АСТРОФИЗИКА

ТОМ 26 АПРЕЛЬ, 1987 ВЫПУСК 2

УДК: 524.4

ЗВЕЗДНЫЕ СИСТЕМЫ КАК ДИССИПАТИВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В. Г. ГУРЗАДЯН, А. А. КОЧАРЯН

Поступила 11 февраля 1986
Принята к печати 5 декабря 1986

Исследуется эволюция звездной системы, содержащей центральное массивное тело, с использованием методов теории динамических систем и теории катастроф. Задача сведена к изучению двумерной диссипативной системы — простого аттрактора. Показано наличие устойчивых и неустойчивых особых точек (узлов, фокусов) и циклов. В системе могут осуществляться субкритические и суперкритические бифуркации Хопфа с сепаратрисой, соответствующей симметрической катастрофе типа $A_{\pm 5}$-«бабочка».

1. *Постановка задачи.* Исследование динамики звездных систем, содержащих массивное центральное тело, стало особо актуальным за последнее десятилетие. Это обусловлено, с одной стороны, получением некоторых необычных наблюдательных фактов (рентгеновские источники в шаровых скоплениях, аномальный пик яркости в центре ряда скоплений и галактик и т. п.), с другой — развитием теоретических представлений об образовании и эволюции массивных черных дыр во Вселенной. Начиная с пионерских работ Линден-Белла, Пиблса, Хиллса и других, в этом направлении достигнут большой прогресс. В частности, Шапиро [1] заметил, что массивный центральный объект может существенно влиять на эволюцию системы, в определенных случаях предотвращая ее сжатие.

В данной работе сделана попытка изучения эволюции такой системы с позиций теории динамических систем. В отличие от работ [2—5], в которых аналогичными методами проводилось изучение звездных систем как гамильтоновых динамических систем, мы будем рассматривать здесь открытые, неконсервативные системы, для которых не выполняется теорема Лиувилля о сохранении фазового объема.

В работе [6] рассматривалась устойчивость этой системы, теперь же наша задача состоит в получении и исследовании эволюционных уравнений, т. е. уравнений, определяющих изменение во времени основных физических параметров устойчивой системы. Естественно, эти уравнения будут полезны при определенных упрощениях и обобщающих предположениях.

Мы ожидаем, что при этом могут быть выявлены некоторые наиболее общие закономерности реальных систем.

Рассматривается сферически-симметричная система с несохранением полного числа частиц (звезд). При этом мы учитываем следующие основные процессы, приводящие к уменьшению этого числа: испарение высокоэнергетических звезд из системы [7] и захват звезд массивным объектом, точнее их приливное разрушение в полости Роша [8]. Наряду с этим, для общности были включены в рассмотрение также возможные процессы пополнения системы звездами. Предполагается подавленность стохастических эффектов в динамике массивного тела [9].

Для анализа задачи мы существенно используем методы, развитые в теории динамических систем, в частности, диссипативных систем, а также в теории катастроф. Задача сведена к изучению двумерной диссипативной системы, которая оказалась весьма богатой по разнообразию проявлений в качестве простого аттрактора. Так, показано наличие устойчивых и неустойчивых особых точек (узлов, фокусов), а также устойчивых и неустойчивых циклов. При этом могут реализоваться субкритические и суперкритические бифуркации Хопфа с сепаратрисой, соответствующей симметрической катастрофе типа $A_{\pm 5}$-«бабочка» по классификации Тома.

Результаты указывают на большое разнообразие в эволюции рассмотренных систем в зависимости от заданных физических параметров.

2. *Вывод основных уравнений.* Пусть имеем сферически-симметричную систему N гравитирующих тел одинаковой массы m с массивным точечным центром с массой $M \gg m$. Так как характерные эволюционные времена, обусловленные испарением и захватом звезд, намного превосходят время релаксации интересующих нас систем, к последним можно применять теорему вириала. Тогда полную энергию системы можно определить из соотношения [7]

$$E = -\frac{1}{4}\frac{GN^2m^2}{R}, \tag{1}$$

где R — характерный радиус системы.

Скорость изменения полного числа звезд системы может быть представлена следующим образом:

$$\dot{N} = \dot{N}_{\text{исп.}} - F + d, \tag{2}$$

где

$$\dot{N}_{\text{исп.}} = -aN \tag{3}$$

есть скорость испарения звезд из системы [7] (a — доля звезд, покидающих систему за одно время релаксации). Поток звезд в полость Роша массивного объекта (при пренебрежении вкладом звезд с финитных орбит) составляет [8]

$$F = bR^{-1}, \tag{4}$$

Известно также, что не все звезды из потока (4) будут разрушены, т. е. исчезнут из системы; определенная доля возмущенных звезд может вернуться в систему (см. например, [10, 11]). Этот эффект прибывания звезд в систему определяется главным образом кинетикой самого приливного разрушения, т. е. внутренним строением звезд, а не параметрами системы. Вклад возможных процессов звездообразования также может быть приписан к последнему слагаемому в (2).

Дифференцируя (1) по времени, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\dot R}{R} = \frac{\dot N}{N}\left(2 - \frac{\dot E}{E}\frac{N}{\dot N}\right), \tag{5}$$

в котором поток энергии, обусловленный потерей звезд, $\dot E$, можно представить в виде (подробнее см. [1, 12])

$$\frac{\dot E}{E} = -\frac{kb}{N^2} + c, \tag{6}$$

где постоянная c соответствует члену d в (2).

Итак, задача сведена к исследованию системы из двух нелинейных уравнений, определяющих изменение основных параметров системы — радиуса и полного числа звезд:

$$\begin{aligned} \dot N &= -aN - \frac{b}{R} + d, \\ \frac{\dot R}{R} &= -2a - \frac{2b}{RN} + \frac{2d}{N} + \frac{kb}{N^2} - c. \end{aligned} \tag{7}$$

3. *Двумерные диссипативные системы.* Здесь мы введем некоторые понятия из теории динамических систем и теории катастроф, используемые в дальнейшем анализе. Подробнее с этими понятиями и методами можно ознакомиться по книгам [13—16].

Рассмотрим двумерную систему, описываемую следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$-гладкие функции.

По теореме Лиувилля для гамильтоновой системы фазовый объем сохраняется. Можно показать, что в общем случае скорость изменения малого объема $\Delta\tau(x, y)$ в точке (x, y) равна

$$\Lambda(x, y) = \frac{1}{\Delta\tau(x, y)} \frac{d}{dt}[\Delta\tau(x, y)] = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Система называется диссипативной, если $\Lambda(x, y)$ тождественно не равна нулю.

Допустим, в системе существует область Ω, откуда не выходят траектории системы и где $\Lambda(x, y) < 0$. Тогда устойчивое стационарное движение на Ω должно происходить в области меньшей размерности. Такие множества называются аттракторами.

Для ограниченного двумерного потока, согласно теореме Пуанкаре—Бендиксона, возможны только два типа аттракторов: 1) устойчивые неподвижные точки (устойчивые фокусы); 2) предельные циклы.

Достаточно общая деформация этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \lambda r + Ar^3 + Br^5 + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{8}$$

Когда динамическая система зависит от двух независимых параметров, то (8) в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \lambda r + 2\mu r^3 \pm r^5, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{9}$$

Найдем сепаратрисы в (λ, μ) плоскости. Легко показать, что сепаратрисы имеют вид, показанный на рис. 1а при $V(r; \lambda, \mu) = -\frac{\lambda r^2}{2} - \frac{\mu r^4}{2} + \frac{r^6}{6}$. Эта катастрофа симметрическая, типа A_{+5} — „бабочка“ по классификации Тома. В этом случае бифуркация зависит от пути в пространстве параметров.

Рассмотрим три характерных пути 1, 2, 3 (рис. 1b). Очевидно, что путь 1 соответствует суперкритической бифуркации Хопфа. На пути 2 λ остается постоянной, при том устойчивый фокус остается устойчивым, и образуются один устойчивый и один неустойчивый циклы. На пути 3, так же, как на пути 2, образуются два цикла, но внутренний цикл при прохождении через сепаратрису исчезает.

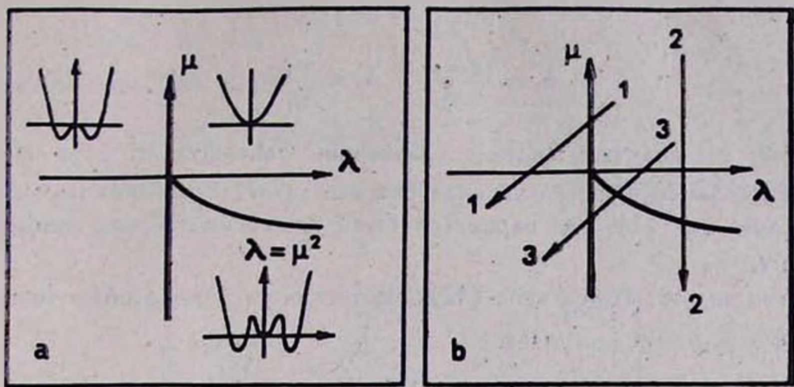

Рис. 1. Сепаратриса системы (9) на плоскости параметров λ и μ при $V = -\frac{\lambda r^2}{2} - \frac{\mu r^4}{2} + \frac{r^6}{6}$.

В случае, когда

$$V(r;\ \lambda,\ \mu) = -\frac{\lambda r^2}{2} - \frac{\mu r^4}{2} - \frac{r^6}{6},$$

получается качественно аналогичная картина, только устойчивые точки (циклы) переходят в неустойчивые и наоборот.

4. *Качественный анализ диссипативной звездной системы.* Перепишем полученную в разделе 2 систему уравнений (7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot N &= -a_1 N - \frac{a_2}{R} + a_3 \\ \dot R &= -(2a_1 + a_5) R - \frac{2a_2}{N} + \frac{2a_3}{N} R + \frac{a_4}{N^2} R, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$a_i > 0,\ i = 1, \ldots, 5 \text{ и } R > 0,\ N > 0.$$

Произведем в (10) замену переменных:

$$N = \frac{a_3}{a_1} e^x, \qquad R = \frac{a_2}{a_3} e^{y+2x}, \qquad t = a_1 t_*. \tag{11}$$

Тогда будем иметь:

$$\begin{gathered} \dot{x} = -1 - e^{-3x-y} + e^{-x}, \\ \dot{y} = b_1 e^{-2x} - b_2, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$b_1 = \frac{a_1 a_4}{a_3^2}, \quad b_2 = \frac{a_5}{a_1}.$$

Итак, мы получили систему уравнений, зависящую от двух параметров, b_1, b_2. Заметим, что начальная система зависела от пяти параметров; как следует из (11), три параметра были использованы при нормировке N, R и t.

Легко видеть, что система (12) имеет единственную особую точку. Из условий $\dot{x} = \dot{y} = 0$ получаем

$$\begin{gathered} x_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{b_1}{b_2}, \\ y_0 = -\ln \left[\frac{b_1}{b_2} \left(1 - \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \right) \right], \end{gathered} \tag{13}$$

при условии, что $1 - \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} > 0$. Мы будем рассматривать только такие параметры.

Рассмотрим теперь поведение системы вблизи особой точки (13). Линеаризуя уравнения (13) в окрестности x_0, y_0 и вводя обозначения

$$q = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} - \frac{3}{2} > -\frac{1}{2}, \quad p = 2b_2 \left(q + \frac{1}{2} \right),$$

получаем

$$\begin{gathered} \delta\dot{x} = 2q\delta x + \left(q + \frac{1}{2} \right) \delta_y, \\ \delta\dot{y} = -\frac{p}{q + \frac{1}{2}} \delta x \end{gathered} \tag{14}$$

или

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix},$$

где

$$A = \det \begin{vmatrix} 2q & q+\frac{1}{2} \\ -\frac{p}{q+\frac{1}{2}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Собственные значения A равны

$$\zeta_{1,2} = q \pm \sqrt{q^2 - p} = q \pm \sqrt{D}. \tag{15}$$

В зависимости от параметров p и q фазовые портреты будут иметь вид, показанный на рис. 2.

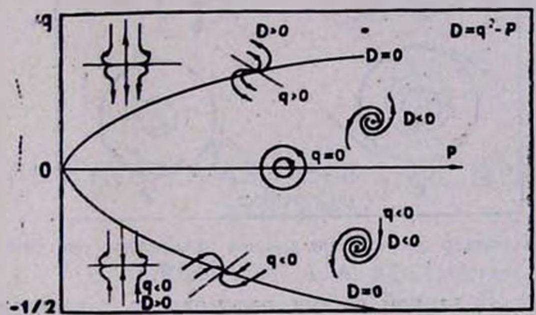

Рис. 2. Фазовый портрет системы (10) и характер особых точек.

Из рис. 2 видно, что при $q > 0$ особая точка неустойчива, при $D > 0$ является отталкивающим узлом, при $D = 0$ — вырожденным отталкивающим узлом, при $D < 0$ — отталкивающим фокусом. При $q < 0$ имеют место те же самые фазовые портреты, только в этом случае особая точка притягивающая.

Теперь зададимся следующим важным вопросом: имеет ли данная система предельные циклы? Из (10) видно, что

$$\Lambda(N, R) = \frac{\partial \dot{N}}{\partial N} + \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} = -3a_1 - a_5 + \frac{2a_3}{N} + \frac{a_4}{N^2}.$$

Если N_1 — положительное решение уравнения $\Lambda(N, R) = 0$ (легко проверить, что всегда существует единственное положительное решение), то при $N < N_1$ — $\Lambda > 0$, а при $N > N_1$ — $\Lambda < 0$. Тогда из приведенного в разделе 3 критерия Дюлака — Бендиксона следует, что в областях $N < N_1 (F = 1)$, $N > N_1 (F = -1)$ предельных циклов не существует. Следовательно, если предельные циклы и существуют, то они должны пересекать линию $N = N_1$.

Теперь рассмотрим, что произойдет с системой вблизи особой точки, если параметр q проходит через нуль. Так как система (12) зависит от двух параметров, то, согласно разделу 3, вблизи особой точки систему можно преобразовать в систему (9). Из анализа системы (9), т. е. симметричной катастрофы типа $A_{\pm 5}$ -«бабочка», следует, что существуют параметры, при которых система не имеет предельных циклов, имеет один предельный цикл (устойчивый, если особая точка неустойчивая (рис. 3a) и наоборот), (рис. 3b), имеет два предельных цикла (рис. 3c, d).

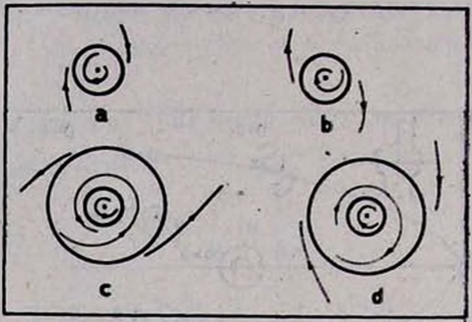

Рис. 3. Характер циклов при разных параметрах системы (10).

5. *Заключение.* В данной работе рассмотрена эволюция сферически-симметричной звездной системы, содержащей центральное массивное тело. Задача сведена к анализу двумерной неконсервативной динамической системы. Из теории диссипативных динамических систем, в частности, из теоремы Пуанкаре—Бендиксона следует невозможность хаотического движения для двумерных систем. Следовательно, задача, свелась к изучению простого аттрактора, т. е. к задаче о наличии и устойчивости особых точек, предельных циклов, а также возможности бифуркаций. Оказалась, что в зависимости от свободных параметров система может иметь структурно устойчивую единственную особую точку (13), которая может быть как динамически устойчивой, так и неустойчивой, включая отталкивающие (притягивающие) узел и фокус. Показано, что в зависимости от параметров система может иметь два предельных цикла, один предельный цикл, либо не иметь ни одного. В частности, в зависимости от пути (см. рис. 2) в пространстве могут осуществляться суперкритическая и субкритическая бифуркации Хопфа. Возникающая при этом сепаратриса соответствует симметрической катастрофе типа $A_{\pm 5}$-«бабочка».

Сведение задачи к двумерной динамической системе было оправдано тем,что, как уже упомянуто в разделе 2, характерные эволюционные времена намного превосходят время релаксации реальных систем. Поэтому последнее можно считать не меняющимся во времени. Аналогично, изменение других параметров системы, таких, как, например, массы центрального тела, средней концентрации звезд, входящих в выражение для скорости приливного разрушения звезд ($\dot{N} \propto M^{4/3} n^{1/2} R^{-1}$), согласно результатам целого ряда исследований (см. например, [11] и другие работы этих авторов) в широком интервале параметров крайне слабо по сравнению с изменением радиуса R или числа звезд N.

Наш анализ показал эффективность динамических методов для изучения эволюционных путей звездных систем. Несомненно, основные исследования впереди.

Авторы благодарны В. А. Амбарцумяну, С. Г. Матиняну, Г. К. Саввиди и А. К. Седракяну за полезные обсуждения.

Ереванский физический
институт

STELLAR SYSTEMS AS DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS

V. G. GURZADYAN, A. A. KOCHARIAN

The evolution of a stellar system containing massive central body is investigated using the methods of the theory of dynamical systems. The problem is reduced to the study of a two-dimensional dissipative system-simple attractor. The existence of stable and unstable singular points and cycles is shown. Hopf bifurcations can occur in the system, with a separatrix corresponding to a symmetrical catastrophe of $A_{\pm 5}$ "butterfly" type.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. L. Shapiro*, Astrophys. J., 217, 281, 1977.
2. *V. G. Gurzadyan, G. K. Savvidy*, EPI—678(68), 1983; Astron. and Astrophys., 160, 203, 1986.
3. *В. Г. Гурзадян, Г. К. Саввиди*, Докл. АН СССР, 277, 64, 1984.
4. *В. Г. Гурзадян, А. А. Кочарян*, Докл. АН СССР, 287, 813, 1986.
5. *В. Г. Гурзадян*, в сб. «Частицы и космология», М., 1986.
6. *В. Г. Гурзадян, А. А. Кочарян, С. Г. Матинян*, Докл. АН СССР (в печати).
7. *В. А. Амбарцумян*, Уч. зап. ЛГУ. 22, 19, 1938.
8. *J. G. Hills*, Nature, 254, 295, 1975.
9. *V. G. Gurzadyan*, Astron. and Astrophys., 114, 71, 1982.
10. *G. A. Gurzadyan, V. G. Gurzadyan*, Astrophys. Space Sci., 94, 31, 1983.

11. *J. P. Luminet, B. Carter,* Preprint Meudon, 1985.
12. *M. J. Duncan, S. L. Shapiro,* Astrophys. J., 253, 921, 1982.
13. *А. Лихтенберг, М. Либерман,* Регулярная и стохастическая динамика, Наука, М., 1979.
14. *В. И. Арнольд,* Теория катастроф, Изд. МГУ, М., 1983.
15. *В. И. Арнольд,* Математические методы классической механики, Наука, М., 1979.
16. *Р. Гилмор,* Прикладная теория катастроф, Мир, М., 1984.