբ հանդիպում ենք այդ ուժերին՝ պտտվելով ֆերմայի շուրջը ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ: Այսինքն $\overline{R}_a$*-ին պետք է հաջորդի* $\overline{P}_1$*, ապա* $\overline{R}_b$*,* $\overline{P}_2$*,* $\overline{P}_3$*:*

Ուժային բազմանկյան գագաթները նշանակենք a, b, c, d, և e, ըստ

որտեմ $\overline{ab}=\overline{R}_a$ —ձախ հենարանի հակազդումն է, որը համաձայն վիճակաչափման, այժմ պետք է նշանակվի AB,

$\overline{bc}=\overline{P}_1$ —որն այժմ պետք է նշանակվի BC և այլն



Նկ. 316

Արտաքին ուժերի բազմանկյունը կառուցելուց հետո դիտում են առանձին հանգույցներին կիրառված ուժերը՝ արտաքին ուժը և ձողերի ճիդերը։ Այդ ուժերը պետք է կազմեն փակ բազմանկյուն, որովհետև յուրաքանչյուր հանգույց գտնվում է հավասարակշռության մեջ։

Եթե դիտվող հանգույցի վրա ազդող ուժերի բազմանկյունը կառուցվի անկախ արտաքին ուժերի բազմանկյունուց, ապա այդ երկու բազմանկյունները պետք է ունենային մի հավասար կողմ, այն է հանգույցի վրա ազդող արտաքին ուժի վեկտորը։ Այդ պատճառով էլ հանգույցի ուժերի բազմանկյունը կարելի է կառուցել արտաքին ուժերի բազմանկյան վրա, համատեղելով երկու բազմանկյունների հավասար կողմերը։ Այդ կառուցումը պետք է սկսել այն հանգույցի ուժերի բազմանկյունուց, ուր հատվում են միայն երեք ձողեր։ Բացի այդ, յուրաքանչյուր հանգույցի բազմանկյունը կառուցելիս պետք է՝

ա. ուժերը դասավորել այն հաջորդականությամբ, ինչ հաջորդականությամբ որ կհանդիպենք այդ ուժերին, պտտվելով հանգույցի շուրջը ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ,

բ. կառուցումն սկսել հայտնի ուժերից։

Սկսենք առաջին հանգույցից։ Այստեղ հայտնի ուժն է AB. բացի այդ,

կան BF և FA ձողերի ճիգերը, AB-ին համապատասխանում է արտաքին ուժերի բազմանկյան մեջ $\overline{ab}$-ն։

b-ից տանում ենք BF-ին զուգահեռ ուղիղը, a-ից՝ FA-ին զուգահեռ ուղիղը։ Այդ երկու ուղիղների հատման կետը նշանակենք f։ Այսպես ստացված $\overline{bf}$-ը կլինի BF ձողի՝ առաջին հանգույցին կիրառված ճիգը, իսկ $\overline{fa}$-ն կլինի FA ձողի՝ նույն հանգույցին կիրառված ճիգը։

Անցնենք հինգերորդ հանգույցին։ Այստեղ հայտնի են $EA = \overline{P}_3$ ուժը և AF ձողի՝ հինգերորդ հանգույցին ազդող ճիգը։ Այդ ճիգը, պարզ է, պետք է հակազուգահեռ և չափով հավասար լինի FA ձողի առաջին հանգույցին ազդող ճիգին, այսինքն, հավասար է $\overline{af}$-ին

Բացի EA և $\overline{af}$ ուժերից հինգերորդ հանգույցին կիրառված են FG և GE ձողերի անհայտ ճիգերը։ Տանելով f-ից FG-ին զուգահեռ ուղիղը, իսկ a-ից EG-ին զուգահեռ ուղիղը, նշանակենք նրանց հատման կետը g. այսպես ստացված $\overline{fg}$ և $\overline{ge}$-ն կհանդիսանան համապատասխանաբար FG և GE ձողերի՝ հինգերորդ հանգույցին կիրառված ճիգերը։

Հետագա կառուցումը կարող ենք շարունակել դիտելով հանգույցները կամայական հաջորդականությամբ, որովհետև մեզ ծանոթ յուրաքանչյուր հանգույցի վրա ազդող անհայտ ճիգերի թիվը հավասար է երկուսի։

Այսպես կառուցված դիագրամը, ակնհայտ է, պարունակում է բոլոր ձողերի ճիգերը։

Ճիգերի նշանակումները կապվում են ձողերի նշանակումների հետ, եթե տվյալ հանգույցում ձողը նշանակենք նրա երկու կողմերում գտնվող տառերով այնպիսի հաջորդականությամբ, ինչպես կտեսնեինք նրանց, պտտվելով հանգույցի շուրջը ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։ Օրինակ, դիտելով առաջին հանգույցը 1—2 ձողը կնշանակենք BF, երկրորդ հանգույցը դիտելիս նույն ձողը կնշանակենք FB և այլն։

Ճիշտ նույն ձևով, նայած ո՞ր հանգույցն ենք դիտում, տվյալ ձողի ճիգը կունենա երկու նշանակում։ Օրինակ՝ BF-ի ճիգը կլինի $\overline{bf}$, իսկ FB-ի ճիգը՝ $\overline{fb}$։ Այսպիսով ճիգը կունենա ձողի նշակումը՝ մեյն՚գրված փոքրատառերով։

Մաքսվել-Կրեմոնայի դիագրամից հեշտությամբ կարելի է որոշել, թե ո՞ր ձողն է ձգված և որը սեղմված։ Իրոք, այստեղ յուրաքանչյուր ճիգը համապատասխան ձողի ազդեցությունն է հանգույցի վրա։ Այդ պատճառով հանգույցի ազդեցությունը ձողի վրա պետք է հակազուգահեռ և ըստ չափի հավասար լինի ճիգին։ Հետևապես ճիգի նշանակման հաջորդականությունը փոխելով կստանանք համապատասխան հանգույցի ազդեցությունը ձողի վրա։

Օրինակ, առաջին հանգույցի ազդեցությունը FA ձողի վրա կլինի $\overline{af}$, հինգերորդ հանգույցի ազդեցությունը AF ձողի վրա կլինի $\overline{fa}$ և այլն։

Եթե մտքով FA ձողն անջատենք առաջին հանգույցից, ապա պետք է անջատման կետում կիրառել հանգույցի ազդեցությունն այդ ձողի վրա, այսինքն $\overline{af}$-ը։ Որովհետև այդ ուժն ուղղված է ձողից դեպի առաջին հանգույցը, ուստի FA ձողը ձգված է։

Դիտենք BF ձողը։ Մտքով անջատելով այդ ձողն առաջին հանգույցից, կիրառենք անջատման կետում հանգույցի ազդեցությունը՝ $\overline{fb}$, որն ուղ-

ղբված կլինի առաջին հանգույցից դեպի ձողը. հետևապես BF ձողը սեղմված է։

Ընդհանրապես ցանկացած ձողի ձգված և սեղմված լինելը որոշելու համար կարելի է վարվել հետևյալ կերպ. մտքով կանջատենք ձողը մի հանգույցից և անջատման կետում կկիրառենք հանգույցի ազդեցությունը։

Եթե այդ ուժն ուղղված լինի դեպի անջատվող հանգույցը, ապա ձողը ձգված է, հակառակ դեպքում ձողը սեղմված է։

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹԻՒՆ

ԳԼՈՒԽ I. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ, ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ

§ 1. Սկալար և վեկտորական մեծութիւններ 3
§ 2. Վեկտորների նշանակումը 4
§ 3. Վեկտորների ուղղութիւնը և իմաստը 4
§ 4. Վեկտորների փոխադարձ դասաւորութիւնը. վեկտորական շղթա . . . 5
§ 5. Վեկտորների գումարումը 8
§ 6. Վեկտորների հանումը 12
§ 7. Լուսաբանում 13
§ 8. Վեկտորի բազմապատկումը թիւով 14
§ 9. Խնդիրներ 15
§ 10. Վեկտորների վերլուծումը 16
§ 11. Վեկտորների գումարման մի քանի դեպքեր 20
§ 12. Ուղղի և հարթութեան հավասարումը 23
§ 13. Վեկտորական հավասարման հավասարազոր լինելը 2 կամ 3 սկալար հավասարումներին 27
§ 14. Կիրառումներ 29

ԳԼՈՒԽ II. ԵՐԿՈՒ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ, ԵՐԿՈՒ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՍԿԱԼԱՐ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ.

§ 15 Սկալար արտադրյալի սահմանումը և հատկութիւնները 33
§ 16. Սկալար արտադրյալի հատկութիւնները (շարունակութիւն) 35
§ 17. Վեկտորի վերլուծումները 38
§ 18. Վեկտորի վերլուծումները (շարունակութիւն) 39
§ 19. Վեկտորի վերլուծումները. կոօրդինատային արտահայտութիւնները . 40
§ 20. Սկալար արտադրյալի մի քանի կիրառումներ 42
§ 21. Խնդիրներ 45

Երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալը.

§ 22. Տվյալ երկու վեկտորներին ուղղահայաց վեկտորի իմաստը որոշելու տարբեր կանոններ 47
§ 23. Վեկտորական արտադրյալի սահմանումը և հատկութիւնները 50
§ 24. Վեկտորական արտադրյալի հատկութիւնները (շարունակութիւն) . . . 52
§ 25. Խնդիրներ 57
§ 26. Խնդիրներ 60

ԳԼՈՒԽ III. ԵՐԵՔ ԵՎ ԱՎԵԼԻ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ. ԼԱՐՈՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ.

§ 27. Վեկտորների ձախ և աջ եռյակները 61
§ 28. Երեք վեկտորների խառն արտադրյալը 64
§ 29. Խառն արտադրյալի հատկութիւնները (շարունակութիւն) 66
§ 30 Կիրառումները 67

Կրկնակի վեկտորական արտադրյալ.

§ 31. Երեք վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ 72
§ 32. Կրկնակի վեկտորական արտադրյալի հատկութիւնները 74
§ 33. Վեկտորի վերլուծման երկու կարևոր դեպքեր 74
§ 34. Զորս և ավելի վեկտորների արտադրյալները 75
§ 35. Խնդիրներ 76

ԳԼՈՒԽ IV. ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՑԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ. Ա) ԱՋԴՄԱՆ ԵՎ ՀԱԿԱՋԴՄԱՆ ՕՐԵՆՔԸ, Բ) ՀԱՄԱՋՈՐԸ,

§ 36. Մեխանիկայի աստրաքաժանումը. մարմիններին փոխադրումը 80
§ 37. Ուժ. ազդման և հակազդման օրենքը 83
§ 38. Կետին կիրառված ուժերի համազորը 84

ԳԼՈՒԽ V. ԿՏՏԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ. ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ. ՈՒԺԵՐԻ ՏԵՍԱԿՆԵՐԸ՝ ԿՇԻՌ, ԼԱՐՈՒՄ.

§ 39. Հավասարակշռություն. Նյութական կետի հավասարակշռության պայմանները 89
§ 40. Ուժերի տեսակները 92
§ 41 Կշիռ 93
§ 42. Լարում 94
§ 43. Ճկուն և կոշտ թելերը ու ձողերը 97

ԳԼՈՒԽ VI. ԿԱՐԾՐ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱԿԱԶԴՈՒՄԸ. ՇՓՈՒՄ. ՃԱԽԱՐԱԿՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ.

§ 44. Կարծր մարմնի սահմանումը և հատկությունները 103
§ 45. Կարծր մարմնի հակազդումը 104
§ 46. Հակազդման բաղադրիչները. Նորմալ հակազդման հատկությունները . . 106
§ 47. Շփման ուժի հատկությունները. շփման կոն 110
§ 48. Մակերևույթի վրա գտնվող կետի հավասարակշռության պայմանները . . 113
§ 49. Կարծր նյութական գծի հակազդումը 114
§ 50. Հավասարակշռության յուրահատկությունը շփման առկայության դեպքում 115
§ 51. Թելի հավասարակշռությունն անշարժ ճախարակի վրա 122
§ 52. Հավասարակշռությունը շարժուն ճախարակի դեպքում 123
§ 53. Խնդիր 124

ԳԼՈՒԽ VII. ՈՒԺԻ ՄՈՄԵՆՏԸ ԿԵՏԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ. ՈՒԺԻ ՄՈՄԵՆՏԸ ԱՌԱՆՑՔԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ.

§ 54. Ինչից է կախված ուժի ազդեցությունը վերջավոր չափեր ունեցող մարմնի վրա 130
§ 55. Ուժի մոմենտը կետի նկատմամբ 134
§ 56. Ուժի մոմենտի հատկությունները (շարունակություն) 139
§ 57. Ուժի մոմենտն առանցքի նկատմամբ 145
§ 58. Կետի և առանցքի նկատմամբ ուժի մոմենտների կոորդինատային արտահայտությունները 148

ԳԼՈՒԽ VIII. ԿԱՄԱՑԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ.

§ 59. Նյութական կետերի սիստեմ. արտաքին և ներքին ուժեր 152
§ 60. Կամայական սիստեմի հավասարակշռության անհրաժեշտ պայմանները 154
§ 61. Հավասարակշռության պայմանների հատուկ ձևը արտաքին երկու ուժերի դեպքում 160
§ 62. Հավասարակշռության պայմանների հատուկ ձևը արտաքին երեք ուժերի դեպքում 163
§ 63. Հավասարակշռության պայմանների հատուկ ձևը արտաքին երեք զուգահեռ ուժերի դեպքում 164
§ 64. Խնդիր 166

ԳԼՈՒԽ IX ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐԸ.

§ 65. Հավասարակշռության պայմանների վերածումը սկալար տեսքի . . 173
§ 66. Հավասարակշռության սկալար պայմանների թիվը, երբ բոլոր արտաքին ուժերն ունեն ազդման միևնույն գիծը 175
§ 67. Հավասարակշռության սկալար պայմանները, երբ արտաքին ուժերը զուգահեռ են և գտնվում են մի հարթության վրա 177
§ 68. Հավասարակշռության սկալար պայմանները մի հարթության վրա չգտնվող զուգահեռ ուժերի դեպքում 181
§ 69. Հավասարակշռության սկալար պայմանները ոչ զուգահեռ հարթ ուժերի դեպքում 184
§ 70. Հավասարակշռության սկալար պայմաններն այլ դեպքերում 185

ԳԼՈՒԽ X. ՈՒԺԱՍՈՒՏԵՄԻ ԳԼԽԱՎՈՐ ՄՈՄԵՆՏԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ.

§ 71. Տարբեր կետերի նկատմամբ վերցրած գլխավոր մոմենտների առնչությունները 187
§ 72. Կենտրոնական առանցքի գոյությունը, դիրքը և հատկությունները . . . 190

ԳԼՈՒԽ XI. ԿԱՐԾՐ ՄԱՐՄՆԻՆ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ՈՒԺԵՐԻ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ.

§ 73. Ուժերի փոխադրման սկզբունքը 199
§ 74. Ուժի փոխադրման սկզբունքի հետևանքները՝ տարրական օպերացիաներ 201
§ 75. Համարժեք սիստեմներ 202
§ 76. Ուժերի համազորը և նրա ազդման գիծը 203
§ 77. Զույգերի համարժեքությունը 208
§ 78. Զույգերի գումարումը 212
§ 79. Կարծր մարմնին կիրառված կամայական ուժասիստեմի վերածումը . . . 216
§ 80. Դինամա, համազոր. կարծր մարմնի հավասարակշռության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները 218

ԳԼՈՒԽ XII. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒԺԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆ. ԾԱՆՐՈՒԹՅԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆ.

§ 81. Զուգահեռ ուժերի գլխավոր վեկտորի և գլխավոր մոմենտի արտահայտությունները 221
§ 82. $\Sigma F_s \bar{r}_s$ տիպի գումարի հատկությունները 222
§ 83. Աստատիկ և ոչ աստատիկ ուժերը 225
§ 84. Զուգահեռ ուժերի կենտրոնը 229
§ 85. Զուգահեռ ուժերի կենտրոնը (շարունակություն) 232
§ 86. Ծանրության կենտրոն 238
§ 87. Ծավալային մակերևութային ու գծային տեսակարար կշիռները. ծանրության կենտրոնի կոորդինատների տարբեր արտահայտությունները . . . 241
§ 88. Սիմետրիայի էլեմենտներ ունեցող մարմինների ծանրության կենտրոնի դիրքը 243
§ 89. XII 24, XII 26. XII 28 ֆորմուլները կիրառելու օրինակներ 246

ԳԼՈՒԽ XIII. ԳՐԱՖՈՍՏԱՏԻԿԱՅԻ ՏԱՐՐԵՐԸ.

§ 90. Գրաֆոստատիկայի սահմանումը 252
§ 91. Երկու ուժերի համազորի կառուցումը 252
§ 92. Երկու ուժերի համազոր կառուցելու եղանակի պարզեցումը 253
§ 93. Համազորի կառուցման եղանակն ընդհանուր դեպքում 255
§ 94. Ուժային բազմանկյուն. բևեռ. ճառագայթներ. պարանային բազմանկյուն 257
§ 95. Ուժասիստեմի վերածումը երկու ուժերի մասնավոր դեպքերում. զույգ, հավասարակշռություն 259
§ 96. Խնդիրներ 262

Հեռմաններ.

§ 97. Պարզ ֆերմաններ 267
§ 98. Ֆերմանների աստատիկական որոշիչության պայմանը 268
§ 99. Ռիտտերի եղանակը 269
§ 100. Կուլմանի եղանակը 271
§ 101. Մաքսվել-Կրեմոնայի եղանակը 273

ՎՐԻՊԱԿՆԵՐ

(Ուղղեցեք կարդալուց առաջ)

էջ	տող	տպված է	պետք է լինի
8		*Նկ. 9-ի վերքը պետք է լինի այնպես, որ O′A′ և O″A″ հատվածները զուգահեռ լինեն նկ. 8-ի* OA *հատվածին։*	
15	*2 վերևից*	*(Նկ. 23)։*	*(Նկ. 23)*
18	*2* »	$\bar{e}$, $\bar{f}$ և $\bar{g}$,	$\bar{g}$, $\bar{e}$ և $\bar{f}$
18	*2 ներք.*	$(\bar{b} \parallel \bar{e},\ \bar{d} \parallel \bar{g}$ և $\bar{c} \parallel \bar{f})$	$(\bar{b} \parallel \bar{g},\ \bar{c} \parallel \bar{e},\ \bar{d} \parallel \bar{f})$
19	*7* »	$X > O$	$x > O$
24	*5 վերևից*	$\overline{AD} = : \bar{p}\tau$	$\overline{AD} = \bar{p}\tau:$
37	*1 ներք.*	$(\bar{p}+\bar{g}) \cdot (\bar{c}+\bar{b})$	$(\bar{p}+\bar{g}) \cdot (\bar{c}+\bar{l})$
48		*Նկ. 70-ը պետք է պատկել 180°* b *վեկտորի (ցուցամատի)։ շուրջը։ Այսպիսով ձախ ձեռքի ափը և* $\bar{c}$ *վեկտորը (մէջնամատը) կուղղվեն դեպի վեր, իսկ* $\bar{a}$*-ն կզառնա հակազուգահեռ նկ. 71-ի* $\bar{a}$*-ին։*	
50	*17 վերևից*	$C' \uparrow\uparrow \overline{BC'}$	$\bar{c}' \uparrow\uparrow \overline{BC'}$
54	*10 ներք*	$= \lvert \bar{a} \times b$	$= \lvert \bar{a} \times \bar{b} \rvert$
56		(II 35 *ա*)*-ը պետք է լինի՝* $(\bar{a}_1+\bar{a}_2+\dots+\bar{a}_n) \times \bar{b} = \bar{a}_1 \times \bar{b} + \bar{a}_2 \times \bar{b} + \dots + \dots + \bar{a}_n \times \bar{b}$	
60	*7 վերևից*	$\bar{b} \neq \sigma$	$\bar{b}$*-ն զուգահեռ չէ* σ*-ին*
61	*6* »	$-(xx^1+yy^1+zz')^2$	$-(xx'+yy'+zz')^2$
71	*6* »	$\overline{L\lambda} - \bar{r} - \bar{\rho}$	$\overline{L\lambda} = \bar{r} - \bar{\rho}$
72	(III 20)	$\bar{q} = \bar{\beta} b +$	$\bar{q} = \beta \bar{b} +$
87	(IV 7′)	$F_i = F_{i1} + F_{i1} + \dots + F_{ni} = \Sigma F_{i1}$	$F_1 = F_{11} + F_{21} + \dots F_{n1} = \Sigma F_{i1}$
99	*11 ներք.*	*և* $\bar{F}_D$	*և* $\bar{T}_D$
117	*9 վերևից*	*գ.* $P = -\bar{Q}$	*գ.* $\bar{P} = -\bar{Q}$
117	*10* »	$(\bar{P}+\bar{Q}) \cdot \tau = O,\ (P+Q) \cdot \hat{N} = O$	$(\bar{P}+\bar{Q}) \cdot \hat{\tau} = O,\ (\bar{P}+\bar{Q}) \cdot \hat{N} = O$
134	*3 ներք.*	*մոմենտը*	*մոմենտի*
144	*14 ներք.*	$M_o(\bar{P}_A) + \bar{M}_o(\bar{Q}_B)$	$\bar{M}_O(\bar{P}_A) + \bar{M}_O(\bar{Q}_B)$
156		(VIII 15)*-ը պետք է լինի՝* $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = \bar{F}$	
156		(VIII 16)*-ը պետք է լինի՝* $\bar{M}_C(\bar{P}_1) + \bar{M}_C(\bar{P}_2) + \bar{M}_C(\bar{P}_3) + \dots + \bar{M}_C(\bar{P}_n) = \bar{M}_C$	
176	*5 վերևից*	$F_{i,p} = \bar{F} \cdot \hat{p}$	$F_{i,p} = \bar{F}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}$
179	*19* »	$B_A =$	$R_A =$
185	*4 ներք.*	$\hat{i}:$	$\hat{l}:$
185	*1 ներք.*	$\hat{i}$*-ին*	$\hat{l}$*-ին*

էջ	տող	տպված է	պետք է լինի
193	6 ներքք.	$\overline{F}$	$\overline{V}$
195	5 ներքք.	$=\overline{V}(\overline{V}\cdot\overline{S})-\overline{V}^2$	$=\overline{V}(\overline{V}\cdot\overline{S})-\overline{S}\,V^2$
195	7 ներքք.	$\mu_A=M_A+$	$\overline{\mu}_A=\overline{M}_A+$

212 *1 ներքք. պետք է լինի* $=[\overline{M}_K(\overline{F}_A)+\overline{M}_K(-\overline{F}_B)]+[\overline{M}_K(\overline{Q}_C)+$

214	4 ներքք.	F'	$\overline{F}'$
214	3 ներքք.	$\overline{KH}\times Q'=M_2.$	$\overline{KH}\times\overline{Q}'=\overline{M}_2.$
219	15 ներքք.	$=(\Sigma F)\,\hat{f}\parallel\hat{f}$	$=(\Sigma F_S)\hat{f}\parallel\hat{f}$
223	9 ներքք.	$=(\Sigma F\alpha_S)\,\hat{f}$	$=(\Sigma F_S\alpha_S)\,\hat{f}$
240	11 ներքք.	$\int_{ox}dP$	$\int_{o}xdP$

259 *Նկ. 299բ-ի մասշտաբը պետք է համապատասխանեցնել նկ. 299ա-ի մասշտաբին*

268	14 ներքք.	—*Կրիմոնայի*	—*Կրեմոնայի*



Պատ. խմբագիր՝
Ա. Ա. Հակոբյան

Վ.Ց. 1575 Պատվեր 152. Տիրաժ 1500. Տպագրական 17 1/2 մամ. Հեղին. 21 մամ. Մեկ մամ. 52000 նշան։
Ստորագրված է տպագրության 28/XII 1941 թ.

Հայպետհրատի տպարան, Երևան, Լենինի 65

H 668.

ԳԱԱ Հիմնարար գիտ. գրադ.
նոմր. տվր. մոմոդիվ ՈՍՈ
FL00549 22

ЦЕНА

1950 III