А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 27 АВГУСТ, 1987 ВЫПУСК 1

УДК: 524.7—337

УСТОЙЧИВОСТЬ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ОДНОРОДНОГО СФЕРОИДА С АЗИМУТАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ. I

В. А. АНТОНОВ, О. А. ЖЕЛЕЗНЯК

Поступила 8 апреля 1986
Принята к печати 30 марта 1987

Исследуется влияние вмороженного магнитного поля на устойчивость самогравитирующего однородного сфероида по отношению к деформации, превращающей его в трехосный эллипсоид. Показано, что азимутальное магнитное поле является стабилизирующим фактором, благодаря которому сфероид может быть устойчив при $e > e_{кр} = 0.95285$.

1. *Введение*. Устойчивость однородных эллипсоидов без магнитного поля достаточно хорошо изучена [1, 2]. Напротив, мало работ, в которых учитывается влияние магнитного поля [3—5, 7]. Однако не исключено, что магнитное поле сможет сместить точку бифуркации и точку потери устойчивости. Естественно, что если при этом меняется порядок, в котором наступают различные виды неустойчивости, то это имеет важное значение для эволюции вращающейся конфигурации по тому или иному пути.

В данной работе мы имеем в виду холодные и сравнительно устойчивые самогравитирующие газовые облака типа, например, глобул или сгустков, возникших в результате фрагментации темных рукавов, включенных в более горячие газо-пылевые комплексы в галактиках. Конфигурация магнитного поля внутри облака может быть различной, но для соблюдения равновесия более благоприятен случай азимутального внутреннего поля (при продольном магнитном поле газ стремился бы растечься вдоль поля). Распирающее действие такого внутреннего поля не обязательно разрушает конфигурацию, поскольку оно может быть уравновешено давлением внешней горячей среды.

Пренебрегаем сжимаемостью и неоднородностью газа, а закон распределения напряженности магнитного поля задаем в виде $H = H_0 \frac{R}{a}$. Здесь и далее (R, z) — цилиндрические координаты, а a и c — экваториальная и полярная полуоси изучаемой эллипсоидальной фигуры. Предположим еще постоянство угловой скорости Ω. В такой упрощенной форме задача о равновесии конфигурации близка к классической постановке.

Внешняя среда нам нужна в сущности только как источник постоянного давления P_0. Конкретный закон ее вращения задавать не нужно, так как эффекты инерции, равно как и самогравитацию, во внешнем пространстве отбрасываем ввиду малой плотности горячей внешней среды.

2. *Условия равновесия.* Поскольку один из рассматриваемых далее видов деформаций эллипсоида вращения превращает его в трехосный, составим сразу условие равновесия для вращающейся трехосной фигуры. Магнитное поле у нас задано как чисто внутреннее: это свойство сохранится и при деформации. Поэтому в деформированном состоянии ищем магнитное поле в виде $\vec{H}=(-\lambda a^2\cdot y,\ \lambda b^2\cdot x,\ 0)$ в системе координат, связанной с главными осями эллипсоида (a, b, c—его полуоси). Ограничимся случаем постоянства a, b, c во времени, что осуществляется, если предположить стационарность по отношению к системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω. Однако при этом, вообще говоря, остаются внутренние течения вдоль силовых линий магнитного поля. Эти течения задаем следующим образом: $\vec{v}=(-k\cdot a^2y,\ kb^2x,\ 0)$. Очевидно, магнитное поле при указанном течении не меняется. Используя обычные уравнения магнитной гидродинамики, должны получить связь между введенными параметрами. Отбросив производные по времени, будем иметь:

$$\left\{\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=\Omega^2\cdot x+2\Omega\cdot v_y-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\vec{H}\times\vec{H}]_x\\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=\Omega^2\cdot y-2\Omega\cdot v_x-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\vec{H}\times\vec{H}]_y\\ 0&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

где P — газовое давление, U — гравитационный потенциал. Как известно, во всей внутренней области эллипсоида

$$U=-\frac{1}{2}(A^2x^2+B^2\cdot y^2+C^2z^2)+\text{const}.$$

Учтем условия равновесия на границе

$$\frac{H^2}{8\pi}+P=P_0,\qquad P=P_0-\frac{\lambda^2(a^4\cdot y^2+b^4\cdot x^2)}{8\pi}.$$

Соответственно, легко задать давление внутри фигуры в форме

$$P = P_0 - \frac{\lambda^2 (b^4 x^2 + a^4 y^2)}{8\pi} + \Theta \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

с пока неопределенным коэффициентом Θ.

$$\begin{cases} k^2a^2b^2 + 2\Omega \cdot kb^2 + \Omega^2 - A^2 - \dfrac{\lambda^2 b^2}{4\pi\rho}(a^2 + b^2) = -\dfrac{2\Theta}{\rho} \cdot \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{\lambda^2 b^4}{4\pi\rho}, & (1) \\ k^2a^2b^2 + 2\Omega \cdot ka^2 + \Omega^2 - B^2 - \dfrac{\lambda^2 a^2}{4\pi\rho}(a^2 + b^2) = -\dfrac{2\Theta}{\rho} \cdot \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{\lambda^2 a^4}{4\pi\rho}, & (2) \\ -C^2 = -\dfrac{2\Theta}{\rho} \cdot \dfrac{1}{c^2}. & (3) \end{cases}$$

Вернемся к исходной модели $a=b$, тогда (1) и (2) совпадают, а подстановка Θ из (3) дает

$$\omega^2 - A^2 - \frac{\lambda^2 a^4}{4\pi\rho} = -\frac{C^2 c^2}{a^2}, \qquad (4)$$

где $\omega = ka^2 + \Omega$ (внутренняя циркуляция и вращение координатной системы для эллипсоида вращения физически неразделимы).

Выражение для коэффициентов потенциала хорошо известно [6]

$$A^2 = 2\pi G\rho abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}},$$

в частности при $a=b$

$$A^2 = 2\pi G\rho \cdot a^2 \cdot c \left[-\frac{c}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{1}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \arccos\frac{c}{a}\right], \qquad (5)$$

$$C^2 = 4\pi G\rho \left[\frac{a^2}{(a^2 - c^2)} - \frac{a^2 \cdot c}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \arccos\frac{c}{a}\right]. \qquad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (4), находим искомое условие равновесия:

$$\omega^2 = 2\pi G\rho \left[-\frac{3 \cdot c^2}{a^2 - c^2} + \frac{c(a^2 + 2c^2)}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \arccos\frac{c}{a}\right] + \frac{H_0^2}{4\pi\rho a^2}, \qquad (7)$$

где использовано максимальное значение напряженности магнитного поля $H_0 = \lambda \cdot a^3$.

Отметим, что в присутствии магнитного поля, как шарообразной, так и дискообразной фигурам соответствует ненулевая скорость вращения,

$$\omega = \frac{H_0}{a\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Интересно, что в этих случаях скорость вращения совпадает с альвеновской.

3. Устойчивость по отношению к трехосности. Используя уравнения (1), (2), (3), можно найти класс деформаций, которые превращают исходный сфероид в трехосную фигуру. Ограничимся случаем малой деформации $a = a_0 + \varepsilon$, $b = a_0 - \varepsilon$. Оставляя в (1), (2) члены первого порядка малости, получим

$$A^2,\ B^2 = 2\pi G\rho a_0^2 \cdot c \left[-\frac{c}{a_0^2(a_0^2 - c^2)} + \frac{1}{(a_0^2 - c^2)^{3/2}} \arccos\frac{c}{a_0} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{c\cdot\varepsilon}{a_0^2(a_0^2 - c^2)} \pm \frac{3}{2}\frac{c\cdot\varepsilon}{a_0(a_0^2 - c^2)^2} \mp \frac{3}{2}\frac{a_0\cdot\varepsilon}{(a_0^2 - c^2)^{5/2}} \arccos\frac{c}{a_0}\right],$$

и далее, используя уже известное значение Θ, которое в данном приближении не меняется, имеем

$$-4\Omega k a_0 \varepsilon - 2\pi G\rho a_0^2 \cdot c \left[\frac{\varepsilon\cdot c}{a_0^3(a_0^2 - c^2)} + \frac{3c\cdot\varepsilon}{2a_0(a_0^2 - c^2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2}\frac{a_0\cdot\varepsilon}{(a_0^2 - c^2)^{5/2}} \arccos\frac{c}{a_0}\right] = \frac{2\varepsilon c^2\cdot C^2}{a_0^3}. \tag{8}$$

Сократим общий множитель ε и опустим ненужный более индекс «0». В случае $k = 0$ (отсутствия внутреннего вращения) из (8) получается условие для точки бифуркации: она, оказывается, не зависит от магнитного поля. В общем же случае у величин $k\cdot a^2$ и Ω известна сумма ω, а также произведение из формулы (8). Так что обе эти величины можно найти из квадратного уравнения. Сфероид устойчив по отношению к колебаниям, создающим трехосность, пока значение Ω получается вещественным, т. е. $\omega^2 = (k\cdot a^2 + \Omega)^2 > 4k\cdot a^2\Omega$, что в силу (8), после раскрытия C, эквивалентно:

$$\omega^2 > \pi G\rho c\left[-\frac{13a^2 - 10c^2}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{3a^4 + 8a^2c^2 - 8c^4}{(a^2 - c^2)^{5/2}} \arccos\frac{c}{a}\right].$$

Наконец, используя уравнение равновесия (7), приводим условие устойчивости к виду:

$$\frac{H_0^2}{4\pi^2 G\rho^2\cdot a^2} + \frac{c^2(7a^2 - 4c^2)}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{c(4c^4 - a^4 - 6a^2c^2)}{(a^2 - c^2)^{5/2}} \arccos\frac{c}{a} > 0. \tag{9}$$

В граничном случае, когда теряется устойчивость, $H_0^2/4\pi^2 G\rho^2 a^2 = f(e)$, с некоторой функцией $f(e)$, изображенной на рис. 1. Вообще же при заданной степени сжатия магнитное поле стабилизирует конфигурацию. Если с ростом уплотнения газа эволюция идет по последовательности $a = b$, то с магнитным полем достигается без потери устойчивости величина e, превосходящая $e_{кр} = 0.95285$, известная из теории классических фигур равновесия.

До сих пор речь шла о динамической неустойчивости. Что же касается вековой неустойчивости, связанной, например, с потерей энергии на возбуждение волн в окружающей среде, то она наступает сразу за точкой бифуркации ввиду действия тех же правил смены устойчивости, как и без магнитного поля [6].

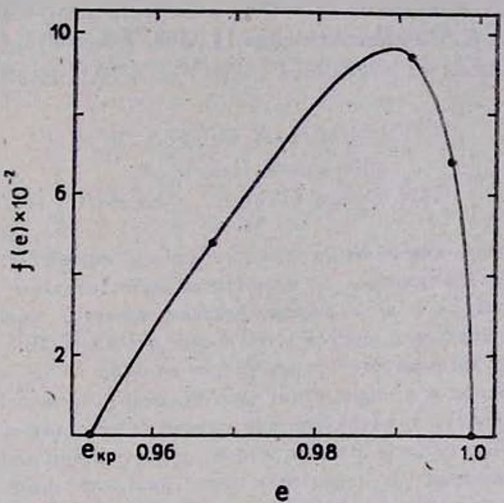

Рис. 1.

Авторы выражают признательность Г. С. Бисноватому-Когану и М. Г. Абрамяну за полезное обсуждение.

Ленинградский государственный
университет
Шемахинская астрофизическая
обсерватория

THE STABILITY OF SELF-GRAVITATIONAL UNIFORM SPHEROID WITH AZIMUTHAL MAGNETIC FIELD. I

V. A. ANTONOV, O. A. ZELESNYAK

The influence of secondary magnetic field on the stability of the self-gravitational uniform spheroid in respect to deformation that transforms it to three axes ellipsoid has been investigated. It has bee

shown that the azimuthal magnetic field is a stabilizing factor, thanks to the fact that spheroid can be stable at $e > e_{cr} = 0.95285$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
2. *В. А. Антонов*, Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Астрон., 10, М., 1975.
3. *Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян*, Астрофизика, 8, 599, 1972.
4. *Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян*, Астрофизика, 9, 401, 1973.
5. *Р. С. Оганесян, М. Г. Абрамян*, Астрон. ж., 50, 996, 1973.
6. *М. Ф. Субботин*, Курс небесной механики, т. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. *R. K. Kochhar, S. K. Trehan*, Astrophys. J., 168, 265, 1971.