АСТРОФИЗИКА

ТОМ 24 ИЮНЬ, 1986 ВЫПУСК 3

УДК: 52—852:51+535.361.2

РАССЕЯНИЕ СВЕТА В МНОГОСЛОЙНЫХ АТМОСФЕРАХ. II. ЗАДАЧА МИЛНА

Э. Г. ЯНОВИЦКИЙ

Поступила 10 февраля 1985
Принята к печати 10 февраля 1986

Рассматривается полубесконечная плоская атмосфера, состоящая из произвольного числа однородных слоев заданной оптической толщины. Для задачи Милна дан эффективный алгоритм нахождения поля излучения на любых оптических глубинах. Отдельно подробно изучен случай, когда среда состоит из слоев большой оптической толщины. Найдены соответствующие простые асимптотические формулы.

1. *Введение.* Настоящая статья является непосредственным продолжением [1]. Здесь мы дадим подробный алгоритм решения задачи Милна. Кроме того, изучим случай, когда среда состоит из оптически толстых однородных слоев.

Ссылки на формулы из [1] будут обозначаться (I, n), где n—номер формулы в [1]. Все обозначения оставлены прежними и заново, как правило, не разъясняются.

2. *Задача Милна.* Пусть задана плоская атмосфера, состоящая из n однородных слоев, оптические толщины τ_j ($j=1, 2, 3,..., n$) и свойства каждого из которых считаются заданными, причем $\tau_n = \infty$ (см. рис. 1). Для принятой модели атмосферы требуется решить как задачу о диффузном отражении, так и задачу Милна (т. е. найти поле излучения в среде, в которой первичные источники неограниченной мощности удалены на бесконечность). Для каждого отдельно взятого слоя считается решенной задача о диффузном отражении, т. е. известны функции $I_j(\tau, \mu, \mu_0)$ ($\tau \in [0, \tau_j]$; $\mu \in [-1, +1]$; $\mu_0 \in [0, 1]$).

В рассматриваемой многослойной атмосфере решение задачи о диффузном отражении проводится так, как это было изложено во втором разделе [1]. В результате мы можем считать известными как функции $I_{j,n}(\tau, \mu, \mu_0)$, так и функции $\rho_{j,n}(\mu, \mu_0)$, $\sigma_{j,n}(\mu, \mu_0)$ (очевидно, что для

задачи Милна нам потребуются лишь нулевые азимутальные гармоники указанных функций). Приступим к решению поставленной задачи.

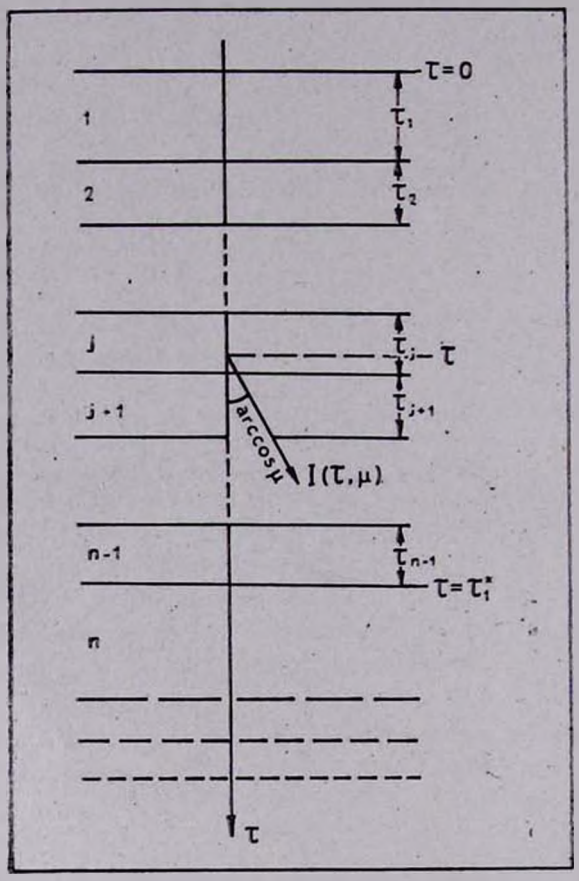

Рис. 1. Схема распространения излучения в многослойной атмосфере для задачи Милна.

Возьмем полубесконечный однородный слой со свойствами „n". Согласно В. В. Иванову [2], соответствующим образом нормированное поле излучения в такой атмосфере будет определяться формулой

$$(\tau \in [0,\ \infty),\ \mu \in [-1,\ +1])$$

$$M_n I_n(\tau,\ \mu) = i_n(-\mu)\, e^{k_n \tau} - i_n(-\mu)\, e^{-\tau/\mu}\, \theta(\mu) -$$

$$-2\int_0^1 I_n^-(\tau,\ \mu,\ \mu')\, i_n(-\mu')\, d\mu' \qquad (\lambda_n \neq 1). \tag{1}$$

В консервативном же случае ($\lambda_n \equiv 1$)

$$I_n(\tau, \mu) = \frac{3}{4}\left[\left(1 - \frac{x_1^{(n)}}{3}\right)\tau - \mu + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^1 I_n^{-}(\tau, \mu, \mu')\mu' d\mu' + \mu e^{-\tau/\mu}\theta(\mu)\right]. \tag{2}$$

Здесь, как обычно, функция $i_n(\mu)$ есть интенсивность излучения в диффузионном режиме для бесконечной атмосферы со свойствами „n“, k_n — соответствующий показатель диффузии, $x_1^{(n)}$ — первый коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния $\chi_n(\gamma)$ в ряд по полиномам Лежандра, а

$$M_n = 2\int_{-1}^{+1} i_n^2(\mu)\mu d\mu. \tag{3}$$

Поскольку функция $I_n^{-}(\tau, \mu, \mu_0)$ считается известной, то известна и величина $I_n(\tau, \mu)$, т. е. интенсивность излучения для однородной атмосферы в задаче Милна.

Наложим на слой n слой $n-1$ и оптическую глубину τ будем отсчитывать от верхней границы последнего. Для полученной двухслойной атмосферы можно легко записать следующие соотношения инвариантности (см., например, [3]), ($\mu \in [-1, +1]$):

$$I_{n-1,n}(\tau, \mu) = I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, \mu)e^{\frac{\tau_{n-1}-\tau}{\mu}}\theta(-\mu) +$$

$$+ 2\int_0^1 I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, -\mu')I_{n-1}(\tau_{n-1}, -\tau, -\mu, \mu')d\mu' \tag{4}$$

$$(\tau \in [0, \tau_{n-1}]),$$

$$I_{n-1,n}(\tau_{n-1} + \tau, \mu) = I_n(\tau, \mu) + I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, \mu)e^{-\tau/\mu}\theta(\mu) +$$

$$+ 2\int_0^1 I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, \mu')I_n^{-}(\tau, \mu, \mu')d\mu' \quad (\tau \in [0, \infty)), \tag{5}$$

где через $I_{n-1,n}(\tau, \mu)$ обозначена интенсивность в задаче Милна для двухслойной атмосферы. Тогда, как следует из (4) и (5), проблема будет полностью решена (без учета нормировки), если мы найдем

граничную интенсивность $I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, \mu)$. Для нее из (4), (5) и (1) имеем следующую систему уравнений ($\mu \in [0, 1]$):

$$I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, \mu) = 2\int_0^1 I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, -\mu')\rho_{n-1}(\mu, \mu')\mu' d\mu', \tag{6}$$

$$I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, -\mu) = u_n(\mu) + 2\int_0^1 I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, \mu')\rho_n^{-}(\mu, \mu')\mu' d\mu', \tag{7}$$

которая должна быть решена численно методом последовательных приближений. Здесь, как обычно, обозначено $u_n(\mu) = I_n(0, -\mu)$ — функция выхода (граничная интенсивность в задаче Милна для однородного полупространства). В частности, функция выхода для двухслойной атмосферы, как это следует из (4), дается формулой ($\mu \in [0, 1]$)

$$u_{n-1,n}(\mu) = I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, -\mu)e^{-\tau_{n-1}/\mu} + \\ + 2\int_0^1 I_{n-1,n}(\tau_{n-1}, -\mu')\sigma_{n-1}(\mu, \mu')\mu' d\mu'. \tag{8}$$

Подчеркнем, что функцию $I_{n-1,n}(\tau, \mu)$ (в частности, и функцию $u_{n-1,n}(\mu)$) следует должным образом нормировать. Нормировку мы выберем в следующем разделе статьи.

Последовательно продолжая процесс наложения на двухслойную атмосферу слоев $n-2$, $n-3, \ldots, j$, для атмосферы, состоящей из $n-j+1$ слоя, находим ($\mu \in [-1, +1]$):

$$I_{j,n}(\tau, \mu) = I_{j,n}(\tau_j, \mu)e^{\frac{\tau_j - \tau}{\mu}}\theta(-\mu) + \\ + 2\int_0^1 I_{j,n}(\tau_j, -\mu')I_j(\tau_j - \tau, -\mu, \mu')d\mu' \quad (\tau \in [0, \tau_j]), \tag{9}$$

$$I_{j,n}(\tau_j + \tau, \mu) = I_{j+1,n}(\tau, \mu) + I_{j,n}(\tau_j, \mu)e^{-\tau/\mu}\theta(\mu) + \\ + 2\int_0^1 I_{j,n}(\tau_j, \mu')I_{j+1,n}(\tau, \mu, \mu')d\mu' \quad (\tau \in [0, \infty)). \tag{10}$$

Граничная интенсивность $I_{j,n}(\tau_j, \mu)$ определяется системой уравнений ($\mu \in [0, 1]$)

$$I_{j,n}(\tau_j, \mu) = 2\int_0^1 I_{j,n}(\tau_j, -\mu')\,\rho_j(\mu, \mu')\,\mu' d\mu', \tag{11}$$

$$I_{j,n}(\tau_j, -\mu) = u_{j+1,n}(\mu) + 2\int_0^1 I_{j,n}(\tau_j, \mu')\,\rho_{j+1,n}(\mu, \mu')\,\mu' d\mu', \tag{12}$$

причем

$$u_{j,n}(\mu) = I_{j,n}(\tau_j, -\mu)\,e^{-\tau_j/\mu} + 2\int_0^1 I_{j,n}(\tau_j, -\mu')\,\sigma_j(\mu, \mu')\,\mu' d\mu'. \tag{13}$$

Итак, решение поставленной задачи дается рекуррентной системой формул (10), (12) и (13) и соотношений (9) и (11), в которых следует положить $j = 1$. Начальные условия использования указанных рекуррент следующие: $I_{n,n}(\tau, \mu, \mu_0) \equiv I_n(\tau, \mu, \mu_0)$; $I_{n,n}(\tau, \mu) \equiv I_n(\tau, \mu)$; $\rho_{n,n}(\mu, \mu_0) \equiv \rho_n^{-}(\mu, \mu_0)$. Должны также выполняться следующие интегральные соотношения, которые можно использовать как контрольные:

$$\int_{-1}^{+1} I_j(\tau_j, -\mu')\,I_{j,n}(\tau_j, \mu', \mu)\,\mu' d\mu' = \mu\int_0^1 I_j(\tau_j, -\mu')\,\sigma_j(\mu, \mu')\,\mu' d\mu' =$$

$$= \int_0^1 u_{j+1,n}(\mu')\,I_{j,n}(\tau_j, \mu', \mu)\,\mu' d\mu' -$$

$$- e^{-\tau_j/\mu}\int_0^1 I_{j,n}(\tau_j, \mu')\,\rho_{j+1,n}(\mu', \mu)\,\mu' d\mu'. \tag{14}$$

Они могут быть получены из формул (11), (12), и (1.14), (1.15).

Найдем еще асимптотическую формулу для интенсивности излучения в глубоких слоях слоя „n“. В этом случае для задачи о диффузном отражении при $(\tau - \tau_j^*) \gg 1$, где

$$\tau_j^* = \sum_{i=j}^{n-1} \tau_i, \tag{15}$$

имеем

$$I_{j,n}^{as}(\tau, \mu, \mu_0) = i_n(\mu)\,e^{-k_n(\tau - \tau_j^*)}\,U_{j,n}(\mu_0). \tag{16}$$

Функция $U_{j,n}(\mu_0)$ находится с помощью следующего рекуррентного соотношения ($j = n-1,\ n-2, \ldots, 1$):

$$U_{j,n}(\mu_0) = U_{j+1,n}(\mu_0)\, e^{-\tau_j/\mu_0} + 2\int_0^1 U_{j+1,n}(\mu')\, I_{j,n}(\tau_j, \mu', \mu_0)\, d\mu' \qquad (17)$$

при начальном условии $U_{n,n}(\mu_0) = u_n(\mu_0)\,\mu_0$. Соотношения (16) и (17) легко установить с помощью формулы (1.13) и известной асимптотики ($\tau \gg 1$) (см., например, [4], гл. II, § 4)

$$I_n^{as}(\tau, \mu, \mu_0) = i_n(\mu)\, u_n(\mu_0)\, e^{-k_n\tau}\,\mu_0. \qquad (18)$$

Что же касается задачи Милна, то соответствующая асимптотическая формула имеет вид:

$$M_n I_{j,n}^{as}(\tau, \mu) = i_n(-\mu)\, e^{k_n(\tau-\tau_j^*)} - i_n(\mu)\, e^{-k_n(\tau-\tau_j^*)}\, \overline{N}_{j,n}. \qquad (19)$$

Для величины $\overline{N}_{j,n}$ имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$\overline{N}_{j,n} = \overline{N}_{j+1,n} - 2M_n \int_0^1 I_{j,n}(\tau_j, \mu')\, U_{j+1,n}(\mu')\, d\mu' \qquad (20)$$

при начальном условии

$$\overline{N}_{n,n} = N_n = 2\int_0^1 u_n(\mu)\, i_n(-\mu)\,\mu\, d\mu. \qquad (21)$$

Формулы (19) и (20) легко находятся с помощью (10), (16) и известного [5] асимптотического выражения для однородного слоя ($\tau \gg 1$)

$$M_n I_n^{as}(\tau, \mu) = i_n(-\mu)\, e^{k_n\tau} - i_n(\mu)\, e^{-k_n\tau}\, N_n. \qquad (22)$$

Из (16), (17), (19) и (20) видно, что как в задаче о диффузном отражении, так и в задаче Милна, для расчета поля излучения на больших оптических глубинах слоя „n“ достаточно найти интенсивность излучения лишь на границах раздела слоев. К тому же структура соответствующих асимптотик остается такой же, как и для однородного слоя (ср. формулы (16) и (18), а также (19) и (22)).

3. *Нормировка решения.* Полученное решение задачи Милна должно быть соответствующим образом нормировано. Для этого поступим согласно способу нормировки, выбранному нами ранее [6, 7] в общем случае не-

однородной атмосферы, оптические свойства которой произвольным образом зависят от глубины.

Дополним рассматриваемое нами многослойное полупространство до полного четным образом (т. е. так, что оптические свойства в нем будут удовлетворять соотношениям $\lambda(\tau) = \lambda(-\tau)$ и $\chi(\gamma, \tau) = \chi(\gamma, -\tau)$; см. рис. 2). Обозначим интенсивность излучения в построенной таким

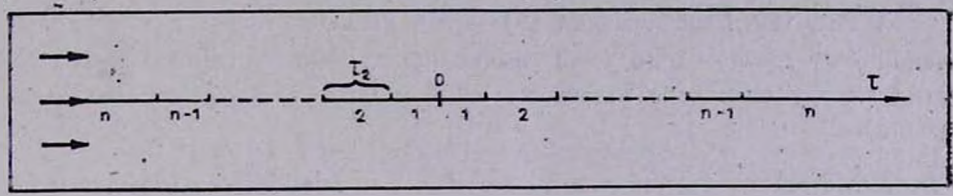

Рис. 2. Схема расположения слоев в многослойной бесконечной среде. Источники расположены на минус бесконечности. Свойства слоев симметричны относительно начала координат.

образом многослойной бесконечной атмосфере через $I^{\infty}_{1,n}(\tau, \mu)$ [$\mu \in [-1, +1]$, $\tau \in (-\infty, +\infty)$]. Очевидно, что функция $I^{\infty}_{1,n}(0, \mu)$ удовлетворяет следующей системе уравнений [7] ($\mu \in [0, 1]$):

$$I^{\infty}_{1,n}(0, \mu) = M_{1,n} u_{1,n}(\mu) + 2\int_0^1 \rho_{1,n}(\mu', \mu) I^{\infty}_{1,n}(0, -\mu')\mu' d\mu', \quad (23)$$

$$I^{\infty}_{1,n}(0, -\mu) = 2\int_0^1 \rho_{1,n}(\mu', \mu) I^{\infty}_{1,n}(0, \mu')\mu' d\mu', \quad (24)$$

где

$$M_{1,n} = 2\int_{-1}^{+1} [I^{\infty}_{1,n}(0, \mu)]^2 \mu d\mu, \quad (25)$$

а сама интенсивность излучения нормирована согласно условию

$$\frac{\lambda_1}{2}\int_{-1}^{+1} I^{\infty}_{1,n}(0, \mu)\, d\mu = 1. \quad (26)$$

Что же касается функции выхода, то должно выполняться условие нормировки [6]:

$$2\int_0^1 u_{1,n}(\mu) I^{\infty}_{1,n}(0, \mu)\mu d\mu = 1. \quad (27)$$

Эту нормировку следует учесть на всех оптических глубинах, т. е. интенсивность излучения должна быть домножена на соответствующий множитель.

Итак, для решения задачи Милна в многослойной атмосфере следует:

1. Решить задачу о диффузном отражении для выбранного набора оптических глубин (см. [1], раздел 2 и пункт А раздела 3).

2. Используя соотношения (9)—(12), последовательно для всех значений j от $j=n-1$ до $j=1$ вычислить интенсивность излучения на этих же глубинах (обе задачи на ЭВМ целесообразно решать одновременно).

3. Методом итераций решить систему уравнений (23) и (24) при учете нормировок (26) и (27). Найденную с помощью (27) нормировку функции выхода $u_{1,n}(\mu)$ учесть на всех оптических глубинах.

4. *Оптически толстые слои. Задача о диффузном отражении.* Будем считать, что оптические толщины слоев $\tau_j \gg 1$ ($j=1, 2, 3, \ldots, n-1$). Этот, значительно упрощающий проблему случай, для задачи о диффузном отражении был подробно изучен в работах Т. А. Гермогеновой и Н. В. Коновалова [8] и В. В. Иванова [9].

Следуя [8, 9], предположим, что нами решена задача о нахождении граничной интенсивности излучения $i_{j,j+1}(\mu)$ для двух смежных полупространств. Иными словами, решены системы уравнений

$$i_{j,j+1}(\mu) = u_j(\mu) + 2\int_0^1 \rho_j^{\infty}(\mu, \mu')\, i_{j,j+1}(-\mu')\,\mu' d\mu', \tag{28}$$

$$i_{j,j+1}(-\mu) = 2\int_0^1 \rho_{j+1}^{\infty}(\mu, \mu')\, i_{j,j+1}(\mu')\,\mu' d\mu' \tag{29}$$

и, следовательно, найдены как функции $i_{j,j+1}(\mu)$, так и функции $i_{j+1,j}(\mu)$. Имеют место следующие асимптотические ($\tau_j \gg 1$) формулы (см., например, [4], гл. III, § 3):

$$\rho_j^{as}(\mu, \mu_0) = \rho_j^{\infty}(\mu, \mu_0) - u_j(\mu)\, u_j(\mu_0)\, r_j, \tag{30}$$

$$\sigma_j^{as}(\mu, \mu_0) = u_j(\mu)\, u_j(\mu_0)\, t_j, \tag{31}$$

где факторы отражения r_j и пропускания t_j света оптически толстым слоем атмосферы определяются соотношениями

$$r_j = N_j e^{-k_j \tau_j} t_j = \frac{M_j N_j e^{-2k_j \tau_j}}{1 - N_j^2 e^{-2k_j \tau_j}}. \tag{32}$$

Согласно [8, 9] асимптотическое выражение для граничной интенсивности излучения в задаче о диффузном отражении $I^{as}_{j,n}(\tau_j, \mu, \mu_0)$ следует искать в виде

$$I^{as}_{j,n}(\tau_j, \mu, \mu_0) = [a_{j,n} i_{j,j+1}(\mu) - c_{j,n} i_{j+1,j}(-\mu)] u_j(\mu_0) \mu_0, \tag{33}$$

причем

$$\rho^{as}_{j,n}(\mu, \mu_0) = \rho^{\infty}_j(\mu, \mu_0) - u_j(\mu) u_j(\mu_0) R_{j,n}, \tag{34}$$

$$\sigma^{as}_{j,n}(\mu, \mu_0) = u_n(\mu) u_j(\mu_0) T_{j,n}. \tag{35}$$

Величины $a_{j,n}$, $c_{j,n}$, а также факторы отражения $R_{j,n}$ и пропускания $T_{j,n}$ света многослойной средой подлежат определению. С помощью формул, приведенных во 2-ом разделе настоящей работы [1], а также (28)—(31) и (33), (34), нетрудно получить, что

$$a_{j,n} = \frac{(1 + R_{j+1,n}\beta_{j+1,j}) t_j}{(1 + r_j \beta_{j,j+1})(1 + R_{j+1,n}\beta_{j+1,j}) - r_j R_{j+1,n} \alpha^2_{j,j+1}}, \tag{36}$$

$$c_{j,n} = \frac{R_{j+1,n}\alpha_{j,j+1}}{1 + R_{j+1,n}\beta_{j+1,j}} a_{j,n}, \tag{37}$$

где

$$\alpha_{j,j+1} = \alpha_{j+1,j} = 2\int_0^1 i_{j+1,j}(\mu) u_j(\mu) \mu d\mu, \tag{38}$$

$$\beta_{j,j+1} = 2\int_0^1 i_{j,j+1}(-\mu) u_j(\mu) \mu d\mu. \tag{39}$$

Величины $\alpha_{j,j+1}$ и $\beta_{j,j+1}$ уже считаются известными. Что же касается фактора пропускания $R_{j,n}$, то для его нахождения получаем следующую рекуррентную формулу:

$$R_{j,n} = r_j - \cfrac{t_j^2}{r_j + \cfrac{1}{\beta_{j,j+1} - \cfrac{\alpha^2_{j,j+1}}{\beta_{j+1,j} + R^{-1}_{j+1,n}}}} \tag{40}$$

с начальным условием $R_{n,n} = r_n$. Заметим, что с помощью (40) формулу (35) можно заметно упростить. В результате оказывается, что

$$a_{j,n} = (r_j R_{j,n} + t_j^2 - r_j^2) t_j^{-1}, \tag{41}$$

т. е. коэффициент $a_{j,n}$ непосредственно выражается только через факторы отражения и пропускания. С помощью формул (30), (33), (35)—(39) и (I.17) нетрудно получить:

$$T_{j,n} = t_n \overline{T}_{j,n} = t_n \prod_{i=j}^{n-1} \frac{c_{i,n}}{R_{i+1,n}}. \tag{42}$$

Заметим, что относительный фактор пропускания света $\overline{T}_{j,n}$ (эта величина неоднократно будет нам встречаться ниже) отличается от нуля даже в том случае, если $\tau_n \to \infty$, т. е. $t_n \to 0$ и $T_{j,n} \to 0$.

Итак, в задаче о диффузном отражении для слоя, состоящего из однородных слоев большой оптической толщины, граничная интенсивность излучения будет определяться формулой (33), где коэффициенты $a_{j,n}$ и $c_{j,n}$ находятся с помощью соотношений (36) и (37) или же (37) и (41). Факторы отражения и пропускания света даются соответственно выражениями (40) и (42).

5. *Оптически толстые слои. Задача Милна.* В этом случае при $\tau_j \gg 1$, $\mu \in [-1, +1]$

$$I_{j,n}^{as}(\tau_j, \mu) = \left[\frac{1 + r_j \beta_{j,j+1}}{r_j \alpha_{j,j+1}} i_{j+1,j}(-\mu) - i_{j,j+1}(\mu) \right] A_{j,n}, \tag{43}$$

где

$$A_{j,n} = \frac{t_{j+1}}{r_{j+1}} \frac{r_j}{t_j} \frac{c_{j,n}}{R_{j+1,n}} A_{j+1,n}. \tag{44}$$

В справедливости формулы (43) можно убедиться, подставив ее в исходные соотношения (11) и (12) и воспользовавшись (28)—(30), (34), (36)—(39). Подстановка (43) в (13) дает

$$u_{j,n}^{as}(\mu) = \frac{t_j}{r_j} A_{j,n} u_j(\mu), \tag{45}$$

откуда следует, что $t_n A_{n,n}/r_n = 1$. С помощью этого условия вместо (44) окончательно находим

$$A_{j,n} = r_j \overline{T}_{j,n}/t_j. \tag{46}$$

Таким образом

$$u^{as}_{j,n}(\mu) = \overline{T}_{j,n}\, u_j(\mu). \tag{46а}$$

Формула (43) вместе с (9) и (10) и известными [2] асимптотиками для интенсивности излучения в однородном оптически толстом слое позволяет в явном виде выразить $I^{as}_{1,n}(\tau, \mu)$ ($\tau \in [0, \infty)$) через функции $I^{-}_{j}(\tau, \mu, \mu_0)$. При этом следует также знать вспомогательные величины $i_{j,j+1}(\mu)$, $i_{j+1,j}(\mu)$ и $u_j(\mu)$, которые зависят только от одной угловой переменной ($j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$). Получающиеся окончательные выражения довольно громоздки и мы их приводить не будем.

Заслуживает внимания случай, когда во всех (или некоторых смежных) слоях атмосферы $\lambda_j \to 1$. Соответствующий предельный переход может быть осуществлен с помощью асимптотических формул, приведенных в [8, 9].

Теперь нам осталось лишь должным образом нормировать полученные соотношения. Для этого следует найти интенсивность излучения $I^{-}_{1,n}(0, \mu)$ на границах двух смежных многослойных полупространств, которая удовлетворяет системе уравнений (23) и (24). Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае оптически толстых слоев

$$I^{-}_{1,n}(0, \mu) = \frac{M_1 + R_{1,n} N_1}{M_1 - (1 - N_1) R_{1,n}}\, i_1(\mu) - \frac{R_{1,n}}{M_1 - (1 - N_1) R_{1,n}}\, i_1(-\mu), \tag{46б}$$

причем

$$u^{as}_{1,n}(\mu) = \left(1 - \frac{1 - N_1}{M_1} R_{1,n}\right) u_1(\mu), \tag{47}$$

$$M_{1,n} = M_1 \frac{M_1 + (1 + N_1) R_{1,n}}{M_1 - (1 - N_1) R_{1,n}}. \tag{48}$$

Заметим, что формула (46б) не изменит свой вид, если лишь слой «1» будет иметь большую, а остальные слои — 2, 3, ..., $n-1$ — произвольные оптические толщины. Если полупространство однородно, то $R_{1,n} \equiv 0$, и формулы (46б)—(48) дают стандартный результат.

Итак, нормированная выбранным образом функция выхода для многослойной среды дается формулой (47), где величина $R_{1,n}$ находится с помощью рекуррентного соотношения (40). В свою очередь, без соответствующей нормировки мы имеем выражение (46а) (в котором нужно положить $j = 1$). Следовательно, нормировочный множитель C_M, на который надо умножить найденные значения интенсивности излучения в за-

даче Милна для атмосферы, состоящей из слоев большой оптической толщины, оказывается равным

$$C_M = \left(1 - \frac{1 - N_1}{M_1} R_{1,n}\right) \overline{T}_{1,n}^{-1}. \tag{49}$$

Величина эта имеет простой физический смысл. Представим себе, что среда у нас однородная и имеет свойства „1". Тогда $R_{1,n} \equiv 0$, $\alpha_{j,j+1} = M_1^{-1}$; $\beta_{j,j+1} = \beta_{j+1,j} = N_1 M_1^{-1}$ и из (42) с помощью (32), (36) и (37) находим, что $\overline{T}_{1,n} = e^{-k_1\tau^*}$, где τ^* есть оптическая толщина слоев, лежащих над слоем n (см. формулу (15)). Следовательно, $C_M = e^{k_1\tau^*}$. Как известно [2], в задаче Милна для однородной атмосферы удаление с ее поверхности слоя толщины τ^* увеличивает интенсивность излучения на всех глубинах в $e^{k_1\tau^*}$ раз. Здесь же мы *прибавляли* к исходному слою „1" слой толщины τ^*, т. е. *уменьшали* интенсивность излучения в $e^{-k_1\tau^*}$ раз. Поэтому-то соответствующий нормировочный множитель у нас оказался равным $e^{k_1\tau^*}$.

В случае многослойной атмосферы множитель C_M мы могли бы учесть на самом начальном этапе решения задачи, введя его в уравнение (1) (для этого, конечно, предварительно необходимо было бы найти $R_{1,n}$ и $T_{1,n}$). В результате, например, первое слагаемое в правой части уравнения (7) у нас было бы не $u_n(\mu)$, а $C_M u_n(\mu)$. Тогда после завершения решения задачи Милна мы получили бы уже нормированный результат. Из сказанного следует, что величина C_M есть то число раз, в которое увеличивается на всех оптических глубинах интенсивность излучения (для фиксированного μ) в многослойной задаче Милна при удалении с поверхности атмосферы $(n-1)$-го оптически толстого слоя.

Нетрудно получить и более общий результат. При удалении с поверхности j оптически толстых слоев ($j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$) соответствующее возрастание интенсивности будет определяться величиной

$$C_M^{(j)} = \left(1 - \frac{1 - N_1}{M_1} R_{1,n}\right) \left[\left(1 - \frac{1 - N_{j+1}}{M_{j+1}} R_{j+1,n}\right) \prod_{i=1}^{j} \frac{c_{i,n}}{R_{i+1,n}}\right]^{-1}. \tag{50}$$

Очевидно, что $C_M^{(n-1)} = C_M$.

Если все слои атмосферы оптически толстые, то заметно упростятся также и формулы (16) и (19), определяющие интенсивность излучения на больших глубинах слоя „n" соответственно в задачах о диффузном отражении и Милна.

Именно, подставляя в (17) величину (33) и учитывая (36)—(39), получим

$$U^{as}_{j,n}(\mu_0) = u_j(\mu_0)\,\overline{T}_{j,n}\mu_0. \tag{51}$$

Следовательно, при $(\tau - \tau^*_j) \gg 1$, $\tau^*_j \gg 1$

$$I^{as}_{j,n}(\tau, \mu, \mu_0) = i_n(\mu)\,u_j(\mu_0)\,e^{-k_n(\tau-\tau^*_j)}\,\mu_0\overline{T}_{j,n}. \tag{52}$$

В свою очередь, подстановка (43) и (51) в (20) дает

$$\overline{N}^{as}_{j,n} = \overline{N}^{as}_{j+1,n} - M_n\overline{T}^2_{j+1,n}\,l_{j,n}, \tag{53}$$

где

$$l_{j,n} = \frac{(1 + r_j\beta_{j,j+1})\beta_{j+1,j} - r_j\alpha^2_{j,j+1}}{(1 + r_j\beta_{j,j+1})(1 + R_{j+1,n}\beta_{j+1,j}) - r_j R_{j+1,n}\alpha^2_{j,j+1}}, \tag{54}$$

причем, как следует из (46), $\overline{T}_{n,n} \equiv 1$.

Из (53) окончательно находим

$$\overline{N}^{as}_{j,n} = N_n - M_n\sum_{i=j}^{n-1}\overline{T}^2_{i+1,n}\,l_{i,n}. \tag{55}$$

Таким образом, без учета нормировки (49) интенсивность излучения в задаче Милна на больших глубинах слоя „n“ определяется формулами (19) и (55) (в которых следует положить $j = 1$). В частности, если среда однородная и имеет свойства слоя n, то из (54) и (32) получаем

$$l_{j,n} = \frac{N_n}{M_n}\left(1 - e^{-2k_n\tau_j}\right). \tag{56}$$

Поскольку $\overline{T}_{j,n} = e^{-k_n\tau^*_j}$ и $C_M = e^{k_n\tau^*_1}$, то формулы (55) и (19) дают нам требуемый результат, т. е. выражение (22).

6. *Заключение.* Итак, рассматривая многослойную плоскую атмосферу, мы получили алгоритм решения двух основных проблем: задачи о диффузном отражении и задачи Милна. Для полного же решения проблемы рассеяния монохроматического излучения в многослойной среде следует еще изучить вопрос о вычислении функции Грина, что позволит производить расчет поля излучения в атмосфере при произвольных заданных внутренних источниках. Этому мы намерены посвятить отдельную работу.

Кроме того, возможны и другие обобщения. Важно, например, полученные результаты обобщить на случай переноса поляризованного излучения, а также рассеяния света с перераспределением по частотам. Первую из указанных задач мы также намерены рассмотреть в ближайшее время.

Главная астрономическая
обсерватория АН УССР

LIGHT SCATTERING IN MULTILAYER ATMOSPHERES. II. THE MILNE PROBLEM

E. G. YANOVITSKIJ

A plane semi-infinite atmosphere consisting of an arbitrary number of homogeneous layers with known optical thicknesses is considered. The effective algorithm of radiative field determination for the Milne problem is given. The case of layers of large optical thickness is studied in detail. Simple asymptotic formulae are found for the case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ж. М. Длугач, Э. Г. Яновицкий*, Астрофизика, 23, 303, 1985.
2. *В. В. Иванов*, Астрон. ж., 52, 217, 1975.
3. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 56, 833, 1979.
4. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
5. *H. C. van de Hulst*, Bull. Astron. Inst. Netherl., 20, 77, 1968.
6. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 55, 713, 1978.
7. *Э. Г. Яновицкий*, Астрон. ж., 57, 1277, 1980.
8. *Т. А. Гермогенова, Н. В. Коновалов*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 14, 928, 1974.
9. *В. В. Иванов*, Тр. АО ЛГУ, 52, 3, 1975.