АСТРОФИЗИКА

ТОМ 26 ФЕВРАЛЬ, 1987 ВЫПУСК 1

УДК: 52—64

ОБЗОРЫ

ОБРАЗОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ПРИ ЧАСТИЧНОМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ПО ЧАСТОТЕ

Д. И. НАГИРНЕР

Обзор состоит из следующих разделов. 1) Введение. 2) Функции перераспределения. 3) Уравнения переноса, их следствия и методы решения. 4) Поля излучения. Модельные задачи. 5) Глобальные характеристики. Сравнение различных видов рассеяния. 6) Частичное перераспределение в движущихся и неплоских средах. 7) Приложения теории ЧПЧ.

1. *Введение*. История теории переноса излучения в линии с учетом перераспределения по частоте насчитывает около сорока лет. Хотя первые функции перераспределения были получены еще в 30—40-х годах, их сложность не позволяла построить теорию многократного рассеяния излучения в линии. Мощный толчок развитию этой теории дало введение в 40-х годах предположения о полном перераспределении по частоте (ППЧ) при каждом акте рассеяния. Это предположение, согласно которому профили излучения и поглощения в линии совпадают, позволило создать аналитическую теорию многократного рассеяния, изложенную, например, в книгах В. В. Соболева [1] и В. В. Иванова [2] (см. также обзор [3]), а с созданием ЭВМ разработать численные методы и программы решения задач об образовании спектральных линий (см. книги Михаласа [4], Атея [5], обзор Хаммера и Рыбицкого [6]). В рамках приближения ППЧ путем решения (точного, асимптотического, приближенного или численного) модельных задач были исследованы многие тонкие вопросы многократного рассеяния излучения в линиях, а также сделаны важные приложения.

В начале 70-х годов выяснилась недостаточная точность предположения о ППЧ для сильных резонансных линий. В крыльях таких линий рассеяние оказывается близким к монохроматическому, что приводит к отличию профилей линий от рассчитанных согласно теории ППЧ, в частности, не удается объяснить изменение профилей по диску звезды. С тех пор и особенно в последнее время достигнуты большие успехи как в численном, так и в аналитическом исследовании рассеяния в линии с перераспределением по частоте, отличном от ППЧ и называемом частичным перераспределением по частоте (ЧПЧ).

Монографий, посвященных специально частичному перераспределению по частоте, нет. Отдельные вопросы излагаются в книгах Атея [5] и особенно Михаласа [4], обзорах [7—9, 3]. Итоги развития теории переноса излучения в линии при ЧПЧ подведены в трудах конференции [10] (Триест, 1984 г.), в значительной степени посвященной этой теории. Однако целый ряд исследований не отражен ни в указанных выше книгах и обзорах, ни на упомянутой конференции. Кроме того, отсутствуют обзоры на русском языке, что и побудило нас составить настоящий обзор.

Перечислим обозначения, которых мы будем придерживаться на протяжении всей статьи. Большинство из них являются общепринятыми.

Наряду с обычной частотой ν используется безразмерная $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$, где ν_0 — центральная частота, $\Delta\nu_D$ — доплеровская ширина линии. Через n_1 и n_2 обозначаются концентрации атомов в нижнем и верхнем состояниях рассматриваемой линии, через g_1 и g_2 статистические веса этих состояний. Эйнштейновские коэффициенты обозначаются A_{21}, B_{21} и B_{12}, коэффициенты вероятностей ударных переходов (с включением концентрации электронов) C_{21} и C_{12}.

Коэффициент поглощения в линии в системе атома $f(x)$ нормируется так, что интеграл от него по всем x равен 1. Макроскопический коэффициент поглощения в расчете на один поглощающий атом представляется в виде $k(\nu) = k(\nu_0)\,\Phi(x)/A = h\nu_0 B_{12}\Phi(x)/4\pi\Delta\nu_D$, где

$$\Phi(x) = \int f(x - \boldsymbol{n}\boldsymbol{v})\,F_1(\boldsymbol{v})\,d^3v \tag{1}$$

— профиль, усредненный по распределению поглощающих атомов по скоростям $\boldsymbol{v}$, измеряемым в единицах тепловой (наивероятнейшей) скорости атомов $v_t = (2kT_k/M)^{1/2}$ (T_k — кинетическая температура, M — масса атома), $A = \Phi(0)$, $\boldsymbol{n}$ — направление распространения фотона. Обычно принимается максвелловское распределение $F_1(\boldsymbol{v}) = \pi^{-3/2}\exp(-v^2)$.

Используется средняя по линии оптическая глубина τ, в однородной среде $\tau = \tau_0/A$, где τ_0 — глубина в центре линии; $T = T_0/A$ — оптическая толщина среды. Поглощение в континууме характеризуется коэффициентом k_c, не зависящим от частоты в пределах линии, и отношением $\beta = Ak_c/k(\nu_0)\,n_1 = A\beta_0$. Другие обозначения поясняются по мере их появления.

2. *Функции перераспределения.* 1) *Общие соотношения.* Прекрасные обзоры по функциям перераспределения (ФП) с выводом формул имеют-

ся в работе Хаммера [7], книгах [4, 5]. Здесь мы дадим краткую сводку с добавлением результатов, не вошедших в эти работы.

Обозначим через $r(x, x')$ ФП в системе координат, связанной с атомом. Здесь x — частота фотона после рассеяния, x' — до рассеяния. Величина $r(x, x')\,dx$ есть вероятность того, что фотон частоты x' поглотится и после переизлучения будет иметь частоту от x до $x+dx$, так что интеграл по всем x равен $f(x')$. ФП в системе, связанной с газом, получается усреднением по распределению поглощающих атомов по скоростям, которое чаще всего считается максвелловским:

$$R(x, x', \gamma) = \int r(x - \boldsymbol{n}\boldsymbol{v},\ x' - \boldsymbol{n}'\boldsymbol{v})\,F_1(\boldsymbol{v})\,d^3v. \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}'$ — орты направлений импульсов фотонов с частотами x и x' (то есть после и до рассеяния), γ — угол рассеяния, $\cos\gamma = \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}'$.

В предположении, что рассеяние в системе атома изотропно, усреднение $R(x, x', \gamma)$ по углу рассеяния γ дает ФП $R_A(x, x')$. Если считать, что рассеяние дипольное с индикатрисой $\chi(\gamma) = \chi_D(\gamma) = 3(1+\cos^2\gamma)/4$ (вместо $\chi(\gamma)=1$ при изотропном рассеянии), то в результате усреднения произведения индикатрисы и $R(x, x', \gamma)$ получится функция, обозначаемая $R_B(x, x')$. Очевидно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x, x')\,dx = \Phi(x'). \qquad (3)$$

Равенства $r(x, x') = r(x', x)$ и $R(x, x', \gamma) = R(x', x, \gamma)$ выражают свойство обратимости оптических явлений. Закон ППЧ есть $\Phi(x)\Phi(x')$. Рассмотрим теперь частные случаи ФП.

2) *ФП при радиативном расширении линии.* Приведем общепринятую классификацию ФП [7, 11].

а. Бесконечно узкая линия и монохроматическое рассеяние (или полное перераспределение, что здесь равносильно) в системе атома. Тогда $f(x) = \delta(x)$, $r(x, x') = \delta(x - x')f(x') = f(x)f(x')$, $\Phi(x) = \pi^{-1/2}\exp(-x^2)$ (доплеровский профиль),

$$R_{\rm I}(x, x', \gamma) = (1/\pi\sin\gamma)\exp[-(x^2 + x'^2 - 2xx'\cos\gamma)/\sin^2\gamma]. \qquad (4)$$

Формулу (4) получил Томас [12], выражение для $R_{\rm IA}(x, x')$ — Унно [13], для $R_{\rm IB}(x, x')$ — Филд [14].

В [15] $R_{\rm I}$ представлена разложением

$$R_{\rm I}(x, x', \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n\gamma\,\alpha_n(x)\,\alpha_n(x'), \qquad (5)$$

где $a_n(x) = \exp(-x^2) H_n(x) (2^n \pi n!)^{-1/2}$, $H_n(x)$ — многочлены Эрмита. Степени $\cos\gamma$ можно разложить по многочленам Лежандра $P_n(\cos\gamma)$, тогда получится

$$R_{\rm I}(x, x', \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1/2) P_n(\cos\gamma) R_n(x, x'). \tag{6}$$

Можно применить теорему сложения для P_n и представить $R_{\rm I}$ в виде ряда по $\cos m\varphi$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$, φ — азимут, и присоединенным функциям Лежандра. Такое разложение путем преобразования $R_{\rm I}$ по Фурье по двум переменным x и x' получено в [16], причем там показано, что

$$R_n(x, x') = 2\pi^{-1/2} \int_{x_m}^{\infty} e^{-y^2} P_n(x/y) P_n(x'/y) \, dy =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2 + m + 1/2)\Gamma(n/2 + m + 1)}{m! \, \Gamma(n + m + 3/2)} a_{n+2m}(x) a_{n+2m}(x'), \tag{7}$$

где $x_M = \max(|x|, |x'|)$. Разложение $R_{{\rm I}A}(x, x') = R_0(x, x')/2$ было получено в [17]. С помощью этого разложения в работе [18] показано, что последовательные свертки этой функции быстро сходятся к $a_0(x) a_0(x') = \Phi(x)\Phi(x')$, то есть к закону ППЧ.

6. Профиль затухания и монохроматическое рассеяние в системе атома, то есть $f(x) = f_L(x, a) = (a/\pi)(x^2 + a^2)^{-1}$, $r_{\rm II}(x, x') = \delta(x - x') f(x')$, $\Phi(x) = U(a, x)$ — функция Фойгта. Тогда

$$R_{\rm II}(x, x', \gamma) = (1/\pi^{1/2} \sin\gamma) \exp[-u^2/\sin^2(\gamma/2)] \, U(a/\cos(\gamma/2), s/\cos(\gamma/2)), \tag{8}$$

где $u = (x - x')/2$, $s = (x + x')/2$. Выражение (8) получено В. Г. Левичем [19] и Хеньи [20]. Из него получается найденная в [21] и [22] непосредственно

$$R_{{\rm II}A}(x, x') = \pi^{-3/2} \int_0^{\infty} e^{-(y+|u|)^2} dy \left[\operatorname{arctg} \frac{s + y}{a} - \operatorname{arctg} \frac{s - y}{a} \right]. \tag{9}$$

А. Г. Никогосян [23], исходя из установленной им связи $R_{\rm II}$ с $R_{\rm I}$,

$$R_{\rm II}(x, x', \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(t, a) R_{\rm I}(x + t, x' + t, \gamma) \, dt, \tag{10}$$

разложил $R_{II}(x, x', \gamma)$ по степеням $\cos\gamma$, а коэффициенты выразил через функции $\alpha_n(x)$ и

$$\alpha_n(x, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(t, a)\, \alpha_n(x + t)\, \mathrm{d}t = (-1)^n (2^n n!)^{-1/2} \frac{d^n U(a, x)}{dx^n}. \quad (11)$$

Функции $\alpha_n(x, a)$ изучались рядом авторов (см., например, [7, 24]).

В [25] $R_{IIA}(x, x')$ разложена в ряд по степеням фойгтовского параметра a. Процедуры численного расчета R_{IIA} предложены в работах [26, 27]. Авторы [28] для расчета R_{IIA} применили кубические сплайны отдельно в ядре и крыле линии. В их работе даны также матрицы коэффициентов для вычисления интегралов, содержащих R_{IIA}. Выражение для $R_{IIB}(x, x')$ получено в [7].

в. Дисперсионный профиль и полное перераспределение в системе атома: $f(x) = f_L(x, a)$, $r_{III}(x, x') = f(x) f(x')$, $\Phi(x) = U(a, x)$. Этот случай впервые рассмотрен в [7]. Там получены

$$R_{III}(x, x', \gamma) = \frac{a}{\pi^{3/2} \sin\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} \mathrm{d}y}{(y - x)^2 + a^2}\, U\left(\frac{a}{\sin\gamma}, \frac{x'}{\sin\gamma} - \frac{y}{\operatorname{tg}\gamma}\right), \quad (12)$$

усредненная ФП

$$R_{III\,A}(x, x') = \pi^{-5/2} \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y \left| \operatorname{arctg}\frac{x + y}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x - y}{a} \right| \times$$

$$\times \left| \operatorname{arctg}\frac{x' + y}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x' - y}{a} \right| \quad (13)$$

и разложение $R_{IIIA}(x, x')$ по $\alpha_n(x, a)$. В [23] R_{III} выражена через R_I и найдено разложение R_{III}:

$$R_{III}(x, x', \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(t, a)\, \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} f_L(t', a)\, dt' R_I(x + t, x' + t', \gamma) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n\gamma\, \alpha_n(x, a)\, \alpha_n(x'; a). \quad (14)$$

Методы вычисления R_{III} предлагаются в [27, 29—31].

г. Оба уровня не бесконечно тонкие. Пусть ширина нижнего γ_1, верхнего γ_2. Таким образом, эта ФП относится и к субординатным линиям. Здесь ширина линии $a = \gamma_1 + \gamma_2$, $\Phi(x) = U(a, x)$ (в [32] ошибочно утверждается, что $\Phi(x)$ другая). ФП в системе атома

$$r_{\rm V}(x, x') = (\gamma_1/a)^2 f_L(x, a) f_L(x', a)[(2\gamma_2\pi/\gamma_1)(a+\gamma_1) f_L(x'-x, 2\gamma_1) + 1] + (\gamma_2/2a) f_L(x'-x, 2\gamma_1)[f_L(x, a) + f_L(x', a)], \qquad (15)$$

Простой вывод этой функции, основанный на соотношении детального баланса, имеется в [33], а также в книге [34]. Ее вывод приведен также в [35, 11]. Хаммер [7] в качестве $r_{\rm V}$ принял другую ФП, $r_{\rm IV}$, несимметричную относительно аргументов x и x'. Авторы [36] показали, что правильной ФП является (15). Во втором издании книги [4] приводится $r_{\rm V}$ вида (15) и излагается история вопроса. Выражения для $R_{{\rm V}A}$ получены в работах [31] и [11]. В [11] даны соотношения, связывающие $r_{\rm V}$ и $R_{\rm V}$ с другими ФП.

ФП $r_{\rm V}$ является наиболее общей, все остальные — ее частные случаи [37]. Действительно, при $\gamma_1=0$ она переходит в $r_{\rm II}$, при $\gamma_2=0$ — в $r_{\rm III}$, при $\gamma_1=\gamma_2=0$ в $r_{\rm I}$. То же верно и для ФП R. При $\gamma_1 \ll \gamma_2$ первое слагаемое в (15) можно отбросить, второе обозначим $r_{\rm V}^0$; Для вычисления соответствующих ФП $R'_{{\rm V}A}$ и $R^0_{{\rm V}A}$ можно применять методы, предложенные в [29, 31, 11, 27].

Обзор и оценка методов расчета ФП дается в [38].

3) *Перераспределение под действием столкновений.* Хотя приведенные выше ФП использовались и тогда, когда столкновениями пренебрегать нельзя, строго говоря, это незаконно, так как эти ФП учитывают лишь затухание вследствие излучения. Учет столкновений сильно усложняет ФП.

Первое строгое рассмотрение перераспределения фотонов при рассеянии в линии под действием столкновений проведено в статье [36]. Авторы [36] с помощью аппарата квантовой электродинамики и квантовой статистики в ударном приближении получили выражение для ФП с учетом неупругих и упругих столкновений $r_c(x, x')$ в виде комбинации дисперсионных профилей со сдвигами по частоте. При пренебрежении ударными процессами их r_c переходит в $r_{\rm V}$. В дальнейшем [39, 40] было показано, что эти авторы при выводе r_c некорректно учитывали неупругие удары, и их вывод об отсутствии перераспределения по частоте за счет тушащих ударов неправилен. В [40] при радиационной ширине $\gamma_1 = 0$ и отсутствии ударного расширения нижнего уровня линии найдено

$$r_c(x, x') = [(1-b)\,\delta(x-x') + b f_L(x-\Delta, a)] f_L(x'-\Delta, a). \qquad (16)$$

При этом получены общие выражения для сдвига Δ и ширины линии $a = \gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_E$, где γ_1 и γ_E — ширины верхнего уровня вследствие неупругих и упругих ударов. Величина b зависит от того, с какими уровнями возможны столкновительные взаимодействия. Если нижний уровень также расширен, то ФП получается гораздо сложнее. В [41] показано, что столкновения приводят к тому, что угловая зависимость рассеяния становится не обязательно дипольной. Аналогичные результаты получены в [42].

Попытки вывести ФП под действием столкновений предпринимались давно (см. [43—46]). Однако лишь современные работы могут претендовать на строгость.

После усреднения (16) по максвелловскому распределению скоростей получается ФП $(1 - b) R_{\text{II}} + bR_{\text{III}}$, причем R_{II} и R_{III} берутся со сдвигами. Таким образом, введенная в [7] ФП R_{III} здесь нашла применение.

В работе [47] сделана попытка вывести общее выражение для ФП в рамках единой теории, совместно учитывающей ударное и квазистатическое уширение, с помощью некоторых эвристических соображений. Выражение это очень сложное и только в частном случае, когда уширением нижнего уровня всех типов можно пренебречь, получается функция вида (16), где лоренцевские профили заменены штарковскими, рассчитанными согласно той же единой теории [48].

Продолжением работ [40] и [47] является серия статей [49, 50], где развита общая теория ФП в рамках единой теории расширения линии ионами и электронами с учетом возможного вырождения уровней и перекрытия линий, а также поляризации фотонов и всех существенных при рассеянии виртуальных процессов. В работе [51] рассмотрено перераспределение в линии L_α в условиях солнечной хромосферы. Для ФП дан ряд приближенных выражений для случаев, когда x (или x') соответствуют крылу линии, ФП усредняется по углам в системе атома и др. В [52] усреднены по распределению скоростей поглощающих атомов и углам ФП из [39]. Усредненная по углу ФП в виде линейной комбинации $R_{\text{III}A}(x, x') - U(a, x)\, U(a, x')$ и $R_{\text{II}A} - R_{\text{III}A}$ получена в [53] для случая, когда вырождение может быть только по магнитному квантовому числу.

В работе Хейнцеля и Губеного [42] отмечено, что разрушение и заселение уровней за счет неупругих ударов в астрофизических исследованиях учитываются путем введения вероятности выживания фотона и соответствующих слагаемых в уравнениях стационарности. Поэтому они взяли в качестве ФП при столкновениях полученную в [36] только для упругих столкновений (в ударном приближении) и выразили ее через бесстолкновительные ФП: $r_c = (1-b)\,r_{\rm V} + b r_{\rm III}$, где частоты ФП берутся со смещениями, а параметры их содержат столкновительные ширины.

В заключение этого пункта упомянем еще одну ФП r_c. М. М. Баско [54] показал, что у ионов с большим зарядом ядра Z столкновения не вызывают дополнительного уширения профиля, но влияют на перераспределение по частоте, так как ширина за счет самого существенного механизма ударного расширения — эффекта Штарка — пропорциональна Z^{-5}, а радиационная ширина Z^2. Столкновения ограничивают длительность процесса рассеяния, при этом ФП имеет вид второго слагаемого в (15), то есть $r_{\rm V}^0$, где γ_1 заменено на $\gamma_p/2$ — ширину вследствие столкновений с протонами, и $\gamma_p \ll a$.

Вопрос о перераспределении по частотам под действием столкновений подробно рассмотрен в обзоре [55].

4) *Эффект отдачи. Другие ФП.* Все указанные ФП не отражают отдачи, то есть уменьшения частоты фотона за счет перехода его энергии в кинетическую энергию движущегося атома (аналогично комптоновскому сдвигу). Впервые отдача была принята во внимание в [14]. В [56] качественно показано, что отдачу следует учитывать при оптических толщинах среды $T > 5.6 \cdot 10^{10}$. В [57] выведено нестационарное уравнение диффузии фотонов с учетом отдачи при перераспределении, соответствующем $R_{\rm II}$, и показано, что отдача сказывается на временах $t > \Phi(0)\,(h\nu_0)^4/ /(2kT_kMc^2)^2\, acn_1k(\nu_0)$. Для линии L_α это отвечает оптической толщине облака водородной плазмы $T \sim 10^{14}$.

Отметим еще ряд ФП, вводившихся разными авторами. ФП R^X с учетом переброски фотонов из одной линии из набора линий с общим верхним уровнем в другую (cross redistribution) получена в [58].

В [26] для случаев I, II и III выведены ФП в предположении, что коэффициент поглощения $f(x')$ и условная вероятность переизлучения $r(x, x')/f(x')$ независимо усредняются по максвелловским распределениям атомов соответственно в основном и возбужденном состояниях, а ФП затем получается как произведение результатов усреднения. Неудовлетворительность этих ФП отмечалась в [6]. Заметим, впрочем, что в работе [26] имеется сводка свойств $R_{\rm I}$, $R_{\rm II}$ и $R_{\rm III}$ и методов их расчета.

В работе [59] введены ФП, получающиеся усреднением $r(x - \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}, x' - \boldsymbol{n}'\boldsymbol{v}')$ по скоростям атомов при поглощении $\boldsymbol{v}$ и при излучении $\boldsymbol{v}'$ фотона с весовой функцией $W(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')$. Рассмотрено два вида корреляции скоростей: полная, когда $W(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')\,\pi^{-3/2}\exp(-v^2)$ и дело сводится к (2), и отсутствие корреляции $W(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = = \pi^{-3}\exp(-v^2 - v'^2)$. Тогда в случаях I и III получается ППЧ, а в случае II—ФП $R_{II}(x, x', \pi/2)$, обладающая свойствами, близкими к R_{IIA}.

В работе [37] рассмотрен общий двухфотонный процесс переходов между тремя уровнями, расширенными затуханием вследствие излучения и упругих столкновений. Относительное расположение уровней произвольно. Соответствующие вероятности переходов в атоме, зависящие от частот двух фотонов, выражены через одну функцию. В нее входят ширины всех трех уровней. Если начальный и конечный уровни совпадают и лежат ниже промежуточного, то получается обычная ФП. В работах [60, 61] дано обобщение такого подхода на случай, когда общее число переходов, вовлеченных в процесс, больше двух.

Еще один вариант ФП получен в [62], где считается, что газ состоит из турбулентных элементов, причем в каждом из них происходит ППЧ, а скорости их распределены по Максвеллу.

5) *Приближенные представления ФП.* Наряду с точными формулами и разложениями для ФП часто используются различные асимптотические и приближенные выражения, справедливые, как правило, в крыле линии.

Для $R_I(x, x', \gamma)$ при $|x|, |x'| \to \infty$, $|x/x'| \sim 1$ получено представление [63]

$$R_I(x, x', \gamma) \sim R_{IA}^{as}(x, x')\,\delta(1 - \cos\gamma \cdot \mathrm{sign}(xx')), \tag{17}$$

где $R_{IA}^{as}(x, x') \sim (2\pi^{1/2}x_M)^{-1}\exp(-x_M^2)$ — асимптотика R_{IA} [21]. Асимптотика R^{IB} больше R_{IA}^{as} на множитель 3/2.

Для R_{II} известно несколько разных асимптотических формул. При $a \ll 1$ и $|s| \gtrsim 1$ в (54) найдено

$$R_{IIA}(x, x') \sim R_{IA}(x, x') + R_a(x, x'), \tag{18}$$

где

$$R_a(x, x') \sim \frac{2a}{\pi^{3/2}s^2}\int_0^{|s|} e^{-(y+|u|)^2} y\,dy \sim$$

$$\sim \frac{a}{\pi^{3/2}s^2}\left[e^{-u^2} - 2|u|\int_{|u|}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right]. \tag{19}$$

Здесь второе равенство верно при $|s| \gg 1$ [21]. При $|x|, |x'| < x_D$, где $x_D^2\exp(-x_D^2) = a\pi^{-1/2}$, вместо R_{IIA} можно брать R_{IA}, а при $|x|$, $|x'| > x_D$ — функцию R_a (так же, как профиль Фойгта, можно заменять доплеровским и лоренцевским профилями). При больших x, x' и $|u| \to \infty$ функция R_a убывает экспоненциально. Поэтому, если $|x| \gg 1$, то возможна следующая замена:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{II}A}(x, x') J(x') dx' \sim \frac{a}{\pi x^2} J(x) + \frac{a}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial J}{\partial x}\right), \tag{20}$$

впервые использованная Харрингтоном [64], хотя идея имеется еще в [65].

Приближенная форма

$$R_{\text{II}A}(x, x') = b(x) U(a, x) \delta(x - x') + \\ + [1 - a(x, x')] U(a, x) U(a, x') \tag{21}$$

предложена в [66] Джеффрисом и Уайтом, причем они принимали $b(x) = a(x, x') = a(x)$. В таком виде формула (21) подверглась критике в [67], где предложено взять $a(x, x') = a(x) = 1 - \exp[-(x/2-1)^2]$ при $|x| > |x'|$, $a(x, x') = a(x')$ при $|x| < |x'|$, $\alpha = 2$ и $b(x) = = \int_{-\infty}^{\infty} a(x, x') U(a, x') dx'$. Такое приближение не нарушает свойств симметрии и нормировки. Оно дает хорошее согласие с точными значениями $R_{\text{II}A}$ и часто используется при расчетах. В [68] отмечается, что лучше брать $\alpha = 0.8$. Продолжают использовать и форму [66] (см., например, [69]). Представление $R_{\text{II}A}$, промежуточное между (18) и (21), применялось в работе [70]: (18) при $R_a = -2a\pi^{-1}\left|1 - 2xe^{-x^2} \times \times \int_0^x e^{y^2} dy\right| \delta(x - x')$. Наконец в [71] на основе проведенных расчетов предлагается использовать формулу (18), но в выражении (19) для R_a в знаменателе заменить s на $s_+ = \max(s, 3/2 - \min(1/2, |3/2 + + \lg a|) \cdot \text{sign}(3/2 + \lg a))$.

Функция $R_{\text{III}}(x, x', \gamma)$ очень близка к первому слагаемому своего разложения (14), то есть к ФП при ППЧ, а асимптотически в крыле линии совпадает с ним [72]. Поэтому часто полагают $R_{\text{III}}(x, x', \gamma) = = U(a, x) U(a, x')$.

Функция $R_{\text{V}A}(x, x')/U(a, x)$ имеет два максимума [33]: при $x' = x$ и $x' = 0$. В [34] это отношение заменялось суммой двух δ-функций. Эту ФП приближали также следующим образом [63]:

$$R_{\text{V}A}(x, x') = (1/a) U(a, x) [\gamma_1 U(a, x') + \gamma_2 \delta(x - x')]. \tag{22}$$

В [73] отмечается, что хорошие результаты дает представление $R_{\text{V}A}$ в виде (21) с добавлением у $a(x)$ и $b(x)$ множителя γ_2/a. При этом у $a(x)$ можно отбросить экспоненту, то есть считать эту функцию ступенчатой [74].

В [54] замечено, что после усреднения r^0_V по скоростям атомов в ядре и ближнем крыле получается ФП $R_{IIA}(x, x')$ ($\gamma_1 \ll a$), а в далеком крыле, где $|u| \gg 1$, усреднение по быстро спадающей гауссиане не изменяет медленно меняющуюся функцию r^0_V (по той же причине $U(a, x)$ асимптотически совпадает с лоренцевским профилем $f_L(x, a)$).

Наконец, в качестве ФП R_c широко используется (см., например, [4, 69]) выражение $(1-b)R_{IIA}(x, x') + bU(a, x)U(a, x')$, где $b = \gamma_E/(\gamma_R + \gamma_I + \gamma_E)$, а γ_R, γ_E и γ_I — ширины линии: радиационная, за счет упругих и неупругих ударов.

3. *Уравнения переноса, их следствия и методы решения.* 1) *Уравнения переноса.* Приведем уравнения, описывающие процесс многократного рассеяния излучения в линии при ЧПЧ в простейшем случае строго двухуровенного атома. Для простоты считаем, что ФП не зависит от направлений. Стационарное уравнение переноса для интенсивности излучения I в плоском слое имеет вид

$$\mu \frac{\partial I}{\partial z} = -k(\nu) n_1 I + \frac{h\nu_0}{4\pi\Delta\nu_D} n_2 \psi(x)[A_{21} + B_{21}I], \tag{23}$$

где z — геометрическая глубина, μ — косинус между направлением фотона n и осью z, $\psi(x)$ — профиль излучения, а второе слагаемое в квадратной скобке учитывает вынужденное излучение. Характерной чертой ЧПЧ является то, что $\psi(x)$ (эта функция может зависеть и от координат) не совпадает с профилем коэффициента поглощения $\Phi(x)$, то есть заранее не задана, а должна определяться из уравнений (см. ниже). Обозначим $q(x) = \psi(x)/\Phi(x)$.

Оптическая глубина τ с учетом вынужденного излучения, приводящего к ее уменьшению — просветлению среды, вводится равенством

$$d\tau(z, x) = k(\nu_0)\, dz [n_1 - n_2 g_1 q(x)/g_2]/A, \tag{24}$$

а функция источников

$$S(\tau, x) = \sigma_0 q(x)/[g_2 n_1/g_1 n_2 - q(x)]. \tag{25}$$

Тогда уравнение переноса переписывается в виде

$$\mu dI/d\tau = -\Phi(x)[I(\tau, n, x) - S(\tau, x)]. \tag{26}$$

В таком виде уравнение переноса используется всеми авторами. Его надо решать совместно с уравнением статистического равновесия

$$n_1(B_{12}J_a + C_{12}) = n_2(A_{21} + B_{21}J_e + C_{21}), \tag{27}$$

где $J_a = \int \Phi(x) J(x)\, dx$, $J_e = \int \psi(x) J(x)\, dx$, $J(x)$ — средняя по направлениям интенсивность. Для определения профиля излучения необходимо дополнительное соотношение. Предлагалось три способа введения этой функции.

А. Способ Томаса [75] сводится к формуле

$$\psi(x) = \frac{C_{12}\Phi(x) + B_{12}\int R(x, x')\, J(x')\, dx'}{C_{12} + B_{12}J_a}. \tag{28}$$

(Также определялась $\psi(x)$ в [76] с заменой в вынужденном излучении $\psi(x)$ на $\Phi(x)$). Тогда функция источников выражается через интенсивность излучения следующим образом:

$$S(\tau, x) = \lambda(x)\int R(x, x')\, J(x')\, dx'/\Phi(x) + (1-\lambda_0)\, B\lambda(x)/\lambda_0, \tag{29}$$

где B — функция Планка,

$$\lambda(x) = [1/\lambda_0 + E(x)/\sigma_0]^{-1}, \tag{30}$$

$$\lambda_0 = A_{21}[A_{21} + C_{21}(1 - \exp(-h\nu_0/kT_k))]^{-1}, \tag{31}$$

$$E(x) = (C_{12}/B_{12})[1 - q(x)] + J_e - q(x)\, J_a. \tag{32}$$

Легко заметить, что интеграл по x от определенной таким образом функции ψ автоматически равен 1.

Следствием (27) и (28) является уравнение

$$n_1\left[C_{12}\Phi(x) + B_{12}\int R(x, x')\, J(x')\, dx'\right] = n_2\psi(x)[A_{21} + B_{21}J_e + C_{21}]. \tag{33}$$

Здесь мы не отмечаем зависимости $J(x)$, $\psi(x)$, $q(x)$, $\lambda(x)$ и $E(x)$ от глубины. В общем случае, когда ФП не усреднена по углам, интеграл в (33) заменяется на тройной $\int R(x, x', \gamma)\, I(\tau, n, x')\, dx'\, d^2n/4\pi$, а величины ψ, q, λ и E зависят и от направления. При ППЧ $R(x, x') = \Phi(x)\,\Phi(x')$, тогда $\psi(x) = \Phi(x)$, $q(x) = 1$, $E(x) = 0$, $\lambda = \lambda_0$, τ и S не зависят от частоты и направления. Схема итеративного расчета $\psi(x)$ для двухуровенного атома с континуумом предложена в [77].

Б. Другое определение ψ дал Оксиниус [78]. Он учитывал возможное отличие распределения возбужденных атомов по скоростям $F_2(\boldsymbol{v})$ от максвелловского. Функция $\psi(x)$ определяется как усредненный по F_2 профиль излучения в системе атома (зависимость от $\boldsymbol{n}$, как и выше, опускаем) $\psi(x) = \int F_2(\boldsymbol{v})\,\psi(x, \boldsymbol{v})\, d^3\boldsymbol{v}$, где

$$\psi(x, v) =$$

$$= \int \frac{d^2n}{4\pi} \frac{C_{12} f(x - nv) + B_{12} \int r(x - nv, x' - n'v) J(x') dx' d^2n'/4\pi}{C_{12} + B_{12} \int f(x' - n'v) J(x') dx' d^2n'/4\pi}. \quad (34)$$

Из (34) следует, как отмечено в [78], что при ППЧ в системе атома $r(x, x') = f(x) f(x')$ и $F_2(v)$ максвелловской получается $\psi = \Phi$, то есть ППЧ в системе, связанной с газом. Для функции $F_2(v)$ в стационарном случае получается уравнение

$$n_1 F_1(v) \left[C_{12} + B_{12} \int f(x - nv) J(x) dx d^2n/4\pi \right] =$$

$$= n_2 F_2(v) \left[C_{21} + A_{21} + B_{21} \int \psi(x, v) J(x) dx \right]. \quad (35)$$

Если (35) проинтегрировать по скоростям, то придем к (27). Более подробно, с учетом зависимости ψ от направления импульса фотона и для вырожденных уровней, этот вопрос рассмотрен в [79]. Кинетическое уравнение для $F_2(v)$ с учетом изменения коэффициентов за счет отличия F_2 от максвелловского распределения приведено в [80]. В [81] оценивается влияние диффузии возбужденных двухуровенных атомов на поле излучения в линии при ФП R_{IA}, которое в принципе может быть заметным. Кинетические уравнения для распределений по скоростям многоуровенных атомов в различных состояниях составлены в [60].

Расчеты функций $F_2(v)$ пока не проводились. В [18] показано, что после первого возбуждения атомов при ФП R_{IA} монохроматическим излучением с частотой x_0 в пределах линии (приведены графики для $x_0 = 0$ и 1) создается распределение атомов по скоростям, далекое от максвелловского. Однако оно быстро релаксирует с ростом числа рассеяний N к максвелловскому, так что уже при $N = 2$ различия малы.

В. Третье определение ψ использовали Михалас и его сотрудники [4, 82, 83]. Исходя из того, что $n_2\psi(x) dx$ — число возбужденных атомов, излучающих фотоны с частотами от x до $x + dx$, они составили уравнение статистического равновесия

$$n_1 \left[C_{12}\Phi(x) + B_{12} \int R(x, x') J(x') dx' \right] =$$

$$= n_2 \psi(x) [C_{21} + A_{21} + B_{21} J(x)], \quad (36)$$

которое служит определением $\psi(x)$. К такому же уравнению пришли авторы [84]. Уравнение (36) не обеспечивает нормировки $\psi(x)$ и его нужно было решать вместе с (27).

Впоследствии в работе [85] было признано, что этот способ определения $\psi(x)$ некорректен, хотя во многих случаях различия в окончательных результатах, полученные при принятии определений А и В, невелики. Те же выводы сделаны в [79]. В [55, 86] отмечается, что для непротиворечивой формулировки уравнения переноса и уравнения статистического равновесия уровня профиль вынужденного излучения в них приходится брать в разных формах.

При проведении расчетов в большинстве работ вынужденное излучение трактуется как отрицательное поглощение, то есть профиль $\psi(x)$ заменяется для слагаемого $B_{21}I$ в скобках в (23) на $\Phi(x)$. Тогда определяемая равенством (24) оптическая глубина τ перестает зависеть от частоты, поскольку $q(x)$ в (24), как и в знаменателе функции источников (25), заменяется на 1. Такое предположение сильно облегчает расчет поля излучения в линии. Доводы в его пользу приведены в [55, 77, 87]. Количественное обоснование этому допущению дано в [88].

Очевидно, что учет вынужденного излучения делает задачу нелинейной, ибо шкала оптических глубин, а следовательно, и оптическая толщина и ход изменения мощности источников с τ, как и величины $\lambda(x)$, $q(x)$ и т. д., зависят от неизвестного заранее поля излучения.

В [89] показано, что как и при ППЧ, нелинейная задача о расчете поля излучения в однородной плоской среде при трактовке вынужденного излучения как отрицательного поглощения сводится к линейной.

Для полноты заметим, что интегральное уравнение для излучательной способности атома (с определенной скоростью), зависящей также от частоты и глубины в плоском слое, приведено без вывода в работе [90] для ФП $R_{\rm II}(x, x', \gamma)$ без учета вынужденных процессов.

2) *Баланс энергии.* Рассмотрим теперь другую ситуацию, когда учитываются поглощение и излучение в континууме и зависимость ФП от углов, но не учитываются вынужденные процессы. Тогда уравнение переноса излучения имеет вид

$$\mu dI/d\tau = -[\Phi(x) + \beta] I(\tau, \boldsymbol{n}, x) + \Phi(x) S(\tau, \boldsymbol{n}, x). \qquad (37)$$

Функция источников S определяется формулой (25), где в знаменателе отброшен член с $q(x)$, и связывается с интенсивностью следующим образом ($\cos\gamma = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'$):

$$S(\tau, \boldsymbol{n}, x) = S_0(\tau, \boldsymbol{n}, x) + (\lambda/4\pi\Phi(x)) \int dx' \int d^2n' R(x, x', \gamma)\, I(\tau, \boldsymbol{n}', x'). \qquad (38)$$

Справедливость предположений, приводящих к уравнению (38), обсуждалась в [6, 53, 91].

Пусть границам плоского слоя соответствуют оптические глубины 0 и $T > 0$, причем на эти границы диффузное излучение не падает, а возможные внешние источники включены в S_0. Тогда граничными условиями для интенсивности будут $I(0, n, x) = 0$ при $\mu > 0$ и $I(T, n, x) = 0$ при $\mu < 0$.

Из уравнений (37) и (38) можно получить одно интегральное уравнение для функции источников

$$S(\tau, n, x) = S_0(\tau, n, x) + \frac{\lambda}{4\pi}\int dx' \int d^2n' \int_0^T d\tau' \Phi(x') \times$$

$$\times S(\tau', n', x') R(x, x', \gamma) \exp[-|\tau - \tau'|(\Phi(x') + \beta)/|\mu'|]/|\mu'|\Phi(x). \quad (39)$$

Если S_0 не зависит от n, а ФП заменена на усредненную по углам, то уравнение получается несколько проще

$$S(\tau, x) = S_0(\tau, x) + \frac{\lambda}{2}\int dx' \int_0^T d\tau' \Phi(x') \times$$

$$\times S(\tau', x') R(x, x') E_1(|\tau - \tau'|[\Phi(x') + \beta])/\Phi(x). \quad (40)$$

Введем следующие величины: E_0 — полная энергия, излучаемая первичными источниками (за единицу времени в столбе единичного сечения) в плоском слое, E_R — полная энергия, излучаемая в слое, с включением накопленной при многократных рассеяниях, E_L — энергия фотонов, гибнущих в линии, то есть непереизлучающихся, превращающихся в тепло, E_c — энергия, поглощаемая в континууме при пролете фотонов вне рассеяния, наконец, E_e — выходящая из слоя энергия. Эти величины равны четырехкратным интегралам: по τ от 0 до T, по x от $-\infty$ до $+\infty$ и по направлениям n соответственно от произведений $\Phi(x) S_0$, $\Phi(x) S$, $(1-\lambda)\Phi(x) I$, βI и $\mu dI/d\tau$. Из (39) следует, что $E_R = E_0 + \lambda E_L/(1-\lambda)$, а из уравнения переноса вытекает уравнение энергетического баланса $E_0 = E_L + E_c + E_e$. Введенные величины понадобятся нам в дальнейшем.

3) *Принципы инвариантности.* Эти принципы, иначе называемые методом сложения слоев, были введены в теорию В. А. Амбарцумяном и развиты Чандрасекаром (см. [1, 2]). Принципы инвариантности часто используются вместе с вероятностным методом Соболева, придающим многим соотношениям, в том числе и основному интегральному уравнению для

функции источников (39), вероятностный смысл [1]. Эти методы обладают большой общностью и применимы ко многим задачам теории, в особенности к линейным, и в частности, к задачам образования линий при ЧПЧ.

Уравнения для вероятности выхода фотона, коэффициентов отражения и пропускания одномерной средой (двухпотоковое приближение) при произвольной ФП $R(x, x')$ получил В. В. Соболев [92]. Системы интегро-дифференциальных (с производными по оптической толщине) уравнений для функций отражения и пропускания плоским слоем также при любой ФП $R(x, x', \gamma)$ выведены в [93].

Широко применялись принципы инвариантности и вероятностные соображения бюраканскими астрофизиками. Ими получены различного вида уравнения для вероятности выхода фотона из среды, коэффициентов отражения и пропускания, а также функций Грина [94—100].

Большое место в работах бюраканских теоретиков [94, 95, 97] заняло разделение переменных у искомых функций, сведение их к функциям меньшего числа аргументов.

Все эти результаты справедливы при общих ФП (фактически для R_{I} и R_{III}), но только для однородных сред, то есть при постоянных параметрах $\Delta\nu_D$, a, λ и β.

4) *Численные методы.* Методы численного решения задач теории переноса, в том числе и пригодные для расчета образования линий при ЧПЧ, излагаются в обзоре [101], книгах [4, 5]. Поэтому здесь мы эти методы лишь упомянем.

Для задач с ЧПЧ применялись модификации метода дискретных ординат [13, 102, 12, 103, 4]. Усовершенствованная формулировка дана в [104]. В [91] решения разлагались по многочленам Чебышева.

Методы, основанные на уравнениях — следствиях принципов инвариантности — применялись бюраканской школой [94, 105—107].

Методы, о которых говорилось до сих пор, применимы только к однородным средам. Дальше отметим более общие методы.

Широко применялся для расчетов полей излучения при ЧПЧ метод Фотрие. Наряду с обычной его формулировкой применялась модификация Рыбицкого (см., например, [74]), а также этот метод в комбинации с переменными эддингтоновскими множителями (обо всем этом см. книгу Михаласа [4]).

Эффективным оказался метод возмущений, предложенный в [108]. ФП представляется в виде $R(x, x', \gamma) = \Phi(x)\Phi(x') + [R(x, x', \gamma) - \Phi(x)\Phi(x')]$ и второе слагаемое рассматривается как возмущение. Уравнения решаются итерациями, причем на каждом шаге надо решать уравнения того же вида, что и при ППЧ. Метод насыщения в ядре приспособлен для задач с ЧПЧ в [109]. В последнее время становится популярным эффективный метод Шармера, являющийся комбинацией методов насыщения в ядре и возмущений. Особенно он выгоден при решении многоуровенных задач [110].

При расчетах с учетом вынужденного излучения и решении многоуровенных задач производится полная линеаризация уравнений [84, 111, 112]. Улучшенная формулировка метода полной линеаризации для многоуровенных задач дана в [68]. Схема расчета полей излучения в линиях многоуровенной системы на основе метода эквивалентных двухуровенных атомов предложена в [113]. Большое число расчетов выполнено методом Монте Карло. Моделирование ФП $R_{\mathrm{I,\,II,\,III}A}$ дано в работе [114], а $R_{\mathrm{I,\,II,\,III}}$ в [115, 116]. Авторы каждой работы дают свой вариант моделирования [117, 118]. Особенно удобно применять метод Монте Карло для расчета глобальных (интегральных) характеристик, таких, как среднее число рассеяний и пр. [117]. В [119] применена комбинация метода дискретных ординат в ядре линии с методом Монте Карло в крыле при $x > 2$.

О методах решения более сложных задач см. раздел 6.

4. *Поля излучения. Модельные задачи.* 1) *Расчеты для однородных сред.* Для исследования характерных черт различных видов рассеяния при ЧПЧ производились расчеты полей излучения и функций источников в линии в однородных (с постоянными параметрами) плоскопараллельных средах. В табл. 1 приведена сводка сведений о таких расчетах, расположенных в хронологическом порядке. В таблице приняты следующие сокращения: методы МК — Монте Карло, ДО — дискретных ординат, Чебышев — разложения по многочленам Чебышева, 1 итер. — одна итерация решения при ППЧ, инт. ур. — прямая дискретизация основного интегрального уравнения. В № 10 ФП R_{I} и R_{II} умножались на индикатрису Рэлея $3\,(1+\cos^2\gamma)/4$. В № 1, 8, 9, 14, 17 и 24 расчет производился для одномерной среды (рассеяние вперед-назад). Значения β_0 и T_0 приведены в соответствующих столбцах в скобках. Источники $\delta(\tau)$ означают внешнее облучение среды, в скобках в этом столбце даны $S_0\Phi(x)$, что отвечает источникам в непрерывном спектре.

Почти все расчеты произведены после создания быстродействующих ЭВМ. До этого были получены некоторые приближенные решения, не указанные в таблице (например, [17, 120]). Однако они давали лишь приблизительное представление о рассеянии с ЧПЧ.

Наиболее подробные расчеты функций источников и выходящего излучения, результаты которых воспроизводятся и обсуждаются в книгах [4, 5], провел Хаммер [103]. Различие между результатами для $R_{\mathrm{I}A}$ и $R_{\mathrm{I}B}$ согласно [103] максимально в крыле, где доходит до 40%, а обычно

Таблица 1

СВОДКА РАСЧЕТОВ ЧПЧ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ СРЕД

№	Год	a	$1-\lambda$	$\beta\,(\beta_0)$	ФП	$T\,(T_0)$	$S_0\,(S_0\Phi)$	Метод	Литература
1	1955	0	0	0	R_{1A}	(10)	1, одномерн.	Инт. ур.	[22]
2	1964	0	0	0	R_{I}, R_{1A}	(10^n), $n=-1(1)3$	1	Чебышев	[91]
3	1967	10^{-3}	10^{-6}	0	$R_{\mathrm{III}A}$	∞	1	1 итер.	[72]
4	1968	10^{-2}	0	0	$R_{\mathrm{II}A}$	$(2\cdot 10^n)$, $n=3, 4, 5, 6$	$(\delta(\tau_0-T_0/2))$	МК+	[119]
		$4.3\cdot 10^{-4}$	0	0	$R_{\mathrm{II}A}$	$(2\cdot 10^3,\ 2\cdot 10^4)$	$(\delta(\tau_0-T_0/2))$	+ДО	
5	1969	0	10^{-4}	0	R_{1A}, R_{1B}	10, 10^2, 10^4, ∞	1	ДО	[103]
		10^{-3}	10^{-4}	0	$R_{\mathrm{II}A}$	10^2, 10^4, 10^6	1		
		10^{-2}	10^{-4}	0	$R_{\mathrm{II}A}$	10^4	1		
6	1970	0	0	0	R_{I}	10^3, 10^5	$(\delta(\tau)\delta(\mu-1))$	1 итер.	[90]
		$8\cdot 10^{-4}$, 10^{-3}	0	0	R_{II}	10^3, 10^5	$(\delta(\tau)\delta(\mu-1))$		
7	1970	10^{-3}	10^{-4}	0	$R_{\mathrm{II}}(x, x', \pi/2)$	∞	1	ДО	[121]
8	1972	0	0	(0.02)	R_{1A}	(1, 5, 10, 15)	$(\delta(\tau))$, одномерн.	[105]	[105]
9	1975	0	0.3	0	R_{1A}	∞	$(\delta(\tau))$, одномерн.	[122]	[122]
10	1976	0, 10^{-3}	10^{-4}	0	R_{I}, R_{II}, Рел.	10^3, ∞	1	Фотрис	[123]
11	1976	10^{-3}	10^{-4}	0	R_{III}, $R_{\mathrm{III}A}$	10^2, 10^3, ∞	1	Возмущ.	[124]
12	1976	10^{-3}	$1.5\cdot 10^{-4}$,	0	$R_{\mathrm{II}A}$	∞	1, $\tau^{0.9}$	Фотрис	[125]
		10^{-3}	$5\cdot 10^{-5}$	0	$R_{\mathrm{II}A}$	∞	$\exp(-5\cdot 10^{-4}\,\tau^{0.5})$		
13	1978	0, 10^{-3}	0, 10^{-4}	0	R_{1A}, $R_{\mathrm{II}A}$	(10^n), $n=0(1)4$	$(\delta(\tau)\delta(\mu-1))$	МК	[126]

14	1978	0	0.1, 0.3	0	R_{IA}	(2.5), ∞	($\delta(\tau)$), одномерн.	[127]	[127]
		0	0.02, 0.05	0	R_{IA}	∞	1, одномерн.		
		0	0.1, 0.2, 0.3	0	R_{IA}	∞	1, одномерн.		
15	1980	10^{-3}	0	0	R_{II}	(10^n), $n = 0\,(1)\,6$	$(\delta(\tau)\,\delta(\mu-1))$	МК	[128]
16	1980	$5\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-6}$	$(10^{-9}$,	$(1-b)R_{IIA}+$	∞	1	112	[129]
				$5\cdot10^{-11})$	$+\,b\Phi(x)\,\Phi(x')$	$b=10^{-4}, 10^{-2}, 1$	$\exp(-m\tau_0)$,		
17	1980	0	0.01	(0.01)	R_{IA}	∞, одномерн.	$m = 0.01, 0.1, 0.5$	[130]	[130]
18	1981	$2\cdot10^{-3}$	0	0	R_{II}	(10^n). $n = -1, 0, 2, 5$	$\delta(\tau)\,\delta(\mu-1)\,\delta(x-x_0)$	МК	[131]
							$x_0 = 0.1,\ 1\,(1)\,5$		
19	1981	10^{-3}	0	0	R_{II}, R_{IIA}	1, 10^3, 10^4	1, $\delta(\tau_0 - T_0/2)$	МК	[132]
20	1984	10^{-4}	10^{-4}	0	R_{IIA}	(10^3)	1	Насыщ. ядр.	[109]
21	1984	$2\cdot10^{-3}$	0, 10^{-3}	0, 10^{-3}	R_{IIA}, R_{IIIA}	156	1, ($\delta(\tau)$)	[133]	[134]
		$2\cdot10^{-3}$	0, 10^{-3}	0, 10^{-3}	R_{VA}	156	1, ($\delta(\tau)$)		
22	1984	$1.1\cdot10^{-3}$	10^{-4}	0	R_{VA}	10^4, ∞	1	Фотрие	[73]
		$2\cdot10^{-3}$	10^{-4}	0	R_{VA}	10^4, ∞	1		
23	1985	10^{-3}	10^{-3}, 10^{-6}	0, 10^{-8}	R_{II}	∞	1	Рыбицкого	[74]
24	1985	0	0.1	0	R_{IA}	0.2 (0.2) 1, 2.5, ∞	($\delta(\tau)$), одномерн.	[135]	[135]
		0	0.02, 0.05, 0.1	0	R_{IA}	∞	1, одномерн.		

2—3% вычисляемой величины. Отличие от ППЧ больше. Однако, если в уравнении переноса сделать одну итерацию функций, рассчитанных при ППЧ, то получается очень хорошая точность. При $a > 0$ появляются существенные отличия: при ППЧ профиль линии в крыле приближается к планковскому значению, а при R_{II} убывает, то есть излучение в крыле заперто, там происходит монохроматическое рассеяние.

Отдельно скажем еще о ряде работ. В [106] рассмотрена одномерная задача Шустера, то есть образование линий поглощения в одномерной среде при прохождении непрерывного излучения через нее. В [136] рассматривалась задача о точечном стационарном источнике в бесконечной среде. В [96, 127] получена связь интенсивностей двух задач, в одной из которых мощность первичных источников есть производная по τ от мощности источников в другой.

Задача о свечении бесконечной среды (нижний предел по τ' в (39) и (40) равен $-\infty$, $T = \infty$) под действием стационарных равномерно распределенных источников, излучающих изотропно в непрерывном спектре, решена в [84]. Аналитические решения этой задачи для произвольной зависимости мощности источников от частоты были получены для $\lambda = 1$, $\beta > 0$ в [14], а для $\lambda < 1$, $\beta = 0$ в [138].

Проделаны также расчеты для различных случаев неоднородности среды. В [109] изучено влияние зависимости от оптической глубины величины $\Delta\nu_D$, в [125] a и S_0, а в [74] $\varepsilon = 1 - \lambda$ и S_0 (остальные величины — как в таблице под номерами соответственно 20, 12 и 23). В [139] от τ зависела величина ε при ФП R_{IIA} с $a = 2 \cdot 10^{-3}$, $T_0 = 10^4$, $\beta = 0$, $S_0 = 1$ и S_0, соответствующей внешнему облучению; учитывалось также наличие ламбертовского дна. В [68] при ФП $(1-b) R_{IIA} + bR_{IIIA}$ изменялись все параметры.

2) *Нестационарное свечение бесконечной среды.* Как уже говорилось, получить точные решения уравнений переноса при ЧПЧ можно лишь в исключительных случаях. Поэтому аналитически получены асимптотики и приближенные решения, которые мы обсудили в ближайших пунктах.

Для исследования эффектов ЧПЧ, так сказать, в чистом виде рассматривалась задача о расплывании с течением времени линии в консервативной бесконечной среде при мощности источников, зависящей только от времени и частоты, но не зависящей от координат и углов. Тогда и интенсивность излучения зависит лишь от x и t и определяется уравнением

$$\partial I/\partial t = -\Phi(x) I(x, t) + \int R(x, x') I(x', t)\, dx' \qquad (41)$$

с начальным условием $I(x, 0) = \delta(x)$. Здесь t измеряется в единицах

$t_2 = \Phi(0)/cn_1k(\nu_0)$, то есть среднего времени, проводимого фотоном линии в пути между двумя последовательными рассеяниями. Другой возможный механизм задержки фотонов — время, проводимое ими в поглощенном состоянии, во внимание не принимался.

Первое точное решение задачи с ЧПЧ нашёл Филд [14] для ФП R_{IA}:

$$I(x,\ t) = t\int\limits_{|x|}^{\infty}\Phi(x')\exp(-t\Phi(x'))\,dx' + \exp(-t_0)\,\delta(x), \tag{42}$$

где $\Phi(x) = \pi^{-1/2}\exp(-x^2)$, а $t_0 = t\pi^{-1/2}$. Из (42) следуют асимптотики при больших t, приведенные в первом столбце табл. 2. Частота $x_m(t)$ разделяет области ядра и крыла линии, асимптотики $I(x,\ t)$ помещены во второй и третьей строчках.

Таблица 2

АСИМПТОТИКИ $x_m(t)$, $I(x,\ t)$, $N(t)$, $\tau(t)$ И Δ

	$1<t_0<\pi^{1/2}\ln(\pi/a)/a$	$\ln^4(1/4a)/4a<t<5\gamma_1/a^2$	$t>5\gamma_1/a^3$
$x_m(t)$	$(\ln t_0)^{1/2}$	$(at)^{1/4}$	$\gamma_1 t_0^{1/2}$
$\lvert x\rvert < x_m(t)$	$(\ln t_0)^{-1/2}/2$	$(2\pi/at)^{1/4}/\Gamma(1/4)$	$t_0^{-1/2}/4\gamma_1$
$\lvert x\rvert > x_m(t)$	$t_0\exp(-x^2)/2x$	$(2\pi/at)^{1/4}\exp(-\pi x^4/8at)/\Gamma(1/4)$	$\gamma_1 t_0^{1/2}/4x^2$
$N(t)$	$t/2(\ln t)^{1/2}$	$2^{9/2}\pi^{1/4}t^{3/4}/3\Gamma(1/4)\,a^{1/4}$	$\pi^{1/2}(t/\gamma_1)^{1/2}/2$
$\tau(t)$	$t/\ln t$	$t^{3/4}a^{-1/4}$	$(\gamma_1/a)^{1/2}t$
$\Delta,\ \beta \ll 1$	$1/\beta\ln(1/\beta)$	$a^{-1/4}\beta^{-3/4}$	$(\gamma_1/a)^{1/2}/\beta$
$\Delta,\ \varepsilon \ll 1$	$1/\varepsilon[\ln(1/\varepsilon)]^{1/2}$	$1/\varepsilon$	$\gamma_1^{3/2}a^{-1/2}\varepsilon^{-2}$
	$2a/\pi x_D < \varepsilon$	$a^{-1/2}\gamma_1^{3/2}<\varepsilon<a/x_D^3$	$\varepsilon<a^{-1/2}\gamma_1^{3/2}$

М. М. Баско [54] получил решение (41) для ФП R_{IIA} в асимптотической области крыла линии, где справедливо соотношение (20), то есть когда (45) переходит в

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{a}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial I}{\partial x}\right). \tag{43}$$

Решением этого уравнения служит

$$I(x,\ t) = (2\pi/at)^{1/4}\exp(-\pi x^4/8at)/\Gamma(1/4). \tag{44}$$

Асимптотики $I(x,\ t)$ для этого случая, а также для ФП r_V^0, найденные в той же работе [54], помещены во втором и третьем столбцах табл. 2.

Характерно общее свойство решений уравнения (41): наличие плоской части, протяженность которой по частоте, то есть $x_m(t)$, растет со временем. Асимптотики при R_{IA} полностью совпадают с асимптотиками при доплеровском профиле и ППЧ [140], а при r_V^0 отличаются лишь на множитель $\pi^{3/4}/4$ от асимптотик для ППЧ с лоренцевским профилем [54, 141].

В работе [54] рассматривался закон перераспределения R_V^0. Как следует из сказанного об этой ФП в разделе 1, в этом случае в ядре линии ФП близка к R_{IA}, в ближнем крыле к $R_{IIA} \approx R_a$, а в далеком крыле — к неусредненной r_V^0. Следовательно, с ростом времени расплывание линии происходит согласно столбцам табл. 2, последовательно переходя от первого к третьему. Первая и вторая области не стыкуются. В [54] рассмотрен также случай $a \gg 1$.

В [142] рассмотрена задача о нестационарном свечении бесконечной плоской однородной среды при ФП R_{IA}, но при $t_2 = 0$ (скорость света бесконечна) в предположении, что задержка фотонов происходит только за счет времени, проводимого ими в поглощенном состоянии со средним временем $t_1 \neq 0$. В работе автора [138] также для ФП R_{IA} найдено точное решение задачи об однородном свечении бесконечной среды при $t_2 = 0$, $\beta = 0$, любых λ и t_1 и произвольной зависимости источников от частоты и времени. Для вспышки (δ-образные источники) получены асимптотики интенсивности излучения в крыле линии и на больших временах после вспышки.

3) *Другие аналитические результаты.* Всего несколько работ посвящено аналитическому изучению ЧПЧ в плоских средах, что отражает трудность подобных исследований.

Харрингтон [64] для ФП R_{IIA} получил в приближении Эддингтона по углу диффузионное уравнение для средней интенсивности излучения в плоском слое с помощью предложенного им приближения (20):

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} + \frac{3}{2}\lambda \Phi^2(x)\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} - \frac{2}{x}\frac{\partial J}{\partial x}\right) = 3\Phi^2(x)\,(\varepsilon J - S_0). \tag{45}$$

Здесь $\Phi(x) = U(a, x)$ слева заменялось асимптотикой в крыле $\Phi(x) \sim \sim a/\pi x^2$, а справа $\Phi^2(x)$ заменялось на $\delta(x)$. Путем введения новой переменной $\sigma = (2/3)^{1/2} \int\limits_0^x dx/U(a, x)$ уравнение при $\varepsilon \ll 1$ было преобразовано в

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \sigma^2} = 6^{1/2}\,\delta(\sigma)\,(\varepsilon J - S_0) \tag{46}$$

и решено разделением переменных. Решения получены в виде рядов по с. ф.

по τ для $S_0 = 1$ и $S_0 = \delta(\tau - T/2)$. Ряды приближенно суммированы. Найдены частоты x_{max}, где J принимает максимальное значение, получены приближенные выражения для усредненной по частоте J и для среднего числа рассеяний при $T \gg 1$. Во второй части работы [143] получены функции отражения и пропускания плоского слоя в том же приближении.

Приближенное решение задачи о свечении плоского слоя под действием вспыхивающего источника в центре слоя найдено в [142]. Там получены времена затухания для ФП R_{IA}. Результаты сравниваются с экспериментом (линия λ 1048 Ar).

Ван Тригт [16] исследовал собственные числа λ_n ядра уравнения (39) при $\beta = 0$, $T \to \infty$ и ФП $R_I(x, x', \gamma)$. Им показано, что главные члены асимптотик $\lambda_n - 1$ в рассматриваемом случае и при ППЧ с доплеровским профилем совпадают.

Подробное исследование асимптотического поведения функций источников в плоской бесконечной среде (уравнение (39) с $T = \infty$ и нижним пределом в интеграле по τ', равным $-\infty$) при почти консервативном рассеянии ($\varepsilon = 1 - \lambda \ll 1$), $\beta = 0$ и $S_0 = S_0(\tau)$ произвела Фриш [63]. Ею использованы аппарат преобразования Фурье по оптической глубине $\tilde{S}(u, x)$ и подбор зависящих от ε масштабных множителей для оптической глубины, профиля поглощения $\Phi(x)$ и других величин таким образом, чтобы в уравнениях получались конечные пределы при $\varepsilon \to 0$. При ППЧ было бы $R(x, x') = \Phi(x)\Phi(x')$ и $\tilde{S}(u) = \tilde{S}_0(u)[1 - \lambda V(u)]^{-1}$, где

$$V(u) = (1/u) \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi^2(x) \operatorname{arctg} u/\Phi(x), \tag{47}$$

причем если $u \to +0$, то $1 - V(u) \sim u (\ln 1/u)^{-1/2}$ при доплеровском и $1 - V(u) \sim (\pi a u/2)^{1/2}$ при фойгтовском профилях. При выводе асимптотик для ЧПЧ были использованы приближенные представления ФП, приведенные в разделе 2. При ФП R_I и R_{III} удается применить метод возмущений, то есть функции источников представить в виде $S(\tau, x) = S^0(\tau) + S^1(\tau, x)$, где S^0 не зависит от x, а S^1 — поправка. Функции S^0 просто совпадают с соответствующими функциями при ППЧ с доплеровским и фойгтовским профилями, а S^1/S^0 пропорциональны $1/\ln(1/\varepsilon)$ и ε соответственно. Обсуждается зависимость S^1 от τ при ФП R_{IA}. Немного сложнее обстоит дело с R_{VA}, которая асимптотически (согласно формуле (22)) является комбинацией монохроматического рассеяния и ППЧ. Не зависящей от частоты в этом приближении оказывается разность $S(\tau, x)-[\lambda\gamma_2 U(a, x)/2a]\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau'$ $S(\tau', x)E_1(|\tau-\tau'|U(a, x))$. Можно найти преобразование Фурье от $S(\tau, x)$ по τ в явном виде

$$\bar{S}(u, x)=\bar{S}_0(u)\left\{\left[1-(\lambda\gamma_1/au)\int\limits_{-\infty}^{\infty} U^2(a, x')\,dx' \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \operatorname{arctg}(u/U(a, x'))/F(x', a)\right]\cdot\bar{F}(x, a)\right\}^{-1}, \tag{48}$$

$$F(x, a)=1-(\lambda\gamma_2/au)\,U(a, x)\operatorname{arctg}(u/U(a, x)).$$

Функция в фигурных скобках при $u\to 0$ эквивалентна $(\gamma_1/a)(\pi au/2)^{1/2}+\varepsilon$, что отличается от ППЧ наличием первого множителя в первом слагаемом— доли ППЧ. Монохроматическое рассеяние не влияет на асимптотику, так как соответствующие ему члены быстрее убывают с расстоянием.

Самое большое отличие от ППЧ получается при ФП $R_{\rm II}$. В работе [63] выведено асимптотическое уравнение для S, совпадающее по существу с уравнением Харрингтона (45). Отдельно рассмотрены случаи, когда фотон рождается в ядре и крыле линии. В уравнении произведена перенормировка переменных (введение масштабных множителей), но решений его не приводится. Аналогичное уравнение для S при ФП $R_{\rm II\mathit{A}}$ получено в другой работе Фриш [144] для случая, когда фотоны гибнут лишь в полете при поглощении в непрерывном спектре ($\varepsilon=0$, $\beta\to 0$). Подробное изложение этих результатов и их обобщение дается в [145, 146].

5. *Глобальные характеристики. Сравнение различных видов рассеяния.*

1) *Среднее число рассеяний и средний путь фотонов.* В этом разделе мы обсудим глобальные характеристики поля излучения при ЧПЧ, такие, как среднее число рассеяний $N=E_R/E_0$ (или согласно определению [103] $\langle N\rangle=\lambda E_L/(1-\lambda)E_0=N-1$), средний путь фотонов $l=E_c/\beta E_0$ и длина термализации. В этом пункте рассмотрим первые две величины, определению которых посвящен ряд работ. Заметим, что N и l имеют смысл и при $\lambda=1$, $\beta=0$.

Поскольку все результаты для ФП $R_{\rm I}$, $R_{\rm III}$ и $R_{\rm V}$ довольно близки к аналогичным результатам для ППЧ, то почти во всех работах рассматривалась ФП $R_{\rm II}$.

В [147] получены приближенные выражения для N, рассчитаны N для различных T при ФП $R_{\rm I\mathit{A}}$ и $R_{\rm II\mathit{A}}$ ($a=4.3\cdot 10^{-4}$) и высказана идея, что рассеяние в крыле линии при ФП R_{II} носит диффузионный характер. Эта идея развивалась в [148], где была введена эффективная частота рассеяния, на которой происходит диффузия.

В [119] рассчитаны N и l для не усредненных по углу ФП R_{I} и R_{II} при $T < 10^5$, $S_0 = 1$, $\varepsilon = 0$, $\beta = 0$, $a = 0$, $4.7 \cdot 10^{-4}$ и $4.7 \cdot 10^{-3}$. Обнаружено, что при $T \leqslant 10^2$ величина N та же, что и при ППЧ, а при больших T пропорциональна T, а не T^2. Для плоского слоя оптической толщины $T \leqslant 2 \cdot 10^7$ с источником в линии в центре слоя при ФП R_{IIA} ($a = 10^{-2}$, $4.3 \cdot 10^{-4}$), $\lambda = 1$, $\beta = 0$ в [117] также рассчитано N и сравнено с результатами для ППЧ. Величина $\langle N \rangle$ рассчитана для R_{IIA}, $\varepsilon = 10^{-4}$, $T \leqslant 10^8$, $S_0 = 1$, $a = 10^{-3}$ и 10^{-2} в работе [103]. Она больше, чем при ППЧ.

В [149] методом Фотрие для ФП R_{IIA} при $a = 4.7 \cdot 10^{-3}$ и $4.7 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon = \beta = 0$ рассчитаны N и частота $x_{\max}$, где принимает максимум поток излучения в линии, выходящего из плоского слоя с источниками в линии в его середине. Показано, что $N \sim CT$ и не зависит от a. В работе [150] те же вычисления использованы для определения $2l(T)/T$. Обнаружено, что $2l/T$ пропорционально $T^{1/3}$. Непосредственно путем применения метода Эддингтона, а также из результатов [64] получено, что $2l/T = c\,(9aT/2\pi)^{1/3}$.

Наиболее подробные расчеты N и l проделаны в [151] методом Фотрие. Рассматривались источники в центре слоя или равномерно распределенные по слою при ФП R_{IIA} с $a = 4.7 \cdot 10^{-n}$, $n = 1\,(1)\,5$ и T от 1 до 10^9, $\varepsilon = 0$. Показано, что при $\beta = 0$ и $aT > 10^3$ величина l с очень хорошей точностью представляется в виде $l(T) = C(aT)\,(aT)^{1/3}\,T$, где $C(z)$ — медленно меняющаяся функция порядка единицы, зависящая от вида источников. Отношения же N/T выходят на постоянные, очень хорошо согласующиеся с полученными в [64], при $aT \gtrsim 5 \cdot 10^3$.

В работах [118, 152] методом Монте Карло рассчитаны $l(T, \beta)$ и $N(T, \beta)$ для слоя с источником в середине для ФП R_{IIA} при $a = 4.7 \cdot 10^{-4}$.

Фриш [63] из качественных соображений вывела функциональную зависимость N от T при ФП R_{IIA}, $\lambda = 1$, $\beta = 0$ для фотонов, родившихся в ядре линии, $N \sim T$, что совпадает с результатом [64] и [151], и в крыле $N \sim (aT)^{1/3}$.

Среднее число рассеяний фотона в бесконечной консервативной среде за время t получено в [54] из определения

$$N(t) = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} I(x, t')\,\Phi(x)\,dx, \tag{49}$$

где $I(x, t)$ — решение уравнения (41).

Асимптотики $N(t)$ при больших t в случае ФП R_{IA}, R_a и r_V^0 помещены в табл. 2. М. М. Баско [54] нашел и зависимость среднего смещения фотона $\tau(t)$ в бесконечной консервативной среде от места его рождения в центре линии за время t. Мы привели все формулы без численных множителей, которые оцениваются в [54].

С ростом t величины $N(t)$ и $\tau(t)$ переходят от одной асимптотики к другой, причем временные интервалы их справедливости—те же, что и соответствующих решений $I(x, t)$. В работе [153] методом Монте Карло рассчитаны $N(t)$ и $\tau(t)$ при $\gamma_1 = 0$, $a = 0, 0.01, 0.1, 1$, t от 1 до 10^6 для двух начальных условий $I(x, 0) = \delta(x)$ и $I(x, 0) = \Phi(x)$. Отмечается верность асимптотик при $at > 10^3$ и уточняются численные множители. Выход на асимптотику для второго начального условия при $a \approx 1$ происходит существенно медленнее.

2) *Длина термализации* Λ. Это среднее расстояние между местом возникновения фотона и местом его выхода из процесса рассеяния (термализации) за счет истинного поглощения в линии или в непрерывном спектре. Ее определению, асимптотикам и численным оценкам при ППЧ посвящена большая литература (см. [2, 6]). Для ЧПЧ длина термализации была введена существенно позже.

В [150] из условия, что для длины термализации Λ за счет поглощения в непрерывном спектре должно выполняться $l(\Lambda)\cdot\beta \approx 1$, для ФП R_{IIA} получено $\Lambda \sim a^{-1/4}\beta^{-3/4}$.

Оценки для длины термализации для ФП R_{VA}^0 были даны в [54], исходя из понятия времени термализации t_{th}. Если $\lambda = 1$ и термализация определяется поглощением в континууме, то t_{th} определяется равенством $t_{th}\cdot\beta = 1$; если, напротив, основную роль играет гибель фотонов в линии, то из условия $N(t_{th}) = 1/\varepsilon$. Длина же термализации определена следующим образом: $\Lambda = \tau(t_{th})$, где $\tau(t)$ — среднее смещение фотона за время t. Оценки $N(t)$ и $\tau(t)$ приведены выше. Зависимости Λ от β при $\lambda = 1$ и от $\varepsilon = 1 - \lambda$ при $\beta = 0$ помещены в табл. 2. Границы для β — обратные границам для t, границы для ε приведены в последней строке таблицы, x_D — частота, разделяющая доплеровское ядро и лоренцевское крыло фойгтовского профиля.

Точно такие же функциональные зависимости Λ от ε получены в [63], где $1/\Lambda$ определялось как масштабный множитель оптической глубины, приводящий к конечному пределу в асимптотических уравнениях при $\varepsilon \to 0$. Для ФП R_{III}, как и для R_V, $\Lambda \sim 1/\varepsilon^2$. Было введено также понятие частоты термализации x_c, причем $\Phi(x_c)\Lambda = 1$ для всех ФП, кроме R_{II}, и $U(a, x_c)\Lambda = x_c$ для R_{II}. Оценки x_c для R_{II} совпадают с оценками частот $x_{max} \sim (aT)^{1/3}$ в [64], где средние интенсивности выходящего излучения J из плоского слоя с центральным источником в линии имеют максимум, и с оценками [149] частоты диффузии фотонов x_*, если в x_c заменить Λ на T. В [63] показано также, что если при ФП R_{II} фотон рождается в крыле линии, то $\Lambda \sim a^{-1}\varepsilon^{-3/2}$, а $x_c \sim \varepsilon^{-1/2}$. И в случае $\lambda = 1$, $\beta \ll 1$ в [144] получена для Λ формула, совпадающая с асимптотиками [54], частота же термализации $x_c \sim \sim a^{1/4}\beta^{-1/4}$.

3) *Сравнение рассеяния при ЧПЧ и при ППЧ.* Подведем некоторые итоги. Как следует из численных расчетов, многократное рассеяние при ФП, зависящих от угла, происходит почти так же, как и при усредненных по углу. Далее, и аналитические, и численные результаты показывают, что оценки N, Λ и других глобальных характеристик для ЧПЧ при ФП R_I и R_{III} совпадают, а при ФП R_V очень близки (если γ_1 не $\ll a$) к соответствующим оценкам для ППЧ. Близки и функции источников, и интенсивности. Но, конечно, этот вывод качественный. Всегда можно найти ситуацию, то есть определенное расположение источников, определенную неоднородность среды и т. д., когда ППЧ будет давать количественно неточные результаты. Однако, по-видимому, для этих ФП всегда достаточно взять несколько итераций решений, полученных в предположении ППЧ [68].

Для некоторых величин могут быть качественные различия даже между R_{IA} и ППЧ. Например, в [154] найдено среднее число рассеяний фотонов $N_*(x)$ частоты x, попавших в полубесконечную среду извне и затем диффузно отразившихся от нее, при $\beta = 0$ и $\lambda < 1$. Если $x \to \infty$, то при ФП R_{IA} величина $N_*(x) \to 1$, в то время как при ППЧ $N_*(x) \to 1/\varepsilon$. Для среднего числа рассеяний всех фотонов, включая погибшие в среде, такого различия нет.

Наибольшее отличие от ППЧ получается при ФП R_{II}, где рассеяние в крыле линии носит диффузионный характер. Поэтому среднее число рассеяний и средний путь фотонов больше, чем при ППЧ (N пропорционально T, а не $T^{1/2}$, $l \sim T^{4/3}$, а не T), а длина термализации меньше ($\Lambda \sim \beta^{-3/4}$ и $1/\varepsilon$, а не $1/\beta$ и $1/\varepsilon^2$). При учете столкновений, однако, ФП является линейной комбинацией R_{II} и R_{III} для резонансной и R_V и R_{III} для субординатной линий, так что рассеяние тем ближе к ППЧ, чем больше роль столкновений — вывод, который раньше делался из общих соображений. В [155] установлен критерий применимости ППЧ для атмосфер звезд: столкновительная ширина γ_e должна быть больше радиационной γ_R на глубине в центре линии $\tau_0 \approx 8000$. ППЧ всегда справедливо для слабых линий, ядра и далекого крыла сильных, критерий относится к ближнему крылу. В [155] критерий применен к резонансным линиям в спектре звезд класса А, изучено влияние содержания элемента и вращения звезды.

В следующем разделе обсудим работы, в которых учитывалось движение среды и отличие ее геометрии от плоской.

6. *Частичное перераспределение в движущихся и неплоских средах.*

1) *Движущиеся плоские среды.* Если вещество движется с некоторой макроскопической скоростью V (будем ее измерять в единицах тепловой), то в системе наблюдателя коэффициент поглощения фотонов в линии будет $\Phi(x - \boldsymbol{n}V)$, где $\boldsymbol{n}$ — орт направления полета фотона в этой системе. Соответственно и ФП атома с данной скоростью $\boldsymbol{v}$ будет $r(x - \boldsymbol{n}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}V,\ x' - \boldsymbol{n}'\boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}'V)$, а усредненная по $\boldsymbol{v}$ будет $R(x - \boldsymbol{n}V,\ x' - \boldsymbol{n}'V, \gamma)$. Это выражение в [156] было усреднено по направлениям и получена ФП $R_A(x, x', V)$. Для случаев I, II, III она дается соответственно формулами (7) (при $n = 0$), (9) и (12), где под знаком интеграла для I и III добавляется множитель $\exp(-V^2)\,\mathrm{sh}(2yV)/2yV$, а для II $\exp(-V^2)\,\mathrm{sh}[2(y + |u|)V]/2(y + |u|)V$. Эти множители обращаются в 1 при $V = 0$. Полученные функции в [156] были исследованы.

С ФП $R_{IA}(x, x', V)$ в [157] методом Фотрие, приспособленным к задачам с движением в [158], было решено уравнение переноса излучения в линии в полубесконечной (солнечной) атмосфере. Также для плоской среды (полубесконечной и с $T = 10$) в [159] были рассчитаны функции источников и профили выходящего излучения. В обеих работах было обнаружено большое отличие результатов при ППЧ и ЧПЧ, если V меняется с τ (постоянная V приводит лишь к сдвигу шкалы частот).

Однако вскоре в [160] было показано, что отмеченные большие различия на самом деле фиктивны. Они являются результатом усреднения ФП по направлениям в системе координат наблюдателя. Если взять ФП в системе наблюдателя в виде $R_A(x - V\boldsymbol{n},\ x' - V\boldsymbol{n}')$, то есть усреднять ФП в системе, связанной с газом, то такого большого различия получиться не должно.

В связи с этим уравнение переноса часто записывают в системе, связанной с газом — сопутствующей. Проделав вычисления таким способом, Михалас с соавторами [161] подтвердили вывод [160]. В их работе [161] описан метод расчета и для рассмотренных в [157] случаев показано, что результаты отличаются от ППЧ не больше, чем при $V = 0$. К тем же выводам пришли авторы [162].

Вардавас в работе [163] признал справедливость критики [160] его работ [157, 159] и подтвердил ее расчетами. Рассеяние с ФП R_{II} в движущейся среде исследовалось в [164] при $T = 10$ и 200, $\varepsilon = 10^{-4}$, $a = 10^{-3}$, $S_0 = 1$, $V(\tau) = V_0(1 - 2\tau/T)$, $V_0 = 1$ и 3. Отличия от ППЧ в потоках невелики при не очень больших T и возрастают при увеличении T и градиента скорости.

Аналогичный расчет для ФП R_{II} и R_{III} с полной угловой и частотной зависимостью выполнен в [125]. Дается метод решения задачи. Мощность первичных источников излучения имитировала подъем температуры в хромосфере. Скорость движения бралась равной тепловой скорости $V(\tau) = v_t(\tau)$ согласно модели хромосферы, как и постоянная затухания $a(\tau)$ (наряду с $a = 10^{-3}$). Остальные параметры — те же, что и при расчетах с $V = 0$ (см. табл. 1, № 12). Показано, что ФП R_{III} почти не дает отличий по сравнению с ППЧ, то есть получаются абсорбционные профили с одним минимумом. При ФП R_{II} интенсивность в ядре абсорбционной линии также довольно близка к соответствующей ППЧ. Из-за монохроматичности рассеяния в крыльях выход излучения там значительно слабее, чем при ППЧ. Поэтому в неподвижной и в движущейся средах получаются при ФП R_{II} профили с двумя резкими пиками с двух сторон от среднего минимума.

Модель однородного расширяющегося с постоянным градиентом скорости слоя без поглощения с центральным изотропным источником рассмотрена в [118]. Там рассчитаны $I(T, 0)$, $N(T, 0)$ для ряда градиентов скорости и оптических толщин от 30 до $3 \cdot 10^7$ при ФП R_{IIA}.

Метод решения многоуровенных задач переноса в линиях при учете зависимости ФП от углов, макроскопической скорости и зависимости параметров от двух пространственных координат (двумерная плоская задача) предложен в [165].

2) *Неподвижные неплоские среды.* В ряде работ исследовалось образование линий при ЧПЧ в сферически симметричных средах.

Интегральное уравнение для функции источников и интегродифференциальное уравнение для функции рассеяния, которая входит в уравнение для интенсивности выходящего излучения, также интегродифференциальное, получены в [166]. Резольвента уравнения для функции источников, вероятности выхода и ряд вспомогательных функций введены в [167]. Там же дана вероятностная трактовка задачи. Численный метод решения задач образования линий в сферической оболочке предложен в [168].

Обычно протяженность долгоживущей атмосферы и оболочки звезды сочетаются с истечением вещества или, наоборот, с аккрецией. В таких случаях наряду с протяженностью среды существенно и макроскопическое движение вещества в ней. Поэтому, как правило, оба эти эффекта учитываются одновременно.

3) *Сферически симметричные движения*. Методы численного решения задач переноса линейчатого излучения в движущихся сферических средах были разработаны рядом исследователей.

Весьма общие методы предложены Михаласом и его сотрудниками. Метод решения уравнения переноса в сопутствующей системе координат при усредненных по углу ФП описан и применен в [112, 169]. Он использует переменные эддингтоновские множители и моментные уравнения. Метод решения уравнения переноса в сопутствующей системе при полных ФП, основанный на общей схеме Фотрие, дан в [170].

Еще один метод решения подобных задач предложен Перая [133]. Подробно исследован случай ФП $R_{\rm I}$ [171, 172]. Профили получаются сложными, некоторые из них похожи на профили типа P Лебедя. Различие с ППЧ, вообще говоря, большое, однако профили, усредненные по диску (наблюдаемая величина) разнятся не так сильно. Влияние усреднения по углам и замены дипольной индикатрисы на сферическую исследовано в [133]. В работе [173] показано, на примере рассеяния с ФП $R_{\rm I\mathit{A}}$ в изотермической сферической оболочке, что скорость расширения $V_{\max} \lesssim 60\, v_t$ несущественно влияет на степень возбуждения двухуровенного атома.

В [174] рассчитаны средние числа рассеяний N и доли выходящих фотонов $P = E_e/E_0$ из сферических оболочек с $R_2/R_1 = 3$ и 10 при ФП $R_{\rm I\mathit{A}}$ и $R_{\rm I\mathit{B}}$, $\beta = 0$, $\varepsilon \approx 10^{-5}$—$10^{-8}$ (меняется с τ), расширяющихся с постоянным градиентом скорости. Величина N уменьшается, а P увеличивается с ростом скорости расширения.

Заметим, что в ряде работ (см., например, обзор [175]) указывалось на ошибочность расчетов группы Перая для ФП $R_{\rm II}$ в [176, 177], где функция $R_{\rm II}$ считалась инвариантной относительно замены знака у частоты, что не выполняется.

Метод решения задач с цилиндрической симметрией предложен в работе [178].

Единственная работа аналитического характера в этой области выполнена Н. Н. Чугаем [179]. В приближении (20) им рассмотрена задача о формировании линии при ФП $R_{\rm II\mathit{A}}$ в однородной бесконечной изотропно расширяющейся среде, когда $1 \gg a \gg \gamma_0 = dV/d\tau = \text{const}$, а источники в каждом месте — в центре линии. Найден профиль получающейся линии и оценена частота $x_d \approx (a/\gamma_0)^{1/3}$, которая разделяет область диффузии фотонов по частоте при рассеяниях $|x|<x_d$ и область их дрейфа по частоте за счет расширения среды $|x|>x_d$. Фотон испытывает в среднем $N\sim 1/\gamma_0$ рассеяний, причем почти все в ядре линии. Сместившись от места рождения на $\tau_d\approx 1/\gamma_0$ (аналог длины термализации) фотон попадает в область частот $|x|>x_d$. В области $x<-x_d$ фотон еще рассеивается $x_d^2 \ll N$ раз. Все же рассеяния происходят при смещении $\Lambda\approx a/\gamma_0^2 \gg$ $\gg \tau_d$, при этом Λ — длина термализации при ППЧ (см. [180]).

Некоторые из упомянутых здесь работ обсуждаются в обзоре [175].

7. *Приложения теории ЧПЧ*. 1) *Линия* L_α *в спектрах туманностей*. В этом разделе мы кратко рассмотрим наиболее важные объекты, где существенную роль играет ЧПЧ (см. также обзоры [55, 181]).

Одним из главных объектов приложений теории образования линий являются газовые и в первую очередь планетарные туманности (см. обзор [182]).

В связи с вопросом о величине давления L_α-фотонов на вещество планетарной туманности, которое определяет ее динамику, и было начато исследование ЧПЧ [13, 22, 102]. Результаты [13, 102] в [148] сравнены с полученными там приближенным методом [147] и оценены плотность L_α-излучения и давление его в туманностях. В [119] оценена роль пыли и двухфотонных переходов.

В [183] с учетом расширения планетарных туманностей, а в [184] и с учетом пыли рассчитаны профили выходящего излучения L_α, полные интенсивности и профили средней интенсивности в зависимости от расстояния до ядра планетарной туманности. Впрочем, в эти расчеты могла вкрасться ошибка, о чем говорилось выше.

2) *Боуэновский механизм*. Другой задачей, требующей теории ЧПЧ, является так называемый боуэновский механизм свечения разрешенных линий $\lambda\lambda$ 3454, 3133, 3322 O III в спектрах планетарных туманностей высокого возбуждения за счет линии L_α He II. Длины волн линий O III λ 303.799 и He II λ 303.780 очень близки. После возбуждения верхнего уровня указанной линии O III происходит флуоресценция в боуэновских линиях.

Количественное рассмотрение этого механизма с учетом ЧПЧ дано в [65]. Там получено некоторое приближенное решение для ФП R_{II}. Образование линии L_α He II рассматривалось отдельно от линии O III.

Более строгое рассмотрение вопроса дано в [185], где принята точная ФП R_{II} для L_α He II и ППЧ для O III, учтено поглощение на H и He I, диффузия фотонов в этих линиях рассчитывалась одновременно. Источником свечения He II считался рекомбинационный механизм за счет излучения центральных звезд с температурами 63000 К и 10^5 К. Такой же расчет произведен и для ядер сейфертовских галактик со спектром центрального источника $\sim\nu^{-\varkappa}$, $\varkappa = 1.24$ и 0. Показано, что эффективность механизма довольно высока (40% при $\varkappa = 1.24$, 20% при $\varkappa = 0$). В работе [186] дана упрощенная теория этого эффекта.

3) Профили линий в спектрах Солнца и звезд. В настоящее время расчет профилей резонансных линий служит средством построения и уточнения моделей верхней атмосферы Солнца и хромосфер звезд.

При предположении ППЧ удается путем подбора модели хромосферы Солнца рассчитать профили линий, согласующиеся с наблюдениями для центра диска, но согласовать ход изменения профилей сильных линий с абсорбционными и эмиссионными компонентами по диску оказывается невозможным. Одна из первых работ на эту тему — статья [187]. Обзоры этих работ даны в [4, 8, 9, 181]. Михалас с сотрудниками в серии статей показали, что только учет ЧПЧ улучшает дело. Во всех таких расчетах ФП принималась в виде $(1-b)\,R_{\text{II}A}(x, x') + bU(a, x)\,U(a, x')$, а при переходах с подуровней одного уровня вместо R_{II} бралась R^X.

Метод расчета [111] был применен для иллюстративных расчетов профилей линии L_α, линий Mg II h и k [188], линий H и K Ca II [189] в спектре Солнца. Расчет профиля L_α с меняющимися с глубиной $\Delta\nu_D$ и ФП согласно модели хромосферы произведен в [82] для двухуровенного атома водорода. Профиль хорошо согласуется с наблюдаемым, а рассчитанный при ППЧ получается в крыле в 5—6 раз сильнее.

Профили солнечных линий L_α, H и K Ca II, *h* и *k* Mg II рассчитывались в [190] (улучшенные постоянные расширения). Необходимость учитывать ЧПЧ при расчете резонансных линий в спектре Солнца продемонстрирована в [191] на примере линии λ 2852 Mg I. В работах [192, 193] показано, что для того, чтобы получить согласие с наблюдениями изменения профиля от центра к краю солнечного диска и уточнить модель атмосферы, необходимо учитывать ЧПЧ при образовании и более слабых линий, таких, как λ 4554 и λ 5854 Ba II.

Модели спокойных и активных областей солнечной хромосферы на основе сравнения расчетов при ЧПЧ с ракетными наблюдениями L_α построены в [194] при ФП из [39]. ФП из [51], годная на протяжении всей линии, использована в [69]. Согласие с наблюдениями при стандартной модели хромосферы достигнуто в ядре и форме крыльев, однако крылья получились слабее в 4 раза, чем наблюдаемые.

ЧПЧ учитывалось и при расчетах профилей линий в спектрах солнечных образований. Близость рассеяния с ФП R_{II} к монохроматическому в крыле линии отмечалась в [70] при расчете профиля L_α в спектре хромосферного волокна. В [195] показано, что при рассеянии солнечного излучения на оптически тонких образованиях, находящихся над диском, образуются линии, содержащие информацию о ФП. Профиль L_α протуберанца при $T_0(L_\alpha) = 2 \cdot 10^5$ рассчитан согласно ППЧ и ЧПЧ в [196]. Показано, что полная интенсивность линии L_α и отношение интенсивностей L_α и H_α при ППЧ получаются в 2 раза больше, и наблюдения подтверждают ЧПЧ.

Три серии статей Линского с сотрудниками (последние из них [197], [198] и [199]) посвящены построению моделей хромосфер конкретных звезд поздних типов, карликов, гигантов и сверхгигантов, на основе расчета профилей различных линий, причем линии Ca II и Mg II рассчитываются с учетом ЧПЧ методами [111, 112]. В работе [200] показано, что для правильного расчета моделей атмосфер типа A и их ультрафиолетового спектра необходимо учитывать ЧПЧ в линиях $L_\alpha - L_\beta$.

Расчет профиля линии в спектре красного гиганта с учетом влияния звездного ветра сделан в [201]. Влияние макротурбулентности на профили в связи с эффектом Вильсона—Баппу изучено в [129].

4) *Другие приложения.* В [202] и [203] исследованы отклонения от ЛТР с учетом ЧПЧ при рассеянии в линиях. Их подход был подвергнут критике [204].

Теория образования линий при ЧПЧ была развита в [17] в связи с исследованием турбулентных движений в нижней хромосфере.

В работе [205] методом Монте Карло рассчитано рассеяние излучения резонансного триплета O I (принятого за одну линию) в атмосфере Земли. В [139] исследовано авроральное свечение атмосферы Юпитера. В [54] показано, что результаты работы могут быть применены к исследованию рентгеновских линий Fe XXVI в спектре газовых облаков в окрестности рентгеновской звезды. Наконец, в [179] полученные оценки применены к оболочкам сверхновых на стадии через год после вспышки.

Резюмируя, отметим, что за последнее время теория рассеяния при ЧПЧ быстро развивалась и обогатилась приложениями. Получены ФП при столкновениях, сделаны асимптотические оценки многих величин, исследован характер этого вида рассеяния, созданы численные методы решения сложных задач, воплощенные в машинные программы и применяемые к расчетам для астрофизических объектов. На очереди применения ФП за счет столкновений для конкретных линий многоуровенных атомов и конкретных условий.

Ленинградский государственный
университет

SPECTRAL LINE FORMATION WITH PARTIAL FREQUENCY REDISTRIBUTION

D. I. NAGIRNER

The review includes the following parts. 1) Introduction. 2) Redistribution functions. 3) Radiative transfer equations, their consequencies and methods of solution. 4) Radiation fields. Model problems. 5) Global characteristics. Comparison of different kinds ot scattering. 6) Partial redistribution in moving and non-plane media. 7) Applications of the PFR theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
2. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
3. *Д. И. Нагирнер*, Итоги науки и техн., ВИНИТИ, Астрономия, 22, 220, 1983.
4. *Д. Михалас*, Звездные атмосферы, Мир, М., 1982.
5. *G. Athay*, Radiation Transport in Spectral Lines, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1972.
6. *D. G. Hummer, G. B. Rybicki*, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 9, 237, 1971.
7. *D. G. Hummer*, Mon. Notic. Roy. Astron. Şoc.. 125, 21, 1962.
8. *G. B. Rybicki*, In "The Energy Balance and Hydrodynamics of the Solar Chromosphere and Corona", Clermont Ferrand, France, 1977, p. 191.
9. *R. W. Milkey*, In "Interpret. of Atmospheric Structure in the Presence of Inhomogeneities", Univ, Sydney, Austral, 1976, p. 55.
10. Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 1985.
11. *P. Heinzel*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer, 25, 483, 1981.
12. *R. Thomas*, Astrophys. J., 125, 260, 1957.
13. *W. Unno*, Publ. Astron. Soc. Jap., 3, 158, 1951.
14. *G. B. Field*, Astrophys. J., 129, 551, 1959.
15. *А. Г. Никогосян*, Докл. АН СССР, 235, 786, 1977.
16. *C. Van Trigt*, Phys. Rev., A13, 734, 1976.
17. *W. Unno*, Astrophys. J., 129, 388, 1959.
18. *В. В. Иванов, А. Б. Шнейвайс*, Астрофизика, 12, 246, 1976.
19. *В. Г. Левич*, Ж. эксперим. и теор. физ., 10, 1293, 1940.
20. *L. G. Henyey*, Proc. Nat. Acad. Sci., 26, 50, 1941.
21. *W. Unno*, Publ. Astron. Soc. Jap., 4, 100, 1952.
22. *В. В. Соболев*, Вестн. ЛГУ, № 5, 85, 1955.
23. *А. Г. Никогосян*, Докл. АН Арм.ССР, 68, 176, 1979.
24. *P. Heinzel*, Bull. Astron. Inst. Czechosl. Acad. Sci., 29, 159, 1978.
25. *А. Г. Хейнло*, Публ. Тартуск. обсерв., 41, 101, 1973.
26. *D. Rees, A. Reichel*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat., Transfer., 8, 1795, 1968.
27. *P. Heinzel, I. Hubeny*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 30, 77, 1983.

28. *T. Adams, D. G. Hummer, G. B. Rybicki,* J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 11, 1365, 1971.
29. *A. Reichel, I. Vardavas, J.* Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer, 15, 929, 1975.
30. *Г. А. Арутюнян,* Сообщ. Бюракан. обсерв., 52, 137, 1980.
31. *S. J. McKenna,* Astrophys. J., 242, 283, 1980.
32. *S. J. McKenna,* Astrophys. and Space Sci., 106, 299, 1984.
33. *R. Wooley,* Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 98, 624, 1938.
34. *R. Wooley, D. Stibbs,* The Outer Layers of a Star, Oxford, Clarendon Press, 1953.
35. *М. М. Баско,* Препр. Ин-та космич. исслед. АН СССР, Пр-410, 1978.
36. *A. Omont, E. Smith, J. Cooper,* Astrophys. J., 175, 185, 1972.
37. *I. Hubeny,* J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 27, 593, 1982.
38. *P. Heinzel,* Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 115, 1985.
39. *J. Cooper, R. J. Ballagh,* Phys. Rev., A18, 1302, 1978.
40. *J.-B. Yelnik, D. Voslamber,* Astrophys. J., 230, 184, 1979.
41. *R. J. Ballagh, J. Cooper,* Astrophys. J., 213, 479, 1977.
42. *P. Heinzel, I. Hubeny,* J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 27, 1, 1982.
43. *H. Zanstra,* Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 101, 250, 273, 1941.
44. *H. Zanstra,* Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 106, 225, 1946.
45. *F. N. Edmonds Jr.,* Astrophys. J., 121, 418, 1955.
46. *D. G. Hummer,* Smithsonian Astrophys. Observ. Spec. Rep. No. 174, 1965, p. 143.
47. *J. Cooper,* Astrophys. J., 228, 339, 1979.
48. *C. R. Vidal, J. Cooper, E. W. Smith,* Astrophys. J. Suppl. Ser., 25, 37, 1973.
49. *K. Burnett, J. Cooper, R. J. Ballagh, E. W. Smith,* Phys. Rev., A22, 2005, 1980.
50. *K. Burnett, J. Cooper,* Phys. Rev., A22, 2027, 2044, 1980.
51. *J.-B. Yelnik, K. Burnett, J. Cooper, R. J. Ballagh, D. Voslamber,* Astrophys. J., 248, 705, 1981.
52. *M. Seitz, B. Baschek, R. Wehrse,* Astron. and Astrophys., 109, 10, 1982.
53. *J. Cooper, R. J. Ballagh, D. G. Hummer,* Astrophys. J., 260, 299, 1982.
54. *М. М. Баско,* Ж. эксперим. и теор. физ., 75, 1278, 1978.
55. *I. Hubeny,* Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 27, 1985.
56. *T. F. Adams,* Astrophys. J., 168, 575, 1971.
57. *М. М. Баско,* Препр. Ин-та теор. и эксперим. физ., ИТЭФ-152, М., 1979.
58. *R. W. Milkey, R. A. Shine, D. Mihalas,* Astrophys. J., 199, 718, 1975.
59. *J. D. Argyros, D. Mugglestone,* J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 11, 1621, 1633, 1971.
60. *I. Hubeny, J. Oxenius, E. Simonneau,* J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 29, 477, 495, 1983.
61. *C. Magnan,* Astron. and Astrophys., 142, 117, 1985.
62. *C. Magnan,* J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 15, 979, 1975.
63. *H. Frisch,* Astron. and Astrophys., 83, 166, 1980.
64. *J. P. Harrington,* Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 162, 43, 1973.
65. *W. Unno,* Publ. Astron. Soc. Jap., 7, 81, 1955.
66. *J. T. Jefferies, O. R. White,* Astrophys. J., 132, 767, 1960.
67. *F. Kneer,* Astrophys. J., 200, 367, 1975.

68. *G. B. Scharmer*, Astron. and Astrophys., 117, 83, 1983.
69. *D. Roussel-Dupre*, Astrophys. J., 272, 723, 1983.
70. *Н. А. Яковкин, М. Ю. Зельдина*, Астрон. ж., 45, 50, 1968.
71. *T. R. Ayres*, Astrophys. J., 294, 153, 1985.
72. *G. Finn*, Astrophys. J., 147, 1085, 1967.
73. *I. Hubeny, P. Heizel*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 32, 159, 1984.
74. *I. Hubeny*, Astron. and Astrophys., 145, 461, 1985.
75. *R. N. Thomas*, Some Aspects of Non-Equilibrium Thermodynamics in the Presence of Radiation Field, Univ. Colorado Press, Boulder, Col., 1965.
76. *J. W. Warwick*, Astrophys. J., 121, 190, 1955.
77. *R. Freire Ferrero*, Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 101, 1985.
78. *J. Oxenius*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 5, 771, 1965.
79. *I. Hubeny*, Bull. Astron. Inst. Czech., 32, 271, 1981.
80. *J. Oxenius*, Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 59, 1985.
81. *E. Simonneau*, Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 73, 1985.
82. *R. W. Milkey, D. Mihalas*, Solar Phys., 32, 361, 1973.
83. *R. A. Shine, R. W. Milkey, D. Mihalas*, Astrophys. J., 201, 222, 1975.
84. *J. N. Heasley, F. Kneer*, Astrophys. J., 203, 660, 1976.
85. *B. Baschek, D. Mihalas, J. Oxenius*, Astron. and Astrophys., 97, 43, 1981.
86. *J. Cooper, I. Hubeny, J. Oxenius*, Astron. and Astrophys., 127, 224, 1983.
87. *D. G. Hummer*, In "The Formation of Spectral Lines", Smithsonian Inst. Astrophys. Observ. Spec. Rep. No. 174, 1965, p. 13.
88. *R. Steinitz, R. A. Shine*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 162, 197, 1973.
89. *Н. Б. Енгибарян, А. К. Хачатрян*, Астрофизика, 23, 145, 1985.
90. *G. A. Doschek, T. M. Donahue*, Astrophys. J., 161, 737, 1970.
91. *A. G. Hearn*, Proc. Phys. Soc., 84, 11, 1964.
92. *В. В. Соболев*, Вестн. ЛГУ, № 11, 99, 1955.
93. *Yu. Sobouti*, Astrophys. J., 153, 257, 1968.
94. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 7, 573, 1971.
95. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Докл. АН Арм.ССР, 54, 91, 1972.
96. *А. Г. Никогосян, Г. А. Арутюнян*, Astrophys. and Space Sci., 64, 259, 1979.
97. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 213, 1972.
98. *О. В. Пикичян*, Докл. АН Арм.ССР, 67, 151, 1978.
99. *О. В. Пикичян*, Сообщ. Бюракан. обсерв., 52, 148, 1980.
100. *О. В. Пикичян*, Астрофизика, 14, 169, 1978.
101. *D. G. Hummer, G. B. Rybicki*, Methods in Computational Physics, 7, 53, 1967.
102. *B. Yada, T. Osaki*, Publ. Astron. Soc. Jap., 9, 82, 1957.
103. *D. G. Hummer*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 145, 95, 1969.
104. *R. Wehrse*, Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 207, 1985.
105. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 71, 1972.
106. *N. B. Yengibarian, A. G. Nikoghossian*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 13, 787, 1973.
107. *А. Г. Никогосян, Г. А. Арутюнян*, Докл. АН СССР, 229, 583, 1976.
108. *C. J. Cannon, P. B. Lopert, C. Magnan*, Astron. and Astrophys., 42, 347, 1975.
109. *L. G. Stenholm, R. Wehrse*, Astron. and Astrophys., 131, 399, 1984.

110. *G. B. Scharmer, M. Carlsson*, J. Computational Phys., 59, 56, 1985.
111. *R. Milkey, D. Mihalas*, Astrophys. J., 185, 709, 1973.
112. *R. Milkey, R. Shine, D. Mihalas*, Astrophys. J., 202, 250, 1975.
113. *I. Hubeny*, Bull. Astron. Inst. Czech., 36, 1, 1985.
114. *Jong-Sen Lee*, Astrophys. J., 192, 465, 1974.
115. *Jong-Sen Lee*, Astrophys. J., 218, 857, 1977.
116. *Jong-Sen Lee*. Astrophys. J., 255, 303, 1982.
117. *L. Avery, L. House*, Astrophys. J., 152, 493, 1968.
118. *J. R. Bonilha, R. L. Ferch, E. E. Salpeter, G. Slater, P. D. Noerdlinger*, Astrophys. J., 233, 649, 1979.
119. *L. Auer*, Astrophys. J., 153, 783, 1968.
120. *J. T. Jeffries, R. N. Thomas*, Astrophys. J., 127, 667, 1958.
121. *J. D. Argyros*, Proc. Astron. Soc. Austral., 1, 389, 1970.
122. *М. С. Геворкян, Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 11, 455, 1975.
123. *I. Vardavas*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 16, 1, 1976.
124. *I. Vardavas*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 16, 715, 1976.
125. *I. M. Vardavas, C. J. Cannon*, Astron. and Astrophys., 53, 107, 1976.
126. *R. R. Meier, Jong-Sen Lee*, Astrophys. J., 219, 262, 1978.
127. *Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян*, Докл. АН СССР, 242, 66, 1978.
128. *Jong-Sen Lee, R. R. Meier*, Astrophys. J., 240, 185, 1980.
129. *G. S. Basri*, Astrophys. J., 242, 1133, 1980.
130. *Г. А. Арутюнян*, Докл. АН Арм.ССР, 70, 41, 1980.
131. *R. R. Meier*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 25, 137, 1981.
132. *R. R. Meier, Jong-Sen Lee*, Astrophys. J., 250, 376, 1981.
133. *A. Peraiah*, Kodaikanal Obs. Bull., Ser. A, 2, 115, 1978.
134. *D. Mohan Rao, K. E. Rangarajan, A. Peraiah*, J. Astrophys. and Astron., 5, 169, 1984.
135. *М. С. Геворкян, А. Х. Хачатрян*, Астрофизика, 22, 599, 1985.
136. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 9, 79, 1973.
137. *H. A. Haruthunian, A. G. Nikogossian*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 19, 135, 1978.
138. *Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 18, 608, 1982.
139. *G. R. Gladstone*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 27, 545, 1982.
140. *V. V. Ivanov*, Bull. Astron. Inst. Netherl., 19, 192, 1967.
141. *Д. И. Нагирнер*, Вестн. ЛГУ, № 7, 138, 1977.
142. *M. G. Payne, J. E. Talmage, G. B. Hurst, E. B. Wagner*, Phys. Rev., A9, 1050, 1974.
143. *J. P. Harrington*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 166, 373, 1974.
144. *H. Frisch*, Astron. and Astrophys., 87, 357, 1980.
145. *H. Frisch*, Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 87, 1985.
146. *H. Frisch, C. Bardos*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 26, 119, 1981.
147. *D. E. Osterbrock*, Astrophys. J., 135, 195, 1962.
148. *E. R. Capriotti*, Astrophys. J., 150, 79, 1967.
149. *T. F. Adams*, Astrophys. J., 174, 439, 1972.
150. *T. F. Adams*, Astrophys. J., 201, 350, 1975.
151. *D. G. Hummer, P. B. Kunasz*, Astrophys. J., 236, 609, 1980.
152. *G. Slater, E. E. Salpetter, I. Wasserman*, Astrophys. J., 255, 293, 1982.
153. *М. М. Баско*, Астрофизика, 17, 125, 1981.

154. *Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян*, Докл. АН СССР, 268, 1342, 1983.
155. *R. Freire Ferrero, P. Gouttebroze*, Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 125, 1985.
156. *D. G. Hummer*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 141, 479, 1968.
157. *C. J. Cannon, I. M. Vardavas*, Astron. and Astrophys., 32, 85, 1974.
158. *C. J. Cannon*, Austral. J. Phys., 25, 177, 1972.
159. *I. M. Vardavas*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 14, 909, 1974.
160. *C. Magnan*, Astron. and Astrophys., 35, 233, 1974.
161. *D. Mihalas, R. A. Shine, P. B. Kunasz, D. G. Hummer*, Astrophys. J., 205, 492, 1976.
162. *W.-R. Hamman, R.-P. Kudritzki*, Astron. and Astrophys., 54, 525, 1977.
163. *I. M. Vardavas*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 16, 781, 1976.
164. *I. M. Vardavas*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 16, 901, 1976.
165. *C. J. Cannon*, Astron. and Astrophys., 52, 337, 1976.
166. *T. H. Kho, K. K. Sen*, Astrophys. and Space Sci., 21, 237, 1973.
167. *S. J. Wilson, K. K. Sen*, J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 13, 757, 1973.
168. *A. Peraiah*, Astrophys. and Space Sci., 58, 189, 1978.
169. *D. Mihalas, P. B. Kunasz, D. G. Hummer*, Astrophys. J., 210, 419, 1976.
170. *D. Mihalas*, Astrophys. J., 238, 1034, 1980.
171. *A. Peraiah*, Astrophys. and Space Sci., 63, 267, 1979.
172. *A. Peraiah*, J. Astrophys. and Astron., 1, 3, 1980.
173. *A. Peraiah, D. Mohan Rao*, Astrophys. and Space Sci., 80, 437, 1981.
174. *A. Peraiah, K. E. Rangarajan, D. Mohan Rao*, J. Astrophys. and Astron., 2, 81, 1981.
175. *В. П. Гринин*, Астрофизика, 20, 365, 1984.
176. *A. Peraiah*, Kodaikanal Observ. Bull., Ser. A, 2, 203, 1979.
177. *A. Peraiah, K. N. Nagendra*, Astrophys. and Spase Sci., 90, 237, 1983.
178. *P. B. Kunasz*, Astrophys. J., 276, 677, 1984.
179. *Н. Н. Чугай*, Письма в Астрон. ж., 6, 166, 1980.
180. *С. И. Грачев*, Астрофизика, 13, 186, 1977.
181. *J. L. Linsky*, Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 1, 1985.
182. *D. G. Hummer*, In "Planetary Nebulae", D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1983, p. 211.
183. *R. Wehrse, A. Peraiah*, Astron. and Astrophys., 71, 289, 1979.
184. *A. Peraiah, R. Wehrse*, Astron. and Astrophys., 70, 213, 1978.
185. *R. L. Weymann, R. E. Williams*, Astrophys. J., 157, 1201, 1969.
186. *T. Kallman, R. Mc. Cray*, Astrophys. J., 242, 615, 1980.
187. *R. G. Athay, A. Skumanich*, Astron. J., 73, S2, 1968.
188. *R. W. Milkey, D. Mihalas*, Astrophys. J., 192, 769, 1974.
189. *R. A. Shine, R. W. Milkey, D. Mihalas*, Astrophys. J., 199, 724, 1975.
190. *T. R. Ayres, J. L. Linsky*, Astrophys. J., 205, 874, 1976.
191. *R. C. Canfield, L. E. Cram*, Astrophys. J., 216, 654, 1977.
192. *R. J. Rutten*, Solar Phys., 56, 237, 1978.
193. *R. J. Rutten, R. W. Milkey*, Astrophys. J., 231, 277, 1979.
194. *G. S. Basri, J. L. Linsky, J.-D. F. Bartoe, G. Brueckner, M. E. Van Hoosier*, Astrophys. J., 230, 924, 1979.
195. *L. E. Cram, I. M. Yardavas*, Solar Phys., 57, 27, 1978.

196. *R. W. Milkey, J. N. Heasley, E. J. Schmahl, O. Engvold,* In "Physics of Solar Prominences", Oslo, Blindern, 1978, p. 53.
197. *M. S. Giampapa, S. P. Worden, J. L. Linsky,* Astrophys. J., 258, 740, 1982.
198. *K. Ericsson, J. L. Linsky, T. Simon,* Astrophys. J., 272, 665, 1983.
199. *S. A. Drake, J. L. Linsky,* Astrophys. J., 273, 299, 1983.
200. *I. Hubeny,* Astron. and Astrophys., 98, 96, 1981.
201. *A. Hempe,* Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory, D. Reydel, Dordrecht, Holland, 343, 1985.
202. *L. Henyey,* Astrophys. J., 103, 332, 1946.
203. *L. Henyey, W. Grassberger,* Astrophys. J., 122, 498, 1955.
204. *К. Х. Бем,* в сб. «Звездные атмосферы», М., ИЛ, 1963, стр. 103.
205. *L. Wallace,* Planet. and Space Sci., 19, 377, 1971.