АСТРОФИЗИКА

ТОМ 25 ДЕКАБРЬ, 1986 ВЫПУСК 3

УДК: 521.19:517.537.6

ПРОБЛЕМА ДИРИХЛЕ В ЗВЕЗДНОЙ ДИНАМИКЕ. I. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ОДНОРОДНОГО ГРАВИТИРУЮЩЕГО ЭЛЛИПСОИДА

Б. П. КОНДРАТЬЕВ, Е. А. МАЛКОВ

Поступила 31 января 1986
Принята к печати 20 июля 1986

В звездно-динамическом аспекте поставлена и решена задача о наиболее общем движении эллипсоидальных систем с квадратичным потенциалом (эллипсоиды, эллиптические цилиндры и плоские диски). Установлено, что в общем случае эллипсоид (цилиндр и диск—предельные конфигурации) допускает следующее динамическое описание: а) Гравитирующее однородное скопление частиц вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$ относительно центра инерции. б) В собственной системе отсчета происходит движение центроидов с линейным полем скоростей. Как следствие, завихренность $\vec{\zeta}(t)$ этого поля скоростей не зависит от координат. в) Главные полуоси и объем эллипсоида зависят от времени, и конфигурация испытывает пульсации с конечной амплитудой. г) Внутренние напряжения в бесстолкновительном эллипсоиде зависят от его динамического состояния. Тензор дисперсии скоростей имеет шесть независимых компонентов, включая и косые напряжения. На поверхности напряжений нет. д) Движение эллипсоида описывается замкнутой системой из пятнадцати дифференциальных уравнений. Система этих уравнений получена на базе кинетического уравнения Больцмана, для чего понадобились его моменты первого, второго и третьего порядков. Рассмотрены специальные случаи колебаний эллипсоида, цилиндра и диска.

1. *Введение.* В последние годы возросло внимание специалистов к моделям бесстолкновительных гравитирующих систем. Причин несколько. Специалисту по звездной динамике эти модели позволяют лучше понять некоторые характерные свойства галактик. Вспомним, как еще десять лет назад E-галактикам пытались «из общих соображений» навязывать такое соотношение между сжатием (по максимально сплюснутой изофоте) и величиной вращения, от которого пришлось отказаться после первой же наблюдательной проверки [1]. Вместе с тем, любая оригинальная модель интересна и как объект исследования для математика или специалиста по механике.

В теоретическом плане важно сопоставить некоторые характерные свойства жидких и бесстолкновительных фигур равновесия. Принципиальное отличие между ними проявляется прежде всего в действии внутренних напряжений. У жидких фигур даже в присутствии сдвиговых течений тензор давления *априори* берется изотропным и не имеющим косых напряжений. У бесстолкновительных же фигур тензор дисперсии скоростей

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\rho}\int f(\dot{x}_i - u_i)(\dot{x}_j - u_j)\, d^3\dot{x} \tag{1}$$

гидростатического давления, вообще говоря, не описывает. Но отсюда еще не следует, что надо отказаться от сопоставления под определенным углом жидких и бесстолкновительных фигур. Уже для однородных моделей такое сопоставление дает немало. Из анализа первых полноценных моделей — моделей Фримана [2—4] — характерными родственными чертами можно считать: геометрическое сходство (границы-поверхности второго порядка); свойство линейности у полей скоростей жидкости и центроидов. При внимательном анализе оказывается нетривиальным и сходство в распределении внутренних напряжений по объему эллипсоида—давление, а у бесстолкновительных—все компоненты тензора [1] обязаны обращаться в нуль на поверхности. Плодотворность гидродинамической аналогии проявилась, в частности, в том, что именно она навела на мысль о возможном существовании бесстолкновительных аналогов жидких эллипсоидов с наклонным вращением [5].

Модель бесстолкновительного эллипсоида с наклонным вращением была построена в статье [6]. По динамической структуре эта модель оказалась значительно глубже и сложнее эллипсоида Фримана: как частный случай из нее получается один из эллипсоидов Фримана, две последовательности эллипсоидов без дисперсии скоростей (о последних см. также [7]), а также еще одно семейство особых бесстолкновительных эллипсоидов*. Нетривиален и вопрос о полноте известного нам класса моделей [8]. Вместе с тем подчеркнем, что возможности метода гидродинамической аналогии учитывались не в полной мере.

Почти параллельно с построением равновесных решений изучались и некоторые сравнительно простые случаи нелинейных колебаний относительно известных равновесных моделей. Пионером в этой области оказался В. А. Антонов. Методом лагранжевых координат в фазовом пространстве исследованы колебания сфероида, «холодного» в экваториальной плоскости [9]; в [10] рассмотрены радиальные пульсации шара и кругового диска: невращающийся сфероид рассмотрен в [11]; колебания эллиптических невращающихся дисков рассмотрены в [12]. Этим дело и ограничилось, и не последнюю роль здесь сыграла сложность метода фазовых координат.

Между тем, возможности метода гидродинамической аналогии таковы, что и здесь он может быть весьма полезен. Маяком при разработке такой

---

* Некоторые авторы (В. А. Антонов) называют построенную в [6] модель «эллипсоидом Кондратьева».

аналогии служит для нас глубоко разработанная Дирихле, Риманом, Чандрасекаром и Лебовицем теория нелинейных колебаний *жидких* эллипсоидов. Эта теория оказалась весьма плодотворной [5]. Существование этой динамической схемы для жидкого эллипсоида и подсказало нам направление поисков: попытаться создать подобную же схему нелинейных колебаний и для однородного бесстолкновительного гравитирующего эллипсоида. Некоторым намеком явилась возможность включения в схему Дирихле не только несжимаемых, но и сжимаемых эллипсоидов [13, 14].

В данной статье общая задача нелинейных колебаний бесстолкновительного эллипсоида поставлена и решена. В результате дедуктивным методом охватываются все специальные случаи колебаний и равновесия эллипсоидальных систем. Следующий (второй) раздел основной. В нем на базе моментных уравнений первых трех порядков от кинетического уравнения Больцмана получена замкнутая система из пятнадцати временных дифференциальных уравнений, которой и описывается движение бесстолкновительного эллипсоида. Обращаем внимание: в этом разделе целесообразно применять и векторные, и тензорные обозначения. В разделе 3 найдены пять первых интегралов движения эллипсоида. В разделе 4 рассмотрены некоторые частные случаи колебаний эллипсоидальных систем. В заключении подводятся краткие итоги.

2. *Уравнения движения бесстолкновительного эллипсоида.* Рассмотрим изолированное скопление свободных, взаимодействующих по закону Ньютона частиц. Пусть в целом это скопление представляет собой однородный трехосный эллипсоид плотности $\rho(t)$ и с полуосями $a_i(t)$. В собственной вращающейся системе отсчета $Ox_1x_2x_3$, связанной с главными осями эллипсоида, его граничная поверхность и потенциал даются формулами

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1 \qquad (2)$$

и

$$\varphi = I - A_1x_1^2 - A_2x_2^2 - A_3x_3^2, \qquad (3)$$

где

$$I=\frac{3}{4}GM\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Delta(s)};\qquad A_i=\frac{3}{4}GM\int\limits_0^\infty\frac{ds}{\Delta(s)\cdot(a_i^2+s)};$$
$$\Delta^2(s)=(a_1^2+s)(a_2^2+s)(a_3^2+s) \qquad (4)$$

и M—масса эллипсоида.

Пусть эллипсоид вращается вокруг центра инерции с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$. Во вращающейся системе отсчета уравнение движения частицы

$$\ddot{\vec{x}}=\vec{F}, \tag{5}$$

где вектор силы

$$\vec{F}=\operatorname{grad}\left(\varphi+\frac{1}{2}[\vec{\Omega}\vec{x}]^2\right)+[\vec{x}\dot{\vec{\Omega}}]+2[\dot{\vec{x}}\vec{\Omega}]. \tag{6}$$

Решая систему трех скалярных уравнений (5), можно исследовать движение каждой частицы отдельно и, в принципе, попытаться строить фазовую модель кинетическим методом. Однако такой путь сложен и нецелесообразен, поэтому обратимся к гидродинамической аналогии.

Запишем уравнение Больцмана

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{x}_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+F_i\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}=0, \tag{7}$$

где $f(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$—фазовая функция. В дальнейшем точный вид этой функции нам и не понадобится, так как нужны только моментные уравнения от (7). Процедура получения моментных уравнений от кинетического уравнения Больцмана хорошо отработана и выводить их здесь не будем. Моментное уравнение первого порядка (уравнение неразрывности) для однородной системы суть

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0. \tag{8}$$

Вторые моменты от (7) дают три уравнения, описывающие движение центроидов. С учетом силы (6) эти три уравнения в векторной форме имеют вид

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=-\operatorname{div}\sigma_{ij}+\operatorname{grad}\left(\varphi+\frac{1}{2}[\vec{\Omega}\vec{x}]^2\right)+[\vec{x}\dot{\vec{\Omega}}]+2[\vec{u}\vec{\Omega}], \tag{9}$$

где конвективная производная

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_k\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{10}$$

Уравнения (9) хорошо известны специалистам. Иначе обстоит дело с моментными уравнениями от (7) *третьего* порядка:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho\sigma_{ij})+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\sigma_{ijk})+\sigma_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\sigma_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\sigma_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-$$
$$-2\Omega_m(\varepsilon_{ikm}\sigma_{kj}+\varepsilon_{jkm}\sigma_{ki})=0. \tag{11}$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, а ε_{ikm} — символ Леви-Чивита. Уравнения (11) хотя и известны (см., например, [15] и [16]), но применяются они в звездной динамике крайне редко.

Требуется теперь доказать, что с помощью уравнений (8), (9) и (11) можно создать замкнутую систему уравнений бесстолкновительного эллипсоида. Обратимся к уравнениям звездной гидродинамики (9). Конечно, если вместо прослеживания траектории отдельной звезды мы намерены изучать движение центроидов, то только на основании одного определения усредненного движения

$$\vec{u}=\frac{1}{\rho}\int f\dot{\vec{x}}d^3x \tag{12}$$

мы почти не продвигаемся к цели (все дело в неизвестности самой фазовой функции!). Но на помощь приходит гидродинамическая аналогия: так как движение центроидов должно сохранять граничную поверхность эллипсоидальной, то в этом отношении оно полностью аналогично течению жидкости внутри эллипсоида Дирихле*. Искомое поле скоростей в инерциальной системе отсчета, в данный момент совпадающей с собственной системой координат эллипсоида $Ox_1x_2x_3$, имеет вид

$$\vec{u}^{(0)}=\begin{pmatrix}\dot{a}_1 & a_1\lambda_3-a_2\Omega_3 & -a_1\lambda_2+a_3\Omega_2\\ -a_2\lambda_3+a_1\Omega_3 & \dot{a}_2 & a_2\lambda_1-a_3\Omega_1\\ a_3\lambda_2-a_1\Omega_2 & -a_3\lambda_1+a_2\Omega_1 & \dot{a}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1/a_1\\ x_2/a_2\\ x_3/a_3\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Здесь компоненты вектора $\vec{\lambda}(t)$ связаны с завихренностью поля скоростей центроидов во вращающейся системе координат $\vec{\zeta}(t)$ соотношением

$$\zeta_i=-\left(\frac{a_j}{a_k}+\frac{a_k}{a_j}\right)\lambda_i, \quad (i\neq j\neq k). \tag{14}$$

Само же поле скоростей во вращающейся системе суть

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}\dot{a}_1 & a_1\lambda_3 & -a_1\lambda_2\\ -a_2\lambda_3 & \dot{a}_2 & a_2\lambda_1\\ a_3\lambda_2 & -a_3\lambda_1 & \dot{a}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1/a_1\\ x_2/a_2\\ x_3/a_3\end{pmatrix}. \tag{15}$$

* Название «эллипсоид Дирихле» введено в статье [14].

Согласно [14], запишем уравнение (9) в виде

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} - \operatorname{grad}\left(\varphi + \frac{1}{2}[\vec{\Omega}\vec{x}]^2\right) = \vec{B}. \tag{16}$$

Векторная функция в правой части этого уравнения

$$\vec{B}(B_1, B_2, B_3) = 2[\vec{u}\vec{\Omega}] + [\vec{x}\dot{\vec{\Omega}}] - \frac{d\vec{u}}{dt} \tag{17}$$

с учетом поля скоростей (15) записывается тогда в виде

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1/a_1 \\ x_2/a_2 \\ x_3/a_3 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где

$$r_{11} = a_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) - \ddot{a}_1 - 2a_2\lambda_3\Omega_3 - 2a_3\lambda_2\Omega_2,$$

$$r_{12} = 2\frac{d}{dt}(a_2\Omega_3 - a_1\lambda_3) + a_1\dot{\lambda}_3 - a_2\dot{\Omega}_3 - a_1\lambda_1\lambda_2 + 2a_3\lambda_1\Omega_2, \tag{19}$$

$$r_{13} = 2\frac{d}{dt}(a_1\lambda_2 - a_3\Omega_2) - a_1\dot{\lambda}_2 + a_3\dot{\Omega}_2 - a_1\lambda_1\lambda_3 + 2a_2\lambda_1\Omega_3.$$

Остальные члены матрицы $\|r_{ik}\|$ получаются из (19) круговой перестановкой индексов.

Можно показать, что зависимость компонентов тензора σ_{ij} от координат должна иметь вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2}\right), \tag{20}$$

где σ_{ij}^0 — их значения в центре эллипсоида. Таким образом, на поверхности эллипсоида напряжений нет. С учетом формулы (20) левая часть уравнения (16) записывается в виде

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1/a_1 \\ x_2/a_2 \\ x_3/a_3 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где

$$
\begin{aligned}
l_{11} &= -\frac{2\sigma_{11}^0}{a_1} + 2A_1a_1 - a_1(\Omega_2^2 + \Omega_3^2),\\
l_{12} &= -\frac{2\sigma_{12}^0}{a_2} + a_2\Omega_1\Omega_2, \qquad (22)\\
l_{13} &= -\frac{2\sigma_{13}^0}{a_3} + a_3\Omega_1\Omega_3.
\end{aligned}
$$

Как и выше, остальные члены матрицы $\|l_{ik}\|$ получаются из (22) круговой перестановкой индексов.

Уравнение (16) с учетом выражений (18) и (21) приводится к виду

$$
\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1/a_1 \\ x_2/a_2 \\ x_3/a_3 \end{pmatrix} = 0. \qquad (23)
$$

Все члены нулевой матрицы

$$
\|c_{ik}\| = \|r_{ik}\| - \|l_{ik}\| \qquad (24)
$$

должны быть равны нулю, откуда и получаем первые девять динамических уравнений движения бесстолкновительного эллипсоида. Три из них

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \ddot{a}_1 - a_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) + 2(a_3\lambda_2\Omega_2 + a_2\lambda_3\Omega_3) + \\
&\quad + 2A_1a_1 - \frac{2\sigma_{11}^0}{a_1} = 0,\\
c_{22} &= \ddot{a}_2 - a_2(\lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \Omega_3^2 + \Omega_1^2) + 2(a_1\lambda_3\Omega_3 + a_3\lambda_1\Omega_1) + \\
&\quad + 2A_2a_2 - \frac{2\sigma_{22}^0}{a_2} = 0, \qquad (25)\\
c_{33} &= \ddot{a}_3 - a_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2) + 2(a_2\lambda_1\Omega_1 + a_1\lambda_2\Omega_2) + \\
&\quad + 2A_3a_3 - \frac{2\sigma_{33}^0}{a_3} = 0.
\end{aligned}
$$

Шесть остальных уравнений разобьем на две группы по признакам симметрии индексов:

$$
\begin{aligned}
c_{12} &= 2\frac{d}{dt}(a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3) - a_1\dot{\lambda}_3 + a_2\dot{\Omega}_3 + a_1\lambda_1\lambda_2 + a_2\Omega_1\Omega_2 - \\
&\quad - 2a_3\lambda_1\Omega_2 - \frac{2\sigma_{12}^0}{a_2} = 0,
\end{aligned}
$$

$$c_{23} = 2\frac{d}{dt}(a_2\lambda_1 - a_3\Omega_1) - a_2\dot{\lambda}_1 + a_3\dot{\Omega}_1 + a_2\lambda_2\lambda_3 + a_3\Omega_2\Omega_3 -$$

$$- 2a_1\lambda_2\Omega_3 - \frac{2\sigma^0_{23}}{a_3} = 0, \tag{26}$$

$$c_{31} = 2\frac{d}{dt}(a_3\lambda_2 - a_1\Omega_2) - a_3\dot{\lambda}_2 + a_1\dot{\Omega}_2 + a_3\lambda_3\lambda_1 + a_1\Omega_3\Omega_1 -$$

$$- 2a_2\lambda_3\Omega_1 - \frac{2\sigma^0_{13}}{a_1} = 0,$$

и

$$c_{13} = 2\frac{d}{dt}(a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2) - a_3\dot{\Omega}_2 + a_1\dot{\lambda}_2 + a_1\lambda_1\lambda_3 + a_3\Omega_1\Omega_3 -$$

$$- 2a_2\lambda_1\Omega_3 - \frac{2\sigma^0_{13}}{a_3} = 0,$$

$$c_{21} = 2\frac{d}{dt}(a_1\Omega_3 - a_2\lambda_3) - a_1\dot{\Omega}_3 + a_2\dot{\lambda}_3 + a_2\lambda_2\lambda_1 + a_1\Omega_2\Omega_1 -$$

$$- 2a_3\lambda_3\Omega_1 - \frac{2\sigma^0_{12}}{a_1} = 0, \tag{27}$$

$$c_{32} = 2\frac{d}{dt}(a_2\Omega_1 - a_3\lambda_1) - a_2\dot{\Omega}_1 + a_3\dot{\lambda}_1 + a_3\lambda_3\lambda_2 + a_2\Omega_3\Omega_2 -$$

$$- 2a_1\lambda_3\Omega_2 - \frac{2\sigma^0_{23}}{a_3} = 0.$$

Как вскоре увидим, бесстолкновительная модель эллипсоида описывается в общем случае пятнадцатью переменными (время—параметр). Уравнений же для этих переменных пока только девять. Для замыкания этой системы уравнений надо привлечь еще моменты третьего порядка от кинетического уравнения, данные в (11). Первый член в (11), с учетом уравнения неразрывности (8), равен

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho\sigma_{ij}) = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{28}$$

Далее, очень важным является то, что в фазовом пространстве наша модель представляет собой эллипсоид (объем которого постоянен). Именно вследствие такой эллипсоидальной формы тензор моментов третьего порядка

$$\rho\sigma_{ijk} = \int f(\dot{x}_i - u_i)(\dot{x}_j - u_j)(\dot{x}_k - u_k)\,d^3\dot{x} \tag{29}$$

будет равен нулю. Отсюда сразу следует замкнутость системы моментных уравнений первого, второго и третьего порядков, приведенных в (8), (9) и (11). А это автоматически означает, что и полная система уравнений, описывающих движение модели, должна быть замкнутой. Действительно, вычисляя в (11) градиенты от скоростей центроидов с помощью (15) и учитывая (28) и (29), находим из (11) шесть динамических уравнений

$$\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik}H_{jk} + \sigma_{jk}H_{ik} - 2\Omega_m(\varepsilon_{ikm}\sigma_{kj} + \varepsilon_{jkm}\sigma_{ki}) = 0, \tag{30}$$

где матрица $\| H_{ik} \|$ равна

$$\| H_{ik} \| = \begin{pmatrix} \dot{a}_1/a_1 & a_1/a_2\lambda_3 & -\dfrac{a_1}{a_3}\lambda_2 \\ -\dfrac{a_2}{a_1}\lambda_3 & \dfrac{\dot{a}_2}{a_2} & \dfrac{a_2}{a_3}\lambda_1 \\ a_3/a_1\lambda_2 & -a_3/a_2\lambda_1 & \dot{a}_3/a_3 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

которыми и замыкается система уравнений для описания движения модели.

Уравнения (30) выполняются в любой точке внутри модели. В частности, в центре эллипсоида они дают шесть следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{\sigma}^0_{11} + 2\left[\frac{\dot{a}_1}{a_1}\sigma^0_{11} + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_3\right)\sigma^0_{12} + \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_2\right)\sigma^0_{13}\right] = 0,\\
&\dot{\sigma}^0_{22} + 2\left[\frac{\dot{a}_2}{a_2}\sigma^0_{22} + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 + 2\Omega_3\right)\sigma^0_{12} + \left(\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 - 2\Omega_1\right)\sigma^0_{23}\right] = 0,\\
&\dot{\sigma}^0_{33} + 2\left[\frac{\dot{a}_3}{a_3}\sigma^0_{33} + \left(-\frac{a_3}{a_2}\lambda_1 + 2\Omega_1\right)\sigma^0_{23} + \left(\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 - 2\Omega_2\right)\sigma^0_{13}\right] = 0,\\
&\dot{\sigma}^0_{12} + \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2}\right)\sigma^0_{12} + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 + 2\Omega_3\right)\sigma^0_{11} + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_3\right)\sigma^0_{22} +\\
&\qquad + \left(\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 + 2\Omega_2\right)\sigma^0_{23} + \left(\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 - 2\Omega_1\right)\sigma^0_{13} = 0,\\
&\dot{\sigma}^0_{23} + \left(\frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3}\right)\sigma^0_{23} + \left(-\frac{a_3}{a_2}\lambda_1 + 2\Omega_1\right)\sigma^0_{22} + \left(\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 - 2\Omega_1\right)\sigma^0_{33} +\\
&\qquad + \left(\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 - 2\Omega_2\right)\sigma^0_{12} + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda_3 + 2\Omega_3\right)\sigma^0_{13} = 0,\\
&\dot{\sigma}^0_{13} + \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_3}{a_3}\right)\sigma^0_{13} + \left(\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 - 2\Omega_2\right)\sigma^0_{11} + \left(-\frac{a_1}{a_3}\lambda_2 + 2\Omega_2\right)\sigma^0_{33} +\\
&\qquad + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - 2\Omega_3\right)\sigma^0_{23} + \left(-\frac{a_3}{a_2}\lambda_1 + 2\Omega_1\right)\sigma^0_{12} = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Подведем итоги. Для пятнадцати переменных

$$a_i(t);\quad \Omega_i(t);\quad \lambda_i(t);\quad \sigma^0_{ij}(t),\ \text{где}\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3), \tag{33}$$

характеризующих динамическое состояние бесстолкновительного эллипсоида, получено как раз пятнадцать дифференциальных уравнений (25) — (27) и (32). *Следовательно, поставленная задача описания движения однородного бесстолкновительного эллипсоида разрешима.* Уместно напомнить: для жидкого эллипсоида Дирихле замкнутую систему уравнений образуют уже (25)—(27), где косые напряжения исчезают $(\sigma^0_{12}=\sigma^0_{13}=\sigma^0_{23}=0)$ и $\sigma^0_{11}=\sigma^0_{22}=\sigma^0_{33}$.

3. *Интегралы движения.* Описывающие движение модели уравнения являются сложными и нелинейными. Все это отражает сложность тех движений, которые совершает модель. Прежде всего, фигура модели совершает нестационарное вращение вокруг центра инерции. С учетом пульсаций, изменения формы модели и нестационарной внутренней циркуляции с однородной завихренностью, исследуемый случай оказывается намного сложнее всех известных случаев движений деформируемых гироскопов с жидким наполнением!

Зная первые интегралы движения полученной выше системы уравнений, можно лучше представить динамику модели. Прежде всего, изолированность модели предполагает сохранение полной энергии и момента вращения. Для нахождения интеграла энергии составим из уравнений (25)—(27) следующую комбинацию:

$$\sum_{1,2,3}\left[c_{11}\dot a_1 + c_{12}(a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3) + c_{13}(a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2)\right]=0. \tag{34}$$

Здесь два других члена получаются из данного круговой перестановкой индексов. Преобразуя записанное выражение, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{1,2,3}\left[\frac{1}{2}\dot a_1^2+\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2)(\lambda_3^2+\Omega_3^2)-2a_1a_2\lambda_3\Omega_3\right]\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\frac{\dot a_i}{a_i}\sigma^0_{ii}+\sum_{1,2,3}\lambda_1\sigma_{23}\left(\frac{a_2}{a_3}-\frac{a_3}{a_2}\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}A_i\frac{da_i^2}{dt}. \tag{35}$$

Последний член в правой части (35) с учетом (4) равен

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}A_i\frac{da_i^2}{dt}=-2\frac{dI}{dt}. \tag{36}$$

Складывая первые три уравнения из (32), находим

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\dot a_i}{a_i}\sigma^0_{ii}+\sum_{1,2,3}\lambda_1\sigma^0_{23}\left(\frac{a_2}{a_3}-\frac{a_3}{a_2}\right)=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3}\sigma^0_{ii}. \tag{37}$$

В итоге, с учетом выражений (36) и (37), из (35) получим интеграл энергии

$$E = \sum_{1,2,3} \left[\frac{1}{2} \dot{a}_1^2 + \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2)(\lambda_3^2 + \Omega_3^2) - 2a_1 a_2 \lambda_3 \Omega_3 \right] + \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii}^0 - 2I = \text{const}. \tag{38}$$

В полную энергию входит сумма членов

$$(\sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0), \tag{39}$$

которой пропорциональна энергия хаотического движения всех частиц модели (тепловая энергия). При колебаниях эта тепловая энергия не остается постоянной.

Нетрудно доказать, что сохраняется и полный момент вращения модели

$$\vec{L} = \int \rho [\vec{x}\vec{u}^0] \, d^3x. \tag{40}$$

Компоненты вектора $\vec{L}$ вычисляются с учетом поля скоростей (13)

$$l_i = \frac{5}{M} L_i = (a_j^2 + a_k^2) \Omega_i - 2a_j a_k \lambda_i. \tag{41}$$

Составляя теперь из недиагональных уравнений (26), (27) комбинации

$$(c_{32}a_2 - c_{23}a_3), \quad (c_{13}a_3 - c_{31}a_1), \quad (c_{21}a_1 - c_{12}a_2),$$

и преобразуя их с помощью (41), легко находим три соотношения, объединяющиеся в одну векторную формулу

$$\frac{d\vec{l}}{dt} + [\vec{\Omega}\vec{l}] = 0. \tag{42}$$

Отсюда немедленно следует сохранение в подвижной инерциальной системе отсчета величины

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = l^2 = \text{const}. \tag{43}$$

Важным свойством модели является несохранение (в отличие от жидкого эллипсоида Дирихле!) полной циркуляции. Компоненты полной циркуляции, как легко показать, равны

$$c_i = 2a_j a_k \Omega_i - (a_j^2 + a_k^2) \lambda_i. \tag{44}$$

Доказательство проводится так: из комбинаций уравнений

$$(c_{32}a_3 - c_{23}a_2), \quad (c_{21}a_2 - a_{12}a_1), \quad (c_{13}a_1 - c_{31}a_3)$$

следует векторная формула

$$\frac{d\vec{c}}{dt}+[\vec{l}\,\vec{c}]+2\sigma_{23}^{0}\left(\frac{a_2}{a_3}-\frac{a_3}{a_2}\right)\vec{i}_1+2\sigma_{13}^{0}\left(\frac{a_3}{a_1}-\frac{a_1}{a_3}\right)\vec{i}_2+2\sigma_{12}^{0}\left(\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}\right)\vec{i}_3=0. \tag{45}$$

Умножив эту формулу на вектор $\vec{c}$, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{c}^{2}+2\sigma_{23}^{0}c_1\left(\frac{a_2}{a_3}-\frac{a_3}{a_2}\right)+2\sigma_{13}^{0}c_2\left(\frac{a_3}{a_1}-\frac{a_1}{a_3}\right)+2\sigma_{12}^{0}\left(\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}\right)c_3=0, \tag{46}$$

из которого и следует несохранение величины квадрата циркуляции $\vec{c}^2$. Заметим, в частном случае, когда дисперсия скоростей равна нулю, циркуляция *будет* интегралом движения.

Сохранение энергии и момента вращения подсказывается общими теоремами динамики. В этом отношении жидкие эллипсоиды Дирихле гораздо проще, чем изучаемые в данной статье бесстолкновительные эллипсоиды. В самом деле, все три интеграла движения жидкого эллипсоида следуют уже из общих теорем. Но для бесстолкновительного эллипсоида эти общие теоремы динамики представляют далеко не все интегральные формы уравнений движения (25)—(27) и (32). Некоторым сигналом о недостаточности общих теорем в нашем случае является уже несохранение циркуляции. Для более полного рассмотрения вопроса о сохраняющихся величинах необходимо обратиться к представлению динамики бесстолкновительной системы в фазовом пространстве шести измерений. Мы не имеем здесь возможности подробно обсуждать закономерности фазовой динамики эллипсоида, но уже из *теоремы Лиувилля следует сохранение объема, занимаемого нашей системой в фазовом пространстве.* Нетрудно доказать, что форма этого объема, заполненного фазовой жидкостью, является эллипсоидальной. Весьма заманчиво представить сложное движение нашей модели как динамику такого фазового эллипсоида.

Впрочем, один из трех дополнительных инвариантов легко усматривается из самих уравнений движения. Действительно, умножим первое в (32) уравнение на a_1^2, второе на a_2^2, третье на a_3^2 и сложим их. После этого, с учетом соотношения (46), получим искомый инвариант

$$I_1=a_1^2\sigma_{11}^{0}+a_2^2\sigma_{22}^{0}+a_3^2\sigma_{33}^{0}+\frac{1}{2}(c_1^2+c_2^2+c_3^2)=\text{const}. \tag{47}$$

Из него, в согласии с вышесказанным, видим, что в отсутствие дисперсии скоростей циркуляция сохраняется.

Нахождение двух других инвариантов из уравнений движения затруднительно, но можно воспользоваться для этой цели характеристическим уравнением (см. [17])

$$\begin{vmatrix}
\overline{x_1^2} & 0 & 0 & \overline{\dot{x}_1 x_1} - \beta & \overline{\dot{x}_2 x_1} & \overline{\dot{x}_3 x_1} \\
0 & \overline{x_2} & 0 & \overline{\dot{x}_1 x_2} & \overline{\dot{x}_2 x_2} - \beta & \overline{\dot{x}_3 x_2} \\
0 & 0 & \overline{x_3^2} & \overline{\dot{x}_1 x_3} & \overline{\dot{x}_2 x_3} & \overline{\dot{x}_3 x_3} - \beta \\
\overline{\dot{x}_1 x_1} + \beta & \overline{\dot{x}_1 x_2} & \overline{\dot{x}_1 x_3} & \overline{\dot{x}_1^2} & \overline{\dot{x}_1 \dot{x}_2} & \overline{\dot{x}_1 \dot{x}_3} \\
\overline{\dot{x}_2 x_1} & \overline{\dot{x}_2 x_2} + \beta & \overline{\dot{x}_2 x_3} & \overline{\dot{x}_2 \dot{x}_1} & \overline{\dot{x}_2^2} & \overline{\dot{x}_2 \dot{x}_3} \\
\overline{\dot{x}_3 x_1} & \overline{\dot{x}_3 x_2} & \overline{\dot{x}_3 x_3} + \beta & \overline{\dot{x}_3 \dot{x}_1} & \overline{\dot{x}_3 \dot{x}_3} & \overline{\dot{x}_3^2}
\end{vmatrix} = 0. \qquad (48)$$

Черта сверху означает усреднение по всему фазовому пространству; скорости центроидов в инерциальной системе отсчета в нашем случае равны

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{x}_1' + \frac{\dot{a}_1}{a_1} x_1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda_3 - \Omega_3\right) x_2 + \left(\Omega_2 - \frac{a_1}{a_3}\lambda_2\right) x_3, \\
\dot{x}_2 &= \dot{x}_2' + \frac{\dot{a}_2}{a_2} x_2 + \left(\Omega_3 - \frac{a_2}{a_1}\lambda_3\right) x_1 + \left(\frac{a_2}{a_3}\lambda_1 - \Omega_1\right) x_3, \qquad (49) \\
\dot{x}_3 &= \dot{x}_3' + \frac{\dot{a}_3}{a_3} x_3 + \left(\frac{a_3}{a_1}\lambda_2 - \Omega_2\right) x_1 + \left(\Omega_1 - \frac{a_3}{a_2}\lambda_1\right) x_2,
\end{aligned}$$

где $\dot{x}_i'$ — компоненты остаточной скорости. Опуская громоздкие вычисления, приводим (48) к виду

$$\beta^6 + I_1\beta^4 + I_2\beta^2 + I_3 = 0. \qquad (50)$$

Коэффициенты этого уравнения и представляют три фазовых инварианта. Инвариант I_1 дан в (47), а инварианты I_2 и I_3 соответственно равны

$$I_2 = a_1^2 a_2^2 \begin{vmatrix} \sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0 \\ \sigma_{12}^0 & \sigma_{22}^0 \end{vmatrix} + a_1^2 a_3^2 \begin{vmatrix} \sigma_{11}^0 & \sigma_{13}^0 \\ \sigma_{13}^0 & \sigma_{33}^0 \end{vmatrix} + a_2^2 a_3^2 \begin{vmatrix} \sigma_{22}^0 & \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{23}^0 & \sigma_{33}^0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (\sigma_{ii}^0 a_i^2 c_i^2) = \text{const}; \qquad (51)$$

$$I_3 = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \begin{vmatrix} \sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0 & \sigma_{13}^0 \\ \sigma_{12}^0 & \sigma_{22}^0 & \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{13}^0 & \sigma_{23}^0 & \sigma_{33}^0 \end{vmatrix} = \text{const}. \qquad (52)$$

Инварианту I_2 трудно придать определенный физический смысл, инвариант же I_3 означает сохранение (квадрата) фазового объема системы. Возможна и такая трактовка инварианта (52). Рассмотрим в пространстве случайных скоростей эллипсоид дисперсии скоростей модели

$$\sigma_{11}^0 (\dot{x}_1')^2 + \sigma_{22}^0 (\dot{x}_2')^2 + \sigma_{33}^0 (\dot{x}_3')^2 + 2\sigma_{12}^0 \dot{x}_1' \dot{x}_2' + 2\sigma_{13}^0 \dot{x}_1' \dot{x}_3' + 2\sigma_{23}^0 \dot{x}_2' \dot{x}_3' = 1. \qquad (53)$$

Переходя теперь к эллипсоиду, *взаимному* к (53), запишем его уравнение

$$\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} & \ddot{x}_1 \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \ddot{x}_2 \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} & \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{54}$$

Существенно, что объем эллипсоида (54) V^*

$$V^* \sim \left(\begin{vmatrix} \overset{0}{\sigma}_{11} & \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{13} \\ \overset{0}{\sigma}_{12} & \overset{0}{\sigma}_{22} & \overset{0}{\sigma}_{23} \\ \overset{0}{\sigma}_{13} & \overset{0}{\sigma}_{23} & \overset{0}{\sigma}_{33} \end{vmatrix} \right)^{1/2}. \tag{55}$$

Таким образом, *произведение геометрического объема модели на объем эллипсоида, взаимного эллипсоиду дисперсии скоростей, от времени не зависит.*

Инвариант I_3 можно трактовать как *уравнение состояния модели*, поскольку его, с учетом уравнения неразрывности (8), можно записать так:

$$\rho \sim \left[\begin{matrix} \text{ОБЪЕМУ ЭЛЛИПСОИДА, ВЗАИМНОГО} \\ \text{ЭЛЛИПСОИДУ ДИСПЕРСИИ СКОРОСТЕЙ} \end{matrix} \right]. \tag{56}$$

Это, в сущности, уравнение состояния адиабаты. Для иллюстрации предположим, что эллипсоид случайных скоростей принял сферическую форму радиуса $\sqrt{\sigma^0}$. Тогда из (56) $\rho^2 \sim (\sigma^0)^3$; а так как давление в центре $p^0 \sim \rho\sigma^0$, то $p^0 \sim \rho^{5/3}$. Это и есть уравнение адиабаты.

4. *Переход к частным случаям.* Из общей теоретической схемы легко получить уравнения для различных конфигураций. Нужно только знать переменные, которыми описывается движение определенной фигуры, и позаботиться о замкнутости соответствующей системы уравнений для них.

1) *Колебания цилиндра и диска.* Для описания двухмерного движения имеется замкнутая система из семи уравнений

$$\ddot{a}_1 - a_1(\lambda^2 + \Omega^2) + 2\dot{a}_2\lambda\Omega + 2A_1a_1 = 2\overset{0}{\sigma}_{11}/a_1,$$

$$\ddot{a}_2 - a_2(\lambda^2 + \Omega^2) + 2\dot{a}_1\lambda\Omega + 2A_2a_2 = 2\overset{0}{\sigma}_{22}/a_2,$$

$$2\frac{d}{dt}(a_1\lambda - a_2\Omega) - \dot{a}_1\lambda + \dot{a}_2\Omega = 2\overset{0}{\sigma}_{12}/a_2,$$

$$2\frac{d}{dt}(a_1\Omega - a_2\lambda) - \dot{a}_1\Omega + \dot{a}_2\lambda = 2\overset{0}{\sigma}_{12}/a_1,$$

$$\dot{\sigma}_{11}^0 + 2\left[\frac{\dot{a}_1}{a_1}\sigma_{11}^0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda - 2\Omega\right)\sigma_{12}^0\right] = 0,$$

$$\dot{\sigma}_{22}^0 + 2\left[\frac{\dot{a}_2}{a_2}\sigma_{22}^0 + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda + 2\Omega\right)\sigma_{12}^0\right] = 0, \qquad (57)$$

$$\dot{\sigma}_{12}^0 + \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2}\right)\sigma_{12}^0 + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda + 2\Omega\right)\sigma_{11}^0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda - 2\Omega\right)\sigma_{22}^0 = 0.$$

При уточнении вида коэффициентов потенциала (см. цитируемую литературу) имеем или *эллиптический цилиндр, или эллиптический диск, которые вращаются вокруг оси* Ox_3. Возможны следующие специальные случаи: а) *вращающиеся эллиптические цилиндры и диски без дисперсии скоростей* ($\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{12}^0 = 0$); б) *колебания эллиптических цилиндров и дисков без вращения и внутренней циркуляции* (здесь $\Omega = \lambda = \sigma_{12}^0 = 0$). О дисках см. [12]; в) *пульсации вращающихся круговых цилиндров и дисков*, которые описываются всего тремя переменными.

2) *Эллипсоид без дисперсии скоростей.* Самый простой случай нестационарного эллипсоида. Для него все шесть компонентов $\sigma_{ij}^0 = 0$. При этом условии уравнения (32) тождественно удовлетворяются и система из девяти уравнений (25)—(27) оказывается замкнутой. Обязательным является условие отличия от нуля всех трех компонентов векторов $\vec{\Omega}(t)$ и $\vec{\lambda}(t)$.

3) *Эллипсоид вращается вокруг оси симметрии* Ox_3. Эти колебания описываются девятью переменными. Уравнения таковы:

$$\ddot{a}_1 - a_1(\lambda^2 + \Omega^2) + 2a_2\lambda\Omega + 2A_1a_1 = 2\sigma_{11}^0/a_1,$$

$$\ddot{a}_2 - a_2(\lambda^2 + \Omega^2) + 2a_1\lambda\Omega + 2A_2a_2 = 2\sigma_{22}^0/a_2,$$

$$\ddot{a}_3 + 2A_3a_3 = 2\sigma_{33}^0/a_3,$$

$$2\frac{d}{dt}(a_1\lambda - a_2\Omega) - a_1\dot{\lambda} + a_2\dot{\Omega} = 2\sigma_{12}^0/a_2,$$

$$2\frac{d}{dt}(a_1\Omega - a_2\lambda) - a_1\dot{\Omega} + a_2\dot{\lambda} = 2\sigma_{12}^0/a_1,$$

$$\dot{\sigma}_{11}^0 + 2\left[\frac{\dot{a}_1}{a_1}\sigma_{11}^0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda - 2\Omega\right)\sigma_{12}^0\right] = 0,$$

$$\dot{\sigma}_{22}^0 + 2\left[\frac{\dot{a}_2}{a_2}\sigma_{22}^0 + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda + 2\Omega\right)\sigma_{12}^0\right] = 0,$$

$$\dot{\sigma}^0_{33} + 2\cdot\frac{\dot{a}_3}{a_3}\sigma^0_{33} = 0 \quad (\text{или} \quad \sigma^0_{33}a_3^2 = \mathrm{const}), \tag{58}$$

$$\dot{\sigma}^0_{12} + \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2}\right)\sigma^0_{12} + \left(-\frac{a_2}{a_1}\lambda + 2\Omega\right)\sigma^0_{11} + \left(\frac{a_1}{a_2}\lambda - 2\Omega\right)\sigma^0_{22} = 0.$$

С их помощью можно изучать колебания относительно равновесного эллипсоида Фримана. Отметим специальные случаи: при $\sigma^0_{11} = \sigma^0_{22} = \sigma^0_{12} = 0$ описываются *колебания вращающегося эллипсоида, „холодного" в экваториальной плоскости [8];* при $\Omega = \lambda = \sigma^0_{12} = 0$ описываются *колебания покоящегося эллипсоида без внутренних течений центроидов* (см. также [11]).

4) Тривиально получить из (58) замкнутую систему уравнений, описывающую колебания: *сфероида без вращения; сфероида с вращением, но «холодного» в экваториальной плоскости; общие колебания сфероида с вращением и дисперсией скоростей.* На этом останавливаться не будем.

5. *Заключение.* Мы рассмотрели сложное движение бесстолкновительного эллипсоида, состоящее из нелинейных пульсаций нестационарной эллипсоидальной фигуры, вращающейся вокруг центра инерции и имеющей внутреннее нестационарное поле скоростей с однородной завихренностью. Во многих отношениях эти колебания напоминают движение жидких эллипсоидов Дирихле. Но есть существенные различия. Для *жидких* эллипсоидов имеет место важная теорема Дедекинда о существовании сопряженных конфигураций [5]. Но анализ уравнений движения *бесстолкновительного* эллипсоида приводит к выводу: *теорема Дедекинда для них недействительна, и в общем случае сопряженных бесстолкновительных эллипсоидов не существует* (тривиальное исключение — ничем не отличающиеся от жидких фигур без давления бесстолкновительные эллипсоиды без дисперсии скоростей). Существенно также и различие в числе уравнений движения — пятнадцать против девяти для жидких эллипсоидов. Принципиально иным в нашем случае является и характер внутренних напряжений — анизотропность тензора дисперсии скоростей и наличие в нем косых напряжений.

Вне рамок этой статьи остались два важных вопроса. Прежде всего, разработанная теоретическая схема удобна для систематизации по единой схеме всех стационарных бесстолкновительных фигур равновесия (см. Введение). Далее, после линеаризации всех уравнений движения можно получить теоретическую схему для изучения устойчивости этих фигур равновесия звездных систем относительно малых колебаний с гармониками второго порядка. Эти задачи мы рассмотрим впоследствии.

Педагогический институт, г. Глазов
Астрофизический институт, г. Алма-Ата

DIRICHLET'S PROBLEM IN STELLAR DYNAMICS. I. GENERAL CASE OF MOTION OF THE SELF-GRAVITATING COLLISIONLESS ELLIPSOID

B. P. KONDRAT'EV, E. A. MALKOV

In this paper the fundamental problem in stellar dynamics: motion of self-consistent uncollisional ellipsoidal system with quadratic potential (ellipsoid, elliptical cylinder and elliptical disk), has been solved. It has been found that in the general case the uncollisional ellipsoid is admitted following dynamical description: a) one rotates with angular velocity $\vec{\Omega}(t)$; b) in the ellipsoid hydrodynamical internal motion of centroids with linear velocity field exists; c) the ellipsoid has time-dependent semiaxes and volume, i. e. one pulsates; d) the local velocity dispersion tensor consists of six independent components which are time-dependent also; e) the ellipsoid is described by fifteen time-dependent equations. Some special cases of nonstationary ellipsoidal system are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *F. Bertola, M. Capaccioli*, Astrophys. J., 200, 439, 1975.
2. *K. C. Freeman*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 133, 47, 1966.
3. *K. C. Freeman*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 134, 1, 1966.
4. *K. C. Freeman*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 134, 15, 1966.
5. *С. Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
6. *Б. П. Кондратьев*, Астрофизика, 21, 499, 1984.
7. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, в кн. «Динамика и эволюция звездных систем», Наука, М.—Л., 1975.
8. *C. Hunter*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 166, 633, 1974.
9. *В. А. Антонов*, в кн. «Динамика и эволюция звездных систем», Наука, М.—Л., 1975.
10. *В. А. Антонов, С. Н. Нуритдинов*, Вестн. ЛГУ, № 7, 133, 1975.
11. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман*, в кн. «Равновесие и устойчивость гравитирующих систем», Наука, М., 1976, стр. 203.
12. *Е. А. Малков*, Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 6234-85, 1985.
13. *M. Fujimoto*, Astrophys. J., 152, 523, 1968.
14. *Б. П. Кондратьев*, Астрофизика, 23, 409, 1985.
15. *Л. С. Марочник*, Астрон. ж., 43, 919, 1966.
16. *R. Wiegant*, Astron. and Astrophys., 105, 326, 1982.
17. *В. А. Антонов*, Вестн. ЛГУ, № 13, 136, 1965.