АСТРОФИЗИКА

ТОМ 27 ОКТЯБРЬ, 1987 ВЫПУСК 2

УДК: 52—78+533.951

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ АЛЬФВЕНОВСКИХ СОЛИТОНОВ

Дж. И. ДЖАВАХИШВИЛИ, О. В. ЧЕДИЯ

Поступила 6 июля 1986
Принята к печати 20 июля 1987

Показано, что в бесстолкновительной, магнитоактивной электронно-ионной плазме нелинейная стадия распространения альфвеновской волны с большой амплитудой, в поле которой осцилляционные скорости плазменных компонентов могут стать сравнимыми со скоростью света (реальная ситуация для плазмы ряда космических объектов), описывается уравнением Шредингера с нелинейностью производной и с ненулевыми граничными условиями на бесконечности. Рассмотрены некоторые простые солитонные структуры (а также решения типа простых волн) для этого уравнения и показано, что релятивистские эффекты сильно влияют на процесс формирования нелинейных волн в плазме.

1. *Введение.* Изучение свойств релятивистской плазмы, осцилляционные скорости компонентов которой по величине сравнимы со скоростью света, представляется актуальной задачей в связи с реальностью существования такой ситуации в ряде космических объектов. Известно, например, что в центре Крабовидной туманности находится пульсар NP 0532, который обеспечивает всю энергетику светящейся туманности [1—3]. Энергия от этого пульсара передается окружающей плазме (туманности) в виде релятивистских частиц и магнитодипольного излучения. Как показывают оценки [2], мощность этого излучения $\sim 10^{31}$ Дж/с. При этом амплитуда исходящей от пульсара волны столь велика, что вступает в силу эффект осцилляции массы частиц плазмы в указанном выше смысле. Плазма при этом может считаться бесстолкновительной ввиду ее малой плотности.

Наблюдения показывают [4], что в пределах туманности имеется собственное магнитное поле $\sim 5\cdot 10^{-4}$ Гс и обнаруживаются движения волнового типа.

С другой стороны, в настоящее время хорошо изучен широкий круг нелинейных явлений, которые могут развиваться в плазме в силу тех или иных причин [5]. В этой связи представляет интерес исследование влияния релятивистских эффектов на процесс формирования нелинейной волны определенного типа (например, альфвеновского) в плазме.

2. *Процесс распространения* мощной циркулярно-поляризованной альфвеновской волны в бесстолкновительной, магнитоактивной электронно-ионной релятивистской плазме рассматривается в следующей постановке задачи. На линейной стадии развития альфвеновской волны частицы плазмы совершают релятивистское равномерное вращение вокруг силовых линий постоянного однородного магнитного поля H_0, существующего в плазме; плотность плазмы не возмущена; пондеромоторная сила отсутствует, поэтому нет движения частиц плазмы вдоль направления распространения волны, совпадающего с H_0 (одномерная задача). На нелинейной стадии эволюции альфвеновской волны плотность плазмы претерпевает плавную модуляцию и искажается магнитное поле волны (индуцированного магнитного поля вдоль H_0 нет), что приводит к возникновению пондеромоторной силы, приводящей к медленному увлечению частиц плазмы вдоль однородного магнитного поля.

Таким образом, на нелинейной стадии развития рассматриваемого волнового процесса возникает наложение основного движения, связанного с распространяющейся в плазме альфвеновской волной, и медленного движения плазменных частиц вдоль H_0.

За основу расчета берется система релятивистских уравнений непрерывности и движения для электронов и ионов плазмы [6, 7] плюс система полевых уравнений Максвелла, причем эта система соответствующим образом упрощается для рассматриваемой здесь задачи (скорости электронов и ионов равны по величине, что приводит также к равенству их релятивистских факторов; плотности электронов и ионов равны; отбрасывается ток смещения):

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{n\cdot P}{\gamma\cdot m_i}\right)=0,$$

$$\frac{dP}{dt}-\frac{1}{4\cdot\pi\cdot n}[\operatorname{rot}H,\ H]-\frac{c\cdot m_e}{4\cdot\pi\cdot e}\cdot\frac{d}{dt}\,\frac{\gamma}{n}\cdot\operatorname{rot}H=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{1}{m_i}\cdot\operatorname{rot}\frac{1}{\gamma}\cdot[P,H]+\frac{c}{e}\cdot\operatorname{rot}\frac{dP}{dt}=0,$$

где n — плотность ионов (и электронов), P — импульс ионного компонента плазмы, H — напряженность магнитного поля в плазме (с учетом поля $H_0=(0,\ 0,\ H_z)$), m_e и m_i — соответственно, масса покоя электронов и ионов, $e>0$ — элементарный заряд, c — скорость света в вакууме, $\gamma=\left[1+\left(\frac{P}{m_i\cdot c}\right)^2\right]^{1/2}$ — релятивистский фактор ионов (и электронов), $\frac{d}{dt}$ — гидродинамическая производная (для рассматриваемой

мой здесь одномерной задачи гидродинамические производные для электронов и ионов одинаковы). В системе (1) учтена конечность ларморовских радиусов электронов и ионов плазмы (оставлены последние члены в левой стороне двух последних уравнений в (1), и они считаются малыми). Основную систему расчета (1) можно обезразмерить с помощью следующих определений:

$$B=\frac{H}{H_z},\quad Q=\frac{P}{M\cdot v_a^*},\quad N=\frac{n}{n_0},\quad g=\frac{\gamma}{\gamma_0},$$
$$R_e=\frac{\Omega_e^*}{k_0\cdot v_a^*},\quad R_i=\frac{\Omega_i^*}{k_0\cdot v_a^*},\quad z\to k_0\cdot z,\ t\to\omega_0\cdot t,\ (\omega_0=k_0\cdot v_a^*),\tag{2}$$

где n_0 — равновесная плотность плазмы, γ_0 — невозмущенный релятивистский фактор (выраженный через P_0 — постоянную величину импульса ионного компонента на линейной стадии эволюции альфвеновской волны), $v_a^*=v_a\cdot\gamma_0^{-1/2}$ — релятивистское переопределение альфвеновской скорости $v_a=\dfrac{H_z}{(4\cdot\pi\cdot n_0\cdot m_i)^{1/2}}$; $\Omega_e^*=\dfrac{\Omega_e}{\gamma_0}=\dfrac{e\cdot H_z}{m\cdot c}$ и $\Omega_i^*=\dfrac{\Omega_i}{\gamma_0}=\dfrac{e\cdot H_z}{M\cdot c}$ — соответственно, релятивистские переопределения электронной Ω_e и ионной Ω_i циклотронных частот ($m=m_e\cdot\gamma_0$ и $M=m_i\cdot\gamma_0$ — соответственно, релятивистские массы электронов и ионов плазмы), ω_0 и k_0 — соответственно, частота и волновое число альфвеновской волны при пренебрежении конечностью ларморовских радиусов электронов и ионов (при учете этого эффекта частота и волновое число обозначаются, соответственно, через ω и k). С помощью (2) система (1) записывается в виде:

$$\begin{gathered}
\frac{dQ_x}{dt}-\frac{1}{N}\cdot\frac{\partial B_x}{\partial z}+\frac{1}{R_e}\cdot\frac{d}{dt}\frac{g}{N}\cdot\frac{\partial B_y}{\partial z}=0,\\
\frac{dQ_y}{dt}-\frac{1}{N}\cdot\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{1}{R_e}\cdot\frac{d}{dt}\frac{g}{N}\cdot\frac{\partial B_x}{\partial z}=0,\\
\frac{dB_x}{dt}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{Q_x}{g}+B_x\cdot\frac{\partial}{\partial z}\frac{Q_z}{g}-\frac{1}{R_i}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_y}{\partial z}=0,\\
\frac{dB_y}{dt}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{Q_y}{g}+B_y\cdot\frac{\partial}{\partial z}\frac{Q_z}{g}+\frac{1}{R_i}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_x}{\partial z}=0,\\
\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{N\cdot Q_z}{g}=0,\quad \frac{dQ_z}{dt}+\frac{1}{2\cdot N}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(B_x^2+B_y^2)=0,
\end{gathered}\tag{3}$$

где $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+Q_z\cdot\dfrac{\partial}{\partial z}$ — гидродинамическая производная в безразмерном виде (под t и z в (3) и ниже понимаются безразмерные время и координата).

На линейной стадии развития альфвеновской волны в (3) следует положить:

$$N = 1, \qquad g = 1, \qquad Q_z = 0,$$

$$B_x^2 + B_y^2 = B_0^2 = \left(\frac{H_0}{H_z}\right)^2, \quad Q_x^2 + Q_y^2 = Q_0^2 = \left(\frac{P_0}{M\cdot U_a^*}\right)^2, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{4}$$

где B_0 — постоянная (безразмерная) амплитуда рассматриваемой циркулярно-поляризованной волны, в которой

$$B_x = B_0\cdot\cos(\nu\cdot t - \varkappa\cdot z), \quad B_y = \pm B_0\cdot\sin(\nu\cdot t - \varkappa\cdot z). \tag{5}$$

В (5) $\nu = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ и $\varkappa = \dfrac{k}{k_0}$ — соответственно, безразмерные частота и волновое число альфвеновской волны, а два знака в выражении для B_y определяют две возможные поляризации волны (соответственно (5) имеет место $Q_x = -Q_0\cdot\cos(\nu\cdot t - \varkappa\cdot z)$ и $Q_y = \mp Q_0\cdot\sin(\nu\cdot t - \varkappa\cdot z)$). Подставляя (5) в (3), с учетом (4) можно получить релятивистское дисперсионное соотношение для альфвеновской волны с учетом конечности ларморовских радиусов электронов и ионов плазмы:

$$\nu = \varkappa \pm \mu\cdot\varkappa^2, \tag{6}$$

где $\mu = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{R_e}\right)$ — малый безразмерный параметр. В нерелятивистском пределе ($\gamma_0 \to 1$) (6) дает (в размерном виде) $\omega_0 = k_0\cdot v_a$ ($v_a^* \to v_a$), т. е. обычное соотношение для альфвеновской волны; в ультрарелятивистском же случае $\left(\gamma_0 \to \infty,\ v_a^* \to c\cdot\dfrac{H_z}{H_0}\right)$ получается

$$\omega_0 = k_0\cdot c\cdot\frac{H_z}{H_0}. \tag{7}$$

Соотношение (7) определяет альфвеновскую волну в ультрарелятивистской плазме (эта ситуация может осуществляться в космических условиях).

Условие пренебрежения током смещения дает $v_a^* \ll c$, что приводит к требованию $v_a \ll c$ в нерелятивистском и к условию $H_z \ll H_0$ в ультрарелятивистском пределах, т. е. в последнем случае должно рассматриваться воздействие на плазму мощного излучения, чтобы имело смысл говорить об альфвеновской волне. Если привести выражение для невозмущенного релятивистского фактора

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_a^2}{c^2}\cdot\frac{H_0^2}{H_z^2} + \left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{v_a^4}{c^4}\cdot\frac{H_0^4}{H_z^4}\right)^{1/2}, \tag{8}$$

то из (8) видно, что ультрарелятивистский предел имеет место при выполнении условия $\frac{H_0}{H_s} \gg \frac{c}{v_a}$ (реализуемого в околопульсарной плазме), т. е. возможность «релятивизации» альфвеновской волны связана с большой величиной амплитуды излучения пульсара. Второй член в правой части (6) должен быть мал, что требует (в размерном виде) $\frac{k_0 \cdot v_a^*}{\Omega_i^*} \ll 1$. Это условие ухудшается в ультрарелятивистском пределе, так как v_a^* уменьшается медленнее, чем Ω_i^* при $\gamma_0 \to \infty$, поэтому следует уменьшить k_0 (сместиться в область длинных волн, что может осуществиться реально в космических масштабах), чтобы сохранить в силе указанное выше условие.

Для рассмотрения нелинейной стадии развития альфвеновской волны в плазме следует искать решение системы уравнений (3) в виде:

$$
\begin{gathered}
Q_x = Q_x' + Q_x'' + \ldots, \qquad Q_y = Q_y' + Q_y'' + \ldots, \\
B_x = B_x' + B_x'' + \ldots, \qquad B_y = B_y' + B_y'' + \ldots, \\
Q_z = Q_z' + \ldots, \quad N = 1 + N' + \ldots, \quad g = 1 + g' + \ldots,
\end{gathered} \tag{9}
$$

где $\frac{Q_x''}{Q_x'}$, $\frac{Q_y''}{Q_y'}$, $\frac{B_x''}{B_x'}$, $\frac{B_y''}{B_y'}$, N', Q_z', g' являются величинами первого порядка малости $\left(\text{малой величиной того же порядка в рассматриваемой здесь задаче считается и } \frac{B_x'^2 + B_y'^2 - B_0^2}{B_0^2}\right)$. Физически решение вида (9) означает следующее. На нелинейной стадии эволюции альфвеновской волны плавная модуляция плотности плазмы описывается членом N', а искажение (также плавного характера) равномерного вращения частиц плазмы вокруг H_0 членами Q_x'' и Q_y'' ($Q_x'^2 + Q_y'^2$ не является теперь постоянной величиной). Такого же типа искажение претерпевает и равномерное вращение вектора B вокруг H_0 (величина $B_x'^2 + B_y'^2$ не является больше постоянной, и еще появляются члены B_x'' и B_y''), что приводит к возникновению пондеромоторной силы $\left(\sim \frac{\partial}{\partial z}(B_x'^2 + B_y'^2)\right)$, вызывающей медленное увлечение частиц плазмы вдоль направления распространения волны (появляется член Q_z'). Удобно перейти к новой паре независимых переменных ($t, z \to \tau = t$, $\xi = z - t$), тогда операции дифференцирования по времени и координате означают $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi}$, причем $\frac{\partial}{\partial \tau} \Big| \frac{\partial}{\partial \xi}$ следует считать (в рамках описанной выше картины) величиной первого порядка малости. Переходя к переменным τ и ξ и проводя разложение (9) в (3), можно получить после ряда преобразований:

$$\frac{\partial B_\pm}{\partial \tau} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} [(|B_\pm|^2 - B_0^2) \cdot B_\pm] \pm i \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 B_\pm}{\partial \xi^2} = 0, \tag{10}$$

где введено обозначение $B_\pm = B_x' \pm i \cdot B_y' = -(Q_x' \pm i \cdot Q_y')$. Уравнение (10) описывает нелинейную стадию эволюции альфвеновской волны в релятивистской плазме с учетом конечности ларморовских радиусов электронов и ионов. Это уравнение является хорошо изученным [8] уравнением Шредингера с нелинейностью производной с граничными условиями на бесконечности (во всем промежутке времени) $|B_\pm| \to B_0 \neq 0$ при $\xi \to \pm \infty$ (стационарное облучение плазмы). В работах [9—10] рассматривалось распространение нелинейной альфвеновской волны в электронно-позитронной плазме, релятивизм которой обусловлен тем, что тепловая энергия плазменных частиц превышает их энергию покоя. В этом случае нелинейное уравнение, описывающее альфвеновскую волну, имеет дисперсионный член кубического типа в отличие от квадратичного в (10) (соответственно, и дисперсионное соотношение волны отличается от (6) присутствием кубического дисперсионного члена вместо квадратичного в (6)). В работе [11] проведено математическое исследование смешанного нелинейного уравнения Шредингера, содержащего обычный кубический нелинейный член и член того же типа с нелинейностью производной.

Для того, чтобы выявить влияние релятивистских эффектов на процесс формирования нелинейных волн в плазме, ниже исследуются некоторые простые решения уравнения (10). По найденному из (10) решению можно затем установить закон эволюции и других медленных величин согласно соотношениям:

$$N' = Q_z' = \frac{1}{2} \cdot (|B_\pm|^2 - B_0^2). \tag{11}$$

3. *Решение уравнения* (10) удобно искать в виде:

$$B = a \cdot \exp(i \cdot \varphi), \tag{12}$$

где под B понимается B_+ или B_- (в соответствии с этим в (10) в последнем члене следует брать знак $+$ или $-$), а a и φ — действительные, медленно изменяющиеся функции аргументов τ и ξ. Подставляя (12) в (10) и отделяя затем реальную и мнимую части, можно получить

$$\frac{\partial a^2}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{8}\cdot(a^2-a_0^2)^2+\frac{1}{4}\cdot a^4\mp 2\cdot\mu\cdot a^2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\frac{1}{4}\cdot(a^2-a_0^2)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\pm\frac{\mu}{a}\cdot\frac{\partial^2 a}{\partial\xi^2}\mp\mu\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2=0, \tag{13}$$

где обозначено $B_0 = a_0$.

Интересуясь стационарными решениями эволюционного уравнения (10) (для которых можно проще всего выявить влияние релятивистских эффектов на процесс формирования нелинейной альфвеновской волны в плазме), следует перейти (в (13)) к независимым переменным $\tau' = \tau$ и $\xi' = \xi - W\cdot\tau$ (W — некоторая постоянная) и считать, что функция a зависит только от ξ', тогда можно проинтегрировать первое уравнение в (13) и получить $\left(\text{с учетом условия } \frac{\partial\varphi}{\partial\xi'}\to\text{const при } \xi'\to+\infty\right)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'}=\mp\frac{W}{2\cdot\mu}\pm\frac{1}{8}\cdot\frac{(a^2-a_0^2)^2}{2\cdot\mu\cdot a^2}\pm\frac{a^2}{8\cdot\mu}\mp\frac{C_1}{2\cdot\mu\cdot a^2}, \tag{14}$$

где C_1 — постоянная, и функция φ имеет вид:

$$\varphi=\psi(\xi')+C_0\cdot\tau'. \tag{15}$$

В (15) $\psi(\xi')$ будет установлена, если найти (см. ниже) функцию $a(\xi')$, а C_0 — постоянная, связанная с W и C_1 соотношением $\left(\text{получающимся из граничного условия } \frac{d^2a}{d\xi'^2}\to 0 \text{ при } \xi'\to\pm\infty\right)$:

$$C_0\pm\frac{W^2}{4\cdot\mu}\mp\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\left(\frac{a_0^2}{4}-\frac{C_1}{a_0^2}\right)^2=0. \tag{16}$$

С учетом условий $\frac{d^2a}{d\xi'^2}\to 0$ и $\frac{da}{d\xi'}\to 0$ при $\xi'\to\pm\infty$ и вводя величину $y=a^2-a_0^2$, можно получить для функции y:

$$\int\frac{dy}{\left[\left(\frac{W\cdot a_0^2}{4}-\alpha\right)\cdot y^2+\frac{W}{4}\cdot y^3-\frac{y^4}{64}\right]^{1/2}}=\mu^{-1}\cdot\xi'+\text{const}, \tag{17}$$

где обозначено $\alpha=C_1\cdot\left(\frac{C_1}{a_0^4}-\frac{1}{4}\right)$.

Соотношение (17) позволяет рассмотреть некоторые простые солитонные решения:

а) $W=0$, $\alpha<0$, тогда подстановка $y=\frac{(64\cdot|\alpha|)^{1/2}}{\operatorname{ch}\eta}$ позволяет провести в (17) интегрирование и получить (с учетом условия, что при $\xi'=0$ $a^2=a_m^2$, где a_m — максимальное или минимальное значение функции $a(\xi')$; и с выбором const $=0$ в (17)):

$$\frac{a^2}{a_0^2}=1\pm\frac{\Delta}{\operatorname{ch}\left[\frac{a_0^2\cdot\Delta}{8\cdot\mu}(z-t)\right]},\tag{18}$$

где $\Delta=\left|\frac{a_m^2-a_0^2}{a_0^2}\right|=\left|\frac{H_m^2-H_0^2}{H_0^2}\right|\ll 1$ — задаваемый параметр рассматриваемой здесь задачи (H_m — максимальное или минимальное значение магнитного поля в плазме). Решение (18) представляет собой солитон, распространяющийся в плазме со скоростью v_a^*, причем он может быть как солитоном сжатия, так и солитоном разрежения (при $W=0$ и $\alpha<0$ величина y может иметь оба знака). По решению (18) из (14) (с учетом (15)) можно найти и функцию $\varphi(\xi',\tau')$. Наконец, можно также привести формулы для определения постоянных, фигурирующих в функции φ:

$$\begin{aligned}C_1&=\frac{a_0^4}{8}\cdot[1+(1-\Delta^2)^{1/2}]\approx\frac{a_0^4}{4},\\ C_0&=\pm\frac{a_0^4}{2^8\cdot\mu}\cdot[1-(1-\Delta^2)^{1/2}]^2\approx\pm\frac{a_0^4\cdot\Delta^4}{2^{10}\cdot\mu}.\end{aligned}\tag{19}$$

Что касается величины α, то получается $\alpha=-\frac{a_0^4\cdot\Delta^2}{64}$, что и предполагалось выше. Скорость распространения солитона (18) V_a^* убывает в релятивистском пределе по закону $\sim\gamma_0^{-1/2}$, и по такому же закону уменьшается его полуширина (размерная).

б) $W>0$, $\alpha=\frac{W\cdot a_0^2}{4}$. В этом случае интеграл в (17) берется подстановкой $y=\frac{16\cdot W}{\operatorname{ch}^2\eta}$, что приводит к результату (при выборе в (17) const $=0$ и учете условия $a^2=a_{max}^2$ при $\xi'=0$):

$$\frac{a^2}{a_0^2}=1+\frac{\Delta}{1+\left(\frac{a_0^2\cdot\Delta}{16\cdot\mu}\cdot\xi'\right)^2}.\tag{20}$$

Скорость распространения солитона (20) отличается от v_a^* (увеличивается) на величину $\frac{\Delta \cdot a_0^2}{16}$. В отличие от солитонного решения (18) решение (20) представляет собой только солитон сжатия (это связано с условием $W > 0$). Что же касается полуширины (размерной) солитона (20), то в релятивистском пределе она уменьшается опять по закону $\sim \gamma_0^{-1/2}$ (при заданном Δ). Постоянные C_0 и C_1 в этом случае определяются соотношениями:

$$C_1 = \frac{a_0^4}{8} \cdot [1 + (1 + \Delta)^{1/2}] \approx \frac{a_0^4}{4},$$
$$C_0 = \mp \frac{a_0^4}{2^8 \cdot \mu} \cdot \left\{ \frac{\Delta^2}{4} - [1 - (1 + \Delta)^{1/2}]^2 \right\} \approx \mp \frac{a_0^4 \cdot \Delta^3}{2^{11} \cdot \mu}. \quad (21)$$

4. *Можно показать, что нелинейное эволюционное уравнение* (10) имеет также (в определенных условиях) решения типа простой волны [12]. В самом деле, дифференцируя по ξ второе уравнение в (13), вводя обозначения

$$\rho = a^2, \quad V = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \quad (22)$$

и пренебрегая дифракционным членом $\left(\sim \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \right)$, можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{8} \cdot (\rho - a_0^2)^2 + \frac{1}{4} \cdot \rho^2 \mp 2 \cdot \mu \cdot \rho \cdot V \right] = 0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} [V \cdot (\rho - a_0^2)] \mp \mu \cdot \frac{\partial V^2}{\partial \xi} = 0. \quad (23)$$

Для нахождения решения системы (23) типа простой волны следует предположить наличие связи $V = V(\rho)$, тогда условие совместности двух уравнений в (23) дает:

$$\left(\frac{dV}{d\rho} \right)^2 \mp \frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{dV}{d\rho} \pm \frac{1}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{V}{\rho} = 0. \quad (24)$$

Проинтегрировав (24), можно получить искомую связь в простой волне:

$$V = 2 \cdot C_2 \cdot \rho^{1/2} \mp 8 \cdot \mu \cdot C_2^2, \quad (25)$$

где C_2 — некоторая произвольная постоянная. С учетом связи (25) оба уравнения в (23) сводятся к следующему нелинейному уравнению:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + f(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = 0, \tag{26}$$

где

$$f(\rho) = \frac{3}{4} \cdot \rho \mp 6 \cdot \mu \cdot C_2 \cdot \rho^{1/2} + 16 \cdot \mu^2 \cdot C_2^2 - \frac{1}{4} \cdot a_0^2. \tag{27}$$

Решение уравнения (26) имеет вид:

$$\rho = G(\xi - f(\rho) \cdot \tau), \tag{28}$$

где G означает произвольную функцию указанного аргумента.

Как известно, с течением времени может произойти опрокидывание фронта простой волны, что приводит к образованию ударной волны в плазме [12] (подобная задача рассматривалась для нерелятивистской альфвеновской волны в работе [13]). Постоянную C_2, фигурирующую в (25), проще всего можно оценить из условия $V \to \text{const} \cong 0$ при $\xi \to \infty$ ($\rho \to a_0^2$), из которого следует $C_2 = \pm \frac{a_0}{4 \cdot \mu}$. Тогда (подставляя C_2 в (26) и (27)) можно придти к соотношениям:

$$V = \pm \frac{a_0 \cdot (a - a_0)}{2 \cdot \mu}, \qquad f = \frac{3}{4} \cdot (a - a_0)^2. \tag{29}$$

Считая параметр Δ заданным, можно сделать вывод: «скорость» образования ударной волны в плазме (фактически определяемая выражением $f(\rho)$) будет возрастать при переходе к релятивистскому пределу по закону $\sim \gamma_0^{1/2}$ (речь идет о размерных масштабах).

В заключение авторы благодарят Н. Л. Цинцадзе, Д. Д. Цхакая и Э. Г. Цикаришвили за ценную дискуссию.

Тбилисский государственный университет
Абастуманская астрофизическая обсерватория

ON THE RELATIVISTIC THEORY OF ALFVEN SOLITONS

J. I. JAVAKHISHVILI, O. V. CHEDIA

We have considered the collisionless magnitoactive electron-ion plasma in which the propagation of the Alfven wave with large amplitude results in relativistically high velocities of the plasma components, comparable with the light velocity (a possible situation for the plasma of a number of cosmic objects). It is shown that the nonlinear stage of the Alfven wave propagation can be described by the Schrôdinger equation with nonlinearity of the derivative complemented by nonzero boundary conditions at infinity. Simple soliton structures as well as simple-wave-type solutions of this equation are considered. It has been shown that the relativistic effects strongly influence the process of formation of nonlinear waves in plasma.

ЛИТЕРАТУРА

1. *T. Gold*, Nature, 221, 25, 1969.
2. *J. Gunn, J. Ostriker*, Astrophys. J., 160, 979, 1970.
3. *И. С. Шкловский*, Астрон. ж., 46, 715, 1969.
4. *L. Woltjer*, Bull. Astron. Inst. Netherl., 13, 302, 1957.
5. *Ф. Калоджеро, А. Дегасперис*, Спектральные преобразования и солитоны, Мир, М., 1985.
6. *А. Ф. Александров, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе*, Основы электродинамики плазмы, Высшая школа, М., 1978, стр. 40.
7. *Дж. И. Джавахишвили, Н. Л. Цинцадзе*, Ж. эксперим. и теор. физ., 64, 1314, 1973
8. *T. Kavata, H. Inoue*, J. Phys. Soc. Jap., 44, 1968, 1978.
9. *J. Sakai, T. Kavata*, J. Phys. Soc. Jap., 49, 747, 1980.
10. *J. Sakai, T. Kavata*, J. Phys. Soc. Jap., 49, 753, 1980.
11. *T. Kavata, J. Sakai, N. Kobayashi*, J. Phys. Soc. Jap., 48, 1371, 1980.
12. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Гидродинамика, Наука, М., 1986, стр. 529.
13. *Дж. И. Джавахишвили, Г. Д. Томарадзе, Н. Л. Цинцадзе*, Сообщ. АН ГССР, 116, № 1, 77, 1984.