

УДК: 524.86—48

О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭФФЕКТОВ НА РОЖДЕНИЕ
ЧАСТИЦ В ГОРЯЧЕЙ ВСЕЛЕННОЙ ФРИДМАНА

У. ГЮНТЕР, А. И. ЖУК

Поступила 27 марта 1986

Принята к печати 2 декабря 1986

Рассматривается рождение частиц (бозонов и фермионов) в горячей Вселенной Фридмана из начального состояния, описываемого тепловой матрицей плотности, в случае, когда эффективная масса частиц зависит от температуры. Показано, что для скалярных частиц учет температурных эффектов приводит к очень сильному подавлению процесса рождения. Для спинорных частиц учет температурных эффектов приводит к сильному подавлению процесса рождения из начального вакуумного состояния. Однако, если рождение спинорных частиц происходит из состояния, описываемого тепловой матрицей плотности, то температурные эффекты относительно слабо влияют на процесс рождения частиц.

1. *Введение.* Изучению квантовых эффектов в сильных гравитационных полях в последние годы уделяется большое внимание (обзор обширной литературы по этим вопросам можно найти в книгах [1, 2]). Одной из наиболее интересных проблем при этом является проблема рождения частиц на ранних этапах эволюции Вселенной. Признанной моделью сейчас является модель горячей Вселенной [3, 4], в которой предполагается, что Вселенная на ранних этапах эволюции заполнена излучением и находящимся с ним в термодинамическом равновесии при высокой температуре веществом. Поэтому при изучении процесса рождения частиц в ранней Вселенной необходимо учитывать следующих два обстоятельства.

Во-первых, рождение частиц надо исследовать из начального состояния, описываемого тепловой матрицей плотности. Во-вторых, необходимо учитывать, что в сверхплотном релятивистском горячем веществе эффективная масса рождающихся частиц зависит от температуры [5, 6]. Оба этих эффекта оказывают существенное влияние на процесс рождения. По отдельности учет обоих этих эффектов был проведен в ряде работ. Процесс рождения частиц с массой, не зависящей от температуры, из состояния, описываемого тепловой матрицей плотности, во фридмановской Вселенной был исследован в статьях [7] (для бозонов) и [8] (для фермионов). В этих работах было показано, что статистические эффекты приво-

дят к существенному усилению процесса рождения для бозонов и ослаблению — для фермионов. Влияние зависимости масс частиц от температуры на процесс рождения из начального вакуумного состояния было рассмотрено в статьях [9] (для однородной изотропной Вселенной) и [10] (для анизотропной Вселенной). В работе [9] было показано, что в этом случае процесс рождения скалярных частиц во Вселенной Фридмана оказывается существенно подавлен. Данная статья посвящена изучению влияния обоих этих эффектов на процесс рождения бозонов и фермионов в горячей Вселенной Фридмана, т. е. рассматривается процесс рождения частиц из начального состояния, описываемого тепловой матрицей плотности, в случае, когда эффективная масса частиц зависит от температуры.

2. *Постановка задачи. Основные уравнения.* Рассмотрим процесс рождения скалярных и спинорных (спин 1/2) частиц в однородной изотропной Вселенной, описываемой метрикой

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - f^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (1)$$

где $f(\chi) = \text{sh } \chi$, χ , $\sin \chi$ соответственно для открытого, квазиевклидового и закрытого мира с кривизной 3-пространства $\kappa = -1, 0, 1$; η — конформное время, связанное с обычным временем t соотношением $dt = a(\eta) d\eta$. Как известно [1], задача о рождении пар во Вселенной Фридмана сводится к задаче о параметрическом возбуждении квантового осциллятора с переменной частотой:

$$\ddot{g}_\lambda(\eta) + \omega_{0\lambda}^2(\eta) g_\lambda(\eta) = 0, \quad (2)$$

$$\dot{f}_{\lambda\pm}(\eta) + i f_{\lambda\mp}(\eta) \pm i m_0 a(\eta) f_{\lambda\pm}(\eta) = 0, \quad (3)$$

где мы используем обозначения [1]; $g_\lambda(\eta)$ описывает зависимость от времени скалярной волновой функции, а $f_{\lambda\pm}(\eta)$ — спинорной (спин 1/2) волновой функции, точка означает дифференцирование по конформному времени η . Уравнение (3) можно переписать в виде, аналогичном (2):

$$\ddot{f}_{\lambda\pm}(\eta) + [\omega_{0\lambda}^2(\eta) \pm i m_0 a(\eta)] f_{\lambda\pm}(\eta) = 0. \quad (4)$$

Переменная конформная частота $\omega_{0\lambda}(\eta)$ равна

$$\omega_{0\lambda}^2(\eta) = \lambda^2 + m_0^2 a^2(\eta), \quad (5)$$

где m_0 — „голая“ масса рождающихся частиц, λ — импульсное квантовое число, связанное с физическим импульсом $K_\Phi = \frac{\lambda}{a(\eta)}$.

Учтем теперь, что в веществе с температурой $T_\Phi \gg m_0$ эффективная масса частиц модифицируется следующим образом [5, 6]:

$$m^2(T) = m_0^2 + a^2 T_\Phi^2, \quad (6)$$

где a — константа, зависящая от постоянной самодействия, калибровочных зарядов, числа и вида взаимодействующих частиц [6, 9, 11]. Ниже мы нигде не будем уточнять природу коэффициента a , а рассмотрим, каким образом будет меняться полное число рожденных частиц в случае, если a меняется в реалистичных пределах $0 \leq a^2 \leq 1$. С учетом (6) конформная частота будет иметь вид:

$$\omega_\lambda^2(\eta) = \lambda'^2 + m_0^2 a^2(\eta) = \omega_{0\lambda'}^2(\eta), \quad (7)$$

где

$$\lambda'^2 = \lambda^2 + a^2 T^2 \quad (8)$$

и конформная температура T связана с физической температурой T_Φ : $T = a T_\Phi$. В модели горячей Вселенной на радиационно-доминирующей стадии температура излучения и плазмы меняется по закону [3, 4]

$T_\Phi \sim \frac{1}{a}$ и, следовательно, $T = \text{const} \sim 10^{29}$ [3]. После преобразования (6) осцилляторные уравнения (2) и (4) модифицируются:

$$\ddot{\bar{g}}_\lambda + \omega_{0\lambda'}^2(\eta) \tilde{g}_\lambda(\eta) = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{\tilde{f}}_{\lambda\pm} + \left[\omega_{0\lambda'}^2 \pm i m_0 \dot{a} \left(1 + \frac{a^2 T^2}{m_0^2 a^2} \right)^{-1/2} \right] \tilde{f}_{\lambda\pm} = 0, \quad (10)$$

где тильда обозначает функции, удовлетворяющие модифицированным уравнениям. Из этих уравнений видно, что $\bar{g}_\lambda(\eta) = g_{\lambda'}(\eta)$ и $\tilde{f}_{\lambda\pm}(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} f_{\lambda'\pm}(\eta)$, где мы учли, что $a(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$.

Обозначим спектр числа частиц, рожденных из вакуума, $N_{V\lambda B}(\eta)$ — для бозонов и $N_{V\lambda F}(\eta)$ — для фермионов. Из вышесказанного следует:

$$\bar{N}_{V\lambda B}(\eta) = N_{V\lambda'B}(\eta), \quad \bar{N}_{V\lambda F}(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} N_{V\lambda'F}(\eta).$$

Так как нас интересует полное число частиц, рожденных от сингулярности до наших дней, то нам достаточно знать поведение этих спектров при $\eta \rightarrow \infty$ [1, 7, 8]:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \bar{N}_{V\lambda B}^F(\eta) = n_B^F \left(\frac{\lambda'}{b} \right). \quad (11)$$

где* $b = (2m_0 a^*)^{1/2}$. Асимптотический вид функций $n_B^F\left(\frac{\lambda}{b}\right)$ приведен в Приложении. Полное число частиц, рожденных из начального состояния, описываемого тепловой матрицей плотности, будет равно согласно [7, 8] с учетом преобразования (6):

$$\bar{N}_B^F = \bar{N}_{0B}^F \pm \bar{N}_{VB}^F \mp N_{SB}^F, \quad (12)$$

где верхний знак относится к фермионам (F), а нижний — к бозонам (B) и

$$\bar{N}_{0B}^F = \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \left(\exp \frac{\omega_\lambda}{T} \pm 1 \right)^{-1}, \quad (13)$$

— число частиц, имеющихсся в начальном состоянии,

$$\bar{N}_{VB}^F = \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 n_B^F\left(\frac{\lambda'}{b}\right) \quad (14)$$

— число частиц, рожденных из начального вакуумного состояния,

$$\bar{N}_{SB}^F = 2 \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 n_B^F\left(\frac{\lambda'}{b}\right) \left(\exp \frac{\omega_\lambda}{T} \pm 1 \right)^{-1} \quad (15)$$

— число частиц, рождение которых обусловлено статистическими эффектами. Оценим эти интегралы.

3. Скалярное поле. Для числа частиц, имеющихсся в начальном состоянии** (13), легко получить:

$$N_{0B}(\alpha = 0) = \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \left(\exp \frac{\lambda}{T} - 1 \right)^{-1} \approx 2.4 \cdot T^3, \quad (16)$$

$$\bar{N}_{0B}(\alpha = 1) = \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \left(\exp \sqrt{\frac{\lambda^2}{T^2} + 1} - 1 \right)^{-1} \approx 1.7 \cdot T^3.$$

* Мы рассматриваем модель горячей Вселенной (для определенности закрытого типа), для которой на радиационно-доминирующей стадии масштабный фактор меняется следующим образом: $\alpha = a^* \cdot \eta = (2a^* t)^{1/2}$, где a^* — постоянная и согласно [3]: $a^* \sim 10^{26}$ см.

** В соответствии с работами [7, 8], начальное состояние мы выбираем при $\eta = 0$. Тогда в формулах (13) и (15) $\omega_\lambda^2 = \lambda^2 + a^2 \cdot T^2$.

Следовательно, при изменении константы $0 \leq \alpha \leq 1$ начальное число частиц варьируется в пределах от $2.4 \cdot T^3$ до $1.7 \cdot T^3$ соответственно. Напомним, что в стандартной модели горячей Вселенной $T \sim 10^{25}$ [3].

Очевидно, что при $\alpha \rightarrow 0$ должно быть $\bar{N}_{VB} \rightarrow N_{VB}$ и $\bar{N}_{SB} \rightarrow N_{SB}$ или $\Delta N_{VB} = N_{VB} - \bar{N}_{VB} \rightarrow 0$ и $\Delta N_{SB} = N_{SB} - \bar{N}_{SB} \rightarrow 0$. Выбрав* $\alpha < \alpha_{dB}$, получим явные формулы, описывающие поведение ΔN_{VB} и ΔN_{SB} при $\alpha \rightarrow 0$

$$\Delta N_{VB} \approx \frac{d_B^2 b^3}{40} x^3 \left[\ln \left(\frac{2}{x} \right) - \frac{1}{2} \right],$$

$$\Delta N_{SB} \approx \frac{\pi}{20} d_B b^3 T \cdot x, \quad (17)$$

где $x \equiv \frac{\alpha}{\alpha_{dB}}$.

Перейдем к оценке интегралов (14) и (15) для случая $\alpha_{DB} \lesssim \alpha \lesssim 1$. Число частиц, рожденных из начального вакуумного состояния, дается выражением

$$\bar{N}_{VB} \approx \frac{b^3}{10^4 (\alpha T)^3}. \quad (18)$$

Тогда для частиц с массой порядка массы протона $m_p \sim 10^{13} \text{ см}^{-1}$ получим: $\bar{N}_{VB} (\alpha \sim 1) \sim 10^{11}$, $\bar{N}_{VB} (\alpha = \alpha_{DB} \sim 10^{-8}) \sim 10^{53}$. Из [7] имеем $N_{VB} (\alpha = 0) \sim 10^{58}$. Следовательно, видим, что включение самодействия ($\alpha \neq 0$) приводит к существенному подавлению процесса рождения скалярных частиц из вакуума, как это уже отмечалось качественно в [9].

Число бозонов, рожденных за счет статистических эффектов (15) определяется формулами

$$\bar{N}_{SB} (\alpha = 1) \approx \frac{6 \cdot b^3}{10^5 \cdot T^3}, \quad (19)$$

$$\bar{N}_{SB} (\alpha \ll 1) \approx 1.5 \cdot 10^{-4} \frac{b^3}{\alpha^5 T^3}. \quad (20)$$

Для частиц с массой протона мы получаем оценки $\bar{N}_{SB} (\alpha = 1) \sim \sim 10^{10}$, $\bar{N}_{SB} (\alpha \sim \alpha_{DB}) \sim 10^{53}$, а из [7] следует $N_{SB} (\alpha = 0) \sim 10^{57}$. Таким

* См. Приложение, где приведены асимптотики функции $\ln \left(\frac{\lambda}{b} \right)$ и определены постоянные α_{dB}^F и α_{DB}^F .

образом, процесс рождения скалярных частиц за счет статистических эффектов также существенно подавлен температурными эффектами.

4. *Спинорное поле.* Число спинорных (спин 1/2) частиц в начальном состоянии (13) при изменении α от 0 до 1 будет меняться соответственно в пределах:

$$N_{0F}(\alpha=0) = \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \left(\exp \frac{\lambda}{T} + 1 \right)^{-1} \approx 1.8 \cdot T^3, \quad (21)$$

$$\tilde{N}_{0F}(\alpha=1) = \int_0^\infty d\lambda \lambda^2 \left(\exp \sqrt{\frac{\lambda^2}{T^2} + 1} + 1 \right)^{-1} \approx 1.5 \cdot T^3.$$

Так же, как и для скалярного поля, в спинорном случае должно быть $\Delta N_{VF} = N_{VF} - \tilde{N}_{VF} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$ и $\Delta N_{SF} = N_{SF} - \tilde{N}_{SF} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$, что и следует явно из выражения

$$\Delta N_{VF} \sim \Delta N_{SF} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{8} b^3 d_F^4 \pi^{1/2} \left\{ x^2 + \frac{x^4}{2} \left[1 - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \right] \right\}, \quad (22)$$

где $x \equiv \frac{\alpha}{\alpha_{dF}}$.

Как видно из формулы (12), статистические эффекты для спинорного поля, в отличие от скалярного поля, приводят к подавлению процесса рождения. Полное (эффективное) число рожденных частиц определяется комбинацией $N_{EF} = N_{VF} - N_{SF}$.

Поведение эффективного числа рожденных частиц при стремлении $\alpha \rightarrow 0$ дается выражением

$$\begin{aligned} \Delta N_{EF} &= \Delta N_{VF} - \Delta N_{SF} \approx \\ &\underset{\alpha \rightarrow 0}{\approx} \alpha^2 \frac{T^3}{4} \left[\frac{\alpha_{dF}^4}{32} - \frac{\alpha_{dF}^2}{4} - \frac{T\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{\alpha_{dF}^3}{3} - \frac{\alpha_{dF}^5}{30} \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Интересной особенностью является то, что в этом пределе $\Delta N_{EF} < 0$, т. е. для $\alpha \ll \alpha_{dF} \ll 1$ учет температурных эффектов приводит к незначительному увеличению эффективного числа рожденных спинорных частиц $|\Delta N_{EF}| \ll N_{EF}$.

Рассмотрим теперь диапазон значений постоянной α : $\alpha_{dF} \leq \alpha \leq 1$. Число фермионов, рожденных из начального вакуумного состояния, для этих α определяется формулой

$$\tilde{N}_{VF} \approx \frac{\pi b^4}{4^3 \cdot \alpha \cdot T}. \quad (24)$$

Для частиц с массой протона мы получим оценки: $N_{VF}(\alpha = 0) \sim 10^{59}$ [8], $\tilde{N}_{VF}(\alpha \sim \alpha_{DF}) \sim 10^{58}$, $N_{VF}(\alpha \sim 1) \sim 10^{43}$. Как видно, учет температурных эффектов, так же, как и для скалярного поля, приводит к подавлению процесса рождения частиц, правда, в намного меньшей степени, чем для скалярных частиц. Эффективное число частиц в этом диапазоне значений α дается выражением

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{EF} \approx \frac{b^4}{4^3 \cdot T} \left\{ 0.8 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{24} \right) \ln \left[\frac{1}{\alpha} + \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)^{1/2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1 + \alpha^2)^{-1/2} - \frac{1}{48} (1 + \alpha^2)^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

и для фермионов с $m \sim m_p$ получаем оценки $N_{EF}(\alpha = 0) \sim 10^{50}$ [8], $\tilde{N}_{EF}(\alpha \sim \alpha_{DF}) \sim 10^{49}$, $\tilde{N}_{EF}(\alpha \sim 1) \sim 10^{43}$. Таким образом, если рождение фермионов происходит из начального состояния, описываемого тепловой матрицей плотности, то зависимость массы частиц от температуры относительно слабо влияет на процесс рождения.

5. *Заключение.* Мы рассмотрели совместное влияние статистических и температурных эффектов на процесс рождения скалярных и спинорных частиц в горячей Вселенной Фридмана. Для скалярных частиц учет температурных эффектов приводит к очень сильному подавлению процесса рождения, как при рождении из начального вакуумного состояния, так и при рождении из состояния, описываемого тепловой матрицей плотности. Для спинорных частиц учет температурных эффектов приводит к сильному (но значительно менее сильному, чем для скалярных частиц) подавлению процесса рождения из начального вакуумного состояния. Однако, если рождение спинорных частиц происходит из начального состояния, описываемого тепловой матрицей плотности, то температурные эффекты относительно слабо влияют на процесс рождения.

Приложение

Рассмотрим асимптотическое поведение функций $n_B^F(\delta)$, где $\delta \equiv \frac{\lambda}{b}$. Для скалярного поля [1]:

$$n_B(\delta) = (\pi \cdot 2^{3/2})^{-1} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right) \delta^{-1}; \quad \delta \ll 1, \quad (\text{П1})$$

$$n_B(\delta) = 4^{-5} \cdot \delta^{-5}; \quad \delta \gg 1. \quad (\text{П2})$$

Можно легко показать, что асимптотика (П1) хорошо работает при $\delta \lesssim d_B = 10^{-2}$, а — (П2) при $\delta \gtrsim D_B = 10$. В выражениях (14) и (15) эти асимптотические формулы используются для $n_B(\delta')$, где $\delta' \equiv \frac{\kappa'}{b} = [(\lambda^2 + \alpha^2 T^2)/(2m_0 \alpha^*)]^{1/2}$, если, соответственно, $\delta' \lesssim d_B$ и $\delta' \gtrsim D_B$.

Из этих неравенств можно получить оценки для наибольшего и наименьшего значений постоянной α , при которых данные асимптотики имеют место:

$$\begin{aligned} \alpha &\lesssim \alpha_{dB} \equiv \frac{b}{T} d_B, \\ \alpha &\gtrsim \alpha_{DB} \equiv \frac{b}{T} D_B. \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

Например, для частиц с массой порядка массы протона $m_p \sim 10^{13} \text{ см}^{-1}$, $\alpha_{dB} \sim 10^{-11}$ и $\alpha_{DB} \sim 10^{-8}$. Аналогично, для спинорного поля (спин 1/2) [1]:

$$n_F(\delta) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\pi} \delta); \quad \delta \ll 1, \quad (\text{П4})$$

$$n_F(\delta) = 4^{-4} \cdot \delta^{-4}; \quad \delta \gg 1. \quad (\text{П5})$$

Асимптотику (П4) можно с хорошей точностью использовать для $n_F(\delta')$ при $\delta' \lesssim d_F = 10^{-1}$, а — (П5) при $\delta' \gtrsim D_F = 10$. Так же, как и в скалярном случае, эти неравенства дают оценки для наибольшего и наименьшего значений постоянной α , при которых можно применять написанные выше асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \alpha &\lesssim \alpha_{dF} \equiv \frac{b}{T} d_F, \\ \alpha &\gtrsim \alpha_{DF} \equiv \frac{b}{T} D_F. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

и для частиц с массой m_p : $\alpha_{dF} \sim 10^{-10}$, $\alpha_{DF} \sim 10^{-8}$.

Одесский государственный
университет

ON TEMPERATURE EFFECT ON THE CREATION OF
PARTICLES IN THE HOT FRIEDMAN UNIVERSE

U. GÜNTHER, A. I. ZHUK

Creation of particles (bosons and fermions) in the hot Friedman Universe from thermal matrix density in the case of mass temperature dependence of particles is investigated. It has been shown that temperature effects suppress the creation of scalar particles very strongly. Temperature effects strongly suppress the creation of spinor particles from the initial vacuum state. But in the case of creation of spinor particles from initial thermal matrix density, temperature effects influence relatively weakly the creation process of particles.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гриб, С. Г. Мамасв, В. М. Мостепаненко, Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, Атомиздат, М., 1980.
2. Н. Биррелл, П. Девис, Квантованные поля в искривленном пространстве-времени, Мир, М., 1984.
3. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, т. 2, Мир, М., 1977.
4. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Строеие и эволюция Вселенной, Наука, М., 1975.
5. Д. А. Киржниц, А. Д. Линде, Ж. эксперим. и теор. физ., 67, 1263, 1974.
6. В. В. Климов, Ядер. физ., 33, 1734, 1981.
7. А. И. Жук, В. П. Фролов, ТМФ, 55, 216, 1983.
8. У. Гюнтер, А. И. Жук, ТМФ, 68, 11, 1986.
9. А. Д. Линде, Письма в ЖЭТФ, 35, 398, 1982.
10. А. И. Жук, В. П. Фролов, Письма в Астрон. ж., 9, 135, 1983.
11. О. К. Калашников, В. В. Климов, Ядер. физ., 33, 1572, 1981.

