АСТРОФИЗИКА

ТОМ 27 ОКТЯБРЬ, 1987 ВЫПУСК 2

УДК: 521.1

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ЭЛЛИПСОИДА С НАКЛОННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ, Е. А. МАЛКОВ

Поступила 14 мая 1986
Принята к печати 20 апреля 1987

Получены уравнения нелинейных колебаний бесстолкновительного эллипсоида с однородной плотностью. Исследована устойчивость модели эллипсоидальной звездной системы с наклонным вращением относительно возмущения эллипсоид—эллипсоид. Зона устойчивости определялась нахождением характеристических частот малых колебаний, уравнения которых были получены линеаризацией уравнений нелинейных колебаний.

1. *Введение.* В настоящей работе исследуется устойчивость модели эллипсоидальной звездной системы, построенной в работе [1]. Характерной особенностью этой модели является несовпадение оси вращения с одной из осей эллипсоида. Устойчивость известных в теории жидких фигур равновесия эллипсоидов с наклонным вращением — эллипсоидов Римана I, II и III типов исследовалась Чандрасекаром [2]. Однако ввиду глубокого различия между несжимаемой жидкостью и бесстолкновительным газом нельзя, опираясь на эти исследования, сделать какие-либо выводы об устойчивости бесстолкновительного эллипсоида с наклонным вращением. В книге [3] предложена методика исследования устойчивости бесстолкновительных эллипсоидов, теоретически дающая возможность определить полный спектр малых колебаний. Но на практике, ввиду громоздкости вычислений, при исследовании устойчивости достаточно сложных моделей ограничиваются крупномасштабными модами. Так, устойчивость эллипсоида Фримана исследована относительно возмущения эллипсоид—эллипсоид, сохраняющего совпадение оси вращения с осью эллипсоида [3]. С другой стороны, как отмечается в [3], самые крупномасштабные моды являются наиболее «опасными», что обосновывает, при определении области устойчивости, ограничение исследований этими модами. Кроме того, из-за идеализации моделей—однородная плотность, приложение результатов исследований устойчивости к реальным объектам должно, по-видимому, ограничиваться крупномасштабными модами. Ввиду этого мы ограничились

исследованием устойчивости относительно возмущения эллипсоид—эллипсоид, сохраняющего однородную плотность $\rho = \rho(t)$. В разделе 2 выводятся уравнения нелинейных по амплитуде колебаний бесстолкновительного эллипсоида с линейным полем скоростей. В третьем разделе определяются параметры равновесного эллипсоида с наклонным вращением. В 4 описана процедура нахождения характеристических частот, приводятся результаты численных расчетов.

2. *Уравнения нелинейных колебаний.* Кинетическое уравнение во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ системе координат имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0, \tag{1}$$

где

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \varepsilon_{msi}\varepsilon_{nsj}\Omega_m\Omega_n x_j - 2\varepsilon_{mji}\Omega_m v_j - \varepsilon_{mji}\dot{\Omega}_m x_j. \tag{2}$$

В выражении (2) ε_{ijk} — символ Леви—Чивита, в (1), (2) и далее в тензорных выражениях по одинаковым индексам предполагается суммирование. В случае однородной плотности потенциал $U(t, x)$ — квадратичная форма по x. Введем, следуя Чандрасекару [4], следующие тензоры:

тензор инерции —

$$I_{ij} = \int f x_i x_j d^3v d^3x \tag{3}$$

и тензор удвоенной энергии хаотических движений —

$$\Pi_{ij} = \int f(v_i - \langle v_i \rangle)(v_j - \langle v_j \rangle)\, d^3v d^3x, \tag{4}$$

где $\langle v_i \rangle = \int f v_i d^3v$. Умножая (1) на v_k и интегрируя по пространству скоростей, получаем гидродинамическое уравнение движения. Затем, домножив полученное уравнение на x_l, интегрируем по пространству координат. Учитывая, что ($\rho = \rho(t)$) поле скоростей является линейным $\langle v_i \rangle = b_{is}(t)\, x_s$, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{ks} I_{sl} - b_{lm} b_{kn} I_{mn} + \int \rho \frac{\partial U}{\partial x_k} x_l d^3x - \varepsilon_{msk}\varepsilon_{nsj}\Omega_m\Omega_n I_{jl} +$$

$$+ 2\varepsilon_{mjk}\Omega_m b_{js} I_{sl} + \varepsilon_{mjk}\dot{\Omega}_m I_{jl} - \Pi_{lk} = 0. \tag{5}$$

Выберем вращающуюся систему координат таким образом, что ее оси совпадают с осями эллипсоида. Тогда уравнение границы и потенциал описываются формулами

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1, \tag{6}$$

$$U=\frac{A_1}{2}x_1^2+\frac{A_2}{2}x_2^2+\frac{A_3}{2}x_3^2+\text{const}, \tag{7}$$

где

$$A_i=\frac{3}{2}GM\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta(s)(a_i^2+s)},\qquad \Delta(s)=\sqrt{(a_1^2+s)(a_2^2+s)(a_3^2+s)},$$

$$M=\frac{4}{3}\pi G\rho a_1a_2a_3 -$$

масса эллипсоида. Тензор инерции имеет вид

$$I_{ij}=\frac{M}{5}\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & 0\\ 0 & a_2^2 & 0\\ 0 & 0 & a_3^2\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Конкретизируем тензор поля скоростей b_{ij}. Рассмотрим линейное преобразование, описывающее движение вещества в выбранной системе отсчета, $\bar{x}=T\bar{x}_0$, $\bar{x}_0=\bar{x}(0)$. Деформируем эллипсоид в шар

$$K^{-1}\bar{x}=K^{-1}TK_0K_0^{-1}\bar{x}_0, \tag{9}$$

где $K=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & a_3\end{pmatrix}$. Линейное преобразование $K^{-1}TK_0\equiv S$ переводит сферу в сферу, то есть является ортогональным $S^{-1}=S'$, штрих — транспонирование. Далее—

$$\dot{\bar{x}}=\frac{dKS}{dt}K_0^{-1}\bar{x}_0=\frac{dKS}{dt}S'K^{-1}\bar{x}=(\dot{K}K^{-1}+K\dot{S}S'K^{-1})\,\bar{x}. \tag{10}$$

Так как матрица S ортогональная, $\dot{S}'S=-\dot{S}S'$, то есть матрица $\dot{S}S'$ кососимметричная. Пусть $\bar{\Lambda}$ ее дуальный вектор. Теперь можем записать b_{ij} в следующем виде:

$$b_{ij}=\begin{pmatrix} \dfrac{\dot a_1}{a_1} & \dfrac{a_1}{a_2}\Lambda_3 & -\dfrac{a_1}{a_3}\Lambda_2 \\ -\dfrac{a_2}{a_1}\Lambda_3 & \dfrac{\dot a_2}{a_2} & \dfrac{a_2}{a_3}\Lambda_1 \\ \dfrac{a_3}{a_1}\Lambda_2 & -\dfrac{a_3}{a_2}\Lambda_1 & \dfrac{\dot a_3}{a_3} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Таким образом, движение складывается из расширения вдоль осей и однородного вихревого движения. Как видно из (11), вектор вихря

$$\xi_i=-\frac{a_j^2+a_k^2}{a_j a_k}\Lambda_i. \tag{12}$$

Подставляя (7), (8) и (11) в (5), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot a_i=-A_i a_i+(\Omega_j^2+\Omega_k^2+\Lambda_j^2+\Lambda_k^2)a_i-2(a_k\Omega_j\Lambda_j+a_j\Omega_k\Lambda_k)+\dfrac{\Pi_{ii}}{a_i}\dfrac{5}{M}, \\ 2\dfrac{d}{dt}(a_i\Lambda_k-a_j\Omega_k)-a_i\dot\Lambda_k+a_j\dot\Omega_k+a_i\Lambda_i\Lambda_j+a_j\Omega_i\Omega_j-2\Omega_j\Lambda_i a_k= \\ \qquad =\dfrac{\Pi_{jj}}{a_j}\dfrac{5}{M}, \\ 2\dfrac{d}{dt}(a_i\Omega_k-a_j\Lambda_k)-a_i\dot\Omega_k+a_j\dot\Lambda_k+a_i\Omega_i\Omega_j+a_j\Lambda_i\Lambda_j-2\Omega_i\Lambda_j a_k= \\ \qquad =\dfrac{\Pi_{ii}}{a_i}\dfrac{5}{M}. \end{cases} \tag{13}$$

Индексы i, j, k выбираем таким образом, чтобы перестановка $\begin{pmatrix}1&2&3\\ i&j&k\end{pmatrix}$ была четной. Система уравнений (13) для жидкости получена Лебовицем [2]. В этом случае система девяти уравнений относительно десяти неизвестных (тензор Π_{ij}-шаровой) замыкается условием несжимаемости. Чтобы получить недостающие шесть уравнений, определяющие симметричный тензор Π_{ij} в случае бесстолкновительных систем, умножим уравнение (1) на $(v_k-\langle v_k\rangle)(v_l-\langle v_l\rangle)$ и проинтегрируем его по всему фазовому пространству. В силу линейности поля скоростей члены, содержащие моменты функции распределения третьего порядка, исчезают и получаем

$$\dot\Pi_{kl}+(b_{ks}+2\varepsilon_{msk}\Omega_m)\Pi_{sl}+(b_{ls}+2\varepsilon_{msl}\Omega_m)\Pi_{sk}=0. \tag{14}$$

Запишем с учетом (11) уравнения, замыкающие систему (13):

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_{ii} = -2\dfrac{\dot a_i}{a_i}\Pi_{ii} - 2\left(\dfrac{a_i}{a_j}\Lambda_k - 2\Omega_k\right)\Pi_{ij} - 2\left(-\dfrac{a_i}{a_k}\Lambda_j + 2\Omega_j\right)\Pi_{ik}, \\ \dot{\Pi}_{ij} = -\left(\dfrac{\dot a_i}{a_i} + \dfrac{\dot a_j}{a_j}\right)\Pi_{ij} - \left(-\dfrac{a_j}{a_i}\Lambda_k + 2\Omega_k\right)\Pi_{ii} - \\ -\left(\dfrac{a_i}{a_j}\Lambda_k - 2\Omega_k\right)\Pi_{jj} - \left(-\dfrac{a_i}{a_k}\Lambda_j + 2\Omega_j\right)\Pi_{kj} - \left(\dfrac{a_j}{a_k}\Lambda_i - 2\Omega_i\right)\Pi_{ik}. \end{cases} \tag{15}$$

Укажем некоторые известные частные случаи уравнений (13), (15). Колебания пылевого эллипсоида исследовались в работе [5]. В книге [3] приведен вывод уравнений колебаний невращающегося сфероида. Уравнения нелинейных колебаний холодного в плоскости вращения эллипсоида получены в [6].

3. *Параметры равновесной модели.* Известная в теории жидких фигур равновесия фундаментальная теорема Римана [2] о том, что вектор угловой скорости и вектор вихря равновесного эллипсоида лежат в одной из его главных плоскостей, выполняется и в случае бесстолкновительных эллипсоидов [7]. Таким образом, только два компонента векторов $\overline{\Omega}$, $\overline{\Lambda}$ могут быть отличны от нуля. В дальнейшем, для определенности, полагаем $\Omega_2 = \Lambda_2 = 0$ и, следовательно, как видно из уравнений (13), $\Pi_{12} = \Pi_{23} = 0$. Выпишем уравнения, определяющие равновесный эллипсоид:

$$-A_1 + \Omega_3^2 + \Lambda_3^2 - 2\frac{a_2}{a_1}\Omega_3\Lambda_3 + \frac{\Pi_{11}}{a_1^2} = 0, \tag{16}$$

$$-A_2 + \Omega_3^2 + \Lambda_3^2 + \Omega_1^2 + \Lambda_1^2 - 2\frac{a_1}{a_2}\Omega_3\Lambda_3 - 2\frac{a_3}{a_2}\Omega_1\Lambda_1 + \frac{\Pi_{22}}{a_2^2} = 0, \tag{17}$$

$$-A_3 + \Omega_1^2 + \Lambda_1^2 - 2\frac{a_2}{a_3}\Omega_1\Lambda_1 + \frac{\Pi_{33}}{a_3^2} = 0, \tag{18}$$

$$a_3\Lambda_3\Lambda_1 + a_1\Omega_1\Omega_3 - 2\Omega_1\Lambda_3 a_2 = \frac{\Pi_{13}}{a_1}, \tag{19}$$

$$a_3\Omega_3\Omega_1 + a_1\Lambda_1\Lambda_3 - 2\Omega_3\Lambda_1 a_2 = \frac{\Pi_{13}}{a_3}, \tag{20}$$

$$\left(-\frac{a_2}{a_1}\Lambda_3 + 2\Omega_3\right)\Pi_{11} + \left(\frac{a_1}{a_2}\Lambda_3 - 2\Omega_3\right)\Pi_{22} + \left(\frac{a_2}{a_3}\Lambda_1 - 2\Omega_1\right)\Pi_{13} = 0, \tag{21}$$

$$\left(-\frac{a_3}{a_2}\Lambda_1 + 2\Omega_1\right)\Pi_{22} + \left(\frac{a_2}{a_3}\Lambda_1 - 2\Omega_1\right)\Pi_{33} + \left(-\frac{a_2}{a_1}\Lambda_3 + 2\Omega_3\right)\Pi_{13} = 0. \tag{22}$$

В модели, построенной в работе [1], дополнительно наложено ограничение

$$\frac{\Omega_1^2}{A_3} + \frac{\Omega_3^2}{A_1} = 1. \tag{23}$$

Подставляя (16)—(18), (20) в (21) и (16)— (19) в (22), получаем систему уравнений для определения Λ_1, Λ_3. Решая ее находим

$$\Lambda_1 = 2\Omega_1 \frac{a_2}{a_3} \left[1 - \frac{\Omega_3^2}{A_1 a_2^2} \frac{(a_1^2 - a_2^2) A_1 - (a_3^2 - a_2^2) A_3}{A_1 - A_2 + A_3}\right], \tag{24}$$

$$\Lambda_3 = 2\Omega_3 \frac{a_2}{a_1} \left[1 + \frac{\Omega_1^2}{A_3 a_2^2} \frac{(a_1^2 - a_2^2) A_1 - (a_3^2 - a_2^2) A_3}{A_1 - A_2 + A_3}\right]. \tag{25}$$

Далее, умножая (19) на a_1 и (20) на a_3 и затем вычитая, получаем уравнение, подставив в которое (24) и (25) находим, что

$$\frac{(a_1^2 - a_2^2) A_1 - (a_3^2 - a_2^2) A_3}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{a_1^2 - a_3^2}{4}. \tag{26}$$

Используя соотношение $A_1 + A_2 + A_3 = 4\pi G\rho$, (26) можно переписать в виде

$$A_3 - A_1 = 2\pi G\rho \frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 + a_3^2 - 2a_2^2}. \tag{27}$$

Таким образом, форма эллипсоида определяется одним отношением полуосей. Выберем в качестве одного из независимых параметров модели отношение a_2/a_1. На рис. 1. на плоскости $(a_2/a_1, a_3/a_1)$ показана кривая эллипсоидов с наклонным вращением, полученная решением уравнения (27). В

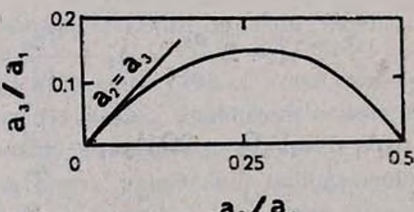

Рис. 1. Кривая на плоскости $(a_2/a_1, a_3/a_1)$, изображающая последовательность моделей эллипсоидов с наклонным вращением.

качестве второго независимого параметра выбираем $\eta = \Omega_3^2/A_1$. Теперь легко видеть, что все параметры эллипсоида выражаются через a_2/a_1 и η. На плоскости независимых параметров определим область существования физически приемлемых моделей, для которых $\Pi_{ii} \geqslant 0$. Положив в уравнении (16) $\Pi_{11} = 0$, получим кубическое уравнение относительно η. Очевидным корнем этого уравнения является $\eta = 1$ (эллипсоид Фримана). Поделив уравнение на $\eta - 1$ получаем

$$\eta^2 \frac{(a_1^2 - a_3^2)^2}{4a_1^2 a_2^2} - \eta \frac{(a_1^2 - a_3^2)(4a_2^2 + a_1^2 - a_3^2)}{4a_1^2 a_2^2} + 1 = 0. \qquad (28)$$

Корни этого уравнения равны

$$\eta_{2,3} = \frac{1}{2(a_1^2 - a_3^2)}\left(4a_2^2 + a_1^2 - a_3^2 \pm \sqrt{(4a_2^2 + a_1^2 - a_3^2)^2 - 16\, a_1^2 a_2^2}\right). \qquad (29)$$

Π_{11} неотрицательно в области $\eta_2 \leqslant \eta \leqslant 1$ и $\eta \leqslant \eta_3$. В точках $\eta = \eta_{2,3}$ все компоненты тензора Π_{ij} обращаются в нуль. Теперь, положив в уравнении (17) $\Pi_{22} = 0$, получим кубическое уравнение, разделив которое на трехчлен уравнения (28) найдем, что

$$\eta_4 = \frac{A_2 a_3^2 - (4a_2^2 - 3a_3^2) A_3}{A_1 a_3^2 - A_3 a_1^2}. \qquad (30)$$

Область существования эллипсоидов с наклонным вращением определяется условиями $\eta_2 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta_4 \leqslant \eta \leqslant \eta_3$ (рис. 2).

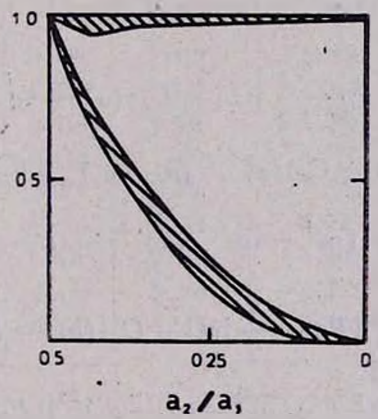

Рис. 2. Области существования эллипсоидов с наклонным вращением.

4. *Схема исследования устойчивости. Результаты.* Переход в уравнениях (13), (15) к переменным $L_i = (a_j^2 + a_k^2)\Omega_i - 2a_j a_k \Lambda_i$, $C_i = (a_j^2 + a_k^2)\Lambda_i - 2a_j a_k \Omega_i$, $P_{ij} = a_i a_j \Pi_{ij} \frac{5}{M}$, получим систему уравнений, разрешенных относительно производных:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\ddot{a}_i &= -A_i a_i + \frac{1}{2}\left[\frac{(L_j+C_j)^2}{(a_i-a_k)^3} + \frac{(L_j-C_j)^2}{(a_i+a_k)^3} + \frac{(L_k+C_k)^2}{(a_i-a_j)^3} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{(L_k-C_k)^2}{(a_i+a_j)^3}\right] + \frac{P_{ii}}{a_i^3}, \\
\dot{L}_i &= \frac{1}{2}\left[\frac{(L_k+C_k)L_j}{(a_j-a_i)^2} - \frac{(L_j+C_j)L_k}{(a_k-a_i)^2} + \frac{(L_k-C_k)L_j}{(a_j+a_i)^2} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(L_j-C_j)L_k}{(a_k+a_i)^2}\right], \\
\dot{C}_i &= \frac{a_j^2-a_k^2}{a_j^2 a_k^2}P_{jk} - \frac{1}{2}\left[\frac{(L_j+C_j)C_k}{(a_k-a_i)^2} - \frac{(L_k+C_k)C_j}{(a_j-a_i)^2} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{(L_j-C_j)C_k}{(a_k+a_i)^2} + \frac{(L_k-C_k)C_j}{(a_j+a_i)^2}\right], \\
\dot{P}_{ii} &= [(L_k-C_k)(a_j^{-2}-(a_i+a_j)^{-2}) - (L_k+C_k)(a_j^{-2} - \\
&\qquad - (a_i-a_j)^{-2}]P_{ij} + [(L_j+C_j)(a_k^{-2}-(a_i-a_k)^{-2}) - \\
&\qquad - (L_j-C_j)(a_k^{-2}-(a_i+a_k)^{-2}]P_{ik}, \\
\dot{P}_{ij} &= \frac{1}{2}[(L_k+C_k)(a_i^{-2}-(a_i-a_j)^{-2}) - (L_k-C_k)(a_i^{-2} - \\
&\qquad - (a_i+a_j)^{-2})]P_{ii} + \frac{1}{2}[(L_k-C_k)(a_j^{-2}-(a_i+a_j)^{-2}) - \\
&\qquad - (L_k+C_k)(a_j^{-2}-(a_i-a_j)^{-2})]P_{jj} + \\
&\qquad + \frac{1}{2}[(L_j+C_j)(a_k^{-2}-(a_k-a_i)^{-2}) - (L_j-C_j)(a_k^{-2} - \\
&\qquad - (a_k+a_i)^{-2})]P_{jk} + \frac{1}{2}[(L_i-C_i)(a_k^{-2}-(a_j+a_k)^{-2}) - \\
&\qquad - (L_i+C_i)(a_k^{-2}-(a_j-a_k)^{-2})]P_{ik}.
\end{aligned}
\right.
\tag{31}
$$

Алгоритм расчета устойчивости был следующий. В первой ($\eta_2 \leqslant \eta \leqslant 1$) и второй ($\eta_4 \leqslant \eta \leqslant \eta_3$) областях существования модели задавалась сетка с шагом 0.05 по a_3/a_1 и переменным шагом $\Delta\eta = \frac{1-\eta_2}{10}$ и, соответственно, $\Delta\eta = \frac{\eta_3-\eta_4}{10}$. В узлах сетки определялись значения переменных стационарного эллипсоида, и правые части уравнений (31) дифференцировались в этих точках. Затем находились собственные значения полученной вековой матрицы. В качестве теста работы алгоритмов программы исследовалась устойчивость эллипсоидов Фримана. В этом случае неустойчивость дает пара комплексных сопряженных частот кратности два (единственный инкремент). Найденная зона неустойчивости и значения инкрементов совпадают с представленными в [3]. Отметим, что в случае эллипсоидов Фримана вековая матрица распадается в прямую сумму двух матриц. Соответственно возмущение представляется в виде суммы двух мод, одна из них изменяет форму при сохранении оси вращения, другая отклоняет ось вращения от оси эллипсоида. Относительно последней моды эллипсоид Фримана устойчив.

Результаты расчета устойчивости эллипсоида с наклонным вращением приведены на рис. 3 и в таблицах. В табл. 1 приведены параметры эллипсоидов и инкременты сечения первой области существования при $a_2/a_1 = 0.35$. Неустойчивость обусловлена столкновением трех пар мнимых

Таблица 1

ОДНО СЕЧЕНИЕ ПЕРВОЙ ОБЛАСТИ: $a_3/a_1 = 0.35$ ($\pi G\rho = 1$)

η	Ω_1	Ω_3	ξ_1	ξ_3	$Re\,\omega_1$	$Re\,\omega_2$	$Re\,\omega_3$
1	0	0.479	0	—1.076	0	0	0
0.99818	0.071	0.479	1.149	—1.079	0	0	0
0.99636	0.100	0.479	1.619	—1.082	0	0	0
0.99455	0.123	0.478	1.976	—1.085	0	0	0
0.99273	0.142	0.478	2.274	—1.088	0	0	0
0.99091	0.159	0.477	2.533	—1.091	0.076	0.071	0
0.98909	0.174	0.477	2.764	—1.094	0.072	0.120	0
0.98728	0.188	0.476	2.974	—1.097	0	0.152	0
0.98546	0.201	0.476	3.168	—1.100	0	0.177	0.072
0.98364	0.213	0.476	3.348	—1.103	0	0.197	0.157
0.98182	0.225	0.475	3.515	—1.105	0	0.202	0.213

частот и превращением их в комплексные сопряженные пары. Как правило, одновременно имеется два инкремента. В предпоследней колонке табл. 2 указан максимальный инкремент. Эллипсоиды из второй области существования все неустойчивы (в этом случае дополнительно появляется одна вещественная положительная частота), за исключением пылевых эллипсоидов при $a_2/a_1 \leqslant 0.1$. Цифры в столбце «Примечания» в табл. 2 означают следующее: 1) — предельный эллипсоид Фримана; 2) —начало

Таблица 2

ПАРАМЕТРЫ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ ($\pi G\rho = 1$)

a_3/a_1 a_3/a_1	η	Ω_1	Ω_3	ξ_1	ξ_3	max | $Re\ \omega_i$ |	Примечания
1	2	3	4	5	6	7	8
0.45	1	0	0.359	0	−0.863	0	1)
(0.0584)	0.5951	0.130	0.358	3.523	−0.866	0.051	2)
	0.9935	0.150	0.358	4.031	−0.867	0.048	3)
	0.9886	0.198	0.357	5.189	−0.870	0.072	4)
	0.9838	0.237	0.356	6.031	−0.873	0.169	5), 6)
	0.8290	0.769	0.327	1.859	−0.951	0.169	7), 8)
	0.7995	0.833	0.321	−1.647	−0.962	0.766	9), 10)
0.4	1	0	0.447	0	−1.037	0	1)
(0.1022)	0.9939	0.137	0.445	2.407	−1.043	0.03	2), 3)
	0.9877	0.194	0.444	3.344	−1.050	0.090	4)
	0.9795	0.251	0.442	4.213	−1.058	0.209	5), 6)
	0.6673	1.010	0.365	1.046	−1.283	0.209	7), 8)
	0.6066	1.098	0.348	−2.227	−1.299	1.271	9), 10)
0.35	1	0	0.479	0	−1.076	0	1)
(0.1316)	0.9909	0.159	0.477	2.533	−1.091	0.076	4)
	0.9818	0.225	0.475	3.515	−1.105	0.213	5), 6)
	0.5168	1.158	0.345	0.682	−1.524	0.213	7), 8)
	0.4325	1.255	0.315	−2.689	−1.154	1.544	9), 10)
0.3	1	0	0.480	0	−1.047	0	1)
(0.1472)	0.9947	0.116	0.479	2.037	−1.059	0.018	4)
	0.9868	0.183	0.477	3.180	−1.077	0.190	5), 6)
	0.3811	1.258	0.296	0.464	−1.733	0.190	7), 8)
	0.2853	1.351	0.256	−3.131	−1.645	1.622	9), 10
0.25	1	0	0.458	0	−0.973	0	1)
(0.1498)	0.9968	0.087	0.457	1.914	−0.983	0.070	4)
	0.9920	0.138	0.456	3.007	−0.999	0.168	5), 6)
	0.2637	1.326	0.235	0.313	−1.938	0.168	7), 8)
	0.1698	1.408	0.189	−3.581	−1.702	1.542	9), 10)

Таблица 2 (окончание)

1	2	3	4	5	6	7	8
0.2 (0.1404)	1	0	0.416	0	−0.865	0	1)
	0.9988	0.052	0.415	1.603	−0.870	0.044	2)
	0.9972	0.079	0.415	2.444	−0.878	0.033	3)
	0.9965	0.090	0.415	2.768	−0.882	0.053	4)
	0.9961	0.094	0.415	2.917	−0.884	0.135	5), 6)
	0.1672	1.372	0.170	0.201	−2.158	0.135	7), 8)
	0.0873	1.436	0.123	−4.046	−1.684	1.332	9), 10)
0.15 (0.1198)	1	0	0.355	0	−0.725	0	1)
	0.99971	0.025	0.354	1.285	−0.727	0.018	2)
	0.99956	0.031	0.354	1.574	−0.728	0.044	3)
	0.99854	0.056	0.354	2.871	−0.736	0.089	4), 5), 6)
	0.09278	1.400	0.108	0.115	−2.415	0.089	7), 8)
	0.03559	1.443	0.069	−4.523	−1.581	1.017	9), 10)
0.1 (0.0887)	1	0	0.272	0	−0.549	0	1)
	0.99967	0.026	0.272	2.847	−0.554	0	6)
	0.04065	1.414	0.055	0.053	−2.746	0	7)
	0.03753	1.416	0.053	−0.446	−2.646	0.270	8)
	0.00946	1.436	0.026	−4.995	−1.366	0.877	9), 10)
0.05 (0.0480)	1	0	0.161	0	−0.324	0	1)
	0.99998	0.007	0.162	2.835	−0.325	0	6)
	0.01005	1.417	0.016	0.014	−3.241	0	7)
	0.00913	1.417	0.015	−0.527	−3.092	0.181	8)
	0.00086	1.423	0.005	−5.421	−0.957	0.690	9), 10)

верхней зоны неустойчивости; 3) — конец верхней зоны неустойчивости; 4) — начало нижней зоны неустойчивости; 5) — конец нижней зоны неустойчивости; 6) — предельный пылевой эллипсоид первой области существования; 7) — предельный пылевой эллипсоид второй области; 8) — начало зоны неустойчивости второй области; 9) — конец зоны неустойчивости второй области; 10) — предельный эллипсоид второй области ($\Pi_{22}=0$). На рис. 3 изображены полученные линейной интерполяцией зоны неустойчивости первой области. Для лучшего разрешения сложной структуры зоны неустойчивости при приближении к дисковому пределу дополнительно

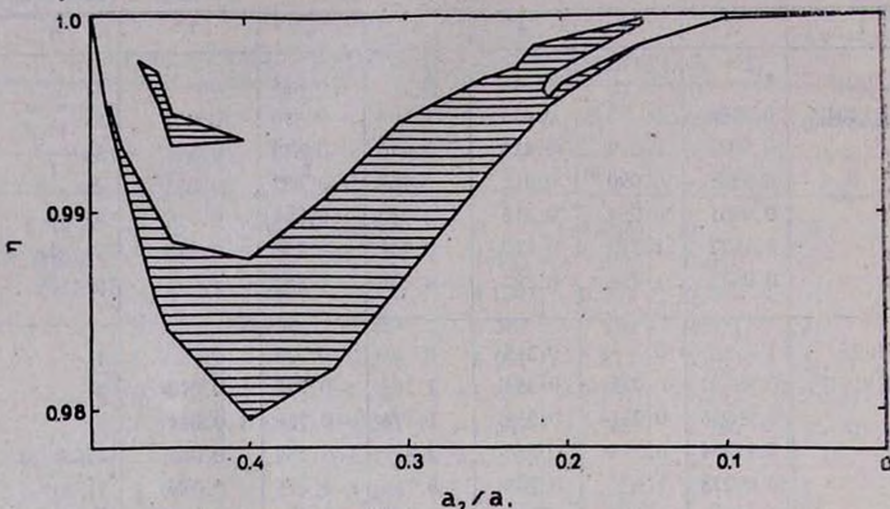

Рис. 3. Зона устойчивости (незаштрихованная область) эллипсоидов с наклонным вращением.

были сделаны сечения с шагом 0.01 от 0.45 до 0.49, от 0.2 до 0.25 и от 0.15 до 0.1.

Педагогический институт,
г. Глазов
Астрофизический институт
АН Каз.ССР

THE STABILITY OF THE COLLISIONLESS ELLIPSOID WITH OBLIQUE ROTATION

B. P. KONDRAT'EV, E. A. MALKOV

The equations of non-linear oscillations of collisionless ellipsoid with homogeneous density are derived. The stability of the model of ellipsoidal stellar system with oblique rotation with respect to ellipsoid—ellipsoid perturbation is investigated. The region of stability is defined by the determination of the characteristic frequencies of small oscillations the equations of which have been derived through linearization of the equations of non-linear oscillations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. П. Кондратьев*, Астрофизика, 21, 499, 1984.
2. *С. Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.

3. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман*, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976.
4. *S. Chandrasekhar, D. D. Elbert*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 155, 435, 1972.
5. *Я. Б. Зельдович*, Астрон. ж., 41, 873, 1964.
6. *В. А. Антонов*, в сб. «Динамика и эволюция звездных систем», М.—Л., ВАГО, 1975, стр. 269.
7. *Б. П. Кондратьев, Е. А. Малков*, Астрофизика, 26, 511, 1987.