АСТРОФИЗИКА

ТОМ 25 ОКТЯБРЬ, 1986 ВЫПУСК 2

УДК: 52—726—337

НАСЫЩЕННАЯ КОМПТОНИЗАЦИЯ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. Э. ЛЮБАРСКИЙ

Поступила 26 февраля 1986
Принята к печати 25 мая 1986

Рассматривается перенос излучения в горячей оптически толстой плазме с сильным магнитным полем $(h\nu_g/kT \gg 1)$ в условиях, когда процессы рассеяния преобладают над процессами истинного поглощения. Сформулировано условие насыщенной комптонизации, когда время, за которое фотоны изменяют свою частоту в результате многократных комптоновских рассеяний, значительно меньше, чем время их выхода из среды. При этом в каждой точке среды формируется виновский спектр, химпотенциал которого определяется балансом между генерацией фотонов и их уходом из среды. Получены аналитические выражения для потока излучения, выходящего из полубесконечной изотермической среды, а также для спектра и углового распределения выходящего излучения.

1. *Введение.* В последние годы в связи с исследованиями рентгеновских пульсаров большой интерес вызывает изучение свойств горячей плазмы в сильных магнитных полях (см., например, обзоры [1, 2]). В настоящей работе продолжено начатое в [3, 4] рассмотрение влияния комптонизации на спектр излучения такой плазмы при условиях

$$\nu \ll \nu_g = \frac{eB}{2\pi m_e c} = 11.6\,(B/10^{12}\ \text{Гс})\,\frac{\text{кэВ}}{h}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{60\,\pi^2 N_e}\left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3\left(\frac{B}{B_c}\right)^4\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 \gg 1. \tag{2}$$

Здесь $B_c = 4.4\cdot10^{13}$ Гс, N_e — плотность электронов. Последнее условие означает, что диэлектрические свойства среды определяются поляризацией вакуума [1, 2]. При этом электромагнитные волны расщепляются на две линейно поляризованные нормальные моды.

При условии (1) сечения взаимодействия излучения моды 1 с веществом в $\sim(\nu/\nu_g)^2$ раз меньше, чем соответствующие сечения моды 2. В работах [3, 4] рассматривалась комптонизация в слое плазмы, прозрачном для моды 1. Такая ситуация возникает в рентгеновских пульсарах с не очень большой светимостью ($\lesssim 10^{37}$ эрг/с), в которых излучает тонкий слой плазмы, прогреваемой падающим веществом [5, 6]. При больших темпах аккреции возникает поддерживаемая давлением излучения аккреционная колонка [7]. Плотность плазмы в ней мала, и основным процессом, формирующим спектр излучения, является комптоновское рассеяние. Поскольку оптическая толщина колонки очень велика, комптонизация является насыщенной, т. е. формируется виновский спектр излучения. В плазме без магнитного поля этот процесс рассмотрен в работах [8—10]. Слабое магнитное поле, такое, что $\nu_g < \nu$, служит только дополнительным источником фотонов [11]. Случай $\nu < \nu_g$, когда магнитное поле влияет непосредственно на перенос излучения, разобран в настоящей работе.

2. *Основные уравнения.* Сечения рассеяния $d\sigma_{ij}$ фотона моды i в моду j при условиях (1) и (2) имеют вид [1]:

$$d\sigma_{11}(\theta, \theta') = \frac{3}{8}\sigma_T\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 d\cos\theta', \tag{3}$$

$$d\sigma_{12}(\theta, \theta') = \frac{3}{8}\sigma_T\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 \cos^2\theta' d\cos\theta', \tag{4}$$

$$d\sigma_{21}(\theta, \theta') = \frac{3}{8}\sigma_T\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 \cos^2\theta\, d\cos\theta', \tag{5}$$

$$d\sigma_{22}(\theta, \theta') = \frac{3}{4}\sigma_T\left\{\sin^2\theta\sin^2\theta' + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2\cos^2\theta\cos^2\theta'\right\} d\cos\theta'. \tag{6}$$

Здесь σ_T — томсоновское сечение, θ и θ' — углы между направлением распространения фотона и магнитным полем соответственно до и после рассеяния. Пусть среда непрозрачна для фотонов моды 1,

$$(\nu/\nu_g)^2\tau \gg 1. \tag{7}$$

Здесь $\tau = \int \sigma_T N_e\, dr$ — характерный размер среды в единицах длины пробега фотона по томсоновскому рассеянию.

Как видно из формул (4), (5), условие (7) означает, что фотон, прежде чем выйти из среды, многократно переходит из одной моды в другую. При этом в состоянии поляризации 2 он совершает в $(\nu_g/\nu)^2 \gg 1$ больше рассеяний, чем в состоянии 1. В то же время среднее изменение частоты фотона при одном рассеянии и для моды 1, и для моды 2 имеет один и тот же порядок величины, $\Delta\nu/\nu \sim kT/m_e c^2$. Отсюда следует, что комптонизация происходит в основном в состоянии 2, а спектр излучения моды 1 устанавливается за счет процессов трансформации $2 \rightleftarrows 1$. Это позволяет в уравнении переноса фотонов моды 1 пренебречь изменением частоты фотона при рассеянии. Тогда оно записывается в виде

$$(\vec{l}\nabla)\, n_1 = \left\{ -\sigma_1 n_1 + \int \frac{d\sigma_{11}(\vec{l}, \vec{l})}{d\vec{l}}\, n_1(\vec{l}')\, dl' + \right.$$

$$\left. + \int \frac{d\sigma_{21}(\vec{l}', \vec{l})}{d\vec{l}}\, n_2(\vec{l}')\, d\vec{l}' \right\} N_e + Q_1. \tag{8}$$

Здесь $\vec{l}$ — единичный вектор, показывающий направление движения фотона, $\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$. Величина Q_1 описывает источники фотонов моды 1.

Условие $kT/m_e c^2 \ll 1$ позволяет учитывать изменение частоты фотонов моды 2 при рассеянии в приближении Фоккера—Планка. Соответствующее уравнение переноса имеет вид [3]

$$(\vec{l}\nabla)\, n_2 = \left\{ -\sigma_2 n_2 + \int \frac{d\sigma_{22}(\vec{l}', \vec{l})}{d\vec{l}}\, n_2(\vec{l}')\, d\vec{l}' + \widehat{K} n_2 + \right.$$

$$\left. + \int \frac{d\sigma_{12}(\vec{l}', \vec{l})}{d\vec{l}}\, n_1(\vec{l}')\, d\vec{l}' \right\} N_e + Q_2, \tag{9}$$

$$\widehat{K} n = \int \frac{d\sigma_{22}(\vec{l}', \vec{l})}{d\vec{l}}\, d\vec{l}' \left\{ \langle (\Delta\nu)^2 \rangle \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial \nu^2} + \frac{h}{kT} \frac{\partial n}{\partial \nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{kT} \right)^2 n \right] + \right.$$

$$\left. + \langle \Delta\nu \rangle \left[\frac{\partial n}{\partial \nu} + \frac{hn}{kT} \right] \right\}. \tag{10}$$

В силу условия (7) среда является оптически толстой для фотонов обеих мод. Это позволяет записать уравнения (8), (9) в диффузионном приближении [12, 13]. Выделяя из функции распределения фотонов анизотропную часть

$$n_i(\vec{l}, \nu, \vec{r}) = n_i^0(\nu, \vec{r}) + \delta n_i(\vec{l}, \nu, \vec{r}) \tag{11}$$

и учитывая, что в силу условия (7) $\delta n_i \ll n_i^0$, получаем систему уравнений для n_i^0 в случае плоскопараллельной среды

$$-D_1 \frac{\partial^2 n_1^0}{\partial z^2} = \bar{\sigma}_{12} (n_2^0 - n_1^0) N_e + \bar{Q}_1,$$

$$-D_2 \frac{\partial^2 n_2^0}{\partial z^2} = \{\bar{\sigma}_{21} (n_1^0 - n_2^0) + \hat{K} n_2^0\} N_e + \bar{Q}_2. \qquad (12)$$

Здесь черта означает усреднение по углам. Коэффициенты диффузии определяются обычным образом,

$$D_i = \frac{\overline{\cos^2 \psi}}{\sigma_i N_e}. \qquad (13)$$

Здесь ψ — угол между нормалью к слою и направлением движения фотона.

Пользуясь формулами (3)—(6), получаем

$$D_1 = \left(\frac{\nu_g}{\nu}\right)^2 \frac{1}{3\sigma_T N_e}, \qquad (14)$$

$$D_2 = \frac{1}{\sigma_T N_e} \left[\left(\ln \frac{2\nu_g}{\nu} - 1 \right) \cos^2 \Theta + \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \right]. \qquad (15)$$

Здесь Θ — угол между нормалью к слою и магнитным полем. В силу условия (1) $D_1 \gg D_2$, т. е. диффузия фотонов моды 1 происходит значительно быстрее. В то же время из неравенства (7) следует, что процесс взаимной трансформации мод происходит быстрее, чем диффузия фотонов моды 2, т. к. для трансформации в моду 1 фотону моды 2 требуется $\sim (\nu_g/\nu)^2$ рассеяний, а для ухода из системы — $\sim \tau^2$ рассеяний. Это значит, что пространственное распределение фотонов моды 2 определяется диффузией фотонов моды 1 и процессами трансформации $2 \rightleftarrows 1$, тогда как диффузия фотонов моды 2 роли не играет и ею можно пренебречь. Кроме того, учтем, что все сечения поглощения и излучения для моды 1 малы, как $(\nu/\nu_g)^2$, поэтому в системе (12) можно пренебречь величиной Q_1, поскольку основным источником фотонов служат процессы излучения фотонов моды 2. Тогда система (12) сводится к виду

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\nu_g}{\nu}\right)^2 \frac{\partial^2 n_1^0}{\partial \tau^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 (n_2^0 - n_1^0), \qquad (16)$$

$$0 = \frac{2}{15} \frac{kT}{m_e c^2} \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \nu^4 \left[\frac{\partial n_2^0}{\partial \nu} + (n_2^0 + n_2^{02}) \frac{h}{kT} \right] + \qquad (17)$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 (n_1^0 - n_2^0) + q.$$

Здесь $q = \bar{Q}_2/\sigma_T N_e$, $\tau = \int \sigma_T N_e dz$. Мы использовали выражение для усредненного по углам оператора комптонизации, полученное в [3]. В работе [3] оператор комптонизации выписан без члена с n_2^{02}, поскольку там не учитывались индуцированные процессы, но восстановить его не представляет труда, если, например, учесть, что оператор комптонизации должен тождественно обращаться в нуль при подстановке в него бозе-эйнштейновского распределения.

В глубине излучающего слоя, где выполняется условие (7), левая часть уравнения (16) мала, откуда следует, что $n_2^0 \approx n_1^0$. Это позволяет находить только одну функцию, например, n_1^0. Складывая уравнения (16) и (17), получим

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\nu_g}{\nu}\right)^2 \frac{\partial^2 n^0}{\partial \tau^2} = \frac{2}{15} \frac{kT}{m_e c^2} \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \nu^4 \left[\frac{\partial n^0}{\partial \nu} + (n^0 + n^{02}) \frac{h}{kT}\right] + q. \quad (18)$$

Это уравнение выполняется и для n_1^0 и для n_2^0, поэтому здесь опущен индекс при n^0.

Подчеркнем, что уравнение (18) полностью эквивалентно системе (16), (17), поскольку при его выводе используется только условие (7), которое является условием применимости диффузионного приближения вообще. Вблизи границ излучающей области, где условие (7) не выполняется, необходимо решать точные уравнения (8), (9).

3. *Условие насыщенности комптонизации.* Степень влияния комптонизации на спектр излучения определяется параметром комптонизации y, который представляет собой отношение характерного времени изменения частоты фотона за счет комптоновского рассеяния к времени выхода фотона из среды. Относительное изменение частоты фотона при одном рассеянии примерно равно $kT/m_e c^2$. Для того, чтобы выйти из среды, фотон в состоянии поляризации 1 должен в среднем испытать $\sim(\nu/\nu_g)^4 \tau^2$ рассеяний. На каждое рассеяние в состоянии 1 приходится $\sim(\nu_g/\nu)^2$ рассеяний в состоянии 2, поэтому полное число рассеяний, которое испытывает фотон, прежде чем выйти из среды, равно $\sim(\nu/\nu_g)^2 \tau^2$. Таким образом, параметр комптонизации в рассматриваемом случае имеет вид

$$y = \frac{kT}{m_e c^2}\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 \tau^2. \quad (19)$$

Отметим, что формально параметр y представляет собой оценку отношения первого члена в правой части уравнения (18) к левой части этого уравнения. При $y \ll 1$ комптонизация несущественна, и можно решать задачу переноса в приближении когерентного рассеяния. При $y \gg 1$, наоборот, диффузия фотонов по оси частот происходит быстрее, чем в координатном пространстве, поэтому в каждой точке пространства успевает установиться равновесный бозе-эйнштейновский спектр.

$$n = \left[\exp\left(\frac{\zeta + h\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1}. \tag{20}$$

Формально это связано с тем, что при $y \gg 1$ в уравнении (18) доминирующим становится член с $kT/m_e c^2$, описывающий комптонизацию. Поэтому спектр должен быть близок к бозе-эйнштейновскому, при котором этот член обращается в нуль.

В ситуации, далекой от локального термодинамического равновесия (ЛТР), $\exp(\zeta/kT) \gg 1$, бозе-эйнштейновский спектр сводится к виновскому:

$$n = \exp\left(-\frac{\zeta + h\nu}{kT}\right). \tag{21}$$

Химпотенциал ζ определяется полным числом фотонов в данной точке пространства. Поскольку большая часть фотонов излучается в глубине слоя, вблизи поверхности поток фотонов можно считать постоянным, тогда $\exp(-\zeta/kT)$ будет расти с глубиной по линейному закону. Спектр выходящего излучения (напомним, что выходят в основном фотоны моды 1) определяется спектром излучения на глубине, соответствующей длине пробега фотонов моды 1, $(\nu/\nu_g)^2 \tau \approx 1$. Поскольку сечение (3) квадратично растет с частотой, получим, принимая $\exp(-\zeta/kT) \propto \tau$:

$$I \propto \nu^3 n(\nu) \propto \nu^3 \exp\left\{-\frac{\zeta(\tau = \nu_g^2/\nu^2) + h\nu}{kT}\right\} \propto \nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \tag{22}$$

Таким образом, хотя в каждой точке слоя формируется виновский спектр, спектр выходящего излучения благодаря сильной зависимости сечения σ_1 от частоты оказывается другим, более пологим. Более подробно формирование спектра выходящего излучения будет рассмотрено в разделе 5.

4. *Насыщенная комптонизация тормозного излучения.* Основным источником фотонов в рассматриваемой ситуации служат тормозные процессы. С учетом самопоглощения запишем

$$Q_2 = \sigma_2^b(\nu)(B - n_2), \tag{23}$$

где $B = [\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1}$. Сечение тормозного поглощения при условиях (1), (2) имеет вид [1]

$$\sigma_2^b(\nu) = \frac{8e^6}{3m_e c\sqrt{2\pi m_e kT}} N_e \frac{1-\exp(-h\nu/kT)}{h\nu^3} \Lambda(\nu)\sin^2\theta, \tag{24}$$

где $\Lambda(\nu) = \frac{3}{2}\ln(4\gamma\, kT/h\nu)$ (при $h\nu \ll kT$); $\gamma = 0.577$.

Сечение растет с уменьшением частоты, поэтому на достаточно малых частотах тормозные процессы всегда доминируют. Важную роль играет частота ν_0, на которой сравниваются скорости комптонизации и тормозного поглощения, т. е. на которой первый и второй члены в правой части уравнения (18) становятся одного порядка. Эта частота определяется из уравнения

$$\frac{kT}{m_e c^2}\sigma_T = \overline{\sigma_2^b}(\nu_0). \tag{25}$$

Нас интересует случай, когда при $h\nu \sim kT$ основным процессом является комптонизация, поэтому должно выполняться условие $h\nu_0 \ll kT$. В случае комптонизации в магнитном поле, когда коэффициент диффузии становится зависящим от частоты, необходимо ввести еще одну характеристическую частоту ν_1, на которой скорость комптонизации сравнивается со скоростью выхода фотонов из среды, то есть на которой становятся одного порядка соответствующие члены в уравнении (18). При этом значении частоты параметр комптонизации (19) обращается в единицу:

$$\nu_1 = \frac{\nu_g}{\tau}\sqrt{\frac{m_e c^2}{kT}}. \tag{26}$$

Поскольку мы уже предположили, что в области $h\nu \sim kT$ выполняется условие $y \gg 1$, то условие $h\nu_1 \ll kT$ должно выполняться автоматически.

Таким образом, бозе-эйнштейновский спектр устанавливается в области частот

$$\nu > \nu^* = \max(\nu_0, \nu_1). \tag{27}$$

При $\nu < \nu^*$ фотоны либо выходят из области раньше, чем успевают набрать энергию, либо раньше поглощаются.

Рассмотрим полубесконечную изотермическую среду. На достаточно большой глубине в ней установится планковский спектр во всем диапазоне частот. Ближе к границе спектр в области $\nu > \nu_0$ будет бозе-эйнштейновским (20) с химпотенциалом, зависящим от глубины. Таким образом, в случае насыщенной комптонизации задача переноса сводится к нахождению функции $\zeta(\tau)$, которая определяется балансом полного числа фотонов [9, 10].

Уравнение баланса получается умножением уравнения (18) на ν^2 и интегрированием его по всем частотам. При этом первый член в правой части обращается в нуль, поскольку рассеяние не меняет полного числа фотонов. Выражая сечение (24) через величину ν_0, определяемую уравнением (25), получаем

$$-\frac{1}{3}\nu_g^2\frac{d^2}{d\tau^2}\int\limits_0^\infty n^0 d\nu = \frac{\nu_0^2}{\Lambda(\nu_0)}\frac{kT}{m_e c^2}\int\limits_0^\infty \frac{kT}{h\nu}\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)\Lambda(\nu)(B-n^0)\,d\nu. \qquad (28)$$

Если в это уравнение непосредственно подставить вместо n^0 бозе-эйнштейновскую функцию, то интеграл в правой части логарифмически разойдется на нижнем пределе. Поэтому следует учесть, что при $\nu \ll \nu_0$ спектр стремится к планковскому и подынтегральная функция обращается в нуль. Бозе-эйнштейновский спектр формируют только фотоны, испущенные на частотах $\nu > \nu^*$, остальные либо поглощаются, либо выходят из среды раньше, чем успевают попасть в область $h\nu \sim kT$. Поэтому в интегралах нижний предел интегрирования следует положить равным ν^*. Окончательно получаем замкнутое уравнение относительно $\zeta(\tau)$:

$$-\frac{d^2}{d\tau^2}\int\limits_{\nu^*}^\infty \frac{d\nu}{\exp\left(\frac{\zeta+h\nu}{kT}\right)-1} = \frac{3\nu_0^2}{\Lambda(\nu_0)\nu_g^2}\frac{kT}{m_e c^2}\int\limits_{\nu^*}^\infty \frac{kT}{m_e c^2}\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)\Lambda(\nu)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}-\frac{1}{\exp\left(\frac{\zeta+h\nu}{kT}\right)-1}\right]d\nu. \qquad (29)$$

Поскольку уравнение автономное, можно в общем виде выписать его первый интеграл. Умножая его на

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\nu^*}^\infty \frac{d\nu}{\exp\left(\frac{\zeta+h\nu}{kT}\right)-1} = -\frac{1}{h}\,\frac{1}{\exp\left(\frac{\zeta+h\nu}{kT}\right)-1}\,\frac{d\zeta}{d\tau} \qquad (30)$$

и интегрируя по τ с учетом того, что при $\tau \to \infty$ $\zeta \to 0$, получим

$$\left\{\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\nu^*}^\infty \frac{d\nu}{\exp\left(\frac{\zeta+h\nu}{kT}\right)-1}\right\}^2 = \frac{6}{\Lambda(\nu_0)}\left(\frac{\nu_0}{\nu_g}\right)^2\frac{kT}{m_e c^2}\int\limits_{\nu^*}^\infty d\nu\,\frac{kT}{h\nu}\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)\Lambda(\nu)\times$$

$$\times\int\limits_0^\zeta\left[\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}-\frac{1}{\exp\left(\frac{\zeta+h\nu}{kT}\right)-1}\right]\frac{1}{h}\,\frac{d\zeta}{\exp\left(\frac{\zeta+h\nu}{kT}\right)-1}. \qquad (31)$$

Чтобы найти зависимость $\zeta(\tau)$, нужно численно проинтегрировать это уравнение. Однако поток выходящего излучения можно найти аналитически, пользуясь тем, что вблизи границы спектр становится виновским, поскольку $\exp(\zeta/kT) \gg 1$. Это позволяет представить поток излучения в виде

$$\Phi = 4\pi \int D_1 c \frac{dn^0}{d\tau} h\nu \frac{\nu^2 d\nu}{c^3} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{kT}{hc}\right)^2 h\nu_g^2 \frac{d}{d\tau} e^{-\frac{\zeta}{kT}}. \tag{32}$$

Слева в уравнении (31) фактически стоит выражение $\left(\frac{kT}{h}\right) \frac{d}{d\tau} \times$ $\times \exp(-\zeta/kT)$, справа можно заменить в интеграле по ζ верхний предел на ∞, поскольку подынтегральная функция при $\exp(\zeta/kT) \gg 1$ мала. Тогда получаем

$$\Phi = \frac{4\pi}{3} kT \left(\frac{\nu_g}{c}\right)^2 \left\{\frac{6}{\Delta(\nu_0)} \left(\frac{\nu_0}{\nu_g}\right)^2 \frac{kT}{m_e c^2} \int_{\nu^*}^{\infty} d\nu \frac{kT}{h\nu} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \Delta(\nu) \times\right.$$

$$\left. \times \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} - \frac{1}{\exp\left(\frac{\zeta + h\nu}{kT}\right) - 1}\right] \frac{1}{h} \frac{d\zeta}{\exp\left(\frac{\zeta + h\nu}{kT}\right) - 1}\right\}^{1/2}. \tag{33}$$

В этом выражении интеграл по ζ вычисляется элементарно, оставшийся интеграл по ν при $h\nu^* \ll kT$ можно вычислить асимптотически с логарифмической точностью. Окончательно получаем

$$\Phi = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{kT}{hc}\right)^2 h\nu_0 \nu_g \ln \frac{4\gamma kT}{h\nu^*} \sqrt{3 \frac{kT}{m_e c^2} \ln \frac{kT}{h\nu^*} / \ln \frac{4\gamma kT}{h\nu_0}}. \tag{34}$$

Возвращаясь к уравнению (31), нетрудно оценить глубину τ_0, на которой устанавливается планковский спектр, т. е. на которой достигается $\zeta = 0$. Очевидно, левая часть уравнения имеет порядок $(kT/h\tau_0)^2$, в правой части можно снова перейти к интегрированию по ζ от 0 до ∞. Воспользовавшись только что вычисленным интегралом, получаем

$$\tau_0 = \frac{\nu_g}{\nu_0 \ln(4\gamma kT/h\nu^*)} \left[\frac{kT}{m_e c^2} \ln\left(\frac{kT}{h\nu^*}\right) / \ln\left(\frac{4\gamma kT}{h\nu_0}\right)\right]^{-1/2}. \tag{35}$$

Величина τ_0 играет роль характерной глубины задачи, именно она определяет характерную частоту ν_1, на которой сравниваются время выхода фотона из среды и время изменения его энергии за счет комптонизации. Подставляя ее в формулу (26), получаем

$$\nu_1 = \nu_0 \sqrt{\ln\left(\frac{kT}{h\nu^*}\right)/\ln\left(\frac{4\gamma kT}{h\nu_0}\right) \ln\frac{4\gamma kT}{h\nu^*}}. \quad (36)$$

Отсюда видно, что $\nu_1 > \nu_0$, поэтому в соответствии с (27) необходимо положить $\nu^* = \nu_1$ и рассматривать (36) как уравнение относительно ν^*. Поскольку в конечные формулы входит только логарифм этой величины, ее можно определить грубо, положив в правой части (36) $\nu^* = \nu_0$. Тогда получаем

$$\nu^* = \nu_0 \sqrt{\ln\left(\frac{kT}{h\nu_0}\right) \ln\left(\frac{4\gamma kT}{h\nu_0}\right)}. \quad (37)$$

Формулы (34), (35) и (37) полностью решают задачу.

5. *Угловое распределение и спектр выходящего излучения.* Если величину энергии, отбираемой излучением, можно получить в диффузионном приближении, то спектр и угловое распределение выходящего излучения определяются процессами на единичной оптической глубине (ей соответствует томсоновская глубина $\tau \sim (\nu_g/\nu)^2$), где это приближение неприменимо, и поэтому нужно решать точные уравнения (8), (9).

Когда магнитного поля нет, сечение рассеяния не зависит от частоты, и фотоны разных частот диффундируют с одинаковой скоростью, поэтому установившийся виновский спектр уже не искажается в результате последних рассеяний, хотя формально вблизи поверхности уже не выполняется условие насыщенной комптонизации. В рассматриваемом здесь случае на разных частотах выходят фотоны с разных глубин, поэтому у выходящего спектра химпотенциал должен зависеть от частоты.

Следует также иметь в виду, что каждое рассеяние фотона моды 1 сопровождается в среднем $\sim (\nu_g/\nu)^2$ рассеяниями в состоянии 2, поскольку с вероятностью 1/4 фотон моды 1 после рассеяния оказывается в состоянии 2, где «застревает», пока после $\sim (\nu_g/\nu)^2$ рассеяний не вернется снова в моду 1. На пространственный перенос это не влияет, поскольку даже за $(\nu_g/\nu)^2$ рассеяний в состоянии 2 фотон проходит меньший путь, чем за один свободный пробег в состоянии 1, но зато фотон может успеть изменить свою частоту. Рассмотрим оба предельных случая: а) $\frac{kT}{m_e c^2}\left(\frac{\nu_g}{\nu}\right)^2 \ll 1$, когда за последние несколько рассеяний фотон не успевает изменить свою частоту; б) $\frac{kT}{m_e c}\left(\frac{\nu_g}{\nu}\right)^2 \gg 1$, когда фотоны каждый раз, попадая в состояние 2, «забывают» свою частоту и распределяются в соответствии с локальным виновским распределением.

а) *Случай* $\frac{kT}{m_e c^2}\left(\frac{\nu_g}{\nu}\right)^2 \ll 1$. Выписанное условие позволяет пренебречь комптонизацией при рассмотрении выходящих фотонов. На рис. 1

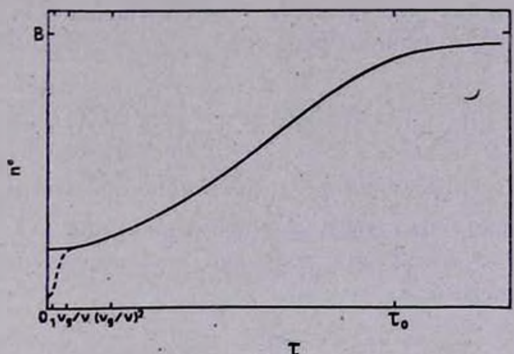

Рис. 1. Зависимости плотностей фотонов моды 1 (сплошная линия) и 2 (штриховая).

схематически показана зависимость плотностей фотонов в обеих модах от глубины. На глубине $\tau \gg \tau_0$ (см. формулу (35)) спектр планковский, в интервале $\tau_0 > \tau > (\nu_g/\nu)^2$ происходит диффузия фотонов моды 1, при $\tau < (\nu_g/\nu)^2$ они свободно выходят. Плотность фотонов моды 2 определяется процессами трансформации $2 \rightleftarrows 1$ и собственной диффузией. Чтобы выйти с глубины τ, фотону моды 2 требуется $\sim \tau^2$ рассеяний, а чтобы перейти моду $1 - \sim (\nu_g/\nu)^2$ рассеяний, поэтому условие баланса

$$\sigma_{21} n_2 = \int \frac{d\sigma_{21}(\vec{l}', \vec{l})}{d\vec{l}} n_1(\vec{l}')\, d\vec{l}' \tag{38}$$

выполняется всюду, за исключением приповерхностного слоя глубиной $\tau \lesssim \nu_g/\nu$, который прозрачен для фотонов моды 1 и поэтому не вносит вклад в спектр и угловое распределение излучения моды 1. Это условие позволяет привести уравнение (8) к виду

$$(\vec{l}\nabla)\, n_1 = \sigma_1 \left(-n_1 + \frac{1}{4\pi}\int n_1 d\vec{l}'\right), \tag{39}$$

где $\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} = \sigma_T (\nu/\nu_g)^2$. Здесь отброшен член, описывающий источники фотонов, поскольку основная часть фотонов рождается на большой глубине, и в интересующей нас здесь области $\tau \sim (\nu_g/\nu)^2$ поток фотонов почти не меняется. Таким образом, мы пришли к задаче о переносе излучения в среде с изотропным рассеянием (зависимость сечения от частоты несущественна, поскольку в уравнении (39) нет перераспределения по частотам) при фиксированном потоке*. В нашем случае поток задается решением диффузионной задачи, полученным в предыдущем разделе.

Сформулированная задача имеет точное решение [14], которое в глубине переходит в диффузионное решение

$$n_1 = P(\nu)\,\tau/4\pi D_1 = \frac{3}{4\pi}\left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 P(\nu)\,\tau, \tag{40}$$

где величина $P(\nu)$ (играющая роль постоянной интегрирования) имеет смысл потока фотонов частоты ν. Точное выражение для углового распределения выходящего излучения довольно сложно, мы воспользуемся известной аппроксимацией:

$$n_1(\tau = 0) = \frac{3}{10\pi}(1 + 2\mu)\,P(\nu), \tag{41}$$

где μ — проекция единичного вектора нормали к поверхности на направление движения фотона. Величину $P(\nu)$ можно получить, сшивая асимптотику (40) с диффузионным решением нашей задачи, полученным в предыдущем разделе. Сшивку следует производить на глубине

$$\tau' = \sqrt{\frac{m_e c^2}{kT}}\,\frac{\nu_g}{\nu}, \tag{42}$$

на которой параметр комптонизации (19) на данной частоте становится равным единице, поскольку при $\tau > \tau'$ спектр имеет виновский вид. Пользуясь соотношениями (32), (34), (35), получаем для интенсивности выходящего излучения формулу

$$I_1 = \frac{h\nu^3}{c^2}\,n_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5}(1 + 2\mu)\,\frac{h\nu\nu_g^2}{c^2\tau_0}\,e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{43}$$

Спектр выходящего излучения показан на рис. 2.

б) *Случай* $\dfrac{kT}{m_e c^2}\left(\dfrac{\nu_g}{\nu}\right)^2 \gg 1$. Приведенные выше соображения о соотношении между скоростью процесса трансформации мод $2 \rightleftarrows 1$ и ско-

---

* Строго говоря, это верно только, если магнитное поле перпендикулярно поверхности, тогда задача осесимметрична. Если поле направлено под углом, то, вообще говоря, нужно учитывать зависимость сечения от азимутальных углов $d\sigma_1 \propto \sin^2(\varphi - \varphi')$. Однако можно показать, что угловое распределение выходящего излучения при этом изменяется мало.

ростью пространственной диффузии фотонов моды 2 применимы и в ситуации, когда нельзя пренебречь перераспределением фотонов по частоте при комптоновском рассеянии, только относиться они будут не к плотности фотонов на заданной частоте $n_i(\nu)$, а к полному числу фотонов $\int \nu^2 n_i(\nu)\, d\nu$. Тогда вместо условия баланса (38) следует записать

$$\int_0^\infty \nu^2 \sigma_{21} n_2 d\nu = \int_0^\infty d\nu \int \frac{d\sigma_{21}(\vec{l}', \vec{l})}{d\vec{l}} \nu^2 n_1(\vec{l}')\, d\vec{l}'. \quad (44)$$

Это условие выполняется всюду за исключением приповерхностного слоя толщиной $\tau \sim h\nu_g/kT$, который не вносит вклад в излучение моды 1.

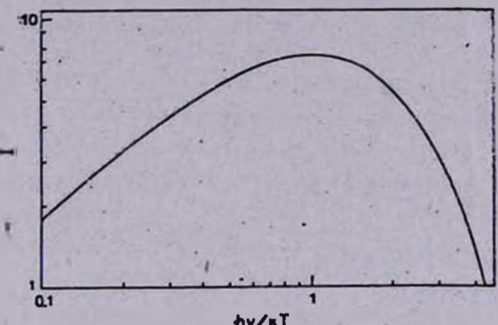

Рис. 2. Спектр выходящего излучения.

Вынесенное в заголовок условие означает, что спектр фотонов моды 2 виновский. Химпотенциал определяется равенством (44):

$$\exp\left(-\frac{\zeta}{kT}\right) = \frac{1}{48}\left(\frac{h}{kT}\right)^5 \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^{1} d\mu \nu^4 n_1. \quad (45)$$

Это позволяет исключить из уравнения (8) функцию n_2:

$$\left(\frac{\nu_2}{\nu}\right)^2 \mu \frac{\partial n_1}{\partial \tau} = n_1 - \frac{3}{8}\int n_1 d\mu - \frac{1}{192}\left(\frac{h}{kT}\right)^5 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \int d\nu \int d\mu \nu^4 n_1. \quad (46)$$

Заменим интегралы по углам в уравнении (46) квадратурными суммами с помощью двухточечной формулы Гаусса [15]:

$$S = \int n_1 d\mu = n_1(\mu_1) + n_1(-\mu_1), \quad (47)$$

где $\mu_1 = 1/\sqrt{3}$ — корень полинома Лежандра второго порядка. Тогда уравнение (46) сводится к уравнению для функции S:

$$\left(\frac{\mu_1 \nu_g^2}{\nu^2}\right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} - \frac{1}{4} S = -\frac{1}{96}\left(\frac{h}{kT}\right)^5 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \int_0^\infty \nu^4 S d\nu. \tag{48}$$

Условие отсутствия падающего извне излучения $n_1(\tau = 0, -\mu_1) = 0$ дает граничное условие

$$\left(\frac{\mu_1 \nu_g^2}{\nu^2} \frac{\partial S}{\partial \tau} - S\right)\Bigg|_{\tau=0} = 0. \tag{49}$$

Уравнение (48) удобно решать итерациями, подставляя в правую часть начальную функцию S, решая полученное неоднородное уравнение с граничным условием (49), подставляя решение в правую часть (48) и т. д. Если в качестве нулевого приближения взять решение диффузионной задачи.

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{\tau_0} \tau \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right), \tag{50}$$

которое совпадает с точным решением в глубине слоя, то можно ограничиться одной итерацией:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{\tau_0}\left\{\tau + \mu_1 \left(\frac{kT}{h\nu}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{\tau}{2\mu_1}\right]\right\} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \tag{51}$$

О точности формулы (51) свидетельствует то, что вторая итерация даст поправку, не превышающую нескольких процентов. Поскольку функция S играет роль функции источников, угловое распределение выходящего излучения можно получить, выразив из уравнения (46) n_1 через S:

$$n_1(\tau = 0) = \left(\frac{\nu}{\nu_g}\right)^2 \int_0^\infty e^{(\nu/\nu_g)^2 \frac{\tau - \tau'}{\mu}} \left\{\frac{3}{8} S + \frac{1}{192}\left(\frac{h}{kT}\right)^5 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \int_0^\infty \nu^4 S d\nu\right\} \frac{d\tau'}{\mu}. \tag{52}$$

Подставляя формулу (51), получим, переходя к интенсивности,

$$I = \frac{\sqrt{3}}{\tau_0} \frac{h\nu\nu_g^2}{c^2} \left\{\mu + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2 + \sqrt{3}\mu} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{96}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x} dx}{1 + \frac{\sqrt{3}\mu}{2} x^2 \left(\frac{kT}{h\nu}\right)^2}\right\} e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{53}$$

Нетрудно видеть, что выражения (43) и (53) описывают практически одинаковые зависимости интенсивности выходящего излучения от частоты и углов, поэтому при любых значениях параметра $kT/m_e c^2 (\nu_g/\nu)^2$ можно пользоваться более простым соотношением (43).

в) *Излучение моды 2.* Вследствие того, что сечение рассеяния фотонов моды 2 велико, они вносят малый вклад в поток выходящего излучения. Однако сильная анизотропия сечения σ_2 приводит к тому, что в направлениях, близких к направлению магнитного поля, интенсивности излучения обеих мод становятся сравнимы.

Выше было показано, что плотности фотонов обеих мод равны на глубинах $\tau > \nu_g/\nu$ (рис. 1). Фотоны моды 1 непосредственно выходят с глубины $\tau \lesssim (\nu_g/\nu)^2$. Фотоны моды 2, находящиеся в области $\nu_g/\nu \lesssim \tau \lesssim \lesssim (\nu_g/\nu)^2$, могут выходить свободно, если движутся в интервале углов $\theta \lesssim \sqrt{\nu/\nu_g}$. Поэтому интенсивность моды 2 в этом интервале углов сравнима с интенсивностью моды 1. Фотоны, движущиеся под большими углами к полю, выходят с меньших глубин, где их плотность мала, поэтому вне указанного интервала углов вклад излучения моды 2 мал. Отметим, что угловое распределение излучения моды 1 практически не зависит от направления магнитного поля.

В условиях рентгеновских пульсаров рассматриваемая здесь ситуация, когда оптическая глубина излучающей области очень велика, реализуется при больших темпах аккреции, когда возникает поддерживаемая давлением излучения аккреционная колонка. Излучение из нее выходит в стороны, то есть поперек магнитного поля [7]. В этом случае интенсивность моды 2 становится сравнимой с интенсивностью моды 1 в направлениях, почти касательных к поверхности колонки, где полный поток излучения $F(\mu) = \mu I(\mu)$ мал в силу геометрического фактора. Поэтому мы не будем заниматься подробным вычислением характеристик излучения моды 2, а ограничимся приведенными оценками.

6. *Заключение.* В горячей разреженной плазме большой оптической глубины комптоновское рассеяние устанавливает виновский (в общем случае бозе-эйнштейновский) спектр, химпотенциал которого меняется от точки к точке и определяется балансом полного числа фотонов. В случае очень сильного магнитного поля, $h\nu_g \gg kT$, отвод энергии излучением облегчается в силу того, что сечение рассеяния фотонов моды 1 мало, как $(\nu/\nu_g)^2$. Зависимость сечения от энергии фотона приводит к тому, что спектр выходящего излучения имеет не виновский вид и оказывается значительно более пологим. Излучение моды 2 существенно только в направлениях, близких к направлению магнитного поля. В остальных направле-

ниях доминирует излучение моды 1. Сравнение с результатами расчетов, проведенных без учета комптонизации [16], показывает, что комптонизация увеличивает энергоотвод в $\sim \ln kT/h\nu_0$ раз и приводит к появлению пологого максимума в спектре в области $h\nu \sim kT$.

Институт космических исследований
АН СССР

SATURATED COMPTONIZATION IN THE SUPERSTRONG MAGNETIC FIELD

YU. E. LYUBARSKY

The radiation transfer in the hot optically thick plasma with a strong magnetic field ($h\nu_g/kT \gg 1$) is considered, assuming the scattering to dominate the absorption. The condition of saturated comptonization imply the characteristic time for energy gain by photon due to multiple Compton scatterings to be much less than the escape time. Then the Wien spectrum forms with chemical potential depending on the depth according to the rates of production and escape of photons. The analytical expressions for the radiation flux emitted by semiinfinite isothermal medium, both the spectrum and angular distribution of outcoming radiation are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Павлов, Ю. Н. Гнедин*, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Астрон., 22, 172, 1983.
2. *P. Meszaros*, Space Sci. Rev., 38, 325, 1984.
3. *Ю. Э. Любарский*, Астрофизика (в печати).
4. *Ю. Э. Любарский*, Астрофизика (в печати).
5. *M. M. Basko, R. A. Sunyaev*, Astron. and Astrophys., 27, 311, 1975.
6. *N. E. White, J. H. Swank, S. S. Holt*, Astrophys. J., 270, 711, 1983.
7. *M. M. Basko, R. A. Sunyaev*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 175, 395, 1976.
8. *А. Ф. Илларионов, Р. А. Сюняев*, Астрон. ж., 51, 698, 1974.
9. *T. A. Weaver, G. F. Chapline*, Astrophys. J., 192, 57, 1974.
10. *В. С. Имшенник, Ю. И. Морозов*, Радиационная релятивистская газодинамика, Атомиздат, М., 1981.
11. *Yu. N. Gnedin, R. A. Sunyaev*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 162, 53, 1973.
12. *W. Nagel*, Astrophys. J., 236, 904, 1980.
13. *А. Д. Каминкер, Г. Г. Павлов, Н. А. Силантьев, Ю. А. Шибанов*, Астрофизика, 18, 283, 1982.
14. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
15. *Д. Михалас*, Звездные атмосферы, Мир, М., 1982.
16. *A. D. Kaminker, G. G. Pavlov, Yu. A. Shibanov*, Astrophys. and Space Sci., 91, 167, 1983.