АСТРОФИЗИКА

ТОМ 26 АПРЕЛЬ, 1987 ВЫПУСК 2

УДК: 524.57—6

ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЫЛЕВОЙ ТУМАННОСТИ, ОСВЕЩЕННОЙ ЗВЕЗДОЙ

А. К. КОЛЕСОВ, В. Ю. ПЕРОВ

Поступила 23 апреля 1986
Принята к печати 20 октября 1986

Рассматривается задача об определении поля излучения в бесконечной однородной поглощающей и анизотропно рассеивающей среде с центральным точечным источником. Получены точное и асимптотические выражения для интенсивности излучения. Проведены расчеты поля излучения в пылевой туманности, освещенной звездой, при различных значениях альбедо частицы и при разных индикатрисах рассеяния. Показано, что асимптотические формулы (10) и (11) достаточно точно описывают поле излучения на больших оптических расстояниях от источника.

1. *Введение.* При исследовании пылевых оболочек звезд и пылевых туманностей, освещаемых звездами, часто возникает задача об определении полей излучения в этих объектах при предположении об их сферической симметрии (см., например, [1], гл. 7). Для решения этой задачи обычно применяются различные приближенные методы, в частности, приближенный метод Соболева [2], двухпотоковое [3] и трехпотоковое [4] приближения. Практическая важность задачи определяет необходимость разработки методики расчета полей излучения, основанной на использовании точной аналитической теории.

Аналитическая теория многократного рассеяния света в бесконечных однородных поглощающих и анизотропно рассеивающих средах со сферической симметрией недавно была развита в работах одного из соавторов [5, 6]. В работе [5] рассмотрена среда, освещенная точечным источником. Найдены точные формулы для коэффициентов разложения функции источников по полиномам Лежандра, получены асимптотические выражения для функции источников и интенсивности излучения вдали от источника. В работе [6] изучен более общий случай произвольного сферически симметричного распределения источников. Найдены собственные функции однородного уравнения переноса излучения и построены функции Грина. В случае точечного источника функция Грина с точностью до постоянного множителя совпадает с полученной в работе [5] функцией источников.

В настоящей статье исследуется поле излучения в бесконечной однородной пылевой туманности, окружающей звезду. С помощью выведенного в работе [5] выражения для функции источников получены точная и асимптотические формулы для интенсивности излучения. По этим формулам проведены расчеты полей излучения в пылевых туманностях при различных значениях альбедо частицы и при разных индикатрисах рассеяния. Путем сравнения результатов вычислений, выполненных по точной и по асимптотическим формулам, показано, что полученные в настоящей статье асимптотические формулы дают значительно более точные значения интенсивности излучения, чем асимптотические выражения, найденные ранее в работах [5, 6].

2. *Основные уравнения.* Рассмотрим однородную бесконечно протяженную пылевую туманность, освещенную звездой. Оптические свойства вещества этой туманности будем характеризовать объемным коэффициентом поглощения α, альбедо однократного рассеяния λ и индикатрисой рассеяния $x(\gamma)$, где γ — угол рассеяния. Звезду, освещающую туманность, представим в виде точечного источника излучения мощности L.

Интенсивность излучения $I(\tau, \mu)$, распространяющегося под углом $\arccos\mu$ к радиус-вектору на оптическом расстоянии τ от источника, и соответствующая функция источников $B(\tau, \mu)$ определяются уравнениями переноса излучения

$$\mu\frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial\tau}+\frac{1-\mu^2}{\tau}\frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial\mu}=-I(\tau, \mu)+B(\tau, \mu) \tag{1}$$

и лучистого равновесия

$$B(\tau, \mu)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1}I(\tau, \mu')\,p(\mu, \mu')\,d\mu'+\frac{L\alpha^2}{8\pi^2\tau^2}\delta(\tau)\,\delta(\mu-1), \tag{2}$$

где δ — дельта-функция, $p(\mu, \mu')$ — усредненная по азимуту индикатриса рассеяния. Отметим, что в уравнениях (1) и (2) под $I(\tau, \mu)$ понимается полная интенсивность излучения, т. е. сумма интенсивностей диффузного излучения и излучения, приходящего в данную точку среды непосредственно от источника.

Поле излучения в рассматриваемой пылевой туманности полностью определяется функцией $I(\tau, \mu)$, находимой из уравнений (1) и (2) при условии, что $I(\tau, \mu)\to 0$ при $\tau\to\infty$. Если функция источников $B(\tau, \mu)$ известна, то интенсивность излучения $I(\tau, \mu)$ можно найти, используя формальное решение уравнения (1), т. е.

$$I(\tau, \mu) = \int_0^\infty B\left(t, \frac{\tau\mu - x}{t}\right) e^{-x}\, dx, \tag{3}$$

где $t = \sqrt{\tau^2 - 2\tau\mu x + x^2}$.

3. *Точное решение задачи.* Функция источников $B(\tau, \mu)$ для бесконечной однородной анизотропно рассеивающей и поглощающей среды, освещенной точечным источником, была определена в работе [5] при предположении, что индикатриса рассеяния представляется в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\cos\gamma)$, т. е.

$$x(\gamma) = \sum_{n=0}^{N} x_n P_n(\cos\gamma). \tag{4}$$

Для функции $B(\tau, \mu)$ было получено следующее точное аналитическое выражение:

$$B(\tau, \mu) = \frac{\lambda L a^2}{16\pi^2} \sum_{n=0}^{N} x_n P_n(\mu) \mathop{S}_{\nu>0} \frac{f_n(\tau, \nu)}{N(\nu)}, \tag{5}$$

где $f_n(\tau, \nu)$ — коэффициенты разложения по полиномам Лежандра собственных функций $f(\tau, \mu, \nu)$ однородного уравнения переноса излучения в среде со сферической симметрией (см. [6]), ν — собственные значения этого уравнения, $N(\nu)$ — кейзовские нормировочные интегралы (см. [7]), а символ $\mathop{S}_{\nu>0}$ обозначает суммирование по всем положительным дискретным собственным значениям и интегрирование по промежутку [0, 1] непрерывного спектра.

Величины $f_n(\tau, \nu)$ при конечных значениях ν даются формулой

$$f_n(\tau, \nu) = \frac{R_n(\nu)}{\tau\nu} \sqrt{\frac{2\tau}{\pi\nu}}\, K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{\nu}\right), \tag{6}$$

где $K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{\nu}\right)$ — модифицированные функции Бесселя 3-го рода (см., например, [8]), а $R_n(\nu)$ — известные полиномы, используемые в теории переноса излучения (см. [9]). При $\lambda = 1$, когда существует бесконечное собственное значение, в формуле (5) вместо отношения величин $f_n(\tau, \infty)$ и $N(\infty)$ следует использовать его предельное значение (см. [6]):

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f_n(\tau, \nu)}{N(\nu)} = \frac{(3 - x_1)\, n!}{(2n+1)\beta_n \tau^{n+1}}, \tag{7}$$

где

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_n = \prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{x_m}{2m+1}\right) \quad (m \geqslant 1). \tag{8}$$

Подстановка выражения (5) в (3) дает точную формулу для интенсивности излучения:

$$I(\tau, \mu) = \frac{\lambda L \alpha^2}{16\pi^2} \sum_{n=0}^{N} x_n \int_0^\infty \underset{\nu>0}{S} \frac{f_n(t, \nu)}{N(\nu)} P_n\left(\frac{\tau\mu - x}{t}\right) e^{-x} dx. \tag{9}$$

Эта формула использовалась нами для расчета поля излучения (см. раздел 5).

4. *Асимптотические формулы.* Для упрощения вычисления интенсивности излучения при $\tau \gg 1$ вместо точной формулы (9) можно использовать более простые асимптотические выражения. Точность этих выражений можно оценить, сравнивая результаты расчетов по точной и по асимптотическим формулам.

Функции Бесселя $K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{\nu}\right)$, входящие в выражения для величин $f_n(\tau, \nu)$, содержат, как известно [8], экспоненциальные множители $e^{-\frac{\tau}{\nu}}$, поэтому в сумме по собственным значениям, имеющейся в формуле (5), при $\tau \gg 1$ преобладает дискретный член, соответствующий наибольшему собственному значению $\nu_1 = \frac{1}{k}$ (или $\nu_1 = \infty$ при $\lambda = 1$). Оставляя в (5) только этот член, приходим к следующим асимптотическим формулам для интенсивности излучения:

$$I(\tau, \mu) = \frac{\lambda L \alpha^2}{16\pi^2 N\left(\frac{1}{k}\right)} \sum_{n=0}^{N} x_n \int_0^\infty f_n\left(t, \frac{1}{k}\right) P_n\left(\frac{\tau\mu - x}{t}\right) e^{-x} dx, \tag{10}$$

$$\tau \gg 1, \quad \lambda < 1,$$

$$I(\tau, \mu) = \frac{\lambda L \alpha^2}{16\pi^2} (3 - x_1) \sum_{n=0}^{N} \frac{x_n n!}{(2n+1)\beta_n} \int_0^\infty P_n\left(\frac{\tau\mu - x}{t}\right) \frac{e^{-x}}{t^{n+1}} dx, \tag{11}$$

$$\tau \gg 1, \quad \lambda = 1.$$

При $k\tau \gg 1$, когда $\sqrt{\frac{2k\tau}{\pi}} K_{n+\frac{1}{2}}(k\tau) \sim e^{-k\tau}$ (см. [8]), формула (10) приобретает вид

$$I(\tau, \mu) = \frac{\lambda L \alpha^2 k}{16\pi^2 N\left(\frac{1}{k}\right)} \sum_{n=0}^{N} x_n R_n\left(\frac{1}{k}\right) \int_0^\infty P_n\left(\frac{\tau\mu - x}{t}\right) \frac{e^{-kt-x}}{t}\, dx. \tag{12}$$

В случае изотропного рассеяния формулы (10) и (12) совпадают.

При $\tau \gg 1$ имеют место также следующие простые асимптотические формулы для интенсивности излучения (см. [5, 6]):

$$I(\tau, \mu) = \frac{\lambda L \alpha^2 k}{16\pi^2 N\left(\frac{1}{k}\right)} i(\mu) \frac{e^{-k\tau}}{\tau}, \quad \tau \gg 1, \quad \lambda < 1, \tag{13}$$

$$I(\tau, \mu) = \frac{L\alpha^2}{16\pi^2} \cdot \frac{3 - x_1}{\tau}, \qquad \tau \gg 1, \quad \lambda = 1. \tag{14}$$

В формуле (13) $i(\mu)$ — угловое распределение интенсивности излучения в глубоких слоях плоской полубесконечной среды (см., например, [9]). Отметим, что величина $N\left(\frac{1}{k}\right)$ связана соотношением $N\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{8}k^2 M$ с постоянной M, часто используемой в теории переноса излучения (см. [9]).

5. *Результаты расчетов по точной формуле*. Интенсивности излучения $I(\tau, \mu)$ в бесконечной однородной пылевой туманности, окружающей звезду, были рассчитаны нами по формуле (9) при значениях $\lambda = 0.9$ и $\lambda = 1$ для трех индикатрис рассеяния: А — сферическая индикатриса $x(\gamma) = 1$, В — рэлеевская индикатриса $x(\gamma) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\gamma)$, С — трехчленная индикатриса $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos\gamma + x_2 P_2(\cos\gamma)$ при $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$. При расчетах принималось, что $\frac{L\alpha^2}{8\pi^2} = 1$. Результаты вычислений приведены в табл. 1 (случай $\lambda = 0.9$) и в табл. 2 (случай $\lambda = 1$) для разных значений аргументов τ и μ. В этих и следующих таблицах принята форма записи чисел через мантиссу и порядок. Например, запись 3.765—2 означает $3.765 \cdot 10^{-2}$. Значения $I(\tau, \mu)$ при $\tau > 10$ в случае рэлеевской индикатрисы в табл. 2 не приведены, так как в пределах принятой точности они совпадают с соответствующими значениями для изотропного рассеяния.

При $\lambda < 1$ интенсивность излучения быстро уменьшается с ростом τ. Это обусловлено тем, что при $\tau \gg 1$ в соответствии с асимптотическим выражением (13) значения $I(\tau, \mu)$ пропорциональны

Таблица 7

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $I(\tau, \mu)$ ПРИ $\lambda=0.9$

$x(\gamma)$	τ \ μ	−1.0	−0.5	0.0	0.5	0.9
A	1.0	3.345 − 1	4.012 − 1	5.118 − 1	7.526 − 1	1.656 + 0
	2.5	6.710 − 2	8.071 − 2	1.028 − 1	1.486 − 1	2.935 − 1
	5.0	9.650 − 3	1.164 − 2	1.481 − 2	2.110 − 2	3.765 − 2
	7.5	1.784 − 3	2.154 − 3	2.740 − 3	3.867 − 3	6.500 − 3
	10	3.662 − 4	4.422 − 4	5.621 − 4	7.883 − 4	1.275 − 3
	25	5.727 − 8	6.919 − 8	8.770 − 8	1.210 − 7	1.795 − 7
	50	5.721 −14	6.912 −14	8.747 −14	1.197 −13	1.723 −13
	75	7.558 −20	9.132 −20	1.155 −19	1.576 −19	2.247 −19
	100	1.121 −25	1.354 −25	1.712 −25	2.333 −25	3.310 −25
B	1.0	3.858 − 1	4.174 − 1	4.975 − 1	7.218 − 1	1.692 + 0
	2.5	7.243 − 2	8.091 − 2	9.879 − 2	1.427 − 1	2.977 − 1
	5.0	1.014 − 2	1.158 − 2	1.435 − 2	2.055 − 2	3.824 − 2
	7.5	1.864 − 3	2.150 − 3	2.677 − 3	3.806 − 3	6.627 − 3
	10	3.825 − 4	4.435 − 4	5.535 − 4	7.823 − 4	1.305 − 3
	25	6.129 − 8	7.169 − 8	8.968 − 8	1.247 − 7	1.893 − 7
	50	6.455 −14	7.570 −14	9.469 −14	1.306 −13	1.919 −13
	75	9.008 −20	1.057 −19	1.322 −19	1.818 −19	2.643 −19
	100	1.412 −25	1.658 −25	2.073 −25	2.847 −25	4.116 −25
C	1.0	2.402 − 1	2.384 − 1	2.941 − 1	5.187 − 1	1.605 + 0
	2.5	5.037 − 2	5.541 − 2	7.278 − 2	1.234 − 1	3.090 − 1
	5.0	8.833 − 3	1.040 − 2	1.404 − 2	2.283 − 2	4.728 − 2
	7.5	2.037 − 3	2.461 − 3	3.346 − 3	5.310 − 3	9.927 − 3
	10	5.229 − 4	6.399 − 4	8.715 − 4	1.361 − 3	2.393 − 3
	25	3.141 − 7	3.919 − 7	5.326 − 7	8.007 − 7	1.247 − 6
	50	2.936 −12	3.682 −12	4.990 −12	7.386 −12	1.106 −11
	75	3.622 −17	4.549 −17	6.158 −17	9.064 −17	1.340 −16
	100	5.013 −22	6.300 −22	8.523 −22	1.251 −21	1.839 −21

$\frac{e^{-k\tau}}{\tau}$. Различия в скорости уменьшения $I(\tau, \mu)$ с ростом τ для разных индикатрис рассеяния вызваны в основном разницей в значениях k (при $\lambda=0.9$ для индикатрис A, B, C значения k соответственно равны 0.5254; 0.5232; 0.4361). При $\lambda=1$, когда $k=0$, уменьшение значений $I(\tau, \mu)$ с ростом τ происходит значительно медленнее, и скорость этого уменьшения примерно одна и та же для всех индикатрис.

Таблица 2

ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $I(\tau, \mu)$ ПРИ $\lambda = 1$

$x(\gamma)$	τ \ μ	−1.0	−0.5	0.0	0.5	0.9
A	1.0	9.316 −1	1.038 +0	1.204 +0	1.541 +0	2.680 +0
	2.5	4.567 −1	4.945 −1	5.493 −1	6.460 −1	8.839 −1
	5.0	2.557 −1	2.706 −1	2.906 −1	3.210 −1	3.724 −1
	7.5	1.785 −1	1.866 −1	1.969 −1	2.111 −1	2.301 −1
	10	1.373 −1	1.424 −1	1.486 −1	1.567 −1	1.661 −1
	25	5.777 −2	5.878 −2	5.990 −2	6.116 −2	6.231 −2
	50	2.942 −2	2.970 −2	2.999 −2	3.030 −2	3.056 −2
	75	1.974 −2	1.987 −2	2.000 −2	2.013 −2	2.024 −2
	100	1.485 −2	1.492 −2	1.500 −2	1.507 −2	1.514 −2
B	1.0	1.002 +0	1.065 +0	1.194 +0	1.514 +0	2.743 +0
	2.5	4.668 −1	4.963 −1	5.448 −1	6.399 −1	8.947 −1
	5.0	2.574 −1	2.707 −1	2.896 −1	3.201 −1	3.745 −1
	7.5	1.791 −1	1.866 −1	1.965 −1	2.108 −1	2.308 −1
	10	1.376 −1	1.424 −1	1.486 −1	1.566 −1	1.663 −1
C	1.0	5.835 −1	5.966 −1	6.352 −1	9.872 −1	2.318 +0
	2.5	2.791 −1	2.986 −1	3.395 −1	4.328 −1	7.084 −1
	5.0	1.596 −1	1.708 −1	1.883 −1	2.189 −1	2.772 −1
	7.5	1.132 −1	1.199 −1	1.294 −1	1.439 −1	1.649 −1
	10	8.793 −2	9.240 −2	9.826 −2	1.065 −1	1.167 −1
	25	3.781 −2	3.878 −2	3.988 −2	4.116 −2	4.235 −2
	50	1.943 −2	1.970 −2	1.998 −2	2.030 −2	2.056 −2
	75	1.308 −2	1.320 −2	1.333 −2	1.347 −2	1.358 −2
	100	9.853 −3	9.924 −3	9.998 −3	1.007 −2	1.014 −2

С ростом μ значения $I(\tau, \mu)$ возрастают, что особенно заметно при μ, близких к единице. Например, в случае индикатрисы С для $\tau = 10$, $\lambda = 0.9$ величины $I(\tau, \mu)$ при $\mu = 0.5$; 0.9; 0.99; 0.999 равны соответственно $1.361 \cdot 10^{-3}$; $2.393 \cdot 10^{-3}$; $3.073 \cdot 10^{-3}$; $3.325 \cdot 10^{-3}$. В этом проявляется «эффект пика интенсивности», впервые выявленный в задачах о распространении излучения в средах со сферической симметрией Чепменом [10]. В направлении распространения прямого излучения точечного источника (при $\mu = 1$) интенсивность излучения становится бесконечной.

6. *Результаты расчетов по асимптотическим формулам.* В табл. 3 приведены асимптотические значения $I(\tau, \mu)$, вычисленные по формуле (13) при $\lambda = 0.9$. Сравнение этих значений с приведенными в табл. 1 точными значениями показывает, что асимптотические значения достаточно близки

Таблица 3

ЗНАЧЕНИЯ $I(\tau, \mu)$, РАССЧИТАННЫЕ ПО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ (13) ПРИ $\lambda = 0.9$

$x(\gamma)$	τ \ μ	−1.0	−0.5	0.0	0.5	0.9
A	10	3.888 − 4	4.697 − 4	5.931 − 4	8.044 − 4	1.125 − 3
	25	5.873 − 8	7.095 − 8	8.959 − 8	1.215 − 7	1.700 − 7
	50	5.795 −14	7.001 −14	8.840 −14	1.199 −13	1.677 −13
	75	7.624 −20	9.210 −20	1.163 −19	1.577 −19	2.206 −19
	100	1.128 −25	1.363 −25	1.721 −25	2.335 −25	3.265 −25
B	10	4.002 − 4	4.705 − 4	5.882 − 4	8.038 − 4	1.144 − 3
	25	6.251 − 8	7.349 − 8	9.187 − 8	1.255 − 7	1.788 − 7
	50	6.521 −14	7.666 −14	9.584 −14	1.310 −13	1.865 −13
	75	9.069 −20	1.066 −19	1.333 −19	1.822 −19	2.593 −19
	100	1.419 −25	1.668 −25	2.085 −25	2.850 −25	4.058 −25
C	10	5.630 − 4	7.091 − 4	9.572 − 4	1.393 − 3	2.012 − 3
	25	3.247 − 7	4.089 − 7	5.520 − 7	8.032 − 7	1.160 − 6
	50	2.987 −12	3.762 −12	5.078 −12	7.389 −12	1.057 −11
	75	3.664 −17	4.615 −17	6.230 −17	9.064 −17	1.309 −16
	100	5.056 −22	6.369 −22	8.597 −22	1.251 −21	1.807 −21

к точным лишь при больших τ ($\tau > 10$). Наилучшее совпадение этих значений достигается при μ, близких к k. При μ, приближающихся к единице, ошибка асимптотических значений $I(\tau, \mu)$ растет, так как формула (13) (так же, как и формула (14) при $\lambda = 1$) «эффекта пика интенсивности» не описывает. Например, в случае индикатрисы C для $\tau = 50$, $\lambda = 0.9$ при $\mu = 0.5$; 0.9; 0.99; 0.999 точные значения $I(\tau, \mu)$ равны соответственно $7.386 \cdot 10^{-12}$; $1.106 \cdot 10^{-11}$; $1.233 \cdot 10^{-11}$; $1.247 \cdot 10^{-11}$, а асимптотические значения — $7.389 \cdot 10^{-12}$; $1.067 \cdot 10^{-11}$; $1.172 \cdot 10^{-11}$; $1.184 \cdot 10^{-11}$.

Асимптотическая формула (14) дает значения $I(\tau, \mu)$, не зависящие от μ и при $\tau > 5$ близкие к приведенным в табл. 2 точным значениям $I(\tau, 0)$. Например, величины $I(\tau, \mu)$, вычисленные по формуле (14) при

τ = 5, 10, 25, 50, 100 для индикатрис A и B равны соответственно 0.3; 0.15; 0.06; 0.03; 0.015, а для индикатрисы C — 0.2; 0.1; 0.04; 0.02; 0.01. Точные значения $I(\tau, \mu)$ зависят от μ, но с ростом τ эта зависимость становится менее существенной.

Таблица 4

ЗНАЧЕНИЯ $I(\tau, \mu)$, РАССЧИТАННЫЕ ПО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ (10) ПРИ $\lambda = 0.9$

$x(\gamma)$	μ / τ	−1.0	−0.5	0.0	0.5	0.9
A	1.0	2.972 −1	3.521 −1	4.398 −1	6.171 −1	1.656 +0
	2.5	6.556 −2	7.866 −2	9.976 −2	1.425 −1	2.662 −1
	5.0	9.619 −3	1.159 −2	1.475 −2	2.097 −2	3.702 −2
	7.5	1.783 −3	2.152 −3	2.740 −3	3.862 −3	6.500 −3
	10.0	3.661 −4	4.421 −4	5.620 −4	7.881 −4	1.274 −3
B	1.0	3.731 −1	3.674 −1	3.980 −1	5.268 −1	1.047 +0
	2.5	7.132 −2	7.848 −2	9.445 −2	1.342 −1	2.646 −1
	5.0	1.011 −2	1.153 −2	1.426 −2	2.037 −2	3.749 −2
	7.5	1.863 −3	2.150 −3	2.677 −3	3.800 −3	6.600 −3
	10.0	3.825 −4	4.434 −4	5.534 −4	7.820 −4	1.304 −3
C	1.0	2.674 −1	1.967 −1	1.701 −1	2.624 −1	8.337 −1
	2.5	5.032 −2	5.296 −2	6.731 −2	1.125 −1	2.708 −1
	5.0	8.822 −3	1.034 −2	1.393 −2	2.261 −2	4.642 −2
	7.5	2.036 −3	2.459 −3	3.342 −3	5.310 −3	9.896 −3
	10.0	5.229 −4	6.398 −4	8.713 −4	1.361 −3	2.391 −3

В табл. 4 и 5 приведены результаты вычислений $I(\tau, \mu)$ по формулам (10) и (11) соответственно при $\lambda = 0.9$ и при $\lambda = 1$. Сравнение этих таблиц с табл. 1 и 2 показывает, что асимптотические формулы (10) и (11) дают практически точные результаты при $\tau > 5$ в случае $\lambda = 0.9$ и при $\tau > 2.5$ в случае $\lambda = 1$. В то же время вычисления по этим формулам выполняются значительно проще, чем по точной формуле (9), так как в (10) и (11) содержится однократное, а в (9) — двукратное интегрирование. Отсюда следует, что при расчетах полей излучения в исследуемой пылевой туманности всюду, кроме области, расположенной вблизи освещающей звезды, вместо формулы (9) целесообразно использовать формулы (10) и (11). Эти же формулы следует применять и для оценки точности различных асимптотических выражений, справедливых при $\tau \gg 1$, и приближенных формул.

Таблица 5

ЗНАЧЕНИЯ $I(\tau, \mu)$, РАССЧИТАННЫЕ ПО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ (11) ПРИ $\lambda = 1$

$x(\gamma)$	τ \ μ	−1.0	−0.5	0.0	0.5	0.9
A	1.0	8.945 −1	9.887 −1	1.132 +0	1.404 +0	2.142 +0
	2.5	4.553 −1	4.926 −1	5.464 −1	6.402 −1	8.569 −1
	5.0	2.556 −1	2.706 −1	2.905 −1	3.209 −1	3.718 −1
	7.5	1.785 −1	1.866 −1	1.969 −1	2.111 −1	2.301 −1
	10.0	1.373 −1	1.424 −1	1.486 −1	1.567 −1	1.661 −1
B	1.0	9.939 −1	1.015 +0	1.091 +0	1.310 +0	2.064 +0
	2.5	4.659 −1	4.940 −1	5.404 −1	6.313 −1	8.615 −1
	5.0	2.574 −1	2.706 −1	2.895 −1	3.199 −1	3.738 −1
	7.5	1.791 −1	1.866 −1	1.965 −1	2.108 −1	2.307 −1
	10.0	1.376 −1	1.424 −1	1.485 −1	1.566 −1	1.663 −1
C	1.0	6.182 −1	5.484 −1	5.899 −1	6.922 −1	1.466 +0
	2.5	2.791 −1	2.957 −1	3.330 −1	4.293 −1	6.672 −1
	5.0	1.595 −1	1.707 −1	1.881 −1	2.186 −1	2.763 −1
	7.5	1.132 −1	1.199 −1	1.294 −1	1.438 −1	1.649 −1
	10.0	8.793 −2	9.240 −2	9.826 −2	1.065 −1	1.167 −1

В табл. 6 представлены значения $I(\tau, \mu)$, вычисленные по формуле (12) для индикатрис B и C при $\lambda = 0.9$. Анализ таблиц 1, 3, 4 и 6 показывает, что точность формулы (12) (при несферической индикатрисе рассеяния) несколько выше, чем точность выражения (13), но значительно ниже точности формулы (10). Если при расчетах требуется достаточно высокая точность, то при $\tau \gg 1$ целесообразно брать формулу (10), так как вычисления по ней не сложнее, чем по формуле (12), а точность результатов значительно выше. Если же высокая точность не требуется, то при $\tau \gg 1$ можно использовать простое выражение (13).

7. *Заключительные замечания.* Отметим, что при вычислениях поля излучения вблизи точечного источника в формуле (3) для функции $B(\tau, \mu)$ при малых значениях τ можно использовать приближение однократного рассеяния, т. е.

$$B(\tau, \mu) = \frac{\lambda L x^2}{16\pi^2} x(\arccos \mu) \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}, \tag{15}$$

при больших τ — асимптотическое выражение

$$B(\tau, \mu) = \frac{\lambda L a^2}{16\pi^2 N\left(\frac{1}{k}\right)} \sum_{n=0}^{N} x_n f_n\left(\tau, \frac{1}{k}\right) P_n(\mu), \tag{16}$$

вытекающее из формулы (5), а при промежуточных значениях τ — точное выражение (5). Таким же образом функцию $I(\tau, \mu)$ можно рассчитать и при любых значениях τ в случае μ, близких к единице, когда линия интегрирования по переменной x проходит вблизи точки $\tau = 0$.

Таблица 6

ЗНАЧЕНИЯ $I(\tau, \mu)$, РАССЧИТАННЫЕ ПО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ (12) ПРИ $\lambda = 0.9$

$x(\gamma)$	μ / τ	−1.0	−0.5	0.0	0.5	0.9
B	10	3.768 — 4	4.437 — 4	5.577 — 4	7.855 — 4	1.290 — 3
	25	6.095 — 8	7.173 — 8	8.995 — 8	1.248 — 7	1.885 — 7
	50	6.437 —14	7.572 —14	9.483 —14	1.307 —13	1.915 —13
	75	8.992 —20	1.057 —19	1.323 —19	1.819 —19	2.640 —19
	100	1.410 —25	1.658 —25	2.073 —25	2.847 —25	4.113 —25
C	10	5.283 — 4	6.623 — 4	8.952 — 4	1.348 — 3	2.243 — 3
	25	3.161 — 7	3.974 — 7	5.373 — 7	7.957 — 7	1.216 — 6
	50	2.947 —12	3.708 —12	5.010 —12	7.360 —12	1.092 —11
	75	3.631 —17	4.570 —17	6.174 —17	9.042 —17	1.330 —16
	100	5.022 —22	6.322 —22	8.539 —22	1.249 —21	1.828 —21

Методика расчета полей излучения в бесконечной однородной пылевой туманности, изложенная в настоящей статье для случая точечного источника, обобщается и на случаи других сферически симметричных распределений источников.

Зная интенсивности излучения в бесконечной среде, можно определить и поля излучения в шаре и сферической оболочке. Для этого следует использовать полученные в работах [11, 12] интегральные соотношения между интенсивностями излучения в этих средах.

Ленинградский государственный университет

THE RADIATION FIELD IN A INFINITE DUST NEBULA ILLUMINATED BY A STAR

A. K. KOLESOV, V. Yu. PEROV

The problem of determination of the radiation field in a infinite homogeneous absorbing and anisotropically scattering medium with a central point source is considered. The exact and asymptotic expressions for the radiation intensity have been derived. The radiation field in a dust nebula illuminated by a star have been calculated under different assumption of the particle albedo and the phase function. It has been shown that the asymptotic formulae (10) and (11) are sufficiently precise to describ e the radiation field at large optical distances from the point source.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, 3-е изд., Наука, М., 1985.
2. *В. В. Соболев*, Астрон. ж., 37, 3, 1960.
3. *W. Unno, M. Kondo*, Publ. Astron. Soc. Jap., 28, 347, 1976.
4. *S. J. Wilson, F. S. Wan, K. K. Sen*, Astrophys. and Spase Sci., 67, 99, 1980.
5. *А. К. Колесов*, Докл. АН СССР, 272, 53, 1983.
6. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 20, 131, 1984.
7. *К. Кейз, П. Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, Мир, М., 1979.
9. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
10. *R. D. Chapman*, Astrophys. J., 143, 61, 1966.
11. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 22, 571, 1985.
12. *А. К. Колесов*, Вестн. ЛГУ, № 8, 73, 1985.