А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 26 ФЕВРАЛЬ, 1987 ВЫПУСК 1

УДК: 524.8

ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ И ЗВЕЗДНЫЕ СИСТЕМЫ

В. Г. ГУРЗАДЯН, А. А. КОЧАРЯН, С. Г. МАТИНЯН

Поступила 11 февраля 1986
Принята к печати 20 октября 1986

Исследуется проблема проявления гравотермальной катастрофы для звездной системы, содержащей центральное массивное тело, с точки зрения теории катастроф. Показано, что катастрофа типа «складка», имеющая место для системы без массивного центра, сохраняется и в этом случае и не переходит в «сборку». Катастрофа наступает при более высоких температурах системы и меньших значениях контрастности плотности.

1. *Введение.* Проблема эволюции галактик и звездных скоплений является одной из классических на пути изучения структуры и эволюции Вселенной. В течение почти векового периода исследований были заложены основы статистической механики звездных систем как квазистационарных релаксированных систем (см., например, [1]) (в последнее время к этим проблемам удалось подойти с позиций теории динамических систем и эргодической теории [2—5]).

Важным, и в первое время даже неожиданным результатом на этом пути явилось обнаружение Антоновым [6] факта неустойчивости квазистационарной изотермической сферической системы при определенных ее параметрах. Физический анализ этого явления, выполненный Линден-Беллом и Вудом [7], показал, что звездные системы обладают отрицательной эффективной теплоемкостью, т. е. более горячие области (центральные) при обмене энергией с холодными (внешними) становятся еще более горячими, в то время как холодные — более холодными, что неизбежно должно привести к так называемой «гравотермальной катастрофе». Этот вывод стимулировал большое количество работ, касающихся как самого процесса катастрофы, так и его последствий, в частности, возможности образования центрального массивного тела — черной дыры [8, 9].

В данной работе мы исследуем вопрос о возможности гравотермальной катастрофы для системы, содержащей центральное массивное тело. Так как и нашей целью является понимание устойчивой подобной системы, мы не будем избегать тех некоторых упрощений, которые допущены в работах Линден-Белла и соавторов [7, 8]. В частности, мы также пренебрегаем такими процессами, как испарение высокоэнергетических звезд, образование двойных звезд, приливное разрушение звезд вблизи массивного объекта и т. п. (часть этих эффектов учтена нами в [10], где рассмотрена эволюция этих систем). Это обосновано тем, что характерные времена этих процессов для реальных систем намного превышают соответствующие времена неустойчивости.

В процессе исследования задачи мы будем использовать понятия и методы теории катастроф, развитые в течение последних десятилетий [11, 12]. Теорией катастроф, берущей свое начало в работах Пуанкаре по устойчивости динамических систем [13], Том назвал совокупность теории особенностей, т. е. исследования отображений на максимум и минимум и их приложения. Интересно, что к некоторым понятиям теории катастроф пришел впервые Б. Линдблад при рассмотрении именно динамики галактик [14].

В данной работе показано, что гравотермальная катастрофа, имеющая место для изотермических систем и являющаяся катастрофой типа A_2-складки, сохраняется и для систем с центральной массой. Вместе с тем рассмотренные нами системы являются существенно более неустойчивыми, т. е. катастрофа наступает раньше, при более низких значениях контраста плотности. Этот вывод представляется несколько неожиданным, ибо до сих пор считалось, что наличие центральной массы должно привести к избытку плотности в центре скоплений и галактик.

2. *Катастрофы в динамических системах.* Подробное изложение основных понятий теории катастроф можно найти в книгах [11, 12]. Здесь мы лишь приведем некоторые ее положения, необходимые для дальнейшего.

В теории доказывается, что катастрофа типа A_2 (по классификации Тома), задаваемая функцией

$$(n=1,\ k=1),\quad V(y;\ c)=\frac{1}{3}y^3+ay$$

и катастрофа типа

$$(n=1,\ k=2),\quad V(y;\ a,\ b)=\pm\frac{1}{4}y^4+\frac{a}{2}y^2+by$$

являются типичными каноническими формами. Это означает, что при гладком отображении поверхности на плоскость всякая особенность после подходящего малого изменения переходит в эти катастрофы.

Рассмотрим катастрофу A_2:

$$V(x,\ a)=\frac{1}{3}x^3+ax.$$

Положение критических точек определяется уравнением

$$V' = x^2 + a = 0.$$

Потенциал V при $a = 0$ в точке $x = 0$ имеет неморсовскую $(V' = V'' = 0)$ точку, так что при $a = 0$ V не является морсовской функцией; точка $a = 0$ называется сепаратрисой. Критические точки, спроектированные на ось a, образуют особенность A_2, которую Уитни назвал *складкой*. Сепаратриса интересна тем, что пространство управляющих параметров, в данном случае прямая, разделяется на области $a < 0$ и $a > 0$, на каждой из которых потенциалы имеют одинаковые качественные характеристики. При $a < 0$ потенциальная функция имеет две критические точки — один максимум и один минимум, при $a = 0$ — одну дважды вырожденную критическую точку, а при $a > 0$ не имеет критических точек вообще.

Катастрофа типа A_{+3} задается потенциалом, зависящим от двух управляющих параметров, и имеет вид

$$V(x;\ a,\ b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx.$$

Положение критических точек определяется уравнением

$$V' = x^3 + ax + b = 0.$$

В области внутри сепаратрисы V имеет три изолированные критические точки, вне сепаратрисы — одну, а на самой сепаратрисе — две. Особенность проекции поверхности на плоскость управляющих параметров $(a,\ b)$ называется *сборкой*.

Катастрофа типа A_{-3}, имеющая вид

$$V(x;\ a,\ b) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2 - bx,$$

называется двойственной сборкой. При переходе от сборки к двойственной сборке максимум и минимум меняются местами. Физически это приводит к существенно различным результатам, так как у сборки, в отличие от двойственной сборки, всегда имеется по крайней мере один глобальный минимум.

Для систем, зависящих от одного управляющего параметра и от одной обобщенной координаты, в случайно выбранной точке $(x;\ a)$, вообще говоря, либо $V' \neq 0$, либо $V' = 0$, $V'' \neq 0$. При случайно выбранном семействе функций $V(x;\ a)$ оказывается имеющим вид

$$V(x;\ a) = \frac{1}{3}x^3 + cx.$$

Особенности типа складки и сборки являются устойчивыми, т. е. всякое близкое отображение имеет в подходящей близкой точке подобную же особенность.

Преимущество теории катастроф в том, что она указывает общие качественные свойства физических систем.

3. *Вывод основных уравнений.* Рассмотрим систему из $N+1$ частиц ($N \gg 1$), где N частиц (звезд) имеют одинаковую массу m, а одна — массу M_0, причем $M_0 \gg m$. Система окружена сферой радиуса r_e и, аналогично допущениям в [7], находится в термостате с температурой T, т. е. является изотермической. Звезды считаются точечными и взаимодействующими друг с другом только гравитационно, так что число звезд не меняется.

Обозначим через $f_m(x, v)$ и $f_0(x, v)$, где $x=(x_1, x_2, x_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, плотности распределения в фазовом пространстве числа звезд с массой m и M_0 соответственно.

Система имеет фиксированный объем и температуру, поэтому равновесное состояние системы определяется свободной энергией

$$F(T, V) = E - TS.$$

Как показал Антонов [6], такие системы в равновесном состоянии имеют сферическую симметрию.

В дальнейшем под центральной точечной массой мы будем понимать шар с ненулевым (малым) радиусом $R_0 \ll r_e$ и заданной плотностью ρ_M, т. е.

$$\frac{M_0}{r} \propto \begin{cases} \dfrac{M}{r}, & \text{при } r > R_0, \\ \rho_M r^2 & \text{при } r \leqslant R_0. \end{cases}$$

Вкладом стохастических процессов в динамику массового тела мы пренебрегаем [15].

Вычислим свободную энергию F, используя формулу Больцмана для энтропии

$$S = -k \int f_m \ln f_m d^3x d^3v,$$

где k — постоянная Больцмана.

Энергия E системы равна

$$E = \frac{1}{2}\int m v^2 f_m d^3x d^3v - \frac{G}{2}\int\int \frac{f(x, v) f(x', v')}{|r - r'|} d^3x d^3v d^3x' d^3v',$$

где

$$|r - r'| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - x_i')^2},$$
$$f(x, v) = M_0 f_0(x, v) + m f_m(x, v). \tag{1}$$

Задача сводится к похождению минимума F при постоянном числе звезд

$$N = \int f_m d^3x d^3v. \tag{2}$$

При помощи метода неопределенных коэффициентов Лагранжа, получаем, что

$$\delta(F + k\alpha N) = \delta(E - TS + k\alpha N) = 0.$$

После элементарных вычислений следует, что F имеет экстремум, если

$$f_m(x, v) = A \exp\left[-\frac{m}{kT}\left(\frac{v^2}{2} - \varphi(x)\right)\right], \tag{3}$$

где

$$\varphi(x) = G\int \frac{f(x', v')}{|r - r'|} d^3x' d^3v' = \frac{GM_0}{r} + Gm \int \frac{f_m(x', v')}{|r - r'|} d^3x' d^3v' =$$
$$= \frac{GM_0}{r} + Gm \int \frac{\rho_m(x')}{|r - r'|} d^3x', \tag{4}$$

$$\rho_m(x) = m \int f_m(x, v)\, d^3v = B \exp(\beta\varphi),$$
$$A = \exp[-(\alpha + 1)] = \text{const}, \tag{5}$$
$$B = A\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{3/2},$$
$$\beta = \frac{m}{kT}, \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2}.$$

Из (3.4), (3.5) для $\varphi(x)$ получаем

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi(x) = -4\pi G M_0 \delta^3(x) - 4\pi G B \exp(\beta\varphi(x)) \text{ при } r < r_* \\ &\Delta\varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad r > r_*. \end{aligned} \tag{6}$$

При этом $\varphi(x)$ и ее производные должны быть непрерывны на $r = r_*$.

Так как по теореме Антонова при равновесном состоянии система имеет сферическую симметрию, то уравнения (6) можно заменить на

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)=-4\pi GM_0\delta(r)-4\pi GB\exp(\beta\varphi(r)),\quad r<r_e$$
$$\varphi(r)=\frac{GM_0}{r}+\frac{GM}{r},\quad r>r_e,\quad (M=N_m), \tag{7}$$

где $\varphi(r)$ непрерывна на $r=r_e$.

Если

$$\varphi(r)=\frac{GM_0}{r}+\psi(r),$$

то $\psi(r)$ является решением следующего уравнения:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)=-4\pi GB\exp\left(\beta\psi+\frac{GM_0}{r}\beta\right),\quad r<r_e,$$
$$\psi(r)=\frac{GM}{r},\quad r>r_e, \tag{8}$$

где $\psi(r)$ непрерывна на $r=r_e$.

Вводя следующие обозначения ($\psi(0)$ считаем конечной)

$$v=\beta(\psi-\psi_0),$$
$$R=[4\pi G\beta B\exp(\beta\psi(0))]^{1/2}r=(4\pi G\rho_0\beta)^{1/2}r,$$
$$z=(4\pi G\rho_0\beta)^{1/2}r_e, \tag{9}$$
$$\mu=M/M_0,$$
$$\bar\beta=GM\beta/r_e,$$

(8) можно записать в виде

$$\frac{d^2v}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dv}{dR}+\exp\left[v+\mu\bar\beta\frac{z}{R}\right]=0,$$
$$v(0)=\left.\frac{dv}{dR}\right|_{R=0}=0. \tag{10}$$

Из (8) и (9) следует

$$\left.\frac{d\psi(r)}{dr}\right|_{r=r_e}=-\frac{GM}{r_e^2}=\frac{1}{\beta}\frac{z}{r_e}v'(z),$$

откуда

$$\tilde{\beta} = \frac{GM\beta}{r_e} = -zv'(z). \tag{11}$$

Используя (11), уравнение (10) можно переписать в окончательном виде:

$$\begin{gathered} \frac{d^2v}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{dv}{dR} + \exp\left[v - \mu\frac{z^2v'(z)}{R}\right] = 0, \\ v(0) = \left.\frac{dv}{dR}\right|_{R=0} = 0, \quad 0 \leqslant R \leqslant z. \end{gathered} \tag{12}$$

4. *Процедура вычислений.* В отличие от элементарной теории катастроф, некоторые результаты которой приведены в разделе 2, в нашей задаче минимизируется не функция переменной и параметра, а функционал, зависящий от функции и параметра. Этот функционал — свободная энергия F — зависит от функции распределения f и от $\tilde{\beta}$: $F(f(.)\tilde{\beta})$. Как видно из (3), $f(.)$ определяется с помощью $v(.)$. Причем нас интересуют только сферически симметричные системы, для которых важным является не вся функция $v(.)$, а только ее значение на границе z. Таким образом, наш функционал переходит в обыкновенную функцию, которая зависит от $u \equiv -v(z)$ и $\tilde{\beta}$:

$$F(f(.), \tilde{\beta}) \to F(v(.), \tilde{\beta}) \to F(u, \tilde{\beta}).$$

Для сферически симметричных систем рассмотрим u как обобщенную координату. Из (11) имеем $v'(z) < 0$, т. е. $v(z)$ — монотонно убывающая функция от z. Так как $v(0) = 0$, то $v(z) < 0$ при всех $z > 0$. Итак, $v(z)$ — отрицательная монотонно убывающая функция от z при $z > 0$.

Нам необходимо решить уравнение (12), чтобы ответить на следующий вопрос: какой должна быть температура жесткого термостата при заданном u, чтобы система находилась в стационарном состоянии, т. е. чтобы $\delta F = 0$ при постоянном числе звезд. Другими словами, нас интересует параметрическая кривая $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(z)$, $u = u(z)$ на плоскости $(\tilde{\beta}, u)$ с параметром z. Зная эту кривую, мы можем ответить на вышепоставленный вопрос. Так как $u(z)$ — монотонная функция, то для данной z существует единственное значение u, а это значит, что функция $\tilde{\beta}(u)$ однозначна.

Чтобы найти кривую $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(z)$, $u = u(z)$, необходимо решить уравнение (12) при данном z. Но из (12) видно, что это непосредственно интегрированием сделать нельзя, так как для решения этого уравнения кроме z необходимо знать еще и $v'(z)$. Мы же решаем уравнение (12), чтобы получить именно $v'(z)$ ($\tilde{\beta} = -zv'(z)$). Чтобы обойти эту принципиальную трудность, поступим следующим образом. Вместо (12) решим следующее уравнение:

$$\frac{d^2v}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{dv}{dR} + \exp\left[v + \mu\frac{z^2\lambda}{R}\right] = 0,$$
$$v(0) = v'(0) = 0, \quad 0 \leqslant R \leqslant z, \tag{13}$$

где λ — положительное число, μ — фиксировано.

Для заданных z и λ, решая уравнение, получим

$$v(R) = g(R;\ z, \lambda),$$
$$v'(R) = \frac{\partial g(R;\ z, \lambda)}{\partial R}, \tag{14}$$

на границе $R = z$,

$$v(z) = g(R;\ z, \lambda)\Big|_{R=z},$$
$$v'(z) = \frac{\partial g(R;\ z, \lambda)}{\partial R}\Bigg|_{R=z} \equiv h(z). \tag{15}$$

Чтобы (14) было решением уравнения (12), необходимо выполнение условия: $-v'(z) = \lambda > 0$ (поэтому мы рассматриваем только положительные λ).

Для λ получим следующее уравнение:

$$h(z, \lambda) + \lambda = 0. \tag{16}$$

Из этого уравнения, найдя $\lambda = \lambda(z)$, можно получить

$$\tilde{\beta}(z) = -zv'(z) = -zh(z, \lambda(z)),$$
$$v(z) = g(z, \lambda(z)).$$

Итак, задача сводится к решению уравнений (13) и (16), что возможно только численно. Расчеты показали, что уравнения (13), (16) или уравнение (12) являются математически некорректными*, т. е. решение $v(R)$ сильно зависит от начальных данных. Используя свойства $v(z)$ (монотонность, отрицательность) и однозначность β по v, согласно методам реше-

* Некорректность понимается в следующем смысле: при малом возмущении начальных данных решение задачи существенно меняется [16].

ния некорректных уравнений, можно выбрать правильные точки. При этом соответствующие решения являются устойчивыми в отношении повышения точности численных расчетов на ЭВМ.

5. *Катастрофы в звездных системах.* Сначала обсудим кривую, полученную Линден-Беллом и Вудом для $\mu = 0$ (рис. 1). Для разных значений $\tilde{\beta}$, т. е. для разных температур жесткого термостата, потенциальная функция $F(u, \tilde{\beta})$ имеет качественно разное поведение.

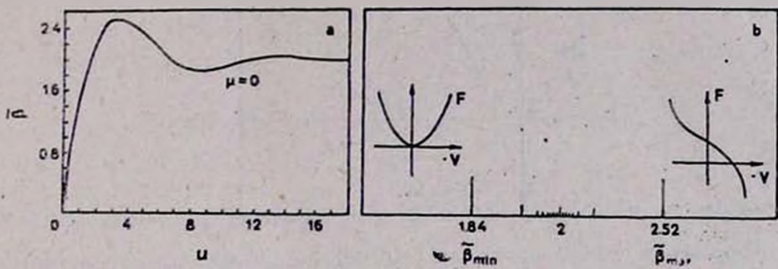

Рис. 1. а) Зависимость температуры $\tilde{\beta}$ от контрастности плотности $u = \ln \rho_0/\rho$ [7] при $\mu = 0$; b) Последовательность сепаратрис, соответствующих катастрофам типа складки.

Рассмотрим поведение функции F с точки зрения теории катастроф. Имеем функцию, зависящую от одной переменной — u и от одного параметра $\tilde{\beta}$. В плоскости $(\tilde{\beta}, -v)$ кривая — это проекция точек экстремума функции F. Если спроектировать кривую $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(-v)$ на $\tilde{\beta}$, то получится особенность типа складки. Из результатов Линден-Белла и Вуда следует, что существует бесконечно много сепаратрис (рис. 1b).

Используя теорему сопряженности, Кац установил переходы устойчивости в последовательности складок вдоль равновесной траектории [17, 18, 21, 22]. Он, в частности, показал, что система с T, $V = \text{const}$ при увеличении u теряет устойчивость в окрестности первой складки (β_{max}, u_{max}), так что в дальнейшем отсутствует рестабилизация. Таким образом, при $\beta > \beta_{max}$ и (или) $u > u_{max}$ состояния равновесия не существует.

Если при этом предполагать, что система всегда сохраняет сферическую симметрию, то видим, что она будет катастрофически сжиматься. Это и есть, так называемая, «гравотермальная катастрофа». Примечательно, что термин «катастрофа» здесь можно понимать как в смысле теории катастроф (раздел 2), так и в буквальном смысле.

Что же произойдет с этой катастрофой, если в центре системы имеется точечная масса?

Как показали вычисления, при $\mu \leqslant 10^{-3}$ кривая почти не отличается от кривой, соответствующей $\mu = 0$ (рис. 1а), однако с увеличением μ она начинает существенно меняться (рис. 2).

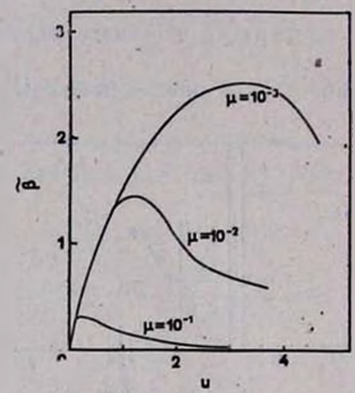

Рис. 2. Зависимость $\tilde{\beta}$ от u при разных значениях параметра центральной массы.

На рис. 2 для наглядности на одной диаграмме приведена серия кривых, соответствующих разным значениям μ. Видно, что катастрофа «складки» сохраняется для каждого значения массы, причем $\tilde{\beta}_{max}$ убывает по мере возрастания μ (рис. 3). Это означает, что система с центральной массой менее устойчива, т. е. чтобы она была устойчивой, термостат должен быть нагрет до более высокой температуры (при одинаковых массах звезд и т. п.).

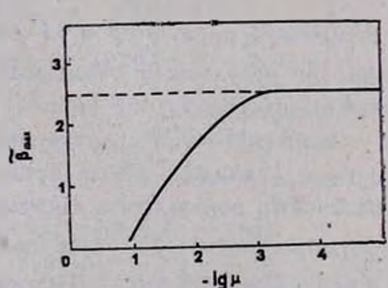

Рис. 3. Поведение $\tilde{\beta}_{max}$ по мере возрастания μ.

Из рис. 4 и из результатов в [18, 21, 22] следует также, что системы с центральной массой устойчивы только тогда, когда их контрастность плотностей* существенно меньше соответствующих значений систем без точечной массы. Другими словами, рассматриваемые нами системы должны быть существенно более однородными; точечная масса в центре как бы берет на себя функции высокой центральной плотности, необходимой для поддержания равновесия системы.

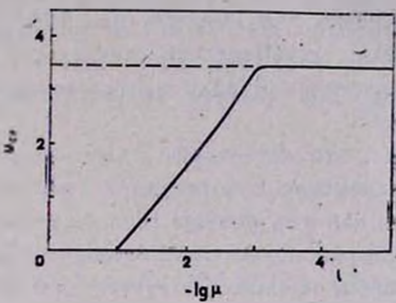

Рис. 4. Поведение u_{cr}, соответствующих значению $\tilde{\beta}_{max}$ по мере возрастания μ.

Несмотря на то, что наша задача зависит от двух параметров (β, μ), катастрофа типа «сборки» не образуется, хотя, как следует из раздела 2, это, вообще говоря, возможно при двухпараметрическом потенциале.

6. *Заключение.* В данной работе мы исследовали устойчивость звездных систем, содержащих центральное массивное точечное тело. При этом мы существенно использовали методы и результаты теории катастроф.

Показано, что гравотермальная катастрофа, являющаяся катастрофой типа A_2 — складки, не только имеет место для систем с точечной массой, но и становится существенно более «разрушительной». Во-первых, катастрофа происходит при более высоких температурах, чем в случае изотермической сферы. Во-вторых, что более важно, катастрофа (при β_{max}) наступает при значительно меньших значениях контрастности плотности, т. е. в состоянии равновесия эти системы должны быть существенно более однородными. Этот результат на первый взгляд кажется несколько неожиданным, так как по имеющимся сейчас представлениям массивное тело в центре звездной системы должно приводить к дополнительному пику плотности** (см., например, [20]). Именно этот принцип лежит в основе гипотез о существовании массивных черных дыр в ряде шаровых скоплений (например, M 15) и галактик (например, M 87), имеющих в центре дополнительный пик яркости.

Между тем, этот результат физически довольно естественен.

---

* Точнее, и не контрастность плотностей $\ln \rho/\rho_0$, а $\ln \rho_0/\rho + \mu\tilde{\beta}$.

** Это связано с накоплением звезд на финитных орбитах вокруг центрального тела.

Действительно, если катастрофа системы без точечной массы наступает, скажем, при ρ_0^*, а наличие массы M_0 приводит к эффективному повышению центральной плотности в физически малом объеме $V(r \leqslant r_0;$ $r_0 \ll R)$: $\rho_0^M + \frac{M_0}{V}$, то система станет неустойчивой, когда $\rho_0^M + \frac{M_0}{V} \sim$ $\sim \rho_0^M$, т. е. $\rho_0^M < \rho_0^*$. Причем, чем больше M_0, тем сильнее это неравенство. Другими словами, устойчивость системы с центральной массой требует компенсации определенной доли центральной плотности («отрицательный пик плотности»)*.

Подчеркнем еще раз, что катастрофа типа «складки» при появлении нового управляющего параметра в потенциале (массы центрального тела) не переходит в «сборку», как это, вообще говоря, могло бы произойти.

Следует отметить также роль граничного условия на радиусе центрального тела R_0. Выше мы предполагали, что для большинства реальных систем это условие не влияет существенно на вид функции распределения. Системы, для которых это влияние значительно, требуют детального анализа этого вопроса.

Массивная черная дыра может также приводить к образованию незаполненного конуса в пространстве моментов, что может, в свою очередь стать причиной развития соответствующей неустойчивости, способной определенным образом влиять на вековую эволюцию системы.

В заключение отметим, что рассмотрение данной проблемы в ее наиболее простой форме в духе работ Антонова, Линден-Белла и Вуда обусловлено убеждением, которое осознано относительно недавно (см. [19]) и не учитывается во многих работах: учет как можно больше различных эффектов в модели не всегда делает ее более близкой реальности.

Стимулом данного исследования является замечательная книга В. И. Арнольда [11].

Авторы искренне благодарны В. А. Амбарцумяну, В. А. Антонову, В. И. Арнольду, Г. А. Гурзадяну, Р. Л. Мкртчяну, В. Л. Поляченко, А. Г. Седракяну и А. М. Фридману за полезные обсуждения. А. М. Фридман любезно обратил наше внимание на работу Линдблада.

Ереванский физический
институт

* Этим замечанием мы обязаны В. А. Амбарцумяну.

CATASTROPHE THEORY AND STELLAR SYSTEMS

V. G. GURZADYAN, A. A. KOCHARYAN, S. G. MATINYAN

The possibility of gravothermal catastrophe in a system containing central massive body is investigated. It has been shown that an A_2-fold type catastrophe occuring in the system without massive centre is preserved in this case too and does not turn to "cusp". Catastrophe occurs at higher temperatures of system and lower values of relative density.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Chandrasekhar*, Principles of Stellar Dynamics, Chicago, 1942.
2. *V. G. Gurzadyan, G. K. Savvidy*, EPI-678(68), 1983; Astron. and Astrophys., 160, 203, 1986.
3. *В. Г. Гурзадян, Г. К. Саввиди*, Докл. АН СССР, 277, 69, 1984.
4. *В. Г. Гурзадян, А. А. Кочарян*, EPI-825 (52), 1985; Докл. АН СССР, 287, 813, 1986; EPI-871 (22), 1986.
5. *В. Г. Гурзадян*, в сб. «Частицы и космология», Изд. АН СССР, М., 1985.
6. *В. А. Антонов*, Вест. ЛГУ, сер. мат. мех. астр., 17, 135, 1962.
7. *D. Lynden-Bell, R. Wood*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 138, 495, 1968.
8. *D. Lynden-Bell, P. P. Eggleton*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 191, 483, 1980.
9. *S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky*, Astrophys. J., 292, L41, 1985.
10. *В. Г. Гурзадян, А. А. Кочарян*, Докл. АН СССР, 289, 60, 1986.
11. *В. И. Арнольд*, Теория катастроф, Изд. МГУ, М., 1983.
12. *Р. Гилмор*, Прикладная теория катастроф, Мир, М., 1984.
13. *А. Пуанкаре*, Избр. Труды, Наука, М., 1971.
14. *B. Lindblad*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 94, 231, 1934.
15. *V. G. Gurzadyan*,, Astron. and Astrophys., 114, 71, 1982.
16. *А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин*, Методы решения некорректных задач, Наука, М., 1979.
17. *J. M. T. Thompson*, Phyl. Trans. Roy. Soc., Ser A, 292, 1, 1979.
18. *J. M. T. Thompson*, Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering, 1982.
19. *А. А. Самарский, С. П. Курдюмов, Т. С. Ахромеева, Г. Г. Малинецкий*, Вест. АН СССР, № 9, 64, 1985.
20. *A. P. Lightman, S. L. Shapiro*, Rev. Mod. Phys., 50, 437, 1978.
21. *J. Katz*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 189, 817, 1979.
22. *J. Katz*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 190, 497, 1980.