АСТРОФИЗИКА

ТОМ 27 ОКТЯБРЬ, 1987 ВЫПУСК 2

УДК: 524—423

УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. Л. ПОЛЯЧЕНКО

Поступила 23 июля 1986

Принята к печати 15 июня 1987

Единым методом, использующим доказываемую в статье редукционную процедуру (сводящую задачу об устойчивости сферической системы к аналогичной задаче о возмущениях простейшего вида в соответствующей цилиндрической системе), исследуется устойчивость бесстолкновительных скоплений звезд с различным характером анизотропии распределения по скоростям. Для сферических систем, погруженных в массивное «гало» или имеющих большую центральную массу, выведены уравнения — в простейшем случае интегральные — для собственных функций и собственных частот колебаний.

1. *Введение.* Требование устойчивости накладывает на возможные стационарные модели бесстолкновительных гравитирующих систем существенные ограничения. Мы сосредоточимся ниже на исследовании свойств устойчивости сферических бесстолкновительных систем. К этому типу относятся многие астрономические объекты: сферические галактики, шаровые скопления звезд, некоторые компактные скопления галактик и т. д.

Специфика бесстолкновительных систем заключается в возможности анизотропии: дисперсии скоростей звезд по разным направлениям могут сильно отличаться друг от друга. И действительно, анизотропия присуща практически всем наблюдаемым звездным системам.

Тем не менее, до недавнего времени при исследованиях устойчивости ограничивались, в основном, изотропными системами (функции распределения которых, f_0, зависят лишь от полной энергии звезды E: $f_0 = f_0(E)$). К началу семидесятых годов в теории устойчивости сферических систем сложилась ситуация, которую можно вкратце резюмировать следующим образом. К тому времени была доказана устойчивость систем с изотропными функциями распределения [1, 2], а также показано [3—6], что системы с круговыми орбитами тоже, в основном, устойчивы (за исключением некоторых заведомо нереальных)*. Таким образом, сложилось мнение, что

* Например, неустойчивость, рассмотренная в [3—6], развивается лишь в случае плотности $\rho_0(r)$, растущей к периферии: $\rho_0' > 0$. Правда, слабые неустойчивости резонансного характера могут иметь место и при $\rho_0' < 0$ [16].

все сферические системы устойчивы. Это мнение казалось естественным, особенно если иметь в виду традиционный взгляд на сферическую форму как наиболее устойчивую. Мы, однако, заметили [7, 8], что системы с радиальными орбитами должны быть неустойчивыми. Этот факт важен потому, что, с одной стороны, подобная анизотропия естественно возникает при рождении системы, а, с другой стороны, орбиты звезд в сферических и эллиптических галактиках вытянуты по радиусу. Ниже (в разделе 3) вопрос о неустойчивости систем с радиальными орбитами звезд рассматривается по-новому. В связи со сказанным естественно возникла проблема определения критического значения анизотропии распределения звезд по скоростям, разделяющего устойчивые и неустойчивые скопления. Эта задача была, в основном, решена в последующих работах автора (совместно с И. Г. Шухманом [9—11]). При этом в общем случае необходимо использовать довольно громоздкие численные методы. Но для случая системы с вытянутыми орбитами, находящейся во внешнем поле (создаваемом распределением большой массы), появляются возможности существенного аналитического продвижения в этой задаче. Они также рассматриваются в разделе 3.

Устойчивость сферических систем с противоположным характером анизотропии (с орбитами звезд, близкими к круговым) рассматривается в разделе 2. Для систем такого рода удается получить дисперсионное уравнение, описывающее коротковолновые возмущения — типа известного уравнения Лина и Шу для дисковых галактик [12]. Приложение содержит вывод точного характеристического уравнения для собственных частот колебаний однородного бесстолкновительного шара с произвольными эллиптическими орбитами звезд (модель Камма [13]).

Все основные результаты статьи получены единым методом, использующим доказываемую в начале раздела 2 редукционную процедуру, которая сводит задачу об устойчивости произвольных сферических бесстолкновительных систем к более простой задаче об устойчивости соответствующей цилиндрической системы относительно желобковых возмущений (для них составляющая волнового вектора вдоль оси цилиндра равна нулю).

2. *Редукционная процедура. Системы с почти-круговыми орбитами.* Линеаризованное кинетическое уравнение в переменных r, θ, φ, v_r, $v_\perp$, α (где r, θ, φ — сферические координаты, v_r — радиальная скорость звезды, $v_\perp^2 = v_\theta^2 + v_\varphi^2$; v_θ, v_φ — компоненты скорости по θ и φ, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(v_\varphi/v_\theta)$), описывающее возмущения шара с функцией распределения $f_0 = f_0(E, L^2)$, зависящей от энергии звезды $E = \frac{v_r^2 + v_\perp^2}{2} + \Phi_0(r)$ (Φ_0 — гравитационный потенциал) и квадрата углового момента $L^2 = r^2 v_\perp^2$, можно представить следующим образом:

$$\frac{df_1}{dt} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{v_\perp}{r}\hat{L}f_1 + \hat{D}f_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\frac{\partial f_0}{\partial E}v_r + \frac{1}{r}\hat{L}\Phi_1\left(\frac{\partial f_0}{\partial E}v_\perp + \frac{\partial f_0}{\partial L^2}\cdot 2v_\perp r^2\right), \tag{1}$$

где введены операторы

$$\hat{L} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \sin\alpha\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\alpha},$$

$$\hat{D} = v_r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{v_r v_\perp}{r}\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial v_r}.$$

Оператор $\hat{L}$ имеет стандартную форму оператора бесконечно-малого поворота вокруг оси y (выраженного через углы Эйлера θ, φ, α)*. Угловая часть возмущения потенциала в рассматриваемом случае полной сферической симметрии может быть отделена в виде, пропорциональном отдельным сферическим гармоникам: $\Phi_1 \sim Y_l^m(\theta, \varphi)$. Кинетическое уравнение естественно решать в той системе координат, где оператор $\hat{L}$ является диагональным, т. е. соответствующим вращению вокруг оси z' повернутой системы. В этой системе возмущение функции распределения представим в виде разложения

$$f_1 = \sum_s f_s(r, v_r, v_\perp)\, T^l_{ms}(\varphi', \theta', \alpha'), \tag{2}$$

где функции $T^l_{ms}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_1 - is\varphi_2} P^l_{ms}(\cos\theta)$, причем $P^l_{ms}(\cos\theta)$ — трехиндексные функции [15], в частности $P^l_{m0}(\cos\theta)$ — функции, совпадающие с точностью до коэффициентов с присоединенными функциями Лежандра. Потенциал также удобно записать в виде $\Phi_1 = \chi(r, t)\cdot T^l_{m0}(\varphi, \theta, \alpha)$, или переходя в штрихованную систему,

$$\Phi_1 = \chi(r, t)\cdot\sum a^l_s T^l_{ms}(\varphi', \theta', \alpha'), \tag{3}$$

где a^l_s — коэффициенты поворота, переводящего ось y в положение оси z. Таким образом, в штрихованной системе мы имеем независимые уравнения для каждой из функций разложения (2):

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{v_\perp}{r} is f_s + \hat{D}f_s = \frac{\partial\Phi_s}{\partial r}\frac{\partial f_0}{\partial v_r} + is\frac{\Phi_s}{r}\frac{\partial f_0}{\partial v_\varphi}, \tag{4}$$

где учтено, что $\hat{L}f_s = isf_s$. Уравнение (4) тождественно уравнению для отклика цилиндрической (или дисковой) системы f_s на желобковое

* По-видимому, впервые это было отмечено в интересующем нас контексте в работах [3—6].

возмущение потенциала вида $\Phi_s(r, \varphi) = \chi(r) e^{is\varphi}$ (где r и φ — соответствующие цилиндрические координаты). Таким образом, для решения исходной „сферической" задачи нужно найти решения соответствующей „цилиндрической" задачи (4) для всех целых s между $(-l, l)$ с четностью, совпадающей с четностью l (см. ниже).

Изложенное выше представляет первую часть процедуры редукции. Вторая ее часть состоит в рецепте вычисления полного возмущения плотности шара ρ_1. Допустим, что уравнения (4) для f_s решены. Для вычисления ρ_1 нужно в разложении (4) снова перейти к исходной нештрихованной системе, что осуществляется посредством формулы

$$T^l_{ms}(\varphi', \theta', \alpha') = \sum_{s'} T^l_{ms'}(\varphi, \theta, \alpha) \bar{a}^l_{s'}. \tag{5}$$

Так как в выражении для возмущения плотности $\rho_1 = \int f_1 v_\perp dv_\perp dv_r d\alpha$ имеется интегрирование по α, то в итоге в каждой из сумм (5) останется лишь по одному члену (соответствующему $s' = 0$), и мы получим искомую формулу в виде

$$\rho_1^{(l)} = T^l_{m0}(\varphi, \theta, \alpha) \cdot \left(\sum_s \alpha^l_s \int f_s(r, v_r, v_\perp) v_\perp dv_\perp dv_r \right), \tag{6}$$

где введено обозначение $\alpha^l_s \equiv |P^s_l(0)|^2$. После этого для нахождения, например, дисперсионного уравнения в самосогласованной задаче остается только решить уравнение Пуассона — определить соответствующий плотности ρ_1 потенциал; его сравнение с исходным и дает результирующее уравнение.

Простейшим примером применения описанной процедуры редукции является получение дисперсионного уравнения для локализованных по радиусу возмущений скопления с орбитами, близкими к круговым (подобного дисперсионному уравнению для плоского диска, являющемуся основой волновой теории спиральной структуры галактик Лина и Шу [12]). Собственно говоря, поскольку мы знаем решение соответствующей задачи для желобковых колебаний цилиндра или диска (см. [12, 14]), дисперсионное уравнение для шара с помощью формул редукции записывается сразу в окончательном виде:

$$ux = 1 - \frac{1}{2} \sum_k \alpha^l_k \frac{\nu_k}{\sin \pi\nu_k} F_x(\nu_k), \tag{7}$$

где $\nu_k = \nu - \mu k/2$, $\nu = \omega/\varkappa$, ω — частота возмущения, $\varkappa$ — эпициклическая частота, $\mu = 2\Omega/\varkappa$, Ω — частота обращения по круговой орбите, ρ_0 — плотность, $u = \dfrac{\varkappa^2}{4\pi G\rho_0} = 4/(4 - \mu^2)$ для самосогласованного равновесия, $F_x(\nu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} ds \cos \nu s e^{-x(1+\cos s)}$, $x=k^2c^2/\varkappa^2$, c — дисперсия радиальных скоростей, k — радиальное волновое число. Функция распределения по радиальным скоростям v_r предполагалась максвелловской, а также считалось (аналогично теории Лина и Шу), что $kR \gg 1$ и $c \ll \Omega R$, R — радиус шара.

Ветви колебаний, описываемые уравнением (7), весьма напоминают ветви желобковых колебаний вращающегося цилиндра [14] (и, так же, как последние, циклотронные ветви плазмы). Правда, количество ветвей в данном случае значительно больше: своя система ветвей для каждой пары (l, μ). При произвольном μ ветви начинаются (когда $x \to 0$) с четырех „нетривиальных" корней, заключенных в промежутках $(0, 1-\mu/2)$, $(3\mu/2-1, \mu)$, $(\mu, 1+\mu/2)$, $(1+\mu/2, 1+3\mu/2)$, и с „тривиальных" корней (связанных с резонансами в (7)): $2 \pm \mu/2$ и $2 \pm 3\mu/2$. Марджинальная кривая для уравнения (7) при $l=2$ получена в [14]; она состоит из вертикальной прямой $\mu=1$ на плоскости (μ, x) и кривой $x=x(\mu)$, имеющей асимптотики: $1-\mu=a/x^{3/2}$ $\left(a=9\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big/16\pi=\text{const}\right)$ при $|\mu-1|\ll 1$ и $x=\frac{2}{3}\mu^2$ при $\mu \ll 1$. Расширение области неустойчивости, получающееся при рассмотрении возмущений с $l>2$, рассмотрено в [16]. Что касается физической природы неустойчивости систем с круговыми орбитами, то она проясняется, если представить критерий неустойчивости $\varkappa^2 > l^2\Omega^2$ (см. [14]) в виде $(kv_0)^2 < \omega_p^2$ $\left(k \equiv \frac{l}{r};\ v_0 \equiv \Omega r,\ \omega_p \equiv \varkappa\right)$, что совпадает с аналогичным критерием для плазменной пучковой неустойчивости [17].

3. *Сферические системы с вытянутыми по радиусу орбитами.* В случае системы с орбитами звезд, проходящими через центр, с помощью процедуры редукции можно от уравнения (4) перейти к более простой системе уравнений. Поскольку равновесная функция распределения имеет вид

$$f_0=\delta(L^2)\varphi_0(E)=\frac{1}{r^2}\delta(v_\perp^2)\varphi_0(E),$$

где δ — дельта-функция, $E=v_r^2/2+\Phi_0(r)$ — энергия радиального движения частицы, т. е. содержит $\delta(v_\perp^2)$, возмущенную функцию распределения можно искать в виде (аналогично [3, 4])

$$f_s = a_s \delta(v_\perp^2) + b_s v_\perp \delta'(v_\perp^2),$$

где δ' — производная δ-функции, а функции a_s, b_s зависят только от r, v_r (и времени t). Для этих функций получается система уравнений (мы ее не выписываем), которую удобно несколько преобразовать. Если выполнить замену $b_s = 2isF_1$ и учесть, что $\sum\limits_s \alpha_s^l = 1$, $\sum\limits_s s^2\alpha_s^l = \frac{l(l+1)}{2}$, то для функций F_1, $a_1 \equiv \sum\limits_s \alpha_s^l a_s$, $\chi(r)\,(\Phi_s = \chi(r)\, e^{is\varphi})$ получается система уравнений $\left(\widehat{D} \equiv v_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}\frac{\partial}{\partial v_r}\right)$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \widehat{D} a_1 + \frac{2v_r}{r} a_1 + \frac{l(l+1)}{r} F_1 = \frac{\partial \chi}{\partial r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial \varphi_0}{\partial v_r}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \widehat{D} F_1 + \frac{3v_r}{r} F_1 = \frac{\chi}{r^2}\varphi_0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\chi}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\chi = 4\pi G \int a_1 dv_r, \tag{10}$$

совпадающая с выведенной в [14] другим способом. Дальнейшее преобразование системы (8)—(10) заключается в замене $a_1 r^2 = a$, $F_1 r^3 = F$, разложении $a = a_+\delta(v_r - v_0) + a_-\delta(v_r + v_0) + b_+\delta'(v_r - v_0) + b_-\delta'(v_r + v_0)$, $F = F_+\delta(v_r - v_0) + F_-\delta(v_r + v_0)$ (где $v_0 \equiv \sqrt{2E_0 - 2\Phi_0(r)}$, $\varphi_0(E) = \int \varphi_0(E_0)\,\delta(E - E_0)\,dE_0$) — подробности см. в [14]. Для квазиклассических возмущений с $l \gg r\, \partial/\partial r$ отсюда можно вывести симметричную систему уравнений [18]

$$\widehat{D}_\pm \xi_\pm = (J_\pm \pm v_0 \xi_\pm)/r, \tag{11}$$

$$\widehat{D}_+ J_+ = \widehat{D}_- J_- = 2\pi G r \int dE_0 \rho_{E_0} (\xi_+ + \xi_-), \tag{12}$$

где $\widehat{D}_\pm = \frac{\partial}{\partial t} \pm v_0 \frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{d}{dt}\right)_\pm$ — операторы дифференцирования по времени вдоль невозмущенных радиальных траекторий частиц „потока“ с энергией E_0, $\rho_{E_0} = \frac{\varphi_0(E_0)}{v_0 r^2}$, $J_\pm = -v_0 F_\pm$, $\xi_\pm = \frac{1}{l^2} r v_0 a_\pm$. Для возмущений вида $\sim Y_l^l(\theta, \varphi)$ величины $\xi_\pm$ и $J_\pm$ имеют смысл, соответственно, линейного смещения в плоскости экватора по азимуту φ и углового момента частицы rv_φ. Исходя из системы (11), (12), неустойчивость была в [18] доказана построением функционала Ляпунова. Физические соображения, делающие очевидной неустойчивость систем с радиальными орбитами, были приведены в работах [7, 8] (см. также [14]) еще до формального доказательства неустойчивости в [18]. Неустойчивость связана с отсутствием дисперсии скоростей частиц в тангенциальном направлении и, следовательно, имеет джинсовскую природу. Если представить себе какой-либо узкий конус с центром в центре рассматриваемой сферы, который в начальный момент слегка сжимается (несколько сближаются по сравнению с исходным состоянием его образующие), то дальнейшее джинсовское схлопывание этого конуса представляется очевидным, если принять во внимание, что при радиальных орбитах частицы не выходят из области возмущения.

Главным моментом при выводе системы уравнений (11), (12) было использование коротковолнового по угловым переменным приближения (условие $l \gg r\, \partial/\partial r$). Такое предположение оправдано, если существуют собственные функции такого типа. Строго говоря, этот момент требует дополнительного обоснования. Можно вспомнить, например, что для точно решаемой задачи о возмущениях твердотельно-вращающегося диска с произвольными эллиптическими орбитами такого рода собственных функций нет (см. [14]). Собственно, на качественном уровне обоснование наличия таких решений в случае систем с радиальными орбитами требует повторения рассуждений наподобие тех, что были приведены выше при качественном описании механизма неустойчивости.

Доказательства неустойчивости, основанные на применении уравнений (11), (12), описывающих коротковолновые возмущения, ничего не говорят о том, как в действительности эволюционируют системы с орбитами, близкими к лучевым. Так, ответ на вопрос о том, меняется ли в ходе эволюции или же остается неизменной сферической форма системы, зависит от устойчивости или неустойчивости как раз наиболее крупномасштабных мод. Ответ на этот вопрос был получен в работе автора [19], где было показано, что в ходе нелинейной эволюции первоначально сферическая система с радиальными траекториями превращается в эллипсоидальную. В работах [9, 10] определена граница между устойчивыми и неустойчивыми системами. Одновременно в цитированных работах доказывается (уже без каких-либо приближений) и сама неустойчивость систем с близкими к лучевым орбитами.

Проблема отыскания собственных мод $(\sim e^{-i\omega t})$ даже для упрощенной системы (11), (12) в общем случае слишком сложна для аналитического решения. Однако в частном случае (важном с точки зрения астрономических приложений), когда система частиц с радиальными траекториями движется в некотором заданном внешнем поле (создаваемом, например, более массивной центральной конденсацией или же «гало», которое само по себе слабо подвержено возмущениям рассматриваемого типа*), можно довольно значительно продвинуться на пути аналитического решения. Дело в том, что в этом случае первым приближением являются, очевидно, возмущения системы радиальных орбит в заданном внешнем потенциале (которые легко определяются), а взаимодействия частиц этой системы друг с другом — их самогравитацию, которая вызывает неустойчивость, можно учесть в следующем приближении. Таким образом, здесь имеется возможность построения хорошей теории возмущений по малому отношению $M/M_h \ll 1$, где M_h — масса «гало», M — масса системы частиц с радиальными траекториями. Будем интересоваться возмущениями, при которых частицы с одной радиальной траектории (точнее, определенный «поток» частиц, имеющих фиксированную энергию E) переходят на соседнюю, тождественную, также радиальную траекторию. Очевидно, что без учета самогравитации такие возмущения отвечают новому равновесию, т. е. в этом приближении для них частота $\omega = 0$. Условие же совместности решений первого и второго (с учетом самогравитации) приближений для системы уравнений (11), (12) приводит к интегральному уравнению, которое можно привести к стандартной форме интегрального уравнения с симметричным ядром:

$$-\omega^2 F(E) = \int\limits_{\Phi_0(0)}^{E_{max}} dE_0 K(E, E_0) F(E_0), \tag{13}$$

где $F(E) = \omega^2 F_1(E) \xi_E \sqrt{f(E)}$, смещение $\xi(r, E) = r\xi_E$, $f(E) \equiv \dfrac{2\pi G \varphi_0(E)}{F_1(E)}$,

$$F_1(E) = \int\limits_0^{r_E} r^2 \frac{dr}{v_0(r, E)}, \quad \Phi_0(r_E) = E,$$

$$K(E, E_0) = \sqrt{f(E) f(E_0)} \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^{r_{E_0}} dr / \sqrt{E - \Phi_0(r)} \sqrt{E_0 - \Phi_0(r)}, & E_0 < E, \\ \displaystyle\int\limits_0^{r_E} dr / \sqrt{E_0 - \Phi_0(r)} \sqrt{E - \Phi_0(r)}, & E_0 > E. \end{cases} \tag{14}$$

Из (13), (14), в частности, следует, что для знакоопределенных соб-

* В качестве «гало» может выступать, например, массивная сферическая система с изотропной функцией распределения звезд по скоростям.

ственных функций (например, всюду $F(E) > 0$) $\omega^2 < 0$, $\omega^2 \simeq -\frac{GM}{R^3}$, т. е. имеет место неустойчивость с инкрементом указанного порядка. Для простейшего случая однородного гало

$$K(E, E_0) = = 4G\sqrt{\frac{\varphi_0(E)\varphi_0(E_0)}{EE_0}} \begin{cases} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi/\sqrt{E - E_0\sin^2\varphi}, & E_0 < E, \\ \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi/\sqrt{E_0 - E\sin^2\varphi}, & E_0 > E, \end{cases} \tag{15}$$

где потенциал гало был представлен в виде $\Phi_h = r^2/2$. Интегральное уравнение (13) с ядром (15) решалось численно для систем с различными функциями $\varphi_0(E)$. Так, для $\varphi_0 = \text{const}\cdot E\cdot(E_{\max} - E)^2$ инкремент неустойчивости наиболее неустойчивой моды (она соответствует знакопостоянному ξ_E) оказался равным $\gamma \simeq 2.05\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$. Неустойчивыми оказались и моды с одним и двумя нулями функции ξ_E; они, естественно, имеют меньшие инкременты.

Критерии устойчивости сферических звездных систем общего вида рассматривались в работах автора и И. Г. Шухмана (результаты подробно описаны в [14]). В этих работах было высказано предположение, что устойчивость или неустойчивость систем с вытянутыми по радиусу орбитами определяется значением параметра «глобальной анизотропии $\xi = 2T_r/T_\perp$, где T_r и $T_\perp$ — полные кинетические энергии, соответствующие радиальной и поперечной степеням свободы. Для нескольких исследованных серий функций распределения, которые сильно отличались друг от друга, критические значения $\xi = \xi_c$ оказались лежащими в интервале 1.4—2.0. Обобщенный критерий неустойчивости, который должен быть пригоден и для систем, имеющих в центре массивное изотропное скопление (или объект типа «черной дыры») или же погруженных в «гало», предложен в [16] в такой форме:

$$T_r > \xi(T_\perp/2) + \eta U, \tag{16}$$

где U — энергия взаимодействия звезд подсистемы с вытянутыми орбитами и центральной конденсации, ξ — определенная ранее критическая анизотропия ($\xi \sim 2$), η — число порядка единицы. Гипотезы типа (16) могут быть, в принципе, проверены, хотя бы частично, путем рассмотрения устойчивости систем в гравитационном поле массивного центрального тела (или «гало»). Эта задача, впрочем, представляет и самостоятельный интерес. В этом случае можно снова построить теорию возмущений по малому параметру M / M_h, аналогичную той, которая была использована выше при выводе интегрального уравнения (13). Как и там, в качестве первого приближения естественно принять легко определяемые возмущения исходной системы в пренебрежении самогравитацией, сводящиеся к поворотам «розеточных» траекторий частиц как целого на малые углы (зависящие от энергии и углового момента частиц). Вычисления удобно проводить в переменных действие — угол. В заключение этого раздела приведем без вывода получающееся из условия совместности описанного первого и следующего приближений уравнение для собственных частот и собственных функций этой задачи в приближении $l \gg r \frac{\partial}{\partial r}$:

$$\omega^2 \chi = \frac{4\pi G}{l(l+1)} \int dI_1 dI_2 \frac{I_2 \Omega_1}{v_r(\vec{I},\ r)} f_0(\vec{I}) \times$$

$$\times \left\{ \frac{dP_l(\cos\eta)}{d\eta} \int dw_1 \frac{\partial \chi}{\partial I_2} \frac{dP_l(\cos\eta)}{d\eta} \left(\Omega_2 - \frac{I_2}{r^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2 P_l(\cos\eta)}{d\eta^2} \int dw_1 \frac{\partial \chi}{\partial I_2} P_l\ (\cos\eta)\, \Omega_2 \right\}, \qquad (17)$$

где $f_0(\vec{I})$ — равновесная функция распределения, $\vec{I}$ — переменные действия, P_l — полиномы Лежандра, Ω_1 и Ω_2 — частоты колебаний частиц по радиусу и азимуту соответственно, $\eta = \partial S_1/\partial I_2$, $S_1 = \int\limits_{r_{\min}}^{r} dr' \times$ $\times \sqrt{2E(\vec{I}) - 2\Phi_0(r') - \frac{I_2^2}{r'^2}}$. В частности, граница устойчивости определяется решением, соответствующим собственному значению $\omega^2 = 0$.

Приложение

Спектр колебаний однородного шара с произвольными эллиптическими орбитами частиц. Применим редукционную технику к выводу уравнений для точных собственных частот малых возмущений однородного шара с функцией распределения [7, 1]

$$f_0 = \frac{\rho_0 \theta\left[(1 - r^2)(1 - v_\perp^2) - v_r^2\right]}{\pi^2 \sqrt{(1 - r^2)(1 - v_\perp^2) - v_r^2}} \equiv \frac{\rho_0}{\pi^2} \frac{\theta(A)}{\sqrt{A}}, \qquad (\Pi 1)$$

где ρ_0 — плотность, θ — единичная «ступенька» Хевисайда; радиус шара R и угловая скорость частиц на круговых орбитах Ω_0 положены равными единице. В данном случае, как это подробно разъясняется в [14], радиальная часть потенциала $\chi(r)$ представляет собой полином: $\chi(r) = r^N + \ldots$ $(N \geqslant l)$. Если интересоваться лишь выводом характеристического уравнения для частот (а не собственными функциями), то во всех последующих выкладках достаточно следить только за старшей степенью (r^N) этого полинома (за подробностями снова отсылаем к [14]). Тогда во всех выражениях, встречающихся дальше, также нужно всего лишь выделить старшую степень r, что можно осуществить, удерживая главные члены при формальном стремлении r к бесконечности.

Решение уравнения (4) представим в виде интеграла: $f_s = \int_{-\infty}^{0} dt \cdot Re^{-i\omega t}$ от правой части этого уравнения (R) вдоль траектории частицы. В данном случае траектория является эллиптической, ее удобно записать в виде: $r' e^{\pm i(\varphi' - \varphi)} = r \cos t + (v_r \pm i v_\perp) \sin t$, где r', φ' — текущие (в момент t) координаты частицы, которая в момент $t = 0$ находится в точке (r, φ) и имеет скорость $(v_r, v_\varphi = v_\perp)$. Требующаяся нам часть функции f_s, которая генерируется старшей степенью полинома $\chi(r) \sim r^N + \ldots$, записывается как

$$f_s \sim -2f_0\{r^N + i[\omega - s(rv_\perp)] \cdot I\}, \tag{П2}$$

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t}[r \cos t + (v_r + iv_\perp) \sin t]^{n_1} [r \cos t + (v_r - iv_\perp) \sin t]^{n_2} dt, \tag{П3}$$

где $n_1 = \dfrac{N+s}{2}$, $n_2 = \dfrac{N-s}{2}$. Поскольку искривления границы дают $\Phi_1 \sim r^l$, то при выводе характеристического уравнения для мод с $N > l$ („внутренние“ моды) ими можно не интересоваться. Мы займемся сначала именно этими внутренними модами; „поверхностные“ моды, для которых $N = l$, будут рассмотрены отдельно.

Так как нас в действительности интересуют не сами по себе функции f_s, а только включающее их выражение (6), можно изменить порядок действий и сначала усреднить I в (П2, П3) по скоростям, затем выполнить суммирование в (6) по s, оставив интегрирование по времени последним. В результате получится характеристическое уравнение, содержащее лишь один интеграл по t. Итак, нам нужно в выражении

$$\tilde{I} = \sum_s \int 2 l_s^l f_0 v_\perp dv_\perp dv_r [\omega - s(rv_\perp)][r\cos t +$$

$$+ (v_r + iv_\perp)\sin t]^{n_1} [r\cos t + (v_r - iv_\perp)\sin t]^{n_1} \qquad (\Pi 4)$$

выделить члены со старшей степенью r (при $r \to \infty$). Вычисления удобно проводить, предварительно сделав замену $v_r \to \bar{v}_r = v_r / \sqrt{1 - r^2}$ и перейдя к полярным координатам (ρ, ψ) на плоскости $(v_\perp, \bar{v}_r)$. Для $\tilde{I}_1$ получаем ($\tilde{I}_1 \sim \omega$, а $\tilde{I}_2 \sim s(rv_\perp)$ в (П4))

$$\tilde{I}_1 \sim -\rho_0 r^{N-2} P_N(\cos t). \qquad (\Pi 5)$$

Отметим полезное соотношение [15]

$$(\cos t \pm i \sin t \cos\varphi)^n = P_n(\cos t) +$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{\infty} (\mp i)^m \frac{n!}{(n+m)!} \cos m\varphi \cdot P_n^m(\cos t), \qquad (\Pi 6)$$

которое было использовано для вычисления интеграла по $\rho = \sin\varphi$.

Для вычисления $\tilde{I}_2$ (несколько более громоздкого, чем $\tilde{I}_1$) нужно выделить из произведения квадратных скобок в (П4) члены, пропорциональные r^{N-1} (так как не зависящие от s члены $\sim r^N$ дают нуль при суммировании по s). Проинтегрировав по ψ и выполнив замену $\rho = \sin\varphi$, мы придем к интегралу по φ, который выражается через $P_n^1(\cos t) = \frac{d}{dt} P_n(\cos t)$. Но интеграл $\int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} \frac{d}{dt} P_n(\cos t) dt$ сводится к интегралу по t от $\tilde{I}_1$. Собирая все члены, дающие согласно (6) вклад в ρ_1, получим

$$\rho_1 \sim \rho_0 r^{N-2} \cdot 2\left[1 + i\omega \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} P_N(\cos t)\, dt\right] \cdot \frac{N(N+1) - l(l+1)}{N(N+1)}.$$

Наконец, привлекая уравнение Пуассона, найдем искомое характеристическое уравнение для частот „внутренних" мод ($N > l$) шара Камма*.

* В. А. Антонов сообщил на конференции в Волгограде (сентябрь, 1985), что он, получив (независимо и в другом виде) характеристические уравнения для внутренних и поверхностных колебаний модели Камма, доказал также и их устойчивость. Мы здесь ставили перед собой более скромную цель: проиллюстрировать на этом примере возможности редукционной техники.

$$\frac{6}{N(N+1)}\left|1+i\omega\int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} P_N(\cos t)\,dt\right| = 1. \tag{П9}$$

В частности, для $N=4$ отсюда получается*

$$\frac{7}{\omega^2-16}+\frac{1}{\omega^2-4}=-\frac{8}{3}, \tag{П10}$$

так что $\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2}(17\pm\sqrt{99})$, все частоты вещественные.

Переходя к „поверхностным" модам ($N=l$), воспользуемся для разнообразия несколько иной техникой (подробности см. в [14]). Вместо обычного возмущения $f_0 \to f = f_0 + f_1$ вводим отклонение аргумента функции распределения от стационарного значения (A): $A \to A - \chi^{(l)}$, $\chi^{(l)} \ll 1$. Линеаризованное кинетическое уравнение

$$\frac{d\chi^{(l)}}{dt}=2v_r\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}+\frac{2}{r}\left(\cos\alpha\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right)(1-r^2)\,v_\perp \tag{П11}$$

подобно уравнению (1), и для него применима похожая редукционная техника. Для s-той цилиндрической гармоники имеем:

$$\frac{d}{dt}(\chi_s^{(l)}/2)=\frac{d\Phi_s}{dt}+i(\omega-s(rv_\perp))\,\Phi_s. \tag{П12}$$

Проинтегрированная по углу $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{v_\varphi}{v_\theta}\right)$ часть функции $(\chi/2)$:

$$\frac{\chi^{(l)}}{2}\sim 2\pi Y_l^m(\theta,\varphi)\sum_s\left[r^l+i(\omega-srv_\perp)\,I_s\right]\alpha_s^l;\qquad I_s=\int\Phi_s e^{-i\omega t}dt. \tag{П13}$$

Граница возмущенного фазового объема определяется уравнением: $(1-r^2)(1-v_\perp^2)-v_r^2-\chi^{(l)}=0$, а искажение границы шара $r=1$ создается, очевидно, частицами с $v_r=0$, но свой вклад в полную поверхностную плотность на невозмущенной сфере $r=1$ вносят частицы со всеми возможными $v_\perp$ в интервале $(0\leqslant v_\perp\leqslant 1)$**. Радиальное отклонение „потока" частиц, касающихся поверхности $r=1$ со скоростью $v_\perp$, равно: $\Delta r(v_\perp)=-\frac{1}{1-v_\perp^2}(\chi^{(l)}/2)\big|_{r=1}$.

---

* В [14], где ранее вычислялись частоты этой моды, имеется описка: в правой части уравнения (П10) вместо (—8/3) стоит (8/3).

** Использованный в [14] метод вычисления поверхностной плотности как $\sigma=\rho_0\cdot\Delta r(v_r=0,\ v_\perp=0)$ пригоден лишь для моделей, у которых на границе обращается в нуль полная скорость частиц (а не только радиальный компонент v_r, как в случае модели Камма).

Возьмем для конкретности $l=3$ и проведем для этой моды выкладки до конца. Для $\Delta r(v_\perp)$ найдем в этом случае:

$$\Delta r(v_\perp) = 2\pi Y_l^m(\theta, \varphi)\left[\frac{3}{4}\left(\frac{3}{\omega^2-9}+\frac{1}{\omega^2-1}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{9v_\perp^2}{8}\left(\frac{1}{\omega^2-1}-\frac{1}{\omega^2-9}\right)\right]. \qquad (\Pi 14)$$

Полную поверхностную плотность можно определить по формуле: $\sigma=\rho_0\int \Delta r(v_\perp) f_0(v_\perp) v_\perp dv_\perp$, где $f_0(v_\perp)=\frac{1}{\pi}\theta(1-v_\perp^2)$ — функция распределения по $v_\perp$ частиц, касающихся поверхности шара. Дисперсионное уравнение получаем, как обычно, из условия сшивки решений уравнения Лапласа внутри и вне шара:

$$\frac{45}{\omega^2-9}+\frac{3}{\omega^2-1}=-\frac{112}{3}, \qquad (\Pi 15)$$

т. е. $\omega_{1,2}^2=\frac{1}{14}(61\pm\sqrt{2335})$ (частоты вещественные). Характеристическое уравнение для произвольных поверхностных мод (l — любое):

$$i\omega\int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} P_l(\cos t)\,dt=\frac{(l-1)(2l+5)}{6}. \qquad (\Pi 16)$$

Астрономический совет
АН СССР

STABILITY OF SPHERICAL GRAVITATING COLLISIONLESS SYSTEMS

V. L. POLYACHENKO

Stability of collisionless stellar clusters with various characters of anisotropy of star distributions in velocities is investigated with the help of the common method using the reduction procedure. It has been also proved in the paper that the reduction of the stability problem for the spherical system to the analogous problem of stability is relative to perturbations of the simplest form for the corresponding cylindrical system. For a spherical system immersed into a massive "halo" or containing a large central mass, the equations for eigenfunctions and frequencies of oscillations (the integral ones in the simplest case) are derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Антонов*, Вестн. ЛГУ, № 19, 96, 1962.
2. *D. Lynden-Bell*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 143, 167, 1969.
3. *А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, Я. Г. Эпельбаум*, Ж. эксперим. и теор. физ., 59, 1608, 1970.
4. *А. М. Фридман, И. Г. Шухман*, Докл. АН СССР, 202, 67, 1972.
5. *М. Я. Пальчик, А. З. Паташинский, В. К. Пинус, Я. Г. Эпельбаум*, Препр. ИЯФ СО АН СССР, №№ 99—100, Новосибирск, 1970.
6. *В. С. Сынах, А. М. Фридман, И. Г. Шухман*, Докл. АН СССР, 201, 827, 1971.
7. *В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман*, препр. СибИЗМИР СО АН СССР, №№ 1,2—72, Иркутск, 1972.
8. *Я. Б. Зельдович, В. Л. Поляченко, А. М. Фридман, И. Г. Шухман*, Препр. СибИЗМИР СО АН СССР, № 7—72, Иркутск, 1972.
9. *В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман*, Астрон. ж., 58, 933, 1981.
10. *В. Л. Поляченко*, Тр. симп. «Звездные скопления и ассоциации», Прага, 1983, стр. 89.
11. *В. Л. Поляченко*, Астрон. циркуляр, № 1405, 1, 1985.
12. *C. C. Lin, F. H. Shu*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 55, 229, 1966.
13. *G. L. Camm*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 112, 155, 1952.
14. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман*, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976;

    A. M. Fridman, V. L. Polyachenko, Physics of Gravitating Systems, vol. 1, 2 Springer-Verlag, New York, 1984.
15. *Н. Я. Виленкин*, Специальные функции и теория групп, Наука, М., 1965.
16. *В. Л. Поляченко*, Астрон. циркуляр, № 1405, 4, 1985.
17. *А. Б. Михайловский*, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, Атомиздат, М., 1970.
18. *В. А. Антонов*, в кн. «Динамика галактик и звездных скоплений», Наука, Алма-Ата, 1973.
19. *В. Л. Поляченко*, Письма в Астрон. ж., 7, 142, 1981.