АСТРОФИЗИКА

ТОМ 27 АВГУСТ, 1987 ВЫПУСК 1

УДК: 524.4—54

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ КОЛЛАПС ОДНОРОДНОГО ЗВЕЗДНОГО СКОПЛЕНИЯ

Г. С. БИСНОВАТЫЙ-КОГАН, Л. Р. ЯНГУРАЗОВА

Поступила 25 сентября 1986

Рассматривается интегральный метод расчета динамических стадий эволюции сферически симметричных релятивистских звездных скоплений, основанный на анализе отдельных звездных траекторий и их пересечений. Рассчитан коллапс скопления с начальной однородной плотностью, начальным радиусом $r = 5\ r_g$ и моментами вращения частиц J_i, не превышающими $2mcr_{gi}$. Получено, что при $N = 100$ все частицы коллапсируют в черную дыру, а при $N = 200$ две частицы остаются на далеких орбитах.

1. *Введение.* В плотных скоплениях, как и в плотных звездах, может достигаться состояние, неустойчивое относительно развития релятивистского коллапса. Быстрые звезды скопления испаряются [1, 2], а остающаяся часть скопления медленно сжимается вплоть до наступления релятивистской неустойчивости, ведущей к коллапсу [3]. Такая судьба, видимо, ожидает достаточно массивные скопления с начальным числом звезд N солнечной массы $N \sim 10^9 \div 10^{10}$ и небольшим вращательным моментом. На поздних стадиях эволюции скопления важную роль могут играть лобовые столкновения звезд, ведущие к слипанию и потере массы, а также образование сверхмассивных звезд. Для скоплений с начальными массами $\lesssim 10^7\ M_\odot$ эти процессы могут препятствовать релятивистскому коллапсу [4, 5]. Не менее важным фактором, препятствующим коллапсу и ведущим к образованию звездного диска, является вращение [6—8].

В настоящей работе излагается метод исследования динамики сферически симметричных скоплений после потери устойчивости из-за релятивистских эффектов, который применяется для рассмотрения коллапса скопления однородной в начале плотности. Метод является обобщением интегрального метода, развитого для случая ньютоновской гравитации в [9] и применявшегося для исследования коллапса скоплений в [10]. Более сложный метод расчета той же проблемы в ОТО рассматривался в [11].

2. *Орбиты частиц в метрике Шварцшильда.* Интегральный метод исследования динамики сферических скоплений основан на рассмотрении движения каждой отдельной частицы в сферически симметричном поле тяготения остальных частиц и использовании законов сохранения для определения энергий частиц после пересечения их траекторий. При этом учитывается тот факт, что в сферически симметричном поле движение частиц определяется только внутренними массами. Это свойство сохраняется и в общей теории относительности [12].

Рассмотрим кратко свойства орбит в сферически симметричном поле тяготения с метрикой Шварцшильда, необходимые для дальнейших вычислений. В шварцшильдовой системе координат метрика вне сферически симметричного тела имеет вид:

$$\begin{gathered} ds^2 = (1 - r_g/r)\, c^2 dt^2 - r^2 (\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) - dr^2/(1 - r_g/r), \\ r_g = 2GM/c^2, \end{gathered} \tag{1}$$

где M — полная масса тела.

Движение частицы с полной энергией E, массой покоя m и вращательным моментом J в шварцшильдовом поле определяется уравнением [12]

$$\frac{1}{1 - r_g/r}\frac{dr}{cdt} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 - \left(1 + \frac{\zeta^2 r_g^2}{r^2}\right)(1 - r_g/r)}\,. \tag{2}$$

Здесь:

$$\varepsilon = E/mc^2, \quad \zeta = J/mcr_g. \tag{3}$$

Для анализа орбит удобно рассматривать кривые $\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2(r)$, которые получаются приравниванием нулю подкоренного выражения в (2) и аналогичны потенциальным кривым в нерелятивистском случае [12, 13]. В ньютоновском пределе

$$mc^2[\varepsilon_0(r) - 1] \approx \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \tag{4}$$

т. е. сводится к полной потенциальной (с учетом центробежной) энергии частицы (звезды).

Различные значения ζ порождают три типа потенциальных кривых. Функция $\varepsilon^2(y)$, где $y = r_g/r$, записывается в виде:

$$\varepsilon^2(y) = (1 + \zeta^2 y^2)(1 - y) = 1 - \zeta^2 y^3 + \zeta^2 y^2 - y. \tag{5}$$

Экстремумы кривой $\varepsilon^2(y)$ определяются уравнением

$$-(\varepsilon^2)'_y = 3\zeta^2 y^2 - 2\zeta^2 y + 1 = 0 \tag{6}$$

и расположены в точках

$$y_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{3\zeta^2}}\,. \tag{7}$$

Если $\zeta^2 < 3$, то кривая $\varepsilon^2(r)$ не имеет действительных экстремумов (рис. 1a). При $3 < \zeta^2 < 4$ имеет место $\varepsilon^2_{max} < 1$ (рис. 1b), а при $\zeta^2 > 4$

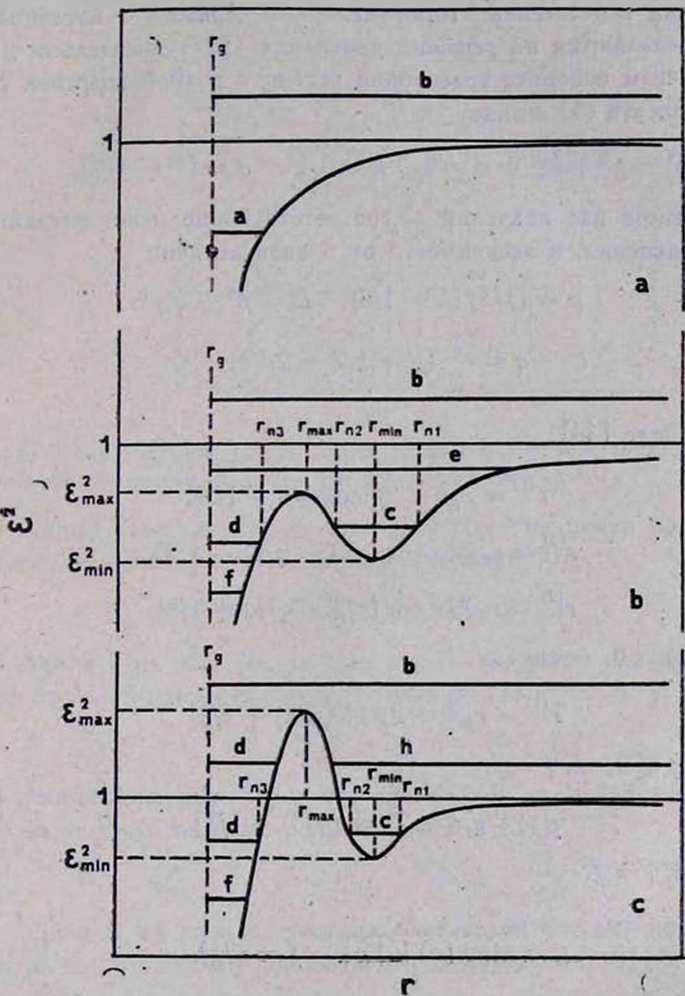

Рис. 1. Потенциальные кривые движения частиц в поле Шварцшильда.

реализуется $\varepsilon^2_{max} > 1$ (рис. 1c). Отметим, что $y_{max} = y_1$ соответствует верхнему знаку в (7), а соотношение между ε^2_{max} и 1 определяет возможность улета частицы на бесконечность, т. к. $\varepsilon^2(r = \infty) = 1$.

Ввиду положительности радиальной кинетической энергии $E_{кин}$ и сохранении полной, движение данной частицы представляется горизонтальной прямой, расположенной выше потенциальной кривой. В экстремумах кривой $\varepsilon^2(r)$ расположены круговые орбиты с $E_{кин}=0$, неустойчивые в максимумах и устойчивые в минимумах. Когда горизонтальная прямая три раза пересекает потенциальную кривую, то возможно устойчивое движение с $r_{п_2}<r<r_{п_1}$, аналогичное движению по эллипсу в ньютоновском пределе. Точки пересечения горизонтальных прямых с потенциальными кривыми определяются из решения уравнения (5) относительно y и соответствуют точкам поворота траекторий частиц с полной энергией E.

Если записать (5) в виде:

$$y^3-y^2+ky+d=0,\quad k=1/\zeta^2,\quad d=(\varepsilon^2-1)/\zeta^2, \tag{8}$$

то интересующие нас значения r, соответствующие действительным корням этого уравнения, в зависимости от знаков величин

$$p=(1/3)(k-1/3),\quad D=p^3+q^2,$$
$$q=\frac{1}{2}(d+k/3-2/27), \tag{9}$$

запишутся в виде [14]:

$$r^{(1)}=r_g/(-2g\cos\varphi/3+1/3),$$
$$r^{(2)}=r_g/[2g\cos(\pi/3-\varphi/3)+1/3], \tag{10}$$
$$r^{(3)}=r_g/[2g\cos(\pi/3+\varphi/3)+1/3]$$

при $D\leqslant 0$, $p<0$, $\cos\varphi=f$.

$$r^{(1)}=r_g/[-2g\,\mathrm{ch}(\varphi/3)+1/3] \tag{11}$$

при $D>0$, $p<0$, $\mathrm{ch}\,\varphi=f$.

$$r^{(1)}=r_g/[-2g\,\mathrm{sh}(\varphi/3)+1/3] \tag{12}$$

при $p>0$, $\mathrm{sh}\,\varphi=f$.

Здесь

$$g=\mathrm{sign}(q)\sqrt{|p|},\quad f=q/g^3. \tag{13}$$

Можно выделить семь типов траекторий частиц в поле Шварцшильда, задаваемых прямыми a, b, c, d, e, f, h на рис. 1, см. рис. 2.

1) Линия *a* на рис. 1а; частица падает в центр сразу или после отражения от точки поворота, задаваемой формулой (12): $\varepsilon^2<1$, $\zeta^2<3$.

2) Линия b на рис. 1 без точек поворота; частица либо падает в центр, либо улетает на бесконечность; $\varepsilon^2 > \max\{1, \varepsilon^2_{max}\}$, ζ^2 — любое.

3) Линии c на рис. 1b, c; частица совершает финитное движение между двумя точками поворота, определяемыми в (10);

$$\varepsilon^2_{min} < \varepsilon^2 < \min\{1, \varepsilon^2_{max}\}, \quad \zeta^2 > 3, \quad r > r_{max}.$$

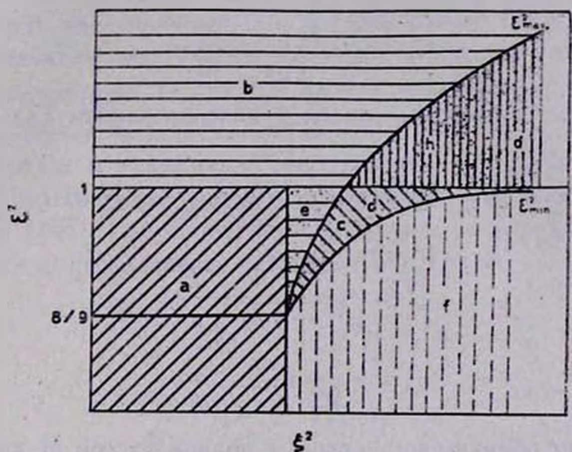

Рис. 2. Различные типы траекторий на плоскости (ε^2, ζ^2); точки в областях «c» и «h» указывают на существование там еще траекторий типа «d».

4) Линии d на рис. 1b, c; частица падает на центр сразу, или после отражения от точки поворота, определяемой в (10);

$$\varepsilon^2_{min} < \varepsilon^2 < \varepsilon^2_{max}, \quad \zeta^2 > 3, \quad r < r_{max}.$$

5) Линия e на рис. 1b; частица падает на центр сразу, или после отражения от точки поворота, определяемой в (11);

$$\varepsilon^2_{max} < \varepsilon^2 < 1, \quad 3 < \zeta^2 < 4.$$

6) Линия f на рис. 1b, c; частица падает на центр сразу, или после отражения от точки поворота, определяемой в (11);

$$\varepsilon^2 < \varepsilon^2_{min}, \quad \zeta^2 > 3.$$

7. Линия h на рис. 1c; частица улетает на бесконечность сразу, или после отражения от точки поворота, определяемой в (10);

$$1 < \varepsilon^2 < \varepsilon^2_{max}, \quad \zeta^2 > 4, \quad r > r_{max}.$$

3. *О методе счета.* В начальный момент задаются полные энергии E_i и угловые моменты J_i всех частиц. Траектория частицы зависит от гравитационного поля внутренних частиц, которое характеризуется величиной

$$r_{gi} = \frac{2G}{c^4}\left(m_0c^2 + \sum_{j=1}^{i} E_j\right) = \frac{2G}{c^4}(Mc^2 + E_i), \tag{14}$$

где M — полная масса, лежащая внутри орбиты i-ой частицы, а m_0 — масса частицы, расположенной в центре скопления. Необходимость учета самогравитации частицы объясняется ниже. Физическое значение скорости частицы v_r при движении в поле Шварцшильда есть [12]

$$v_r = \frac{1}{1 - r_g/r} \cdot \frac{dr}{dt}, \tag{15}$$

а сохраняющаяся полная энергия E, с использованием (2) и (15) запишется в виде:

$$E^2 = \frac{(m^2c^4 + c^2J^2/r^2)(1 - r_g/r)}{1 - v_r^2/c^2};$$

$$J = \frac{rv_\varphi}{\sqrt{1 - r_g/r}} \cdot \frac{E}{c^2}; \tag{16}$$

$$v_\varphi = r\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - r_g/r}\, dt}.$$

Пусть вокруг сферического «тела» с полной массой M летают две частицы, каждая из которых задается сферически симметричным слоем с полной энергией E_1 и E_2, с угловым моментом J_1 и J_2 соответственно. Если первая частица расположена внутри второй, то согласно (14):

$$r_{g_1} = \frac{2G}{c^2}(M + E_1/c^2);$$

$$r_{g_2} = \frac{2G}{c^2}[M + (E_1 + E_2)/c^2]. \tag{17}$$

После пересечения частицы меняются местами и первая становится наружной, а вторая — внутренней. В момент пересечения меняется гравитационное поле, действующее на каждую частицу. Значения скоростей и угловой момент не меняются, а меняются их полные энергии, которые становятся равными E_1' и E_2'. Ввиду сохранения величины $E/\sqrt{1 - r_g/r}$ для каждой частицы при пересечении, получим

$$E_1' = E\sqrt{\frac{1 - r_{g_1}'/r}{1 - r_{g_1}/r}}, \qquad r_{g_1}' = \frac{2G}{c^2}\left(M + \frac{E_1' + E_2'}{c^2}\right). \tag{18}$$

Ввиду того, что пересечение частиц не должно менять внешнего гравитационного поля, имеем условие:

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'. \tag{19}$$

Если для энергии E_2' выписать соотношение, аналогичное (18), то окажется нарушенным условие (19). Это связано с нелинейностью, присущей ОТО и делающей необходимым точный учет самогравитации, вместо приближенного в (14). Такой учет слишком усложнил бы задачу, поэтому рассматривается приближенный вариант описания пересечения, где E_1' и E_2' определяются из уравнений (18) и (19). Выбор (14) и (17) для приближенного описания самогравитации связан с тем, что он никогда не приводит к самозамыканию $(r > r_g)$ в момент пересечения и позволяет рассматривать движение частиц (слоев) вблизи r_g.

Расчет состоит в нахождении последовательных по времени пересечений частиц и пересчете их параметров после каждого пересечения по формулам (18) и (19) аналогично [9, 10]. Если для радиального движения 1-ой и 2-ой частиц использовать уравнение (2) в виде:

$$\frac{dr_1}{dt} = f_1(r), \quad r_1(t_0) = r_{10},$$
$$\frac{dr_2}{dt} = f_2(r), \quad r_2(t_0) = r_{20}, \tag{20}$$

то точка пересечения R_1 и время T_1 пересечения соседних частиц определяются из уравнения:

$$T_1 = \int_{r_{10}}^{R_1} \frac{dr}{f_1(r)} = \int_{r_{20}}^{R_1} \frac{dr}{f_2(r)}. \tag{21}$$

На каждом шагу пересекаются частицы с минимальной величиной T_1 из всех возможных пересечений соседних частиц и проводится перенумерация частиц.

Таким образом, на каждом шагу возможно пересечение частицы i только с частицами $i+1$ или $i-1$. Блок-схема программы представлена на рис. 3.

Как следует из (2), интеграл в (21) имеет устранимую особенность при $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$ для финитных движений и логарифмическую особенность при $r = r_g$. Последняя приводит к известному застыванию всех процессов при $r = r_g$, а наличие первых требует специального рассмотрения краевых областей при вычислении интеграла в (21) методом Гаусса.

4. *Безразмерные переменные и выбор начальной модели.* Заменой переменных

$$j = J/m_0cR_*; \quad x = r/R_*; \quad \tau = ct/R_*, \quad x_g = r_g/R_* \tag{22}$$

с $R_* = Gm_0/c^2$ уравнение (2) сводится к безразмерному виду:

$$\frac{1}{1 - x_g/x}\,\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 - (1 + j^2/x^2)(1 - x_g/x)}\,, \tag{23}$$

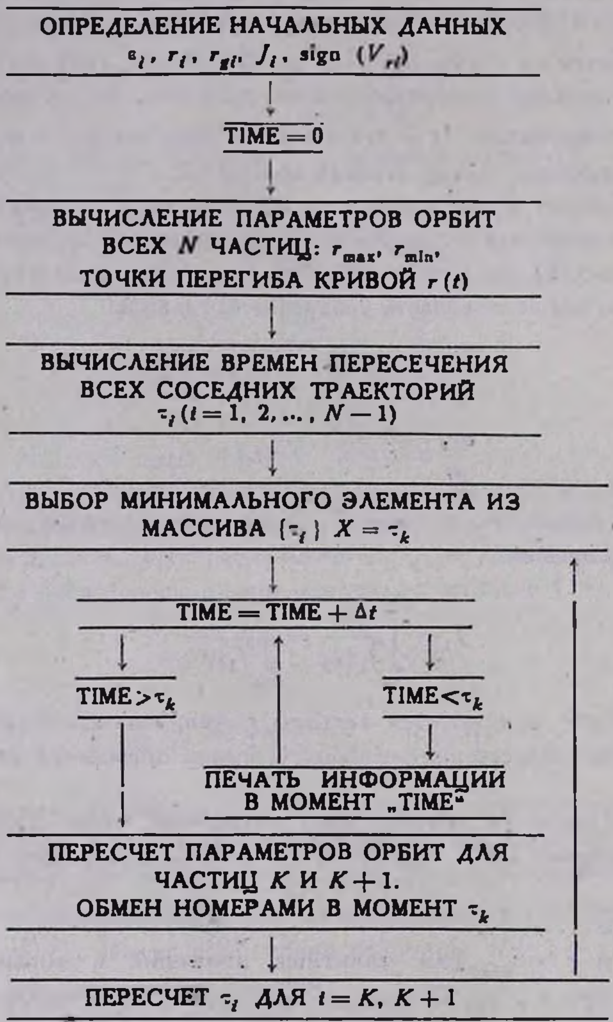

Рис. 3. Блок-схема программы.

$$x_{gi} = 2\left(1 + \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j\right). \tag{24}$$

Здесь предполагается, что все частицы, в том числе центральные, имеют одинаковые массы m_0.

Расчет проводился для числа частиц (оболочек) $N = 100$ и $N = 200$. Начальные энергии частиц выбирались по условию:

$$\varepsilon_i = 0.9 + 0.1\psi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{25}$$

где ψ_i — равномерно распределенная на интервале (0.1) случайная величина. Вращательные моменты задавались из условия

$$j_i = x_{gi}(2 - \psi_i). \tag{26}$$

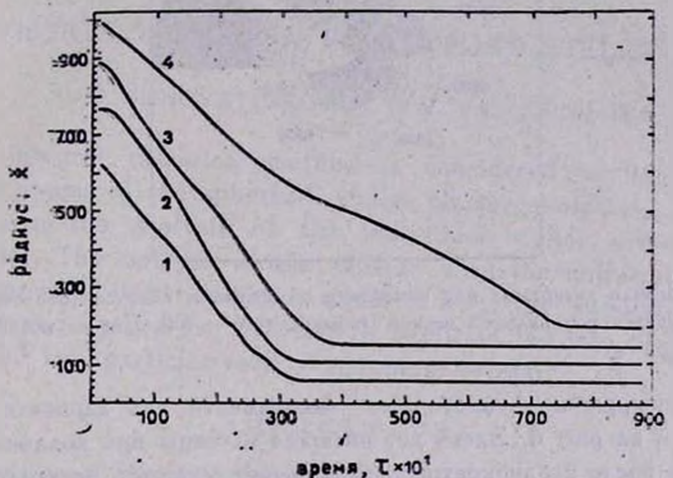

Рис. 4. Зависимость радиусов частиц (оболочек) со временем для $N = 100$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют номерам оболочек $i = 25, 50, 75, 100$.

Начальное распределение плотности предполагалось однородным и оболочки выстраивались по закону:

$$x_i = x_1 \sqrt[3]{i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{27}$$

Значение x_1 выбиралось из условия $x_N/x_{gN} \approx 5$, как на границе устойчивости изотермического облака [3]. При $x_N = 5x_{gN}$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5\cdot 2\cdot 101}{\sqrt[3]{100}} \approx 218 \quad \text{для} \quad N = 100, \\ x_1 &= \frac{5\cdot 2\cdot 201}{\sqrt[3]{200}} \approx 344 \quad \text{для} \quad N = 200. \end{aligned} \tag{28}$$

В расчетах принималось, соответственно $x_1 = 215$ и 350. В начальный момент все частицы движутся к центру.

5. *Результаты расчетов.* Результаты расчетов в безразмерных переменных (22) даны на рис. 4, 5. Зависимость радиусов отдельных слоев от времени дана на рис. 4, а веерная диаграмма изменения структуры скопления со временем — на рис. 5. В варианте с $N = 100$ все частицы скопления в

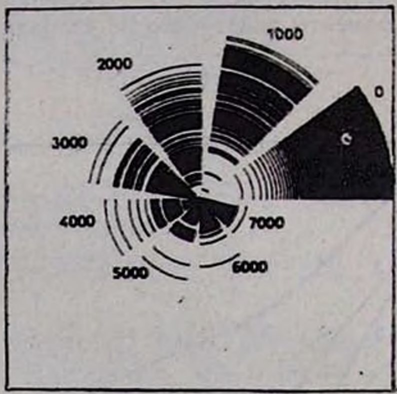

Рис. 5. Веерная диаграмма для изменения со временем радиусов оболочек и гравитационного радиуса центральной черной дыры для $N = 100$. Цифры обозначают безразмерное время τ.

итоге коллапсируют. Аналогичные зависимости для варианта $N = 200$ представлены на рис. 6. Здесь две внешние частицы при коллапсе остальной системы после неоднократных пересечений остаются на удаленных ор-

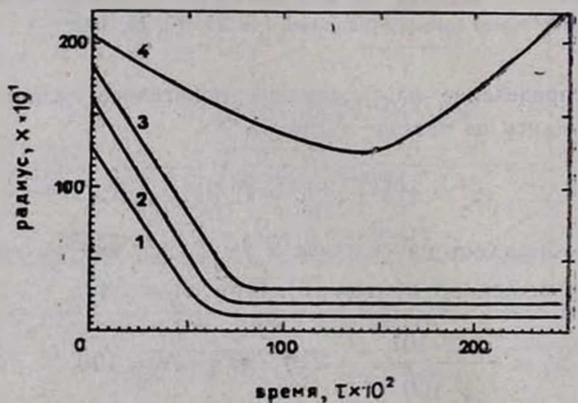

Рис. 6. Зависимость радиусов частиц (оболочек) со временем для $N = 200$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют номерам оболочек $i = 50, 100, 150, 200$.

битах, перигелий которых приблизительно в два раза превышает начальный радиус системы. Отметим, что в аналогичных расчетах [15, 16] для других начальных условий происходил коллапс всего скопления. Очевидно, что важнейшее значение для результатов коллапса играют начальные условия. Расчеты с другими начальными условиями, соответствующими равновесным скоплениям на границе устойчивости из [3, 17], предполагается провести в ближайшее время.

Институт космических
исследований АН СССР

RELATIVISTIC COLLAPSE OF THE UNIFORM STELLAR CLUSTER

G. S. BISNOVATYI-KOGAN, L. R. YANGURAZOVA

An integral numerical method is considered for calculating the dynamical stages of the spherical stellar cluster evolution. The method is based upon the analysis of the individual stellar orbits and their intersections. The collapse of the cluster with the uniform initial density is computed, initial radius is equal to $5\,r_g$, the angular momentum does not exeed $2\,mcr_g$. For $N=100$ all particles fall into black hole and for $N=200$ two particles remain in remote orbits.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, Уч. зап. ЛГУ, 22, 19, 1938.
2. *L. Spitzer*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 100, 396, 1940.
3. *Я. Б. Зельдович, М. А. Подурец*, Астрон. ж., 42, 963, 1965.
4. *Г. С. Бисноватый-Коган*, Письма в Астрон. ж., 4, 130, 1978.
5. *A. P. Lightman, S. L. Shapiro*, Rev. Mod. Phys., 50, 437, 1978.
6. *Т. А. Агекян*, Астрон. ж., 35, 26, 1958.
7. *L. Spitzer, W. C. Saslaw*, Astrophys. J., 143, 400, 1966.
8. *М. М. Романова*, Астрон. ж., 61, 252, 1984.
9. *Л. Р. Янгуразова*, Инф. Бюл. ГосФАП, № 5 (43), 1981.
10. *L. R. Yangurazova, G. S. Bisnovatyi-Kogan*, Astrophys. and Space Sci., 100, 319, 1984.
11. *S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky*, Astrophys. J., 298, 34, 1985.
12. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1967.
13. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Теория тяготения и эволюция звезд, Наука, М., 1971.
14. *И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев*, Справочник по математике, Наука, М., 1967.
15. *S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky*, Astrophys. J., 298, 58, 1985.
16. *S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky*, Astrophys. J., 307, 575, 1986.
17. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрофизика, 5, 223, 1969.