

УДК: 521.19:517.537.6

ПРОБЛЕМА ДИРИХЛЕ В ЗВЕЗДНОЙ ДИНАМИКЕ. II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ, Е. А. МАЛКОВ

Поступила 27 мая 1986

Принята к печати 2 марта 1987

Развит гидродинамический метод исследования и построения однородных бесстолкновительных моделей. Доказана теорема, родственная теореме Римана для жидких эллипсоидов: в бесстолкновительном эллипсоиде ось вращения и вектор вихря должны или совпадать с какой-либо осью его симметрии, или лежать в одной из главных его плоскостей. Из множества мыслимых вариантов моделей производится отбор физически разумных, определяются свободные параметры и находятся характеристики всех членов семейства. Двумерные и трехмерные модели рассматриваются раздельно. Вносится методическое улучшение в проблему построения бесстолкновительных фигур. Попутно обращается внимание на достоинства и недостатки метода.

1. *Введение.* В статье [1] была получена система из пятнадцати временных дифференциальных уравнений, которые описывают сложные нелинейные колебания однородного бесстолкновительного эллипсоида с внутренними течениями центроидов. В стационарном случае эти уравнения упрощаются и мы имеем

$$-a_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) + 2(a_3\lambda_2\Omega_2 + a_2\lambda_3\Omega_3) + 2A_1a_1 = 2\sigma_{11}^0/a_1; \quad (1)$$

$$a_1\lambda_1\lambda_2 + a_2\Omega_1\Omega_2 - 2a_3\lambda_1\Omega_2 = 2\sigma_{12}^0/a_2; \quad (2)$$

$$a_3\lambda_1\lambda_3 + a_1\Omega_1\Omega_2 - 2a_2\lambda_2\Omega_1 = 2\sigma_{12}^0/a_1; \quad (3)$$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_3\right)\sigma_{12}^0 + \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_2\right)\sigma_{13}^0 = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 + 2\Omega_3\right)\sigma_{11}^0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_3\right)\sigma_{22}^0 + \\ &+ \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_2\right)\sigma_{23}^0 + \left(\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 - 2\Omega_1\right)\sigma_{13}^0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Каждое из приведенных уравнений при круговой перестановке индексов дает еще два уравнения, так что в совокупности (1)—(5) — это система из пятнадцати уравнений. Здесь a_i — полуоси эллипсоида, Ω_i — компоненты его угловой скорости, λ_i — характеризуют интенсивность внутренних течений и связаны с вихрем соотношениями

$$\zeta_i = -\lambda_i \left(\frac{a_j}{a_k} + \frac{a_k}{a_j} \right),$$

σ_{ij}^0 — шесть компонентов тензора дисперсии скоростей в центре эллипсоида.

Уравнения (1)—(5) описывают фигуры равновесия. Построение бесстолкновительных фигур равновесия начал Фриман [2—4]. Им найдены решения для диска, цилиндра и эллипсоида, вращающихся вокруг одной из главных осей симметрии. Важный критический анализ проблемы сделал Хантер [5]. Принципиально новая модель равновесного эллипсоида была построена в [6]: ось вращения у него в общем случае не совпадала с осью симметрии, но обязана была лежать в одной из главных плоскостей эллипсоида.

Единственным методом построения моделей до сих пор был кинетический метод (обзор некоторых решений в [7]). Все рассуждения велись на «языке частиц». Неудивительно поэтому, что на этом языке весьма сложно, а в некоторых случаях и просто невозможно, основываясь только на уравнениях движения частиц внутри модели, доказывать глобальные свойства фигур равновесия. Например, при построении модели [6] на кинетическом языке исключительно сложно доказать, что ось вращения не может находиться вне одной из главных плоскостей эллипсоида.

Но подобные сложные вопросы глобального описания фигур равновесия находят изящное решение при гидродинамическом методе на языке усредненных величин. Основой гидродинамического метода служат уравнения (1)—(5). Цель этой статьи — продемонстрировать эффективность гидродинамического метода при построении бесстолкновительных фигур равновесия с квадратичным потенциалом. Этот метод позволит нам весьма просто доказать некоторые общие теоремы (как, например, известную ранее только для жидких эллипсоидов фундаментальную теорему Римана [8]), проверить некоторые варианты моделей на вопрос внутренней непротиворечивости. Наконец, развиваемый подход имеет и методическую ценность, ведь характеристики всех моделей определяются единым способом — при решении системы алгебраических и трансцендентных уравнений.

В следующем разделе исследуются общие свойства уравнений равновесия. В разделе 3 рассматриваются двумерные конфигурации. Эллипсоиды без дисперсии скоростей рассмотрены в разделе 4. В разделе 5 иссле-

дуются эллипсоиды с дисперсией скоростей, обладающие наклонным вращением. Наконец, в разделе 6 рассмотрен эллипсоид, вращающийся вокруг оси симметрии.

2. *Некоторые общие свойства системы уравнений равновесия.* В самом общем случае эллипсоид описывается четырнадцатью величинами: среди них двенадцать динамических,

$$\Omega_i, \lambda_i, \sigma_{ij}^0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (6)$$

и две геометрические,

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}. \quad (7)$$

Прежде всего, компоненты векторов $\bar{\Omega}$ и $\bar{\lambda}$ в уравнениях (1)—(5) неразрознены, но динамически спарены друг с другом. Действительно, если в паре (Ω_i, λ_i) положить один член равным нулю, то из уравнений равновесия тогда следует, что второй член пары также должен быть нулем. Например, полагая в паре (Ω_i, λ_i) член $\Omega_i = 0$, из уравнений (2) и (3) заключаем, что и $\lambda_i = 0$ (а также $\sigma_{12}^0 = 0$).

Важным свойством уравнений (2)—(5) является их инвариантность к перестановке местами величин Ω_i и λ_i . Единственным исключением будет частный случай эллипсоидов без дисперсии скоростей. Поэтому для бесстолкновительных эллипсоидов с дисперсией скоростей не существует, в отличие от жидких эллипсоидов, сопряженных конфигураций в смысле теоремы Дедекинда [8]. Для нестационарных эллипсоидов ситуация, естественно, та же самая (см. [1]).

Из тех четырнадцати величин, которыми описывается эллипсоид, некоторые следует отнести к независимым параметрам. Эти параметры должны полностью определять фигуру равновесия. Какие именно величины могут быть в том или ином случае параметрами—непростой вопрос. Он должен решаться при конкретном анализе соответствующей системы уравнений.

Поскольку удобно считать заданной геометрическую форму фигуры равновесия, то заранее можно условиться, что по крайней мере одно из отношений (7) будет независимым параметром. Поэтому в уравнениях (1)—(5) число неизвестных величин не может превышать тринадцати. Следовательно, число уравнений—а их пятнадцать—в общем случае не соответствует числу неизвестных в них величин.

Из создавшейся ситуации есть только один выход: необходимо часть неизвестных приравнять нулю. На первых порах можно приравнять нулю одну из трех пар компонентов (Ω_i, λ_i) . Полагая без ограничения общности

$$\Omega_1 = \lambda_1 = 0, \quad (8)$$

получим из (1)—(5) систему семи уравнений:

$$\begin{aligned} -a_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) + 2(a_3\lambda_2\Omega_2 + a_2\lambda_3\Omega_3) + 2A_1a_1 &= 2\sigma_{11}^0/a_1; \\ -a_2(\lambda_3^2 + \Omega_3^2) + 2a_1\lambda_3\Omega_3 + 2A_2a_2 &= 2\sigma_{22}^0/a_2; \\ -a_3(\lambda_2^2 + \Omega_2^2) + 2a_1\lambda_2\Omega_2 + 2A_3a_3 &= 2\sigma_{33}^0/a_3; \\ a_1\lambda_2\lambda_3 + a_3\Omega_2\Omega_3 - 2a_1\lambda_2\Omega_3 &= 2\sigma_{23}^0/a_3; \\ a_2\Omega_2\Omega_3 + a_3\lambda_3\lambda_2 - 2a_1\lambda_3\Omega_2 &= 2\sigma_{23}^0/a_2; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 + 2\Omega_2\right)\sigma_{11}^0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_2\right)\sigma_{22}^0 + \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_3\right)\sigma_{33}^0 &= 0; \\ \left(\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 - 2\Omega_2\right)\sigma_{11}^0 + \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_3\right)\sigma_{33}^0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_2\right)\sigma_{23}^0 &= 0. \end{aligned}$$

Ситуация принципиально изменилась, поскольку неизвестных в системе (9) уже никак не меньше числа уравнений. Мы приходим к заключению: заведомо не существует такой равновесный бесстолкновительный эллипсоид, у которого векторы $\vec{\Omega}$ и $\vec{\lambda}$ имели бы по три отличных от нуля компонента. Другими словами, или ось вращения и вектор вихря должны совпадать с одной из осей симметрии эллипсоида, или же оба они должны лежать в одной из его главных плоскостей. Аналогичную теорему, но для жидких эллипсоидов, доказал Риман [9] (фундаментальная теорема Римана по Чандрасекару).

Рассмотрим основные случаи, когда система уравнений равновесия (9) становится замкнутой.

3. *Двумерные фигуры равновесия.* В семействе бесстолкновительных моделей эллиптические цилиндры и диски выделяются относительной простотой их описания. Искомые уравнения мы получим, положив в (9)

$$\Omega_2 = \lambda_2 = \sigma_{33}^0 = 0 \text{ (следовательно, и } \sigma_{23}^0 = 0); \Omega_3 = \Omega, \lambda_3 = \lambda. \quad (10)$$

Остается система трех уравнений

$$\begin{aligned} -a_1(\lambda^2 + \Omega^2) + 2a_2\lambda\Omega + 2A_1a_1 &= 2\sigma_{11}^0/a_1; \\ -a_2(\lambda^2 + \Omega^2) + 2a_1\lambda\Omega + 2A_2a_2 &= 2\sigma_{22}^0/a_2; \\ \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda + 2\Omega\right)\sigma_{11}^0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda - 2\Omega\right)\sigma_{22}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

для пяти величин

$$\Omega, \lambda, \sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \frac{a_2}{a_1}. \quad (12)$$

Поэтому в общем случае двумерные модели могут иметь два параметра.

Исключив с помощью первых двух уравнений оба компонента дисперсии скоростей в третьем уравнении, получим

$$\Omega^2 = 2\Omega \frac{A_1 a_1^2 - A_2 a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} + \lambda a_1 a_2 \frac{A_2 - A_1}{a_1^2 - a_2^2}. \quad (13)$$

Независимыми параметрами будем считать величины

$$0 \leq n = \frac{a_2}{a_1} \leq 1 \quad \text{и} \quad \eta = \frac{\Omega^2}{2A_1}. \quad (14)$$

Из (13) находим величину

$$\lambda = 2\sqrt{2A_1\eta} \left(n - \frac{A_1(1-\eta)}{n(A_2-A_1)} \right) \geq 0. \quad (15)$$

Для выяснения области изменения параметра η находим компоненты дисперсии

$$\sigma_{11}^0 = A_1 a_1^2 (1-\eta) \left\{ 1 + 4A_1 \eta (1-n^2) \frac{A_2 n^2 + A_1 [\eta(1-n^2) - 1]}{n^2 (A_2 - A_1)^2} \right\}, \quad (16)$$

$$\sigma_{22}^0 = A_2 a_2^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \eta \right) \left\{ 1 + 4A_1 \eta (1-n^2) \frac{A_2 n^2 + A_1 [\eta(1-n^2) - 1]}{n^2 (A_2 - A_1)^2} \right\}.$$

Очевидно,

$$\sigma_{22}^0 = n^2 \frac{A_2 - A_1 \eta}{A_1 (1-\eta)} \sigma_{11}^0. \quad (17)$$

Из требования положительности величин (16) следует, что

$$0 \leq \eta \leq 1. \quad (18)$$

Модели цилиндра и диска надо рассматривать отдельно.

а). Эллиптический цилиндр. Для цилиндра

$$A_l = 2\pi G \rho \frac{a_l}{a_l + a_j}, \quad (19)$$

так что

$$A_1 a_1 = A_2 a_2.$$

Имеем

$$\lambda = 2\sqrt{2A_1\eta}[(1+n)\eta - 1] \cong 0. \quad (20)$$

Существенно, что записанное в (16) выражение в фигурных скобках имеет в рассматриваемом случае один вещественный корень, и поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= A_1 a_1^2 (1-\eta) [2(1+n)\eta - 1]^2; \\ \sigma_{22}^0 &= A_2 a_2^2 (1-n\eta) [2(1+n)\eta - 1]^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Обратим внимание: при $\eta > \frac{1}{n+1}$ в цилиндре протivotоки, в противном случае токи будут сопутствующими.

Выделим четыре однопараметрические последовательности цилиндров:

1) Случай $\eta = 1$. Цилиндр имеет максимально возможное вращение и протivotоки; его форма поддерживается за счет трех факторов: твердотельного вращения, направленных внутрь сил Кориолиса и дисперсии скоростей по оси Ox_2 . Для модели находим (см. рис. 1).

$$\sigma_{11}^0 = 0; \quad \lambda = 4\pi G\rho \sqrt{\frac{n^3}{1+n}}; \quad \sigma_{22}^0 = 2\pi G\rho a_1 a_2 \frac{n(1-n)(1+2n)^2}{1+n}. \quad (22)$$

2) Случай $\eta = 0$. Цилиндр не вращается и не имеет внутренних течений; форма поддерживается только за счет «давления» (рис. 1).

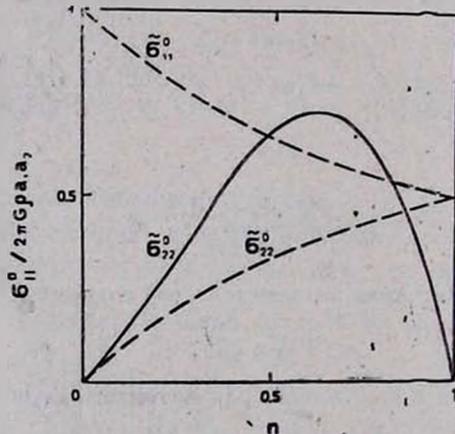


Рис. 1. Зависимости компонентов дисперсии скоростей от отношения полуосей для цилиндра с максимальным вращением $\eta = 1$ (сплошная линия) и без вращения $\eta = 0$ (штриховая линия).

3) Случай

$$\eta = \frac{1}{2(1+n)} \quad (23)$$

замечателен отсутствием дисперсии скоростей по обеим осям и сопутствующим направлением внутренних течений, причем

$$\Omega^2 = \lambda^2 = 2\pi G\rho \frac{n}{(1+n)^2}. \quad (24)$$

Об этой модели впервые упоминается в работе [5].

4) Случай $\eta = \frac{1}{1+n}$. Внутренние течения отсутствуют; равновесие поддерживается твердотельным вращением цилиндра и «давлением».

6) *Эллиптический диск* (ось вращения перпендикулярна плоскости)*. Для него

$$A_1 a_1 \leq A_2 a_2, \quad (n \leq 1), \quad (25)$$

так что выражение в фигурных скобках в (16) уже не имеет вещественных корней. Как следствие этого, эллиптический диск не может существовать без дисперсии скоростей (ср. с цилиндром). Все однопараметрические последовательности дисков легко получаются из общих формул (15), (16).

4. *Сопряженные эллипсоиды без дисперсии скоростей.* Среди жидких эллипсоидов с наклонным вращением еще Риман обнаружил совершенно особые, не имеющие давления. В [6] показано, как такие эллипсоиды в бесстолкновительном варианте можно построить кинетическим способом (см. также [10]). Уравнения (9) содержат, конечно, вариант эллипсоидов без дисперсии скоростей.

Положим в (9) все компоненты

$$\sigma_{ij}^0 = 0. \quad (26)$$

Остается пять уравнений

$$\begin{aligned} -a_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) + 2(a_2\lambda_2\Omega_2 + a_3\lambda_3\Omega_3) + 2A_1 a_1 &= 0; \\ -a_2(\lambda_3^2 + \Omega_3^2) + 2a_1\lambda_3\Omega_3 + 2A_2 a_2 &= 0; \\ -a_3(\lambda_2^2 + \Omega_2^2) + 2a_1\lambda_2\Omega_2 + 2A_3 a_3 &= 0; \\ a_2\lambda_2\lambda_3 + a_3\Omega_2\Omega_3 - 2a_1\lambda_2\Omega_3 &= 0; \\ a_1\Omega_2\Omega_3 + a_3\lambda_2\lambda_3 - 2a_1\lambda_3\Omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Для замкнутости этой системы уравнений неизвестных должно быть пять, поэтому к динамическим неизвестным $\Omega_2, \Omega_3, \lambda_2, \lambda_3$ надо добавить и

* Возможна и другая модель диска, см. раздел 6.

одно геометрическое отношение $\frac{a_2}{a_1}$. Вследствие этого, данная модель имеет только один параметр $\frac{a_2}{a_1}$.

Система (27) в целом не изменяется при перестановке местами Ω_i и λ_i , т. е. для любого эллипсоида без дисперсии имеется сопряженный ему.

Для решения (27) обозначим

$$p = \frac{\lambda_2}{\Omega_2}; \quad q = \frac{\lambda_3}{\Omega_3}, \quad (28)$$

тогда из двух последних уравнений системы (27) получим значения

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{4a_1a_2} \left\{ 4a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \pm \sqrt{[4a_1^2 - (a_2 + a_3)^2][4a_1^2 - (a_2 - a_3)^2]} \right\}; \\ q &= \frac{1}{4a_1a_2} \left\{ 4a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \pm \sqrt{[4a_1^2 - (a_2 + a_3)^2][4a_1^2 - (a_2 - a_3)^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Очевидно, два значения p и q описывают сопряженные эллипсоиды (см. выше).

Полезны вспомогательные соотношения

$$qa_2 - pa_3 = \frac{a_2}{q} - \frac{a_3}{p} = \frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1}. \quad (30)$$

Из второго и третьего уравнений системы (27) находим*

$$\frac{\Omega_2^2}{2A_2} = -\frac{2a_1a_2}{p(a_2^2 - a_3^2)}; \quad \frac{\Omega_3^2}{2A_3} = \frac{2a_1a_2}{q(a_2^2 - a_3^2)}. \quad (31)$$

Складывая эти два выражения, с учетом (30) приходим к важному равенству

$$\frac{\Omega_2^2}{2A_2} + \frac{\Omega_3^2}{2A_3} = 1. \quad (32)$$

Наконец, подставляя выражения (31) в первое уравнение системы (27), находим

$$A_2 - A_3 = \pi G \rho \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2 - 2a_1^2}. \quad (33)$$

* Откуда вытекает, что p и q имеют разные знаки.

Это уравнение в неявном виде связывает отношения полуосей $\frac{a_2}{a_1}$ и

$\frac{a_2}{a_1}$. Соответствующая кривая впервые вычислена в [8]. В частности, $\frac{a_2}{a_1} \geq 2$ и $\frac{a_3}{a_1} \leq 1$.

Заметим, что условия (30) выражают одно из фундаментальных условий равновесия: совпадение оси вращения с вектором полного момента вращения.

В силу (32), в модели существует особая прямая [6], в каждой точке которой центробежная и гравитационная силы уравниваются. Оказывается, что плоскости, в которых движутся частицы, сопряжены направлению этой особой прямой. Следует подчеркнуть тот факт, что существование особой прямой в модели без дисперсии скоростей вытекает прямо из уравнений равновесия.

5. *Эллипсоид с дисперсией скоростей. Общий случай.* Эта сложная модель представляет особый интерес. Прежде всего, запишем уравнения (9) в виде

$$\begin{aligned}
 2A_1 - \Omega_2^2 \left(p^2 - 2 \frac{a_3}{a_1} p + 1 \right) - \Omega_3^2 \left(q^2 - 2 \frac{a_2}{a_1} q + 1 \right) &= 2\sigma_{11}^0/a_1^2; \\
 2A_2 - \Omega_3^2 \left(q^2 - 2 \frac{a_1}{a_2} q + 1 \right) &= 2\sigma_{22}^0/a_2^2; \\
 2A_3 - \Omega_2^2 \left(p^2 - 2 \frac{a_1}{a_3} p + 1 \right) &= 2\sigma_{33}^0/a_3^2; \\
 p^2 - 2 \frac{a_1}{a_3} p \left(1 - \frac{a_2^2 - a_3^2}{4a_1^2} \right) + 1 &= \frac{2\sigma_{23}^0}{\Omega_2 \Omega_3 a_3^2}; \\
 q^2 - 2 \frac{a_1}{a_2} q \left(1 + \frac{a_2^2 - a_3^2}{4a_1^2} \right) + 1 &= \frac{2\sigma_{23}^0}{\Omega_2 \Omega_3 a_2^2}; \\
 \Omega_2 \sigma_{11}^0 \left(\frac{a_3}{a_1} p - 2 \right) + \Omega_2 \sigma_{33}^0 \left(2 - \frac{a_1}{a_3} p \right) + \Omega_3 \sigma_{23}^0 \left(\frac{a_1}{a_2} q - 2 \right) &= 0; \\
 \Omega_3 \sigma_{11}^0 \left(2 - \frac{a_2}{a_1} q \right) + \Omega_3 \sigma_{22}^0 \left(\frac{a_1}{a_2} q - 2 \right) + \Omega_2 \sigma_{23}^0 \left(2 - \frac{a_1}{a_3} p \right) &= 0,
 \end{aligned} \tag{34}$$

где p и q определены в (28).

В семи уравнениях (34) имеется десять величин, которыми описывается эллипсоид; однако заложенная в этих уравнениях информация еще не достаточна для построения непротиворечивой модели. Принципиальным

моментом является то, что для стационарных эллипсоидов инвариант J_3 (см. [1]) должен обращаться в нуль. Это немедленно дает еще одно уравнение

$$\sigma_{22}^0 \sigma_{33}^0 - \sigma_{23}^{02} = 0.$$

Можно показать, что это уравнение выражает условие существования в модели особой прямой [6]. Таким образом, к семи уравнениям (34) должно быть добавлено восьмое уравнение (32), и будущая модель может иметь только два свободных параметра.

Приступая к исследованию системы восьми уравнений (32) и (34), прежде всего получим из четвертого и пятого уравнений вспомогательное равенство

$$qa_3 - pa_3 = -\frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1}, \quad (35)$$

выражающее, как и (30), факт совпадения векторов угловой скорости и полного момента вращения.

Рассмотрим в (34) два последних уравнения и исключим в них все компоненты дисперсии с помощью пяти первых уравнений. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \Omega_2^2 \left\{ a_2 a_3 \left(2 - \frac{a_1}{a_3} p \right) \left(pq - 2 \frac{a_1}{a_3} q + \frac{a_2}{a_3} \right) + \right. \\ & \quad \left. + a_1^2 \left(\frac{a_2}{a_1} q - 2 \right) \left(p^2 - 2 \frac{a_3}{a_1} p + 1 \right) \right\} + \\ & + \Omega_3^2 \left\{ a_2^2 \left(2 - \frac{a_1}{a_2} q \right) \left(q^2 - 2 \frac{a_1}{a_2} q + 1 \right) + \right. \\ & \quad \left. + a_1^2 \left(\frac{a_2}{a_1} q - 2 \right) \left(q^2 - 2 \frac{a_3}{a_1} q + 1 \right) \right\} = \quad (36) \\ & = 2A_1 a_1^2 \left(\frac{a_2}{a_1} q - 2 \right) + 2A_2 a_2^2 \left(2 - \frac{a_1}{a_2} q \right); \\ & \Omega_2^2 \left\{ a_3^2 \left(\frac{a_1}{a_3} p - 2 \right) \left(p^2 - 2 \frac{a_1}{a_3} p + 1 \right) + a_1^2 \left(2 - \frac{a_3}{a_1} p \right) \left(p^2 - 2 \frac{a_2}{a_1} p + 1 \right) \right\} + \\ & + \Omega_3^2 \left\{ a_2 a_3 \left(\frac{a_1}{a_2} q - 2 \right) \left(pq - 2 \frac{a_1}{a_2} p + \frac{a_3}{a_2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + a_1^2 \left(2 - \frac{a_3}{a_1} p \right) \left(q^2 - 2 \frac{a_2}{a_1} q + 1 \right) \right\} = \\ & = 2A_1 a_1^2 \left(2 - \frac{a_3}{a_1} p \right) + 2A_3 a_3^2 \left(\frac{a_1}{a_3} p - 2 \right). \end{aligned}$$

Решение этих уравнений относительно компонентов угловой скорости дает

$$\begin{aligned}\Omega_2^2 &= \frac{2}{D} \{ (qa_1 - 2a_2) [(A_1 + A_2) a_1 a_2 (qa_2 - pa_3) + A_2 a_2 (a_2^2 + a_3^2 - 2a_1^2)] + \\ &\quad + 2A_3 a_3 (2a_3 - pa_1) (a_2^2 - a_1^2) \}; \\ \Omega_3^2 &= \frac{2}{D} \{ (2a_3 - pa_1) [a_1 a_3 (A_1 + A_3) (qa_2 - pa_3) - A_3 a_3 (a_2^2 + a_3^2 - 2a_1^2)] + \\ &\quad + 2A_2 a_2 (qa_1 - 2a_2) (a_1^2 - a_3^2) \},\end{aligned}\quad (37)$$

где

$$D = -3a_1^2 (qa_2 - pa_3)^2. \quad (38)$$

Подставляя найденные решения (37) в выражение (32), после преобразований получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}a_1 a_3 p (A_3 - A_2) (N - A_3 + A_2) &= \\ = (N - A_3 + A_2) (4A_3 a_3^2 - 3A_2 a_2^2 - A_2 a_3^2),\end{aligned}\quad (39)$$

в котором для краткости обозначено

$$N = \pi G \rho \frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2 - 2a_1^2}. \quad (40)$$

Из равенства (39) вытекает, что на данном этапе имеются два варианта построения модели эллипсоида. Их мы сейчас и рассмотрим

А) *Физически разумная модель эллипсоида* [6]. Равенство (39) тождественно удовлетворяется в случае

$$N = A_3 - A_2. \quad (41)$$

Из (41) сразу следует уравнение (33), связывающее отношения полуосей.

Следовательно, в плоскости $\left(\frac{a_3}{a_1}, \frac{a_2}{a_1}\right)$ эта модель находится на той же самой кривой, где существует и эллипсоид без дисперсии скоростей. Таким образом, и для эллипсоида с дисперсией скоростей из двух отношений полуосей лишь одно является независимым параметром. В качестве второго параметра модели—а мы знаем (см. выше) о его существовании—выберем, как и в [6], величину

$$\eta = \frac{\Omega_3^2}{2A_2}. \quad (42)$$

Этот параметр регулирует ориентацию эллипсоида относительно оси вращения.

Для определения тех областей, которые может занимать модель на плоскости $\left(\frac{a_2}{a_1}, \eta\right)$, нам следует из уравнений найти все характеристики эллипсоида. Прежде всего, из второго решения в (37) сразу находим величину

$$p = \frac{\lambda_2}{\Omega_2} = 2 \frac{a_1}{a_3} \left(1 - \eta \frac{a_2^2 - a_3^2}{4a_1^2}\right) \cong 0. \quad (43)$$

Подставляя эту величину в (35), находим

$$q = \frac{\lambda_3}{\Omega_3} = 2 \frac{a_1}{a_2} \left[1 + (1 - \eta) \frac{a_2^2 - a_3^2}{4a_1^2}\right] > 0. \quad (44)$$

Согласно (32),

$$\Omega_2^2 = 2A_3(1 - \eta). \quad (45)$$

Используя найденные величины, из уравнений (34) можно определить и компоненты дисперсии скоростей; записывая их в конечном виде, имеем

$$\sigma_{11}^0 = (A_3 a_2^2 - A_2 a_3^2) \left(\frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3}\right)^2 (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_3); \quad (46)$$

$$\sigma_{22}^0 = A_2 \left(\frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1}\right)^2 (1 - \eta)(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2); \quad (47)$$

$$\sigma_{33}^0 = A_3 \left(\frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1}\right)^2 \eta(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2); \quad (48)$$

$$\sigma_{23}^0 = \sqrt{A_2 A_3} \left(\frac{a_2^2 - a_3^2}{2a_1}\right)^2 \sqrt{\eta(1 - \eta)} (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2), \quad (49)$$

где η_1 и η_2 есть корни квадратного уравнения

$$\eta^2 - \eta \frac{4a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 - a_3^2} + \frac{4a_1^2 a_2^2}{(a_2^2 - a_3^2)^2} = 0, \quad (50)$$

а величина η_3 равна

$$\eta_3 = \frac{1}{a_2^2 - a_3^2} \left\{4a_1^2 - a_3^2 - 3a_2^2 a_3^2 \frac{A_3 - A_2}{A_3 a_2^2 - A_2 a_3^2}\right\}. \quad (51)$$

Графики функций $\eta_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$, $\eta_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$, $\eta_3\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ есть в статье [6]. Очевидно,

$$1 \geq \eta_1 \geq \eta_2 \geq \eta_3. \quad (52)$$

Легко видеть, что компоненты (46)—(49) неотрицательны только в двух интервалах изменения параметра η — при

$$\eta_1 \leq \eta \leq 1, \text{ и } \eta_3 \leq \eta \leq \eta_2. \quad (53)$$

Следовательно, только в этих двух интервалах и существует эта модель эллипсоида с наклонным вращением [6].

Отметим: при $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ из данной модели получаются две однопараметрические последовательности эллипсоидов без дисперсии скоростей (см. выше); при $\eta = \eta_3$ получается однопараметрическая последовательность с $\sigma_{11}^0 = 0$; при $\eta = 1$ получаем эллипсоид Фримана определенной формы. Не вдаваясь в другие детали, приведем только графики для компонентов дисперсии скоростей для одного частного значения $\eta = 0.95$ (рис. 2).

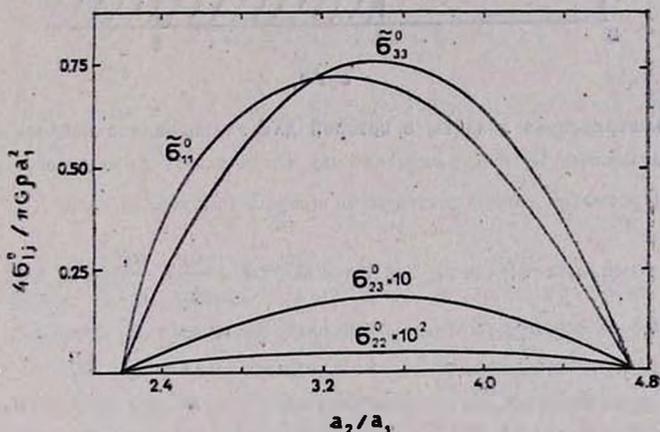


Рис. 2. Зависимости компонентов дисперсии скоростей от отношения полуосей

$\frac{a_2}{a_1}$ для эллипсоида с наклонным вращением (вариант А) для $\eta = 0.95$.

Возвращаясь к равенству (39) и рассмотрим альтернативный вариант:

Б) Пусть теперь $N - A_3 + A_2 \neq 0$; тогда должно выполняться равенство

$$2a_1a_3p = a_3^2 + 3 \frac{A_3a_3^2 - A_2a_2^2}{A_3 - A_2}. \quad (54)$$

Из (35) находим

$$2a_1a_2q = a_2^2 + 3 \frac{A_3a_3^2 - A_2a_2^2}{A_3 - A_2}. \quad (55)$$

Подстановка величин (54) и (55) в решения (37) дает

$$\frac{\Omega_2^2}{2A_3} = \frac{A_1 - A_3}{A_1 - A_2}, \quad \frac{\Omega_3^2}{2A_2} = \frac{A_3 - A_1}{A_3 - A_2}. \quad (56)$$

Очевидно,

$$\Omega^2 = 2A_1. \quad (57)$$

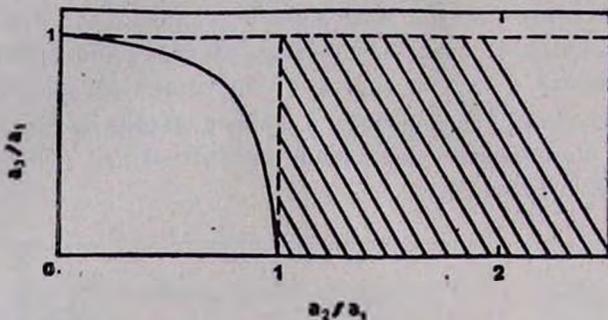


Рис. 3. Заштрихована область, в которой для эллипсоида с наклонным вращением (вариант Б) величины Ω_2 и Ω_3 вещественны, но не имеют физического смысла компоненты σ_{ij}^0 . Противоположная ситуация на кривой, показанной слева.

На рис. 3 показана область на плоскости $\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}\right)$, в которой компоненты (56) неотрицательны и имеют физический смысл.

Однако при подстановке найденных величин Ω_2^2 , Ω_3^2 , p и q в остальные уравнения (34) оказывается, что в той области, где вещественны компоненты Ω_2 и Ω_3 , отрицательными оказываются величины компонентов дисперсии скоростей: $\sigma_{11}^0 < 0$, $\sigma_{22}^0 < 0$, $\sigma_{33}^0 < 0$ и $\sigma_{23}^0 < 0$. Следовательно, в данной области компоненты тензора дисперсии теряют свою вещественность. Можно проверить, что в области вещественности компонентов дисперсии скоростей незначительными оказываются уже величины Ω_2 и Ω_3 ; так обстоит дело на той кривой (рис. 3), где равен нулю компонент σ_{11}^0 и гарантирована вещественность остальных компонентов тензора σ_{ij}^0 .

Мы приходим к выводу, что в варианте Б модель не существует.

6. Эллипсоид, вращающийся вокруг своей оси симметрии. Вращающаяся вокруг оси Ox , модель эллипсоида описывается пятью уравнениями:

$$-a_1(\lambda^2 + \Omega^2) + 2a_2\lambda\Omega + 2A_1a_1 = 2\sigma_{11}^0/a_1;$$

$$-a_2(\lambda^2 + \Omega^2) + 2a_1\lambda\Omega + 2A_2a_2 = 2\sigma_{22}^0/a_2;$$

$$\left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda + 2\Omega\right)\sigma_{11}^0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda - 2\Omega\right)\sigma_{22}^0 = 0;$$

$$\sigma_{33}^0 = A_3 a_3^2, \quad \Omega^2 = 2A_2. \quad (57)$$

В этих уравнениях содержится семь величин

$$\Omega, \lambda, \sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_2}, \quad (58)$$

поэтому модель имеет два параметра. Прежде всего, из уравнения (57) находим

$$\sigma_{22}^0 = 0 \quad (59)$$

и

$$\lambda = 2\frac{a_1}{a_2}\sqrt{2A_2} > 0. \quad (60)$$

Положительный знак λ говорит об обратном направлении течений центроидов. Далее,

$$\sigma_{11}^0 = a_1^2 \left[A_1 + A_2 \left(3 - 4\frac{a_1^2}{a_2^2} \right) \right]. \quad (61)$$

Следовательно, для положительности σ_{11}^0 надо потребовать $a_2 > a_1$. В качестве же параметров выбираются два отношения полуосей

$$0 \leq \frac{a_1}{a_2} \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq \frac{a_3}{a_2} \leq 1. \quad (62)$$

Кинетическим методом эта модель была построена Фриманом [3].

Уравнения (57) допускают дисковый предел [11]

$$\frac{a_1}{a_2} \rightarrow 0. \quad (63)$$

У такого диска

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \lambda = 0; \quad \sigma_{33}^0 = A_3 a_3^2; \quad \Omega^2 = 2A_2, \quad (64)$$

причем ось вращения лежит в плоскости диска и совпадает с полуосью a_1 .

7. Заключение. Гидродинамический метод, как мы убедились, имеет свою специфику и область применения. Гидродинамическая аналогия—это метод для изучения глобальных свойств фигур равновесия звездных систем, к тому же он является фильтром отбора из необозримого множества

мыслимых вариантов моделей, таких, которые внутренне не противоречивы на заданном уровне описания. С методической точки зрения важность этого подхода очевидна, так как обнаруживается глубокая связь всей проблемы с классической теорией для жидких эллипсоидов Дирихле.

Педагогический институт,
г. Глазов
Астрофизический институт
АН Каз.ССР

Примечание при корректуре

Логически более совершенный метод построения бесстолкновительных фигур равновесия был найден при работе над монографией: Б. П. Кондратьев «Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур», которая вскоре выйдет в издательстве «Наука».

DIRICHLET'S PROBLEM IN STELLAR DYNAMICS. II. ELEMENTS OF THEORY OF EQUILIBRIUM FIGURES

B. P. KONDRAT'EV, E. A. MALKOV

The hydrodynamical method for the investigation and construction of equilibrium homogeneous collisionless models has been developed. It has been shown that the angular velocity vector and the vorticity vector both do lie in one of the principal planes or are coincident with the principal axis of the ellipsoid. The conditions for the existence of models are determined. The characteristics of equilibrium figures are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. П. Кондратьев, Е. А. Малков, Астрофизика, 25, 587, 1986.
2. K. C. Freeman, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 133, 47, 1966.
3. K. C. Freeman, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 134, 1, 1966.
4. K. C. Freeman, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 134, 15, 1966.
5. C. Hunter, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 166, 633, 1974.
6. Б. П. Кондратьев, Астрофизика, 21, 499, 1984.
7. Г. С. Бисноватый-Козан, Я. Б. Зельдович, в сб. «Динамика и эволюция звездных систем», М., 1975, стр. 138.
8. С. Чандрасекар, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
9. Б. Риман, Сочинения, Гостехтеориздат, М.—Л., 1948.
10. Я. Б. Зельдович, Астрофиз. ж., 41, 873, 1964.
11. Б. П. Кондратьев, Астрофизика, 23, 69, 1985.