④ А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 24 ИЮНЬ, 1986 ВЫПУСК 3

УДК: 52—64:535.36

ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК В БЕСКОНЕЧНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Р. С. ВАРДАНЯН

Поступила 1 февраля 1985
Принята к печати 18 февраля 1986

Рассмотрена задача переноса излучения в бесконечной трехмерной стохастической среде, когда вероятность λ выживания кванта при элементарном акте рассеяния является статистически однородным, изотропным гауссовым полем с экспоненциальной корреляционной функцией. При решении применяется метод диаграммной техники. В приближении Бурре найдены первый момент функции источников и среднее число рассеяний кванта. Как частный случай рассмотрено сильно коррелированное поле.

1. *Введение.* Теория переноса излучения в однородных средах к настоящему времени достаточно хорошо разработана. Менее полно разработана теория переноса излучения в неоднородных средах, что отчасти объясняется большой сложностью соответствующих задач (см., например, [1—4]).

Определенный интерес представляют также задачи переноса излучения в случайно-неоднородных средах. В реальных астрофизических объектах статистические флуктуации температуры, концентрации атомов и свободных электронов и т. д. могут привести к случайным изменениям параметров, определяющих локальные оптические свойства среды — коэффициентов поглощения и рассеяния, ширины спектральной линии и т. д. Другой причиной случайных изменений локальных оптических свойств среды могут служить турбулентные движения в атмосферах звезд и планет. Ясно, что флуктуации оптических параметров могут играть существенную роль в процессе формирования поля излучения в среде.

Впервые задачи переноса излучения в стохастических средах в астрофизическом приложении были рассмотрены в работах [5—6]. В этих работах предполагалось, что случайным изменениям подвергается вероятность λ выживания кванта при элементарном акте рассеяния. Такая ситуация может возникнуть при рассмотрении задачи переноса излучения в спектральной линии: пусть концентрация резонансных атомов n постоянна (или в общем случае детерминированная функция), а концентрация свободных электронов n_e или электронная температура T_e являются случайными функциями координат или времени. В случае двухуровенных атомов, при пренебрежении рассеянием на свободных электронах, для λ получается следующее выражение (см., например, [7]):

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e a_{21}(T_e)}.$$

Из приведенного выражения λ следует, что если n_e или T_e являются случайными функциями, то таковой будет и λ. В рассматриваемом случае, так как коэффициент поглощения в линии $\alpha = kn$ считается постоянным, оптическая глубина точки будет детерминированной величиной, следовательно, уравнение переноса будет содержать один флуктуирующий параметр λ.

В работе [8] рассмотрена задача переноса излучения при предположении, что коэффициент поглощения и коэффициент рассеяния являются случайными функциями. Но при таких предположениях задачу удается решить методом малых возмущений, причем в малоугловом приближении теории переноса.

Достаточно эффективным, в некоторых случаях, приближенным методом решения задачи вышеуказанного типа может оказаться заимствованный из квантовой теории поля метод диаграммной техники [9, 10]. Ранее метод диаграммной техники был применен к задачам распространения электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах, когда диэлектрическая проницаемость среды является случайным полем (см., например, [11—13]).

В данной статье рассматривается задача точечного источника в бесконечной среде при предположении, что вероятность λ выживания кванта является случайным полем. Основная цель работы — нахождение первого момента функции источника в приближении Бурре.

Поскольку учет стохастичности среды существенно усложняет задачи переноса, целесообразно в качестве первого шага рассмотреть модельную задачу монохроматического рассеяния. Как известно, теория монохроматического рассеяния в некоторых случаях дает качественное объяснение образования спектров небесных тел, в частности спектров наружных слоев звезд, туманностей, межзвездной среды и т. д. Полученные ниже результаты можно применить к расчету интенсивностей линий Na I, Ca II, Mg II и т. д. Следует отметить, что учет перераспределения излучения по частотам внутри спектральной линии или анизотропности рассеяния не приводит к принципиальному усложнению задачи.

2. *Общая постановка задачи, метод диаграммной техники.* Пусть точечный источник света расположен в точке с радиусом-вектором $\vec{r}$ бесконечной, случайно-неоднородной среды (r — измеряется в единицах оптической толщины). Функция источников $\tilde{S}_\lambda(\vec{r}, \vec{r}_0)$ удовлетворяет следующему уравнению [7]:

$$\tilde{S}_\lambda(\vec{r}, \vec{r}_0) = K(\vec{r}, \vec{r}_0) + \int K(\vec{r}, \vec{r}\,')\lambda(\vec{r}\,')\tilde{S}_\lambda(\vec{r}\,', \vec{r}_0)\,d^3r' \tag{1}$$

(конкретный вид $K(\vec{r}, \vec{r}_0)$ приводится ниже).

В уравнении (1) под $\lambda(\vec{r})$ подразумевается одна из реализаций случайного поля $\Lambda(\vec{r})$, относительно которого предполагается, что:

а) $\Lambda(\vec{r})$ является однородным изотропным полем с экспоненциальной корреляционной функцией:

$$B_\lambda(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = B_\lambda(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \langle \tilde{\lambda}(\vec{r}_1)\tilde{\lambda}(\vec{r}_2) \rangle = \sigma^2 e^{-\beta|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \tag{2}$$

где $\tilde{\lambda}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) - \lambda_0$ флуктуационная часть случайного поля $\Lambda(\vec{r})$; $\lambda_0 = \langle \lambda \rangle = \text{const}$ — среднее значение $\Lambda(\vec{r})$, $l = \beta^{-1}$—радиус корреляции.

б) Случайное поле $\Lambda(\vec{r})$ является гауссовым.

Перепишем уравнение (1) в операторном виде:

$$\tilde{S}_\lambda = K + \hat{K}\lambda\tilde{S}_\lambda, \tag{3}$$

где $\hat{K}$ — интегральный оператор с ядром K:

$$(\hat{K}f)(\vec{r}) = \int K(\vec{r}, \vec{r}\,')f(\vec{r}\,')\,d^3r'.$$

Подставляя в (3) $\lambda(\vec{r}) = \lambda_0 + \tilde{\lambda}(\vec{r})$, после очевидных преобразований получим:

$$\tilde{S}_\lambda = (\hat{I} - \lambda_0\hat{K})^{-1}K + (\hat{I} - \lambda_0\hat{K})^{-1}\widehat{K\tilde{\lambda}S_\lambda}, \tag{4}$$

где $\hat{I}$ — единичный оператор.

Обозначив через S_0 решение уравнения

$$S_0 = K + \lambda_0\hat{K}S_0, \tag{5}$$

относительно $\tilde{S}_\lambda$ получим следующее уравнение:

$$\tilde{S}_\lambda = S_0 + \hat{S}_0\tilde{\lambda}\tilde{S}_\lambda. \tag{6}$$

Здесь $\hat{S}_0$ — интегральный оператор с ядром $S_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.
Представим решение (6) в виде суммы ряда Неймана:

$$\tilde{S}_\lambda = S_0 + \hat{S}_0\tilde{\lambda}S_0 + \hat{S}_0\tilde{\lambda}\hat{S}_0\tilde{\lambda}S_0 + \ldots . \tag{7}$$

При усреднении (7) по ансамблю реализаций случайного поля $\Lambda(\vec{r})$ должны учесть, что вследствие того, что поле $\Lambda(\vec{r})$ гауссовское, все нечетные моменты $\tilde{\lambda}$ равны нулю, т. е.

$$\langle \tilde{\lambda}(\vec{r}_1)\cdot\tilde{\lambda}(\vec{r}_2)\ldots\tilde{\lambda}(\vec{r}_{2n-1}) \rangle = 0,$$

а четные моменты выражаются через сумму произведений всевозможных парных корреляционных функций (см., например, [11]):

$$\langle \tilde{\lambda}(\vec{r}_1)\ldots\tilde{\lambda}(\vec{r}_{2n}) \rangle = \sum B_\lambda(\vec{r}_{i_1}, \vec{r}_{i_2})\ldots B_\lambda(\vec{r}_{i_{2n-1}}, \vec{r}_{i_{2n}}).$$

$\langle\ \rangle$ — как обычно, означает усреднение по ансамблю реализаций $\Lambda(\vec{r})$.
Усредняя (7) с учетом вышесказанного, получим:

$$S(\vec{r}, \vec{r}_0) = \langle \tilde{S}_\lambda \rangle = S_0(\vec{r}, \vec{r}_0) +$$
$$+ \int S_0(\vec{r}, \vec{r}_1)\, S_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, S_0(\vec{r}_2, \vec{r}_0)\, B_\lambda(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, d^3r_1 d^3r_2 + \ldots . \tag{8}$$

Для наглядного представления структуры ряда (8) воспользуемся диаграммной техникой [11—13]. Представим «свободную» функцию S_0 сплошной линией

$$S_0(\vec{r}, \vec{r}_0) \Longleftrightarrow \underset{\vec{r}}{\cdot}\!\!\text{———————}\!\!\underset{\vec{r}_0}{\cdot},$$

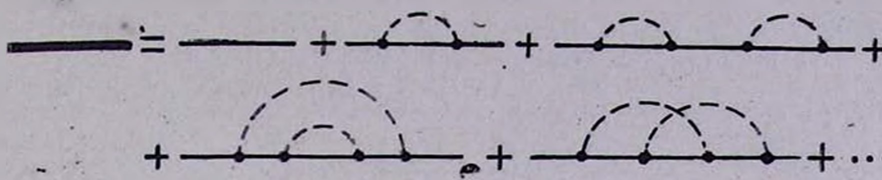
а функцию $S(\vec{r}, \vec{r}_0)$ — жирной сплошной линией

$$S(\vec{r}, \vec{r}_0) \Longleftrightarrow \underset{\vec{r}}{\cdot}\!\!\rule[0.5ex]{6em}{2pt}\!\!\underset{\vec{r}_0}{\cdot}.$$

Корреляционную функцию $B_\lambda(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ изобразим пунктирной линией

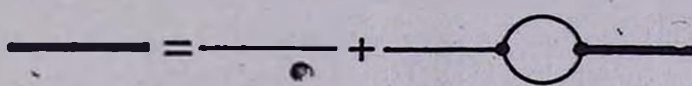
$$B_\lambda(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \Longleftrightarrow \underset{\vec{r}_1}{\cdot}\!\!\text{-----------}\!\!\underset{\vec{r}_2}{\cdot}.$$

Тогда (8) можно представить в виде следующего диаграммного ряда:



(9)

Любая диаграмма этого ряда состоит из свободных концевых линий S_0 и четного числа внутренних точек пересечения сплошных и пунктирных линий, причем по координатам внутренних точек проводится интегрирование. Сгруппировав члены ряда (9), можно получить следующее уравнение Дайсона [11—13]:

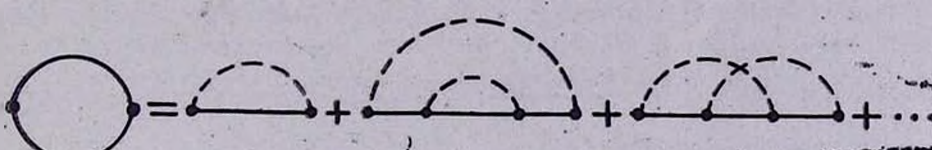


$$S = S_0 + \hat{S}_0\hat{Q}S, \tag{10}$$

$$S(\vec{r}, \vec{r}_0) = S_0(\vec{r}, \vec{r}_0) + \iint S_0(\vec{r}, \vec{r}_1)\, Q(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, S(\vec{r}_2, \vec{r}_0)\, d^3r_1 d^3r_2.$$

Здесь массовый оператор $\hat{Q}$ — сумма всех сильно-связанных диаграмм без свободных концевых линий:

$Q =$



(11)

В случае бесконечной среды функция $S_0(\vec{r}, \vec{r}_0)$ зависит от модуля разности аргументов; следовательно, этим свойством обладает и массовый оператор: $Q(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = Q(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Тогда уравнение Дайсона (10) можно решить методом фурье-преобразования. Обозначив через $\bar{S}_0(\vec{k})$, $\bar{S}(\vec{k})$, $\bar{Q}(\vec{k})$ фурье-образы функций $S_0(\vec{r})$, $S(\vec{r})$, $Q(\vec{r})$ соответственно, из (10) получим:

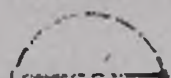
$$\bar{S}(\vec{k}) = \frac{\bar{S}_0(\vec{k})}{1 - \bar{S}_0(\vec{k})\, \bar{Q}(\vec{k})}. \tag{12}$$

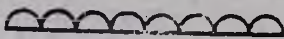
Совершив обратное преобразование Фурье, получим для $S(\vec{r})$:

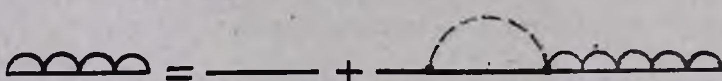
$$S(\vec{r}) = S(|\vec{r}|) = S(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\overline{S}_0^{-1}(\vec{k}) - \overline{Q}(\vec{k})}\, d^3k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{r}\int_0^{\infty}\frac{k \sin kr}{\overline{S}_0^{-1}(k) - \overline{Q}(k)}\, dk. \tag{13}$$

При получении последнего выражения для $S(\vec{r})$ учтено то обстоятельство, что $\overline{S}_0(\vec{k})$ и $\overline{Q}(\vec{k})$ зависят от модуля вектора $\vec{k}$ ($k = |\vec{k}|$). Уравнение Дайсона (10) не является замкнутым уравнением в том смысле, что входящее в (10) ядро массового оператора $\widehat{Q}$ не задается в замкнутом виде, а представляется рядом (11). Тем не менее, уравнение Дайсона обладает некоторым преимуществом относительно исходного уравнения (8). Действительно, если в (11) ограничиться лишь одним членом ряда Q, то полученное в этом приближении из (10) решение будет соответствовать сумме некоторой подпоследовательности из (8). Рассмотрим более подробно приближение Бурре, когда Q приближенно заменяется первым членом ряда (11):

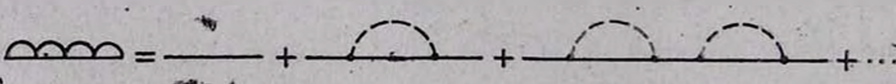
$Q \approx Q_1 = S_0 B_\lambda \Leftrightarrow$  . (14)

Обозначим через $S_1 =$  решение уравнения Дайсона в этом приближении:



$$S_1 = S_0 + \widehat{S}_0\widehat{Q}_1 S_1. \tag{15}$$

Из (15) следует, что S_1 является суммой ряда



(16)

Последнее представление S_1 и объясняет смысл приближения Бурре (что обычно делается в литературе). Но может оказаться полезным и другое истолкование приближения Бурре. Итерируя (6), получим:

$$\tilde{S}_\lambda = S_0 + \widehat{S_0\tilde{\lambda}} S_0 + \widehat{S_0\tilde{\lambda} S_0\tilde{\lambda}}\,\tilde{S}_\lambda . \tag{17}$$

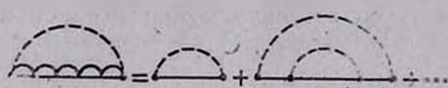
Усредняя (17), можно убедиться, что приближение Бурре соответствует замене:

$$\langle \tilde{\lambda} S_0 \tilde{\lambda} \tilde{S}_\lambda \rangle \approx \langle \tilde{\lambda} S_0 \tilde{\lambda} \rangle \cdot \langle \tilde{S}_\lambda \rangle , \tag{18}$$

т. е. некоторому приближенному расщеплению среднего от произведения типа

$$\langle \tilde{\lambda}\cdot\tilde{\lambda} \ldots \tilde{\lambda}\tilde{S}_\lambda \rangle .$$

Если известно решение (15), то в следующем приближении для Q уже можно взять сумму некоторой подпоследовательности, получающейся заменой в любом члене ряда Q свободной функции S_0 через S_1, например

$Q_2 =$ 

Следовательно, диаграммная техника дает возможность выделить из (8) подпоследовательности топологически-схожих диаграмм и просуммировать их. Далее, путем замены свободных функций S_0 в диаграммах (11) функцией предыдущего приближения, удается просуммировать новые подпоследовательности диаграмм, что, несомненно, приводит к лучшему приближению, чем приближение, полученное из (8) путем вычислений нескольких первых членов.

3. *Трехмерная среда.* Функция K в случае трехмерной среды следующая:

$$K(\vec{r}) = K(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-r}}{r^2}; \quad |\vec{r}| = r.$$

Совершив преобразование Фурье в (5), получим:

$$\overline{S}_0(\vec{k}) = \frac{\operatorname{arc\,tg} k}{k - \lambda_0 \operatorname{arc\,tg} k}. \tag{19}$$

Фурье-образ функции $Q_1(\vec{r}) = S_0(r)\,B_\lambda(r)$ является сверткой фурье-образов S_0 и B_λ:

$$\bar{Q}_1(\vec{k}) = Q_1(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \bar{B}_\lambda(|\vec{k}-\vec{\chi}|)\,\bar{S}_0(\vec{\chi})\,d^3\chi =$$

$$= \sigma^2 \frac{\beta}{\pi k}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^2 + (k-\chi)^2}\cdot\frac{\chi \operatorname{arc\,tg}\chi}{\chi - \lambda_0 \operatorname{arc\,tg}\chi}\,d\chi. \tag{20}$$

Подстановка (19) и (20) в (13) приводит к следующему выражению для $S_1(r)$:

$$S_1(r) = \frac{1}{(2\pi)^2 ir}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikr}dk}{\dfrac{k-\lambda_0 \operatorname{arc\,tg} k}{\operatorname{arc\,tg} k} - \dfrac{\sigma^2\beta}{k\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi \operatorname{arc\,tg}\chi\, d\chi}{[\beta^2 + (k-\chi)^2][\chi - \lambda_0 \operatorname{arc\,tg}\chi)}}. \tag{21}$$

В теории переноса излучения решение задачи точечного источника в бесконечной трехмерной среде сводится к решению вспомогательной «одномерной» задачи путем введения функции одной переменной $\Phi(z)$ (см., например, [7]):

$$\Phi(z) = \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(r)\,dxdy = 2\pi\int\limits_{|z|}^{\infty} rS(r)\,dr;$$

$$S(r) = \frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi(r)}{dr}. \tag{22}$$

Переход к функции $\Phi(z)$ в исходном уравнении (1) не возможен из-за наличия множителя $\lambda(\vec{r})$ под интегралом, а в уравнении Дайсона (10) такой переход возможен и, естественно, приводит окончательно к выражению (21) для $S_1(r)$.

Выражение $Q_1(k)$ можно преобразовать к другому виду, если вычислить интеграл в правой части (20) с помощью теории вычетов с учетом того, что подынтегральная функция имеет точку ветвления на верхней полуплоскости комплексной переменной. Не останавливаясь на подробностях вычислений, приведем лишь конечный результат:

$$\bar{Q}_1(k) = \sigma^2\left\{\frac{A_\alpha}{k^2 + (\alpha+\beta)^2} + \hat{R}_y\left[\frac{1}{k^2 + (y+\beta)^2}\right]\right\}. \tag{23}$$

Здесь $A_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\left|\dfrac{d\alpha^2}{d\lambda_0}\right|$, а α является положительным корнем уравнения

$$\frac{\lambda_0}{2a}\ln\frac{1+a}{1-a}=1.$$

Оператор $\hat{R}_{\lambda_0}$ определяется следующим образом:

$$\hat{R}_{\lambda_0}[f(y)]=\int_1^\infty\left[\left(1-\frac{\lambda_0}{2y}\ln\frac{y+1}{y-1}\right)^2+\left(\frac{\lambda_0\pi}{2y}\right)^2\right]^{-1}f(y)\,dy. \tag{24}$$

Выражение (23) можно получить непосредственным фурье-преобразованием (14), если воспользоваться полученным ранее явным видом функции $S_0(\vec{r})$ (см., например, [7]). Отметим, что функция $S_0(\vec{r})$ в данном тексте отличается от аналогичной функции в цитированной выше литературе множителем λ_0, что непосредственно следует из уравнения (5) для $S_0(r)$.

Полученное выше выражение (21) для S_1 подлежит тщательному анализу, но в данной статье мы этим заниматься не будем. Ниже мы подробнее рассмотрим один предельный случай, а именно, случай сильной корреляции, когда $\beta\to 0$. В этом предельном случае из (21) получим:

$$S_1(r)=\frac{1}{(2\pi)^2 ir}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(k-\lambda_0\operatorname{arc\,tg}k)\operatorname{arc\,tg}k\,e^{ikr}}{[k-\lambda_0\operatorname{arc\,tg}k]^2-[\sigma\operatorname{arc\,tg}k]^2}\,dr. \tag{25}$$

Подынтегральная функция имеет полюсы в точках $z_{1,2}=i\alpha_\pm$ верхней полуплоскости комплексной переменной $z=k+iy$, где $\alpha_\pm$ — положительные корни уравнений

$$\frac{\lambda_\pm}{2a}\ln\frac{1+a}{1-a}=1;\quad \lambda_\pm=\lambda_0\pm\sigma. \tag{26}$$

Учитывая далее, что $z=i$ является точкой ветвления для подынтегральной функции, после стандартных вычислений получим:

$$S_1(r)=\frac{1}{8\pi r}\left\{\left|\frac{d\alpha_+^2}{d\lambda_+}\right|e^{-\alpha_+ r}+\left|\frac{d\alpha_-^2}{d\lambda_-}\right|e^{-\alpha_- r}+\int_1^\infty R_1(y)\,e^{-ry}\,dy\right\}. \tag{27}$$

Здесь

$$R_1(y)=\frac{4y}{\pi}\,Im\,\frac{\left(1+\frac{\lambda_0}{2y}\ln\frac{y-1}{y+1}+i\,\frac{\lambda_0\pi}{2y}\right)\left(\frac{1}{2y}\ln\frac{y-1}{y+1}+i\,\frac{\pi}{2y}\right)}{\left(1+\frac{\lambda_0}{2y}\ln\frac{y-1}{y+1}+i\,\frac{\lambda_0\pi}{2y}\right)^2-\left(\frac{\sigma}{2y}\ln\frac{y-1}{y+1}+i\,\frac{\sigma\pi}{2y}\right)^2}. \tag{28}$$

4. *Среднее число рассеяний.* В теории переноса излучения определенный интерес представляет среднее число рассеяний, испытываемых квантом. Обозначим через $\overline{N}_0$ и $\overline{N}$ среднее число рассеяний, соответственно в однородной и стохастической средах. $\overline{N}_0$ и $\overline{N}$ определяются следующими формулами:

$$\overline{N}_0 = \int S_0(\vec{r})\, d^3r \Big/ \int K(r)\, d^3r = \int S_0(\vec{r})\, d^3r,$$
$$\overline{N} = \int S(\vec{r})\, d^3r \Big/ \int K(\vec{r})\, d^3r = \int S(\vec{r})\, d^3r. \tag{29}$$

Как видно из определения (29), $\overline{N}_0$ и $\overline{N}$ совпадают со значениями фурье-образов соответственно $S_0(\vec{r})$ и $S(\vec{r})$ в точке $\vec{k}=0$:

$$\overline{N}_0 = \overline{S}_0(0) = \frac{1}{1-\lambda_0},$$
$$\overline{N} = \overline{S}(0) = \frac{S_0(0)}{1-\overline{S}(0)\,\overline{Q}(0)} = \frac{\overline{N}_0}{1-\overline{N}_0\overline{Q}(0)}. \tag{30}$$

В приближении Бурре для $\overline{N} \approx \overline{N}_1$ получим:

$$\overline{N}_1 = \frac{\overline{N}_0}{1 - c^2 \dfrac{2\beta}{\pi} F(\lambda_0)\overline{N}_0}, \tag{31}$$

где

$$F(\lambda_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 \operatorname{arc\,tg} k\, dk}{(k^2+\beta^2)^2 (k-\lambda_0 \operatorname{arc\,tg} k)}.$$

В частности, при сильной корреляции, т. е. при $\beta \to 0$ из (20) и (30) получим:

$$\overline{N}_1' = \frac{\overline{N}_0}{1-\sigma^2 \overline{N}_0^2}. \tag{32}$$

Автор выражает благодарность и искреннюю признательность профессору Н. Б. Енгибаряну и профессору Ю. А. Кравцову за ценные замечания и полезные обсуждения.

Институт прикладных проблем
физики АН Арм.ССР

A POINT SOURCE IN AN INFINITE STOCHASTIC MEDIUM

R. S. VARDANIAN

The paper considers the radiation transfer problem in an infinite three-dimensional field when the quantum survival probability λ in the case of an elementary act of scattering is presented by a statistically homogeneous and isotropic Gaussian field with an exponential correlation function. The diagram method is applied to the solution. The first moment of the source function and the average number of quantum scatterings are found in the Bourret approximation. The strongly correlated field is considered as a private case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Докл. АН СССР, 111, 1000, 1956.
2. *В. В. Соболев*, Астроч. ж., 51, 50, 1974.
3. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 2, 197, 1966.
4. *Э. Г. Яновицкий*, Распространение света в дисперсной среде, Наука и Техника, Минск, 1982, стр. 36.
5. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, в сб. «Звезды, туманности, галактики», Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1969, стр. 65.
6. *Р. С. Варданян*, Кандидатская диссертация, Ереван, 1972.
7. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
8. *И. Л. Кацев*, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 19, 1172, 1983.
9. *А. Л. Абрикосов, Л. Н. Горьков, И. Е. Дзялошинский*, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Наука, М., 1962.
10. *Р. Маттук*, Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел, Мир, М., 1969.
11. *С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский*, Введение в статистическую радиофизику, ч. 2, Наука, М., 1978.
12. *Л. А. Апресян, Ю. А. Кравцов*, Теория переноса излучения, Наука, М., 1983.
13. *А. Исимару*, Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах, ч. 1, 2, Мир, М., 1981.