АСТРОФИЗИКА

ТОМ 25 АВГУСТ, 1986 ВЫПУСК 1

УДК: 524—336+524.834

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОВАКУУМА В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Г. Г. АРУТЮНЯН, В. В. ПАПОЯН

Поступила 11 декабря 1985
Принята к печати 20 марта 1986

В рамках обобщенной теории тяготения сформулирована проблема стационарных аксисимметричных гравитационных полей. Показано, что эта проблема может быть решена, если известно аналогичное решение в эйнштейновской теории тяготения. Сформулирована теорема, на основании которой по известному стационарному вакуумному решению задачи можно найти метрику в магнитостатическом случае.

1. *Введение.* Физическая теория, какой бы строгой и логически завершенной она ни казалась, нуждается в экспериментальном обосновании. Наиболее последовательная из релятивистских теорий тяготения — общая теория относительности Эйнштейна — достаточно надежно подтверждена экспериментами для слабых гравитационных полей $\left(\frac{2Mk_0}{c^2} \equiv r_g \ll r\right)$ в пределах Солнечной системы. Открытие пульсаров послужило еще одним доводом в пользу жизнеспособности ОТО для случая умеренных гравитационных полей $(r_g < r)$. Однако до сегодняшнего дня безуспешными оказались попытки обнаружить гипотетические «черные дыры» $(r_g \gtrsim r)$, которые должны были бы образоваться вследствие предсказаний ОТО о неизбежности коллапса массивных небесных тел на конечной стадии своей эволюции.

Данные астрофизических наблюдений привели В. А. Амбарцумяна к сформулированному в виде космогонической концепции заключению о существовании в статическом состоянии сверхплотных «дозвездных» и «протогалактических» образований с очень большими массами. Таким образом, основанная на всестороннем анализе наблюдательных фактов концепция В. А. Амбарцумяна вступает в противоречие с выводами ОТО для случая сильных гравитационных полей. С этой точки зрения весьма правдоподобным кажется предположение о том, что область применимости ОТО ограничена умеренными полями $(r_g < r)$, а для сильных гравитационных полей ($r_g \gtrsim r$) результаты ОТО, по-видимому, нуждаются в уточнении. Это предположение вполне естественно обосновывает интерес к неэйнштейновским теориям тяготения, следствия которых в случае слабых и умеренных гравитационных полей в пределах точности современных экспериментов должны совпадать с соответствующими в ОТО.

Йордан [1], исследуя пятимерную теорию, формально объединяющую гравитацию и электромагнетизм, обратил внимание на любопытный факт: группа произвольных преобразований координат четырехмерия и калибровочных преобразований потенциала электромагнитного поля изоморфна группе преобразований однородных координат пятимерного риманова пространства. Относительно этих же преобразований инвариантна предложенная Паули [2] модификация «единой» теории. Для того, чтобы редуцированные в четырехмерие уравнения теории были бы эквивалентны системе уравнений Эйнштейна—Максвелла, необходимо исходить из требования постоянства скаляра $I = g_{AB}X^A X^B$ $(A, B = 0, 1, 2, 3, 4)$. Отказ от последнего ограничения привел Йордана к формулировке [1] так называемой обобщенной теории тяготения (ОТТ). В ОТТ свойства пространства — времени помимо десяти компонентов метрического тензора описываются дополнительно скалярным полем. Впоследствии Бранс и Дикке [3], опираясь, в частности, на соображения Шамы [4], также пришли к необходимости введения в теорию дальнодействующего скалярного поля. Вкратце ход рассуждений сводится к следующему. В рамках принципа Маха дело обстоит так, будто расширяющаяся Вселенная является гигантской следящей системой, автоматически подгоняющей значения масс к таким величинам, чтобы выполнялось условие обратной связи $\frac{kM}{c^2R} \simeq 1$ (M, R — масса и радиус наблюдаемой части Вселенной). Тогда необходимо принять, что k — переменный скаляр, величина которого в данной точке определяется распределением вещества во Вселенной, а при переходе к предельному случаю ОТО совпадает с гравитационной постоянной k_0.

Как теория Йордана, так и один из ее вариантов — скалярно-тензорная теория Бранса—Дикке — были созданы ради космологических приложений. Модификация ОТТ, в которой рассматривались космогонические аспекты, была сформулирована Саакяном и Мнацаканяном [5]. Они исходили из предположения о заметном изменении гравитационного скаляра k в областях с сильным гравитационным полем и в рамках этой теории предсказали существование статических сверхплотных небесных тел с массами порядка галактической.

В настоящей работе, основанной на модификации ОТТ, предложенной Саакяном с сотрудниками, сформулирована проблема стационарного аксиально-симметричного поля электровакуума и намечен путь ее решения, который использует, в частности, результаты ОТО. Аналогичная проблема в ОТО разработана достаточно хорошо и, с некоторыми оговорками, может быть отнесена к разряду точно решаемых (см. ссылки в [6]).

Одним из ключевых моментов постановки задачи в ОТО является возможность введения канонических координат [7], которые асимптотически совпадают с цилиндрическими координатами плоского мира. Во втором разделе статьи обосновывается возможность введения подобных координат для рассматриваемой задачи в ОТТ, а также выписаны уравнения, определяющие стационарные аксиально-симметрические гравитационные поля электровакуума.

В третьем разделе вводятся новые переменные, что приводит к формальному совпадению части полевых уравнений ОТТ и ОТО (для сравнения см. [8]). Тем самым показана принципиальная разрешимость проблемы в рамках ОТТ, если найдены соответствующие решения в ОТО.

В четвертом разделе доказана теорема о возможности «генерации» метрики для магнитостатического случая из известного решения вакуумной стационарной задачи. В этом же разделе показано, что метрика рассматриваемой задачи в ОТТ получается из соответствующей в ОТО конформным преобразованием, а полевые уравнения записываются в матричной форме, обычной для теории калибровочных полей.

В следующей работе, которую предполагается опубликовать сразу же вслед за этой, приводятся конкретные решения аксисимметричной задачи ОТТ, для которых базовыми являются известные решения ОТО. В частности, для стационарной вакуумной задачи получено решение типа Керра.

2. *Постановка задачи.* Наиболее общее выражение для метрики стационарного аксиально-симметричного гравитационного поля имеет вид

$$dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_{ab}dx^a dx^b,$$

$$x^a = \{x^1, x^2\} \quad a, b = 1, 2$$

$$x^\mu = \{t, \varphi\} \quad \mu, \nu = 0, 3$$

$$g_{ik} = g_{ik}(x^a) \quad i, k = 0, 1, 2, 3.$$

Аксиальная симметрия и стационарность поля позволяют выделить временную $x^0 = t$ и азимутально-угловую $x^3 = \varphi$ координаты, а инверсия $x^\nu \to -x^\nu$ обнаруживает при этом обращение в нуль всех $g_{\nu a}$. Компоненты g_{ab} сводятся к конформно-плоскому виду

$$g_{ab} := -e^{2\beta}\eta_{ab}, \quad \eta_{ab} = \mathrm{diag}\{1, 1\}, \tag{1}$$

а остальные компоненты метрического тензора удобно записать как

$$g_{00} = e^{2\alpha}, \quad g_{03} = -\omega e^{2\alpha}, \quad g_{33} = -e^{2\gamma} + \omega^2 e^{2\gamma}. \tag{2}$$

Система полевых уравнений обобщенной теории тяготения и Максвелла в случае электровакуума выглядит следующим образом:

$$\overline{R}^i_k \equiv R^i_k - \frac{y\|^i_k}{y} + \zeta \frac{y^{|i} y_{|k}}{y^2} = \frac{2}{y}\left(-F^{il}F_{kl} + \frac{1}{4}\delta^i_k F^{lm}F_{lm}\right), \tag{3}$$

$$y\|^l_l = 0, \quad R = -\zeta \frac{y^{|l} y_{|l}}{y^2}, \quad F^{ik}_{\|k} = 0,$$

$$F_{ik} \equiv A_{k|i} - A_{i|k}.$$

Здесь черта обозначает обычную, а две черты — ковариантную производные, ζ — безразмерный параметр обобщенной теории тяготения, $A_i\,(A_0,\ 0,\ 0,\ A_3)$ — потенциал электромагнитного поля (выбор $A_a = 0$ диктуется симметрией задачи), $y = y\,(x^a)$ — гравитационный скаляр ОТТ, определяемый соотношением

$$y = c^4/k\,(x^a),$$

причем $k\,(x^a)|\xrightarrow[x^a \to \infty]{} k_0$ (k_0 — гравитационная постоянная). В „геометрических" единицах, которые используются в дальнейшем, $k_0 = c = 1$, так что $y\,(x^a)|\xrightarrow[x^a\to\infty]{} 1.$

В рассматриваемом случае компоненты тензора Риччи имеют вид:

$$R^0_0 = e^{-2\beta}[\alpha_{|aa} + \alpha_{|a}(\alpha_{|a} + \gamma_{|a})] + \frac{e^{2\alpha-2\beta-2\gamma}}{2}[q^2_{|a} + qq_{|aa} + qq_{|a}(3\alpha_{|a} - \gamma_{|a})],$$

$$R^3_3 = e^{-2\beta}[\gamma_{|aa} + \gamma_{|a}(\alpha_{|a} + \gamma_{|a})] -$$

$$- \frac{e^{2\alpha-2\beta-2\gamma}}{2}[q^2_{|a} + qq_{|aa} + qq_{|a}(3\alpha_{|a} - \gamma_{|a})],$$

$$R^3_0 = \frac{1}{2} e^{2\alpha-2\beta-2\gamma}[q_{|aa} + q_{|a}(3\alpha_{|a} - \gamma_{|a})],$$

$$R^0_3 = -e^{-2\beta}\left\{q\left(\alpha_{|aa} - \gamma_{|aa} + \frac{q_{|aa}}{q}\right) + \frac{1}{2}q(\alpha_{|a} + \gamma_{|a}) + \right.$$

$$\left. + (\alpha_{|a} - \gamma_{|a})[q_{|a} + q(\alpha_{|a} + \gamma_{|a})]\right\} -$$

$$- \frac{1}{2}q^2 e^{2\alpha-2\beta-2\gamma}\left[q_{|aa} + q_{|a}(3\alpha_{|a} - \gamma_{|a}) + 2\frac{q^2_{|a}}{q}\right],$$

$$R^1_1 = e^{-2\beta}[\alpha_{|11} + \beta_{|11} + \gamma_{|11} - (\alpha_{|1} + \gamma_{|1})(\beta_{|1} - \alpha_{|1} - \gamma_{|1}) -$$

$$-2\alpha_{|1}\gamma_{|1} + \beta_{|22} + \beta_{|2}(\alpha_{|2} + \gamma_{|2})] - \frac{q^2_{|1}}{2}e^{2\alpha-2\beta-2\gamma},$$

$$R_2^2 = e^{-2\beta}[\beta_{|11} + \beta_{|1}(\alpha_{|1} + \gamma_{|1}) + \alpha_{|22} + \beta_{|22} + \gamma_{|22} -$$

$$-(\alpha_{|2} + \gamma_{|2})(\beta_{|2} - \alpha_{|2} - \gamma_{|2}) - 2\alpha_{|2}\gamma_{|2}] - \frac{q_{|2}^2}{2} e^{2\alpha-2\beta-2\gamma},$$

$$R_2^1 = -e^{-2\beta}[(\alpha_{|1} + \gamma_{|1})_{|2} + \alpha_{|1}\alpha_{|2} + \gamma_{|1}\gamma_{|2} - \beta_{|1}(\alpha_{|2} + \gamma_{|2}) -$$

$$-\beta_{|2}(\alpha_{|1} + \gamma_{|1})] - \frac{q_{|1}q_{|2}}{2} e^{2\alpha-2\beta-2\gamma}.$$

Если ввести $D = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = e^{\alpha+\gamma}$ и сложить уравнения системы (3), соответствующие $\overline{R_0^0}$ и $\overline{R_3^3}$, получим

$$(yD_{|a})_{|a} = 0.$$

Перепишем затем уравнение для скалярного потенциала с учетом введенного обозначения. Тогда

$$(y_{|a}D)_{|a} = 0.$$

Из двух последних соотношений легко заметить, что $yD = ye^{\alpha+\gamma}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(yD)_{|aa} = 0$$

и поэтому является гармонической функцией переменных x^a.

Введем $\rho(x^1, x^2) = yD$ и сопряженную ей гармоническую функцию $z(x^1, x^2)$ в качестве новых координат и выполним конформное отображение $(x^1, x^2) \to (z, \rho)$. В результате выражение для метрики перепишется следующим образом:

$$dS^2 = dS_1^2 + dS_2^2,$$

$$dS_1^2 = e^{2\alpha}(dt - \omega d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{y^2} e^{-2\alpha} d\varphi^2, \tag{4}$$

$$dS_2^2 = -e^{2\beta-2\alpha}(dz^2 + d\rho^2).$$

Уравнения поля расщепляются так, что часть из них образует замкнутую систему, определяющую $g_{\mu\nu}$ и A_μ, а оставшиеся позволяют найти β по $g_{\mu\nu}$ и A_μ.

Действительно, имея в виду (4), из (3) получим

$$y \triangle y = \nabla y \nabla y, \tag{5}$$

$$\triangle\alpha + \frac{1}{2} y^2 \frac{e^{4\alpha}}{\rho^2} \nabla\omega\nabla\omega + \frac{1}{2}\omega\nabla\left(\frac{y^2 e^{4\alpha}}{\rho^2}\nabla\omega\right) =$$

$$= \frac{e^{-2\alpha}}{y}\left[\nabla A_0 \nabla A_0 + y^2 \frac{e^{4\alpha}}{\rho^2}(\nabla A_3 \nabla A_3 - \omega^2 \nabla A_0 \nabla A_0)\right], \tag{6}$$

$$\nabla\left(\frac{y^2 e^{4\alpha}}{\rho^2}\nabla\omega\right) = -\frac{4ye^{2\alpha}}{\rho^2}(\nabla A_0 \nabla A_3 + \omega \nabla A_0 \nabla A_0), \tag{7}$$

$$\nabla\left[\frac{ye^{2\alpha}}{\rho^2}(\nabla A_3 + \omega\nabla A_0)\right] = 0, \tag{8}$$

$$\nabla\left[\frac{e^{-2\alpha}}{y}\nabla A_0 - \frac{\omega y e^{2\alpha}}{\rho^2}(\nabla A_3 + \omega\nabla A_0)\right] = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\rho}(\ln ye^{\beta})_{|1} = 2\alpha_{|1}\alpha_{|2} + \frac{\alpha_{|1} y_{|2} + \alpha_{|2} y_{|1}}{y} -$$

$$- \frac{\omega_{|1}\omega_{|2} y^2 e^{4\alpha}}{2\rho^2} - 2\frac{e^{-2\alpha}}{y} A_{0|1} A_{0|2} +$$

$$+ 2\frac{ye^{2\alpha}}{\rho^2}(A_{3|1} + \omega A_{0|1})(A_{3|2} + \omega A_{0|2}) + (2-\zeta)\frac{y_{|1} y_{|2}}{y^2}, \tag{10}$$

$$\frac{2}{\rho}(\ln ye^{\beta})_{|2} = 2\alpha^2_{|2} - 2\alpha^2_{|1} + 2\frac{(\alpha_{|2} y_{|2} - \alpha_{|1} y_{|1})}{y} +$$

$$+ y^2 e^{4\alpha}\frac{(\omega^2_{|1} - \omega^2_{|2})}{2\rho^2} + 2\frac{e^{-2\alpha}}{y}(A^2_{0|1} - A^2_{0|2}) +$$

$$+ \frac{2ye^{2\alpha}}{\rho^3}[(A_{3|2} + \omega A_{0|2})^2 - (A_{3|1} + \omega A_{0|1})^2] + (2-\zeta)\frac{(y^2_{|2} - y^2_{|1})}{y^2}, \tag{11}$$

где $\nabla = \hat{n}_z \frac{\partial}{\partial z} + \hat{n}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}$ — известные операторы двумерного плоского мира с ортами $\hat{n}_z$ и $\hat{n}_\rho$. Последние два уравнения получены как комбинации соответствующих $\overline{R^1_1}$, $\overline{R^2_2}$, $\overline{R^1_2}$ уравнений системы (3).

Система (5)—(11) полностью определяет внешние аксиально-симметричные гравитационные поля электровакуума в обобщенной теории тяготения. Требование асимптотического (в бесконечности) совпадения общего решения (5)—(11) с решением соответствующей физической задачи плоского мира позволяет определить константы и тем самым конкретизирует искомое решение.

3. *Новые переменные.* Перейдем к новым полевым переменным

$$\psi = ye^{2\alpha}, \quad f = ye^{\zeta}, \tag{12}$$

тогда выражение (4) для dS^2 останется неизменным:

$$dS^2 = \frac{1}{y}\left[\psi(dt - \omega d\varphi)^2 - \frac{f^2}{\psi}(dz^2 + d\rho^2) - \frac{\rho^2}{\psi}\, d\varphi^2\right], \tag{4a}$$

и если заключенное в квадратные скобки формально рассматривать как определяющее метрику в случае стационарных аксисимметричных гравитационных полей ОТО с «потенциалами» ψ, ω и f, то dS^2 в ОТТ, как видно из (4а), получается из соответствующего выражения ОТО конформным преобразованием

$$dS^2 = \frac{1}{y}\, dS^2_{\text{ОТО}}.$$

Поэтому неслучайно формальное совпадение переписанных с учетом (12) уравнений (6)—(9)

$$\nabla\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) + \frac{\psi^2}{\rho^2}\nabla\omega\nabla\omega = 2\,\frac{\nabla A_0\nabla A_0}{\psi} + 2\,\frac{\psi}{\rho^2}\,\nabla A, \tag{6a}$$

$$\nabla\left(\frac{\psi^2}{\rho^2}\,\nabla\omega + 4\,\frac{\psi}{\rho^2}\,A_0\nabla A\right) = 0, \tag{7a}$$

$$\nabla\left(\frac{\psi}{\rho^2}\,\nabla A\right) = 0, \tag{8a}$$

$$\nabla\left(\frac{\nabla A_0}{\psi} - \omega\,\frac{\psi}{\rho^2}\,\nabla A\right) = 0 \tag{9a}$$

с соответствующими уравнениями ОТО [8]. Оставшиеся уравнения примут вид:

$$\frac{2}{\rho}\,\frac{f_{|1}}{f} = \frac{\psi_{|1}\psi_{|2}}{\psi^2} - \frac{\psi}{\rho^2}\,\omega_{|1}\omega_{|2} - \frac{4}{\psi}\,A_{0|1}A_{0|2} + {}$$
$$+ \frac{4\psi}{\rho^2}(\hat{n}_z\nabla A)(\hat{n}_\rho\nabla A) + (3 - 2\zeta)\,\frac{y_{|1}y_{|2}}{y^2}, \tag{10a}$$

$$\frac{4}{\rho}\,\frac{f_{|2}}{f} = \frac{\psi^2_{|2} - \psi^2_{|1}}{\psi^2} + \frac{\psi^2}{\rho^2}\,(\omega^2_{|1} - \omega^2_{|2}) + \frac{4}{\psi}(A^2_{0|1} - A^2_{0|2}) + {}$$
$$+ \frac{4\psi}{\rho^2}[(\hat{n}_\rho\nabla A)^2 - (\hat{n}_z\nabla A)^2] + (3 - 2\zeta)\,\frac{(y^2_{|2} - y^2_{|1})}{y^2}. \tag{11a}$$

Здесь $\nabla A \equiv \nabla A_3 + \omega\nabla A_0$.

Вид уравнений (6а)—(11а) приводит к следующему заключению: если найдены ψ, ω, A_0, A_3 в рамках ОТО, то, подобрав подходящее в данном случае решение уравнения для скалярного потенциала y

$$\nabla\left(\frac{\nabla y}{y}\right)=0, \tag{5а}$$

можно, используя (12), перенести эти результаты в ОТТ. Тогда f определится простым интегрированием, если предварительно заметить, что из (10а) и (11а) следует

$$\frac{2}{\rho}\left(\ln\frac{f}{f_0}\right)_{|1}=(3-2\zeta)\frac{y_{|1}y_{|2}}{y^2}, \tag{10б}$$

$$\frac{4}{\rho}\left(\ln\frac{f}{f_0}\right)_{|2}=(3-2\zeta)\frac{(y_{|2}^2-y_{|1}^2)}{y^2}, \tag{11б}$$

где f_0 — решение соответствующей задачи ОТО.

Таким образом, проблема стационарных аксиально-симметричных гравитационных полей электровакуума в рамках ОТТ принципиально разрешима, если известны соответствующие решения в ОТО, которые можно найти, используя, в частности, метод Эрнста [8] или метод обратной задачи рассеяния [9].

4. *Каноническая форма уравнений ОТТ*. Ограничимся рассмотрением случаев чистого вращения ($A_\mu=0$) или постоянного магнитного поля ($\omega=A_0=0$), тогда полевые уравнения можно привести к более компактному виду.

Введем для этого

$$e^\sigma=\begin{pmatrix} y \\ y^{1/2}\end{pmatrix},\qquad e^\nu=\begin{pmatrix} ye^{2\alpha} \\ (ye^{2\alpha})^{1/2}\end{pmatrix},$$
$$q=\begin{pmatrix} \omega \\ iA_3\end{pmatrix},\qquad e^\lambda=\begin{pmatrix} ye^{\beta} \\ (ye^{\beta})^{1/4}\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Условимся верхнюю строчку столбцов (13) относить к стационарной вакуумной задаче, а нижнюю — к магнитостатическому случаю. Тогда нетрудно убедиться в том, что уравнения, определяющие решения обеих задач, запишутся в единой форме,

$$\Delta\sigma=0, \tag{5в}$$

$$\Delta\nu+\frac{e^{2\nu}}{\rho^2}\nabla q\nabla q=0, \tag{6в}$$

$$\nabla\left(\frac{e^{2\nu}}{\rho^2}\nabla q\right)=0, \tag{7в}$$

$$\frac{2}{\rho}\lambda_{|1}=\nu_{|1}\nu_{|2}-\frac{e^{2\nu}}{\rho^2}q_{|1}q_{|2}+(3-2\zeta)\,\sigma_{|1}\sigma_{|2}, \tag{10в}$$

$$\frac{4}{\rho}\lambda_{|2}=\nu_{|2}^2-\nu_{|1}^2-e^{2\nu}(q_{|2}^2-q_{|1}^2)+(3-2\zeta)(\sigma_{|2}^2-\sigma_{|1}^2). \tag{11в}$$

Тем самым доказывается следующее предложение: если найдено какое-либо аксиально-симметричное решение стационарной вакуумной задачи ОТТ (y, $e^{2\alpha}$, ω, $e^{2\beta}$), то найдено также решение статической задачи с магнитным полем ($\sqrt{y}$, e^{α}, iA_3, $e^{\beta/2}$). Разумеется, это утверждение имеет место и в рамках ОТО ($y=1$) и может быть отнесено к разряду известных „генерационных" теорем (см., например, [6]). Исходное выражение для dS^2 преобразуем конформно так, чтобы

$$d\bar{S}^2=e^{(1-k)\sigma}dS^2=d\bar{S}_1^2+d\bar{S}_2^2,$$
$$d\bar{S}_1^2=e^{\nu-k\sigma}\left[(dt-qd\varphi)^2-\rho^2e^{-2\nu}d\varphi^2\right], \tag{14}$$
$$d\bar{S}_2^2=\bar{g}_{ab}(dz^2+d\rho^2),$$

где $\bar{g}_{ab}=-e^{2\lambda-\nu-k\sigma}$, $k=\sqrt{3-2\zeta}$.

Составим из метрических коэффициентов квадратичной формы $d\bar{S}_1^2$ матрицу

$$\hat{g}=e^{\nu-k\sigma}\begin{pmatrix}1 & -q\\ -q & q^2-\rho^2e^{2\nu}\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Легко проверить, что независимые элементы матричного уравнения

$$\nabla(\hat{g}^{-1}\nabla\hat{g})=0 \tag{16}$$

совпадают с уравнениями (6в) и (7в), а уравнение (5в) возникает как сумма диагональных элементов матрицы (16). Заметим, что уравнения (16) получаются варьированием лагранжиана

$$L=Sp(\nabla\hat{g}^{-1}\nabla\hat{g})$$

по полевым переменным $\hat{g}$. Оставшаяся пара уравнений (10в) и (11в) в компактной записи выглядит так же, как соответствующие уравнения ОТО (для сравнения см. [9]),

$$(\ln \bar{g}_{ab})_{|z} = \frac{\rho}{2} Sp(\bar{G}_{|z} \bar{G}_{|\rho}),$$
$$(\ln \bar{g}_{ab})_{|\rho} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{4} Sp(G_{|\rho}^2 - G_{|z}^2), \tag{17}$$

и поэтому интегрируются аналогично (здесь матрица $\hat{G}_{|a} = \hat{g}^{-1} \hat{g}_{|a}$, $a = z, \rho$).

Заметим также, что в случае электровакуума с дополнительным условием $F^{ik} F_{ik} = 0$, как лагранжиан, так и полевые уравнения (16) сохраняют свой вид, если вместо матрицы (15) ввести расширенную

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + e^{-k\sigma} A_\mu A_\nu & e^{-k\sigma} A_\nu \\ e^{-k\sigma} A_\mu & e^{-k\sigma} \end{pmatrix}.$$

В заключение авторы выражают благодарность Г. С. Саакяну за интерес к работе, а также участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за обсуждения.

Ереванский государственный
университет

STATIONARY AXISYMMETRIC FIELDS IN GENERALIZED THEORY OF GRAVITATION

G. H. HAROUTYUNIAN, V. V. PAPOYAN

The problem of stationary axisymmetric gravitational fields in the frame of generalized theory of gravitation is formulated. It has been pointed out that solutions of the above mentioned problem may be found if analogous solutions in general relativity are obtained. A theorem is proposed to find the magnetostatic solution from stationary vacuum solutions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. Jordan*, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1955.
2. *W. Pauli*, Ann. Phys. (DDR), 18, 305, 1933.
3. *C. Brans*, *R. Dicke*, Phys. Rev., 124, 925, 1961.
4. *D. Sciama*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 113, 34, 1953.
5. *Г. С. Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
6. *Д. Крамер, Х. Штефани, Э. Харльт, М. Мак-Калум*, Точные решения уравнений Эйнштейна, Наука, М., 1982.
7. *H. Weyl*, Ann. Phys. (DDR), 54, 117, 1917.
8. *F. Ernst*, Phys. Rev., 167, 1175, 1968; 168, 1415, 1968.
9. *В. А. Белинский, В. Е. Захаров*, Ж. экспери. и теор. физ. 75, 1953, 1978; 77, 3, 1979.