

УДК: 524.3—782

СИЛЬНЫЕ АДИАБАТИЧЕСКИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ
В ПРОИЗВОЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ.
АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Б. И. ГНАТЫК

Поступила 19 февраля 1986

Принята к печати 20 сентября 1986

Обсуждены точность и область применимости широко используемого в астрофизических приложениях приближенного аналитического подхода Лауэбаха и Пробстияна к расчету движения ударных волн в произвольно неоднородных средах. Отмечено неудовлетворительное описание ускоряющихся ударных волн в этом подходе и предложен ряд модификаций — улучшен расчет траектории ударной волны, рассчитано квадратичное приближение и оценена его точность. Предложен приближенный способ, дающий возможность найти в явном виде функции течения. Рассчитан точечный взрыв в гауссовом диске галактики и оценена степень коллимирования возникающего течения.

1. *Введение.* В целом ряде астрофизических явлений, связанных с выделением значительного количества энергии в относительно небольших объемах и за короткие в сравнении с гидродинамическим времена, в качестве определяющего момента является распространение по окружающей среде возникшей ударной волны (УВ). Наиболее известным примером являются остатки вспышек сверхновых звезд [1]. Адиабатическая стадия их эволюции в однородной среде описывается автомодельным решением Седова [2] задачи о точечном взрыве [1]. Однако в ряде случаев необходим учет как локального изменения плотности в районе вспышки, обусловленного неоднородностью и многофазностью межзвездной среды [3], так и глобального изменения плотности газового диска галактики [4].

Другим важным направлением исследований является ударно-волновое моделирование формирования двойных внегалактических радиоисточников, где неоднородность газового диска галактики [5—8] или аккреционного диска вокруг черной дыры [9] служит механизмом фокусировки течения вдоль выделенных направлений.

В обоих примерах учет неоднородности среды приводит, по крайней мере, к двумерным (в случае осевой симметрии) течениям, что делает невозможным использование автомодельных решений. Применение численных методов с достаточным пространственным разрешением является труд-

ной технической задачей, и убедительных примеров таких решений мало (см., например, [4]). Поэтому актуальной становится задача разработки эффективных приближенных методов расчета движения двумерных и трехмерных УВ в неоднородных средах.

Первые работы в этом направлении были посвящены расчету точечного осесимметричного взрыва в плоской стратифицированной атмосфере с экспоненциальным изменением плотности. С историей вопроса можно ознакомиться в [10, 11]. Из современных подходов отметим метод возмущений [12, 13], метод Компанейца [14], обобщенный в методе тонкого ударного слоя [15]. В последнее время наиболее часто применяется метод Лаумбаха и Пробстина (ЛП), использующий идею секторного приближения и разложение искомых функций в ряд Тейлора в окрестности фронта УВ [16]. Лаумбах и Пробстин ограничились линейным приближением и показали, что в случае однородной среды и в экспоненциальной атмосфере на стадии замедления УВ положение фронта УВ и течение за фронтом близки к аналитическому и численному решениям [16]. В [17, 25] проведено обобщение метода ЛП на случай произвольного распределения плотности, а в [18, 19] предложен способ расчета высших членов разложения и найдены квадратичные коэффициенты в терминах массовой лагранжевой переменной.

В нашей работе рассчитано квадратичное приближение в удобных для практического применения лагранжевых переменных: время t — начальная координата частицы a . Предложен более точный способ расчета траектории УВ, основанный на применении аппроксимационной формулы [20, 21]. Исследована точность линейного и квадратичного приближений при различных режимах течения путем сравнения с численными и автомоделными решениями. Предложен способ расчета параметров течения на основе специальной аппроксимации связи между эйлеровой и лагранжевой координатами, дающей возможность найти в явном виде и с достаточной точностью искомые функции течения. Приведен пример расчета точечного взрыва в диске галактики с гауссовским распределением плотности и оценена степень коллимирования возникающего течения.

2. *Основные уравнения.* В данной работе ограничимся адиабатическим течением невязкого совершенного газа при отсутствии сил гравитации. В рамках секторного приближения, когда движение вдоль каждого луча, исходящего из центра взрыва, считается радиальным, двумерные и трехмерные течения разбиваются на набор независимых одномерных течений вдоль всевозможных направлений. Для каждого направления будут справедливы уравнения одномерного течения [21]:

$$\rho_t + \frac{\rho^2}{r} \left(\frac{r}{a} \right)^N u_a + \frac{N_a \rho}{r} = 0, \quad (1)$$

$$u_t + \frac{1}{\rho} \left(\frac{r}{a} \right)^N P_a = 0, \quad (2)$$

$$P_t - c^2 \rho_t = 0, \quad (3)$$

$$r_t - u = 0. \quad (4)$$

Здесь давление $P(a, t)$, плотность $\rho(a, t)$, скорость $u(a, t)$ и эйлерова координата частицы $r(a, t)$ являются функциями лагранжевых координат-времени t и начального положения частицы a , $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$ — адиабатическая скорость звука, γ — показатель адиабаты. Нижние индексы у функций обозначают частную производную по соответствующей переменной: $\rho_t = \partial \rho(a, t)/\partial t$ и т. д., $N = 0, 1, 2$ соответственно для плоских, цилиндрических и сферических течений, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(a)$ — начальное распределение плотности газа.

В дальнейшем нам понадобится уравнение неразрывности (1) в форме $\bar{\rho} a^N da = \rho r^N dr$ или

$$r_a = \frac{\bar{\rho}}{\rho} \left(\frac{a}{r} \right)^N. \quad (5)$$

На фронте сильной УВ с законом движения $R = R(t)$ выполняются условия [21]:

$$u^s = \omega \dot{R}, \quad (6)$$

$$\rho^s = \bar{\rho}^s / (1 - \omega), \quad (7)$$

$$P^s = \omega \bar{\rho}^s R^2, \quad (8)$$

$$r^s = R. \quad (9)$$

Здесь $\dot{R} = dR/dt$ — скорость УВ, индекс „s“ обозначает значение величины на фронте УВ при $a = R$, $\omega = 2/(\gamma + 1)$.

3. Метод ЛП — линейное приближение. Из автомодельных решений известно, что основная масса вещества концентрируется у фронта УВ [2]. Поэтому, как предположили Лаумбах и Пробстин [16], можно ожидать, что учет только членов первого порядка в разложении искомых функций в ряд Тейлора в окрестности фронта УВ по параметру $(a - R)$ будет обладать достаточной точностью. Для нахождения первых производных P_a^s , P_t^s и т. д. на фронте УВ воспользуемся способом, предложенным в [18]: к уравнениям (1)–(3), рассмотренным при $a = R$,

$$\rho_i^* + \frac{(\rho^*)^2}{\rho^*} u_a^* + \frac{Nu^* \rho^*}{R} = 0, \quad (10)$$

$$u_i^* + \frac{1}{\rho^*} P_a^* = 0, \quad (11)$$

$$P_i^* - (c^*)^2 \rho_i^* = 0, \quad (12)$$

добавим еще три уравнения, полученные дифференцированием граничных условий (6)—(8) вдоль траектории УВ при помощи оператора

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{R} \frac{\partial}{\partial a},$$

$$u_i^* + \dot{R} u_a^* = \omega \ddot{R}, \quad (13)$$

$$\rho_i^* + \dot{R} \rho_a^* = \frac{\dot{R}}{1 - \omega} \bar{\rho}_a^*, \quad (14)$$

$$P_i^* + \dot{R} P_a^* = 2\omega \bar{\rho}^* \dot{R} \ddot{R} + \omega \dot{R}^2 \bar{\rho}_a^*. \quad (15)$$

Решая полученную систему шести алгебраических уравнений (10)—(15) относительно шести неизвестных частных производных, получим:

$$u_i^* = \omega \frac{\dot{R}^2}{R} [(4 - 3\omega) B + (1 - \omega)(2 - \omega) N - (1 - \omega) m], \quad (16)$$

$$\rho_i^* = \frac{\omega}{1 - \omega} \bar{\rho}^* \frac{\dot{R}}{R} [3B + (1 - \omega) N - m], \quad (17)$$

где $B = R\ddot{R}/\dot{R}^2$, $m \equiv m(R) = -(\ln \bar{\rho}/\ln a)^*$.

Остальные производные легко выражаются через u_i^* и ρ_i^* при помощи уравнений (10)—(15). Из (5) и (9) имеем $r_a^* = 1 - \omega$, $r_i^* = u^*$ и

$$r_{aa}^* = \omega(1 - \omega) \frac{1}{R} [3B + (2 - \omega) N - m]. \quad (18)$$

Ключевой момент подхода ЛП: в уравнении движения (2) комбинация u_i/r^N заменяется ее значением на фронте УВ u_i^*/R^N . В результате для каждого момента времени t для распределения давления имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dP}{da} = -\bar{\rho}(a) a^N \frac{u_i^*}{R^N}, \quad P(R, t) = P^*, \quad 0 \leq a \leq R, \quad (19)$$

или

$$P(a, t) = P^* + \frac{u_i^*}{R^N} \int_a^R \bar{\rho}(a) a^N da. \quad (19a)$$

По известному распределению давления из условия адиабатичности

$$P/P^* = (\rho/\rho^*)^\gamma \quad (20)$$

находится распределение плотности, а затем из уравнения неразрывности (5) — связь между эйлеровой и лагранжевой координатами. Скорость газа при таком подходе не определяется и должна рассчитываться независимым способом. Так, можно положить

$$u(a, t) = u^* + u_a^*(a - R). \quad (21)$$

Необходимый для расчетов закон движения УВ в методе ЛП получается из аппроксимации закона сохранения энергии в виде еще одного дифференциального уравнения [16].

Переход от уравнения движения (2) к приближению (19) эквивалентен в общем случае сохранению членов первого порядка по $(a - R)$ в тейлоровском разложении давления в окрестности фронта $P = P^* + P_a^*(a - R) + \frac{1}{2!} P_{aa}^*(a - R)^2 + \dots$. Соответственно, для $\rho(a, t)$ получим первый, а для $r(a, t)$ второй порядок точности по $(a - R)$. Однако оказывается, что в случае автомодельного движения при $\bar{\rho} = \text{const}$ приближение (19) обладает высокой точностью на всем интервале $0 \leq a \leq R$. Так, при $\gamma = 1.4$, $N = 2$ $P(0, t)/P^* = 0.3796$, тогда как автомодельное значение равно 0.3655 [16]. Причина такой высокой точности кроется в том, что линейная зависимость давления от массовой координаты $dM = \bar{\rho} a^N da$, задаваемая уравнением (19), является, в некотором смысле, условием автомодельности движения [19]. Удовлетворительную точность дает метод ЛП и при описании течения в экспоненциальной атмосфере на этапе замедления УВ [16]. Однако в области ускоряющихся УВ точность метода ЛП существенно падает [10].

4. *Квадратичное приближение.* Наиболее естественным способом повышения точности метода ЛП является учет высших членов разложения. В [18, 19] разработана соответствующая процедура и рассчитано квадратичное приближение в терминах лагранжевой массовой координаты. Поэтому здесь кратко рассмотрим получение нужного нам в дальнейшем квадратичного приближения в лагранжевых координатах (a, t) .

Дифференцируя уравнения (1)—(3) отдельно по a и по t и записывая полученные соотношения для фронта УВ при $a = R$, получим шесть уравнений, связывающих девять вторых частных производных от функций P , ρ и u на фронте УВ. Еще три уравнения получим дифференцируя соот-

ношения на фронте (6)–(8) при помощи оператора $\frac{D^2}{Dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\dot{R} \frac{\partial^2}{\partial a \partial t} + \dot{R}^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \ddot{R} \frac{\partial}{\partial a}$. При этом значения первых производных берем из расчета линейного приближения. Решая полученную систему девяти уравнений с девятью неизвестными, в частности, получим:

$$u_{at}^* = \omega(1 - \omega) \frac{\dot{R}^2}{R^2} \{15(2 - \omega) B^2 - [(5\omega^2 - 5\omega - 6)N - 2(2\omega - 5)m] B + \\ + \omega(\omega - 2)(2\omega - 3)N^2 + (\omega^2 + \omega - 4)Nm + (2 - \omega)^2 N + \\ + (2 - \omega)m^2 + (2\omega - 3)m + (2\omega - 3)m_1 + 2(3\omega - 5)Q\}, \quad (22)$$

$$u_{aa}^* = \omega(1 - \omega) \frac{\dot{R}}{R^2} \{3(5\omega - 9)B^2 + [(5\omega^2 - 4\omega - 8)N - (4\omega - 11)m] B - \\ - \omega(2\omega - 3)(\omega - 2)N^2 - (\omega^2 + \omega - 4)Nm - (1 - \omega)(2 - \omega)N + \\ + (\omega - 2)m^2 + 2(1 - \omega)m + 2(1 - \omega)m_1 - (6\omega - 7)Q\}, \quad (23)$$

где $m_1 = -dm(R)/d \ln R$, $Q = R^2 \ddot{R}/\dot{R}^2$.

Теперь в (2) можно положить $u_t = u_t^* + u_{at}^*(a - R)$, $r = R + r_a^*(a - R)$, и со вторым порядком точности уравнение для давления запишется так:

$$\frac{dP}{da} = -\bar{\rho}(a) a^N \frac{u_t^*}{R^N} \left[1 + \left(\frac{u_{at}^*}{u_t^*} - \frac{N}{R} r_a^* \right) (a - R) \right], \quad P(R, t) = P^s, \quad (24) \\ 0 \leq a \leq R,$$

или

$$P(a, t) = P^s + \frac{u_t^*}{R^N} \int_a^R \left[1 + \left(\frac{u_{at}^*}{u_t^*} - \frac{N}{R} r_a^* \right) (a - R) \right] \bar{\rho}(a) a^N da. \quad (24a)$$

При $\bar{\rho} = \text{const}$, $N=2$, $\gamma=1.4$ из (24a) получим $P(0, t)/P^s = 0.3658$ — погрешность составляет 0.36%.

По найденному из (24) распределению давления плотность $\rho(a, t)$ и эйлера координата $r(a, t)$ ищутся аналогично случаю линейного приближения. Для расчета скорости можем принять

$$u(a, t) = u^* + u_a^*(a - R) + \frac{1}{2!} u_{aa}^*(a - R)^2. \quad (25)$$

5. Закон движения УВ. Проведенные выше вычисления первых и вторых производных на фронте УВ основывались только на использовании

уравнений (1)—(5) и условий на фронте (6)—(9). В этом смысле они являются точными. Однако для их расчета нужно знать закон движения УВ $R = R(t)$. Расчет траектории УВ в методе ЛП не обладает достаточной точностью в общем случае неоднородной среды [10], что вносит дополнительные погрешности и не позволяет полностью использовать возможности подхода.

Мы предлагаем использовать независимый от рассматриваемого подхода расчет движения фронта УВ на основании предложенной в [20, 21] аппроксимационной формулы для скорости движения сильной адиабатической УВ в произвольно неоднородной среде

$$\dot{R} \equiv D(R) = \text{const} [\bar{\rho}(R) R^{N+1}]^{-k}, \quad (26)$$

где $k = 1/2$ и $k = 1/5$ соответственно для замедляющихся ($m(R) \leq N+1$) и ускоряющихся ($m(R) > N+1$) УВ. Аппроксимация (26) совпадает с автомодельным решением Седова (при $m = \text{const} \leq N+1$) и близка к результатам численных и аналитических расчетов [2, 10, 22, 23].

В случае образования УВ при мгновенном взрыве постоянная в (26) выражается через энергию взрыва E [24]:

$$D(R) = \begin{cases} \frac{2}{3+N} \left(\frac{E}{\alpha_A(N, \gamma) \bar{\rho}(R)} \right)^{1/2} R^{-\frac{N+1}{2}} \\ \text{при } 0 \leq R \leq R_1, m(R) \leq N+1, \\ D(R_1) [\bar{\rho}(R_1) R_1^{N+1} / \bar{\rho}(R) R^{N+1}]^{1/5} \\ \text{при } R_1 < R \leq R_2, m(R) > N+1, \\ D(R_2) [\bar{\rho}(R_2) R_2^{N+1} / \bar{\rho}(R) R^{N+1}]^{1/2} \\ \text{при } R_2 < R \leq R_3, m(R) \leq N+1, \\ \dots \end{cases} \quad (27)$$

где $R_i, i = 1, 2, \dots$ — расстояния, на которых скорость УВ принимает экстремальные (минимальные или максимальные) значения, $\alpha_A(N, \gamma)$ — автомодельная постоянная. Уравнение траектории движения УВ запишется:

$$t = \int_0^R \frac{dR}{D(R)} \quad (28)$$

Точность аппроксимации (26)—(27) проиллюстрирована в [20, 21, 24]. На рис. 1 и в табл. 1 приведены результаты расчета точечного осе-

симметричного взрыва в плоской атмосфере, плотность в которой падает с высотой по экспоненциальному закону

$$\bar{\rho}(a) = \bar{\rho}(0) \exp(-z), \quad z = \frac{a \cdot \cos \vartheta}{H}, \quad (29)$$

с использованием различных методов для ряда значений безразмерного времени τ (см. (32)), H — высота однородной атмосферы, ϑ — угол между рассматриваемым направлением и осью Oz .

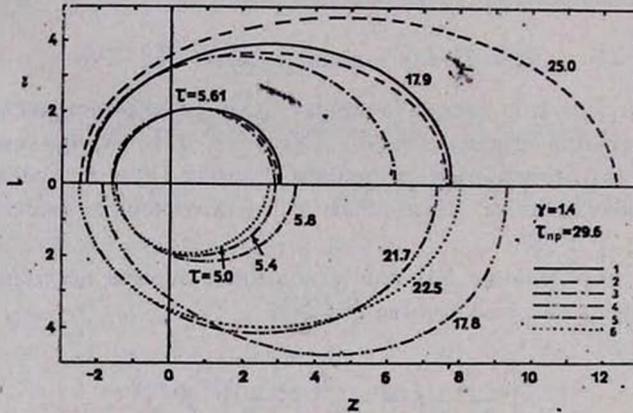


Рис. 1. Форма фронта УВ в цилиндрической системе координат (l, z) при точечном осесимметричном взрыве в плоской экспоненциальной атмосфере в различных подходах. 1 — численный двумерный расчет [10], 2 — аппроксимационный закон [24], 3 — численная реализация секторного приближения [10], 4 — метод возмущений [13], 5 — метод тонкого слоя [10], 6 — метод Лаумбаха и Пробстияна [16].

Таблица 1

Метод	τ	$\vartheta = \pi$			$\vartheta = 0$		
		R^*	$10^2 P^{*2}$	ρ^{*2}	R^*	$10^2 P^{*2}$	$10^2 \rho^{*2}$
Численный [10]	11.9	1.98	1.51	43.3	5.26	59.8	31.3
	17.9	2.23	1.02	56.0	7.75	7.87	2.58
Числен. реализация сектор. прил. [10]	11.9	2.05	1.82	46.1	4.51	67.5	66.1
	18.0	2.32	1.28	60.9	6.24	15.4	11.7
Аппроксимационная формула (27)	11.9	2.02	1.63	45.1	5.14	71.8	35.2
	17.9	2.28	1.13	58.7	7.71	9.43	2.69

Различие между точным решением [10] и применением аппроксимации (27) (в рамках секторного приближения) в определении формы УВ меньше 10%, что сравнимо с погрешностью самого численного метода. Кроме того, сшивание численного и автомодельного решений в [10] для $\tau = 1.4$

дает время прорыва-ухода поднимающейся части УВ на бесконечность — $\tau_{пр} = 29.6$, тогда как из (27) получаем $\tau_{пр} = 30.8$. В то же время численная реализация секторного приближения и использующиеся сейчас приближенные аналитические методы дают существенно большую погрешность [10]. Причина столь высокой точности объединения двух приближений — аппроксимации (27) и секторного приближения — кроется во взаимной компенсации их ошибок. Поэтому можно ожидать, что применение аппроксимации (26) — (27) для расчета траектории УВ позволит, в некоторой степени, преодолеть недостатки секторного приближения и для других типов неоднородности среды.

Для необходимых при расчете течения за фронтом УВ величин B и Q из (26) получим:

$$B = \bar{B}(R) = k(R) [m(R) - (N + 1)], \quad (30)$$

$$Q \equiv Q(R) = 2k^2(R) [m(R) - (N + 1)]^2 - k(R) [m_1 + m - (N + 1)]. \quad (31)$$

6. *Инвариантные свойства решений и масштабные преобразования.* Теперь мы имеем все уравнения и соотношения, необходимые для практического расчета движения фронта УВ и течения за ним. При расчетах двумерных и трехмерных течений в произвольно неоднородной среде с начальным распределением плотности $\rho(a, \varphi, \vartheta)$, где a — расстояние от центра взрыва в направлении, задаваемом углами φ и ϑ , необходимо провести интегрирование уравнений (или вычислить соответствующие квадратуры) для достаточно большого количества всевозможных направлений и затем восстановить пространственную структуру течения. При этом, если исходная модель содержит три размерных параметра E , $\bar{\rho}(0)$ и H , то в безразмерных величинах $R^* = R/H$, $\tau = t/t_0$, $u^* = u/u_0$, $\rho^* = \rho/\bar{\rho}(0)$, $P^* = P/P_0$, где

$$t_0 = \left(\frac{\alpha_A \bar{\rho}(0) H^3}{E} \right)^{1/2}, \quad u_0 = \left(\frac{E}{\alpha_A \bar{\rho}(0) H^3} \right)^{1/2}, \quad P_0 = \frac{E}{\alpha_A H^3}, \quad (32)$$

решение не зависит от их численных значений [10].

С другой стороны, в экспоненциальной атмосфере (29) преобразование $R^* \rightarrow R^* |\cos \vartheta|$, $\tau \rightarrow \tau |\cos \vartheta|^{5/2}$ переводит решение при $\vartheta = 0$ в решение для направления $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, что позволяет свести расчет двумерной осесимметричной задачи к интегрированию уравнений только вдоль двух лучей $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ [16]. Аналогичное упрощение возможно во всех случаях, когда распределение плотности инвариантно относительно направления с точностью до изменения линейного масштаба

$\bar{p}(a, \varphi, \theta) = \bar{p}(qa, 0, 0)$, $q = q(\varphi, \theta) > 0$. В этом случае $R^* \rightarrow R^*q$, $\tau \rightarrow \tau q^{5/2}$.

7. *Взрыв в экспоненциальной атмосфере.* Точность рассматриваемого подхода рассмотрим на примере точечного взрыва в плоской экспоненциальной атмосфере (29), детально изученного численными методами в [10]. Точность расчета траектории УВ уже обсуждалась нами в разделе 5. Теперь рассмотрим течение за фронтом УВ.

В начальной фазе развития взрыва, когда $R^* \approx 0$, а также во все последующие моменты времени для горизонтального направления ($\theta = \pi/2$) распределение параметров за фронтом УВ в секторном приближении соответствует автомодельному решению Седова при $\bar{p} = \text{const}$. На рис. 2 приведено сравнение рассмотренных выше линейного и квадратичного приближений и автомодельного решения. Для автомодельных течений уже линейное приближение (совпадающее в данном случае с методом ЛП) обладает высокой точностью расчета профилей давления и плотности.

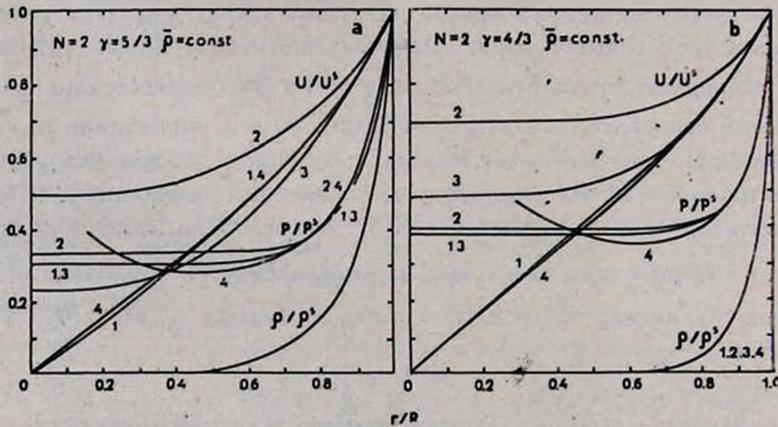


Рис. 2. Течение за фронтом УВ в однородной среде. 1 — автомодельное решение [2], 2 — линейное приближение, 3 — квадратичное приближение, 4 — аналитическая аппроксимация.

На рис. 3 изображены профили давления и плотности за поднимающейся ($\vartheta = 0$) УВ в момент времени $\tau = 11.9$, когда происходит перестройка течения с автомодельного режима Седова на автомодельный режим Райзера [22]. Уже линейное приближение превышает точность численной реализации секторного приближения (благодаря высокой точности аппроксимации (27)). В то же время в квадратичном приближении перестройка фронта происходит медленнее.

Рис. 4 соответствует моменту времени $\tau = 30$, близкому к времени прорыва. Хотя при $\xi = (R-r)/H < 1$ оба приближения близки к автомодельному пределу, при $\xi > 1$ линейное приближение дает завышенные

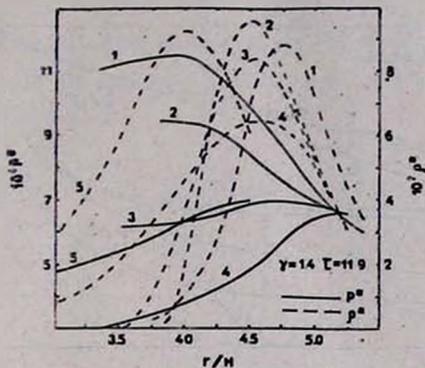


Рис. 3. Течение вдоль оси симметрии за поднимающейся ($\theta = 0$) УВ при $\tau = 11.9$. 1 — численный двумерный расчет [10], 5 — численная реализация секторного приближения [10], остальные обозначения те же, что и на рис. 2.

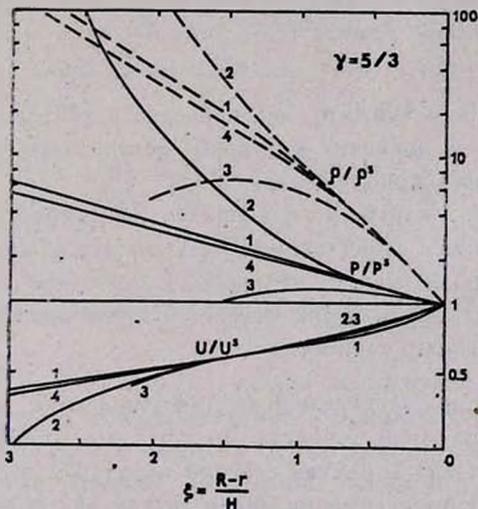


Рис. 4. Течение вдоль оси симметрии за поднимающейся УВ при $\tau = 30$, $\gamma = 5/3$. 1 — автомодельное решение [22], остальные обозначения те же, что и на рис. 3.

значения давления и плотности, а квадратичное приближение становится неприменимым (в этом случае $u_{\text{от}}^* > 0$ и аппроксимация $u_t = u_t^* + u_{\text{от}}^*(\alpha - R)$ приводит к отрицательным давлениям уже при $\xi \geq 2$).

Сравнение с автомодельным режимом Райзера [23] для опускающейся части УВ ($\theta = \pi$) приведено на рис. 5 ($\tau = 10^3$). Результаты обоих

приближений близки между собой и качественно согласуются с автомодельными. Существующая разница частично обусловлена отличием показателя k в аппроксимации (26) от точного значения 0.7435 при $\gamma = 1.25$.

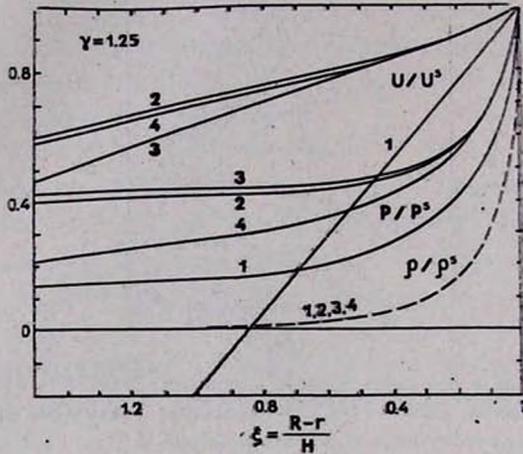


Рис. 5. Течение вдоль оси симметрии за опускающейся ($\vartheta = \pi$) УВ при $\tau = 10^5$, $\gamma = 1.25$. 1 — автомодельное решение [23], остальные обозначения те же, что и на рис. 3.

Для сравнения отметим, что, как показано в [10], метод ЛП обладает меньшей точностью и приводит к худшим результатам, чем разностная реализация секторного приближения.

Таким образом, в случае ускоряющихся УВ скорость сходимости тейлоровских разложений существенно уменьшается. Однако, если перепад плотности в конкретной модели не превышает 10^5 — 10^6 , как это и бывает в большинстве астрофизических ситуаций, уже линейное приближение дает удовлетворительную точность.

8. *Аналитическая аппроксимация.* Для упрощения процедуры расчета с сохранением достаточной точности мы предлагаем иной способ расчета течения за фронтом УВ в рамках секторного приближения. Основывается он на специальной аппроксимации связи между эйлеровой и лагранжевой координатами

$$\frac{r(\alpha, t)}{R(t)} = \left(\frac{\alpha}{R}\right)^\alpha \exp \left[\beta \left(\frac{\alpha - R}{R} \right) \right], \quad (33)$$

обеспечивающей выполнение граничных условий $r(0, t) = 0$, $r(R, t) = R$. Параметры $\alpha = \alpha(t)$ и $\beta = \beta(t)$ будем выбирать так, чтобы производные, вычисленные по (33), r_α^α и $r_{\alpha\alpha}^\alpha$ совпадали с их точным значением. В результате получим

$$\alpha = (r_a^*)^2 - R r_{aa}^*, \quad (34)$$

$$\beta = r_a^* - (r_a^*)^2 + R r_{aa}^*, \quad (35)$$

где $r_a^* = 1 - \omega$, а r_{aa}^* дается выражением (18).

Теперь на основании аппроксимации (33)—(35) можно найти в явном виде (без квадратур) выражения для функций P , ρ , u . Из (33) непосредственным вычислением получим

$$r_a = \frac{r}{\alpha} \left(\alpha + \frac{\alpha}{R} \beta \right) \quad (36)$$

и из уравнения неразрывности (5) распределение плотности запишется:

$$\rho(a, t) = \bar{\rho}(a) \left(\frac{\alpha}{r} \right)^N (r_a)^{-1}. \quad (37)$$

По известному распределению плотности (37) из уравнения адиабатичности найдем распределение давления:

$$\frac{P(a, t)}{P^*(R)} = \left[\frac{\bar{\rho}(a)}{\bar{\rho}(R)} \right]^{1-\gamma} \left| \frac{D(a)}{D(R)} \right|^2 \left[\frac{\rho(a, t)}{\rho^*(R)} \right]^\gamma. \quad (38)$$

Распределение скорости находим непосредственно из (33): $u(a, t) = \dot{r}_t$ или

$$u(a, t) = r \frac{\dot{R}}{R} \left\{ \omega + \beta \left(\frac{R-a}{R} \right) - \dot{\beta} \frac{R}{\dot{R}} \left[\frac{R-a}{R} + \ln \frac{a}{R} \right] \right\}, \quad (39)$$

где

$$\dot{\beta} = \omega (1 - \omega) \frac{\dot{R}}{R} [1 - 3k(R)] m_1. \quad (40)$$

Формулы (33)—(40) вместе с аппроксимационным законом движения УВ (26)—(27) дают в рамках секторного приближения явное аналитическое описание как движения фронта УВ, так и течения газа за фронтом при произвольном распределении начальной плотности среды, содержащее только одну квадратуру (28) для нахождения связи между R и t . Точность предлагаемого способа проиллюстрирована на рис. 2—5. Отметим, что аппроксимация (33) соответствует первому порядку точности по $(a - R)$ в распределении давления, плотности и скорости газа за фронтом УВ. Имеем хорошее согласие с автомодельным течением Седова (рост давления при $r \rightarrow 0$ не очень существен, так как $\rho \rightarrow 0$), выход на автомодельный режим Райзера в области фронта УВ при $R \rightarrow \infty$ и удовлетворительное описание переходной стадии течения.

9. Точечный взрыв в гауссовском диске галактики. Как уже отмечалось во введении, крупномасштабная неоднородность плотности газовых дисков активных галактик может служить одним из механизмов образования биполярных или асимметричных течений, вплоть до образования сильно коллимированных струй. О характере и степени фокусировки в случае экспоненциального распределения плотности можно судить по рис. 1. Максимальное расхождение течения к моменту прорыва составляет $2l_{\max} \approx 12$. Аналогичные результаты применения аппроксимации (27) в случае гауссовского распределения плотности $\bar{\rho} = \bar{\rho}(0) \exp(-z^2)$ приведены на рис. 6. В последнем случае картина течения существенно зависит

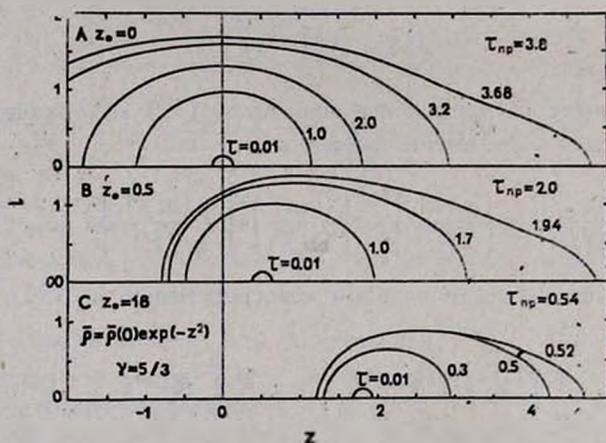


Рис. 6. Форма фронта УВ при точечном взрыве в плоском гауссовском диске галактики при различных положениях точки взрыва z_0 относительно плоскости галактики: $z_0 = 0.0$ (А), 0.5 (В), 1.8 (С).

от положения точки взрыва z_0 относительно плоскости симметрии. (Такая же ситуация возникнет и в экспоненциальном диске с $\bar{\rho} = \bar{\rho}(0) \exp(-|z|)$ при $|z_0| < 2.6$. Так, при $z_0 = 0$ получим биполярное осесимметричное течение, аналогичное варианту А на рис. 6). Степень коллимирования в гауссовском диске больше, чем в экспоненциальном и усиливается с увеличением высоты точки взрыва над плоскостью галактики ($2l_{\max} = 3.5, 2.6$ и 1.8 соответственно для $z_0 = 0.0, 0.5$ и 1.8). Используя значения масштабных множителей (32) в условиях, характерных для активных ядер галактик или вспышек сверхновых звезд:

$$\frac{t_0}{10^8 \text{ лет}} = 1.2 \left(\frac{E}{10^{51} \text{ эрг}} \right)^{-1/2} \left(\frac{\bar{\rho}(0)}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right)^{1/2} \left(\frac{H}{100 \text{ пк}} \right)^{5/2}, \quad (41)$$

$$\frac{u_0}{100 \text{ км/с}} = 0.83 \left(\frac{E}{10^{51} \text{ эрг}} \right)^{1/2} \left(\frac{\bar{\rho}(0)}{10^{-24} \text{ г/см}^3} \right)^{-1/2} \left(\frac{H}{100 \text{ пк}} \right)^{-3/2}, \quad (42)$$

можно на основании результатов рис. 1, 6 и безразмерной аппроксимации (27) оценить характерные времена развития вспышек, размеры возмущенной области и приобретаемые максимальные скорости газа для конкретных значений параметров модели. Более подробно этот вопрос мы надемся обсудить в следующей статье.

10. *Заключение.* Сравнение широко используемого сейчас приближенного метода ЛП с численным двумерным расчетом точечного осесимметричного взрыва в экспоненциальной атмосфере [10] обнаруживает существенные погрешности метода при описании ускоряющейся части фронта УВ и течения за ним. Так, в данном методе вообще не воспроизводится инверсия давления за фронтом ускоряющейся УВ (при $R \rightarrow \infty$ распределение давления в методе ЛП стремится к постоянному [16]). В то же время предлагаемое в работе линейное приближение на основании аппроксимационной формулы (26) для расчета траектории УВ обладает точностью, сравнимой с точностью численного метода на практически важном интервале перспада плотности. Допускающую возможность количественных расчетов точность дает и предложенный здесь явный аналитический способ расчета течения за фронтом УВ. Использование лагранжевых переменных в обоих случаях дает важную возможность учета неравновесных процессов в элементе газа, зависящих от предыстории его движения.

Выражаю благодарность И. А. Климишину за полезные обсуждения и замечания.

ИППММ АН УССР, г. Львов

STRONG ADIABATIC SHOCK WAVES IN ARBITRARY NONUNIFORM MEDIA. ANALYTIC APPROACH

В. И. HNATYK

We discuss the accuracy and the applicability limits of the approximate analytic approach to the calculation of the motion of the shock waves in arbitrary nonuniform media, proposed by Laumbach and Probststein [16], widely used in astrophysical applications. The unsatisfactory description of the accelerated shock waves in this approach is noted and some modifications are proposed — the shock wave trajectory calculation is improved; the quadratic approximation is calculated and its accuracy is estimated. We propose the approximate method which

makes it possible to find the flow functions in the evident form. The point outburst in the Gaussian disk of galaxy is calculated and the collimation degree of the arising flow is estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Горбачкий, Космическая газодинамика, Наука, М., 1977.
2. Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, Наука, М., 1977.
3. G. Tenorio-Tagle, M. Rozyczka, H. M. Yorke, *Astron. Astrophys.*, 148, 52, 1985.
4. S. A. E. G. Falle, A. R. Garlik, P. H. Pidsley, *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, 208, 925, 1984.
5. R. H. Sanders, *Astrophys. J.*, 205, 335, 1976.
6. C. Möllenhoff, *Astron. and Astrophys.*, 50, 105, 1976.
7. K. Morita, *Publ. Astron. Soc. Jap.*, 34, 65, 1982.
8. Y. Sofue, *Publ. Astron. Soc. Jap.*, 36, 539, 1984.
9. A. S. Zentsova, *Astrophys. and Space Sci.*, 95, 459, 1983.
10. X. С. Кестенбойм, Г. С. Росляков, Л. А. Чудов, Точечный взрыв, Наука, М., 1974.
11. В. П. Коробейников, Задачи теории точечного взрыва в газах, Наука, М., 1985.
12. P. Knap, *Astrophys. J.*, 200, 653, 1975.
13. G. G. Vach, A. L. Kuhl, A. K. Oppenheim, *J. Fluid Mech.*, 71, 105, 1975.
14. А. С. Компанеев, Докл. АН СССР, 130, 1001, 1960.
15. Э. И. Андрианкин, А. М. Козан, А. С. Компанеев, В. П. Крайнов, Ж. прикл. мех. и техн. физ., № 6, 3, 1962.
16. D. D. Lambach, R. F. Probst, *J. Fluid Mech.*, 35, 53, 1969. Русск. пер.: Механика, № 3 (115), 95, 1969.
17. Y. M. Treve, O. P. Manley, *J. Fluid Mech.*, 55, 737, 1972.
18. V. Gaffet, *Astrophys. J.*, 225, 442, 1978.
19. V. Gaffet, *Astrophys. J.*, 249, 761, 1981.
20. И. А. Климишин, Б. И. Гнатык, *Астрофизика*, 17, 547, 1981.
21. И. А. Климишин, Ударные волны в оболочках звезд, Наука, М., 1984.
22. Ю. П. Райзер, Докл. АН СССР, 153, 551, 1964.
23. Ю. П. Райзер, Ж. прикл. мех. и техн. физ., № 4, 49, 1964.
24. Б. И. Гнатык, *Астрон. циркуляр*, № 1195, 4, 1981.
25. S. Sakashita, *Astrophys. and Space Sci.*, 14, 431, 1971.