АСТРОФИЗИКА

ТОМ 24 АПРЕЛЬ, 1986 ВЫПУСК 2

УДК: 52:530.51

О ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С УЧЕТОМ РОЛИ ВАКУУМА. I

Л. Ш. ГРИГОРЯН, Г. С. СААКЯН

Поступила 18 июля 1985

Развито представление о том, что при наличии гравитации из-за нарушения свойств симметрии вакуума возникает определенное поле натяжений. Предполагается, что гравитационная «постоянная» определяется локальным состоянием вакуума. Выведены уравнения, описывающие гравитационное поле и распределение вещества.

1. *Введение.* В однородном и изотропном пространстве — времени Минковского вакуумные поля образуют ненаблюдаемый фон. При наличии полей вакуум приобретает свойства, сходные со свойствами материальных сред (поляризуется). Примечательно, что в вакууме возникает поле анизотропных натяжений с определенной плотностью энергии даже в отсутствие внешних полей, когда однородность пространства нарушена наличием макроскопических тел. Примером такого рода является эффект Казимира [1]. Обобщая это обстоятельство, мы предполагаем, что при наличии гравитации, в результате нарушения свойств однородности и изотропности (искривление) пространства—времени, в вакууме должно существовать особое поле «упругих натяжений». По сравнению с миром Минковского в искривленном 4-пространстве вакуум находится как бы в «деформированном состоянии». При этом речь идет не о квантовых поляризационных эффектах, которые общеизвестны [2]. В [3, 4] это гипотетическое вакуумное поле описывалось определенным тензором энергии — импульса, который учитывался в правой части уравнений Эйнштейна. При таком подходе распределение масс, поле вакуумных натяжений и метрика образуют единый комплекс, определяемый решениями уравнений поля. В пост-ньютоновском приближении из требования согласия с обычной теорией гравитации был установлен ряд свойств вакуумного тензора натяжений. В частности, было показано, что вакуумные эффекты играют заметную роль только в случае чрезвычайно сильных гравитационных полей. Были найдены асимптотические соотношения для уравнений состоя-

ния вакуума и установлена принципиальная возможность существования сверхплотных небесных тел с массами, намного превышающими массу Солнца.

Ниже предполагается, что гравитационная постоянная G определяется локальными свойствами пространства—времени (состоянием вакуума) и поэтому не является строго постоянной. Ньютоновское значение $G_0 = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см^3 г$^{-1}$ с$^{-2}$ достигается в предельном случае плоского пространства—времени для однородного и изотропного вакуума. Такой подход гармонирует с идеями, лежащими в основе эйнштейновской теории гравитации.

2. *Выражение действия.* Будем исходить из следующего выражения для действия:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi}\int G^{-1} R \sqrt{-g}\, d\Omega + \frac{1}{c}\int (\varepsilon + \rho c^2)\sqrt{-g}\, d\Omega, \qquad (1)$$

где ρc^2 — плотность полной энергии звездного вещества, ε — плотность энергии поля вакуумных натяжений, R — скалярная кривизна пространства—времени, а G — переменная «константа» гравитационного притяжения масс. В (1) не учтен член S_{mV}, соответствующий непосредственному взаимодействию вещества с вакуумом. Здесь мы его считаем пренебрежимо малым по сравнению с остальными слагаемыми в действии. Этот член безусловно существует и имеет двоякую природу: квантовую, обусловленную поляризационными эффектами, и классическую. В [3, 4] сделана попытка его учета путем введения понятия «силы трения» между звездным веществом и вакуумом. Выражение действия вакуума мы записали в том же виде, что и для вещества (газ, жидкость). Однако это не означает, что вакуумное поле натяжений по своим гидродинамическим свойствам полностью сходно с материальной средой. Оно порождено искривлением пространства—времени и поэтому анизотропно: закон Паскаля для вакуума не имеет места. В отличие от звездного вещества, здесь в зависимости от симметрии поля приходится иметь дело с несколькими уравнениями состояния, представляющими зависимость «давлений» в разных направлениях от плотности энергии ε. Так, например, в простейшем случае центрально-симметрического поля мы имеем два уравнения состояния вакуумного поля — для радиального $p = p(\varepsilon)$ и поперечного $p_\perp = p_\perp(\varepsilon)$ направлений.

Теперь обсудим вопрос о переменном G. Мы полагаем, что его величина определяется локальным состоянием вакуума:

$$G = G(y, G_0) = G_0/\gamma(y), \qquad (2)$$

где γ — функция безразмерного аргумента $y = \varepsilon/\eta$, η — параметр, характеризующий поле тяготения, а

$$G(0, G_0) = G_0, \quad \gamma(0) = 1.$$

Разумеется, эффекты, связанные с непостоянством G, могут иметь значение только в космогонии сверхплотных небесных тел. Для обычных звезд тензор кривизны практически равен нулю и поэтому с большой точностью $G = G_0$. Для сферически-симметрического небесного тела из вырожденного вещества его масса, радиус, распределение масс и само гравитационное поле определяются значением плотности энергии $\rho_0 c^2$ в центре звезды [5]. Поэтому разумно принять $\eta = \rho_0 c^2$. При $|\varepsilon| \ll \rho_0 c^2$ вакуумные эффекты должны быть малыми и $|G - G_0| \ll G_0$. В общем случае, когда гравитационное поле не стационарно, смысл параметра η нуждается в уточнении. В любом случае существенно, что G мы не считаем независимой полевой переменной: $\delta G = (\partial G/\partial\varepsilon)\,\delta\varepsilon$, где $\delta\varepsilon$ определяется выражением (13). Таким образом, δG зависит от вариации метрического тензора g^{ik}. В этом состоит отличие нашей интерпретации теории гравитации от тензорно-скалярного варианта (см., например, [5]), в котором G считается независимой полевой функцией. В соответствии с этим действие гравитирующих масс должно содержать дополнительное слагаемое

$$\frac{c^3}{16\pi}\int \omega g^{ik} G^{-3} G_{,i} G_{,k} \sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{3}$$

$G_{,i} \equiv \partial G/\partial x^i$, а ω — постоянная в теории Йордана-Бранса-Дикке [6—8] и некоторая функция от G в теории Нордведта [9]. Поэтому в этих теориях существует дополнительное уравнение, определяющее зависимость G от пространственно-временных координат. В нашем случае действие (1) не должно содержать слагаемое (3), а функция (2) должна быть как-то задана.

3. *Уравнения гидродинамики.* Пусть $q = q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(s)}$ и $\sigma = \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \ldots, \sigma^{(f)}$ — переменные, описывающие материальные и вакуумные поля. Из условия экстремальности действия (1) относительно вариаций переменных q и σ при фиксированных g_{ik} получаются уравнения движения вещества

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\rho)}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial(\sqrt{-g}\rho)}{\partial q_{,n}} = 0 \tag{4}$$

и вакуума

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\varepsilon)}{\partial\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial(\sqrt{-g}\varepsilon)}{\partial\sigma_{,n}} =$$

$$= \frac{c^4}{16\pi G_0}\left[\sqrt{-g}R\frac{d\gamma}{d\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^n}\left(\sqrt{-g}R\frac{d\gamma}{d\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma_{,n}}\right)\right]. \quad (5)$$

В теории гравитации представляют интерес дифференциальные уравнения для тензоров энергии—импульса вещества и вакуума. Для их вывода рассмотрим преобразование координат

$$x'^i = x^i + \xi^i(x), \quad (6)$$

где $\xi^i(x)$ — произвольные бесконечно малые функции. При этом действия гравитационного поля S_g, вакуума S_v и вещества S_m будучи скалярами не изменяются. Вместо S_g и S_v удобно рассмотреть их сумму, так как при варьировании $S_g + S_v$ и S_m члены, обусловленные вариациями δq и $\delta\sigma$, выпадают в силу уравнений движения (4), (5). В результате остаются только члены, обусловленные изменениями компонентов метрического тензора δg_{ik}. Учитывая это обстоятельство, находим

$$\delta(S_g + S_v) = \delta\int\left(-\frac{c^3}{16\pi G_0}\gamma R + \frac{1}{c}\varepsilon\right)\sqrt{-g}\,d\Omega =$$

$$= -\frac{c^3}{16\pi G_0}(J_1 + J_2 + J_3) + J_4, \quad (7)$$

где

$$J_1 = \int\gamma\left(R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}d\Omega,$$

$$J_2 = \int\gamma g^{ik}\sqrt{-g}\,\delta R_{ik}d\Omega, \quad J_3 = \int R\sqrt{-g}\,\delta\gamma\, d\Omega, \quad (8)$$

$$J_4 = \frac{1}{c}\delta\int\varepsilon\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{2c}\int\tau_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}d\Omega, \quad (9)$$

а

$$\tau_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\varepsilon\sqrt{-g})}{\delta g^{ik}} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left[\frac{\partial(\varepsilon\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^n}\frac{\partial(\varepsilon\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}_{,n}}\right] \quad (10)$$

есть тензор энергии—импульса вакуума (тензор натяжений).

Вычислим J_2. Имея в виду, что вариации символов Кристоффеля Γ^l_{ik} являются компонентами тензора и используя тождество

$$\delta R_{ik} \equiv (\delta\Gamma^l_{ik})_{;\,l} - (\delta\Gamma^l_{il})_{;\,k},$$

находим

$$J_2 = \int \gamma\,(g^{ik}\,\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\,\delta\Gamma^k_{ik})_{;\,l}\sqrt{-g}\,d\Omega =$$

$$= -\int \gamma_{,\,l}\,(g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik})\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

Подставив сюда выражения символов Кристоффеля, после преобразований получим

$$J_2 = -\int g^{ln}\left[\gamma_{,\,i}\left(g_{kl,\,n} - \frac{1}{2}g_{ln,\,k}\right) - \frac{1}{2}\gamma_{,\,l}\,g_{ik,\,n}\right]\sqrt{-g}\,\delta g^{ik}\,d\Omega +$$

$$+ \int \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\gamma_{,\,l}\,(g^{ik}g^{ln} - g^{in}g^{kl})\sqrt{-g}\right]\delta g_{ni}\,d\Omega.$$

Во втором интеграле воспользуемся равенством

$$\delta g_{ni} = -g_{np}\,g_{im}\,\delta g^{pm},$$

затем произведем переобозначение индексов $p \leftrightarrow i$, $m \leftrightarrow k$ и симметризуем полученное выражение по индексам i, k:

$$J_2 = -\frac{1}{2}\int\left\{g^{ln}\left[\gamma_{,\,i}\left(g_{kl,\,n} - \frac{1}{2}g_{ln,\,k}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \gamma_{,\,k}\left(g_{il,\,n} - \frac{1}{2}g_{ln,\,i}\right) - \gamma_{,\,l}\,g_{ik,\,n}\right] +$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{-g}}\,g_{ip}g_{kn}\,\frac{\partial}{\partial x^m}\left[\gamma_{,\,l}\,(g^{mp}g^{ln} + g^{mn}g^{lp} - 2\,g^{pn}g^{lm})\sqrt{-g}\right]\right\} \times$$

$$\times \sqrt{-g}\,\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Этот результат можно упростить, рассмотрев тензор

$$A^{pnm} \equiv \frac{1}{2}\gamma_{,\,l}\,(g^{mp}g^{ln} + g^{mn}g^{lp} - 2g^{pn}g^{lm})$$

и свертку его дивергенции

$$g_{ip}g_{kn}A^{pnm}_{;\,m} = g_{ip}g_{kn}\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^m}(A^{pnm}\sqrt{-g}) + \Gamma^p_{sm}A^{snm} + \Gamma^n_{sm}A^{psm}\right]. \tag{11}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что правая часть (11) сводится к подынтегральному выражению в J_2, а левая часть равна $\gamma_{;ik} - \gamma^{n}_{;n} g_{ik}$, поэтому

$$J_2 = -\int (\gamma_{;ik} - \gamma^{n}_{;n} g_{ik}) \sqrt{-g}\,\delta g^{ik} d\Omega. \tag{12}$$

Перейдем к вычислению J_3. Для этого необходимо знать вариацию плотности энергии вакуума. Используя (10), ее можно выразить через вакуумный тензор натяжений:

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{2} (\tau_{ik} + \varepsilon g_{ik})\, \delta g^{ik}. \tag{13}$$

Эта формула дает формальное решение вопроса, ибо предполагает знание τ_{ik}. Величины ε и τ_{ik} можно было бы вычислить, имея конкретное представление о физическом состоянии деформированного вакуума (зная функцию $\varepsilon(\sigma)$). Не имея такой возможности, за основу примем формулу (13), полагая, что при решении задач космогонии, вид τ_{ik} будет определен косвенным путем, используя симметрию поля и другие физические соображения. Таким образом, можно написать

$$J_3 = \frac{1}{2} \int R \frac{d\gamma}{d\varepsilon} (\tau_{ik} + \varepsilon g_{ik}) \sqrt{-g}\,\delta g^{ik} d\Omega. \tag{14}$$

Подставляя (8), (12), (14) и (9) в (7), приходим к выражению

$$\delta(S_g + S_v) = -\frac{c^3}{16\pi G_0} \int \Big[\gamma \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) - \gamma_{;ik} + \gamma^{n}_{;n} g_{ik} + \\ + \frac{1}{2} (\tau_{ik} + \varepsilon g_{ik}) R \frac{d\gamma}{d\varepsilon} - \frac{8\pi G_0}{c^4} \tau_{ik} \Big] \sqrt{-g}\,\delta g^{ik} d\Omega. \tag{15}$$

Аналогичным образом из условия инвариантности S_m относительно бесконечно-малых преобразований координат и учитывая уравнения (4), находим

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int t_{ik} \sqrt{-g}\,\delta g^{ik} d\Omega, \tag{16}$$

где t_{ik} — тензор энергии-импульса вещества:

$$t_{ik} = (\rho c^2 + P) u_i u_k - P g_{ik},$$

$u^k = dx^k/ds$ — гидродинамическая скорость вещества ($u^k u_k = 1$).

При преобразованиях (6) вариации g^{ik} определяются формулой

$$\delta g^{ik} = \xi^{i;\,k} + \xi^{k;\,i}.$$

Подставляя ее в (16) и (15), ввиду произвольности функций $\xi^i(x)$ из условий $\delta S_m = 0$, $\delta(S_g + S_v) = 0$ приходим к уравнениям

$$t^k_{i;\,k} = 0, \tag{17}$$

$$\left[\gamma\left(R^k_i - \frac{1}{2}R\delta^k_i\right) - \gamma^{;\,k}_{;\,i} + \gamma^{;\,n}_{;\,n}\delta^k_i + \frac{1}{2}(\tau^k_i + \varepsilon\delta^k_i)\,R\frac{d\gamma}{d\varepsilon} - \frac{8\pi G_0}{c^4}\tau^k_i\right]_{;\,k} = 0. \tag{18}$$

Для любого вектора A^n

$$A^n_{;\,kl} - A^n_{;\,lk} = -A^m R^n_{mkl},$$

поэтому из (18) получаем

$$\tau^k_{i;\,k} = -(\tau^k_i + \varepsilon\delta^k_i)\frac{\partial}{\partial x^k}\ln\left(1 - \frac{c^4}{16\pi G_0}R\frac{d\gamma}{d\varepsilon}\right). \tag{19}$$

В случае $\gamma \equiv 1$ уравнения (17) имеют место и для вакуума: $\tau^k_{i;\,k} = 0$.

4. *Уравнения гравитационного поля.* Варьируя действие при фиксированных q и c, получаем уравнения гравитационного поля. При этом предполагаются фиксированными условия на бесконечности и в центре небесного тела (плотность массы). Последнее условие по сути дела предполагалось в предыдущем разделе при выводе уравнений движения. Изменение действия, обусловленное вариациями компонентов метрического тензора, определяется суммой выражений (15), (16). Теперь δg^{ik} являются произвольными, поэтому

$$\gamma\left(R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik}\right) - \gamma_{;\,ik} + \gamma^{;\,n}_{;\,n}g_{ik} + \frac{1}{2}(\tau_{ik} + \varepsilon g_{ik})\,R\frac{d\gamma}{d\varepsilon} =$$

$$= \frac{8\pi G_0}{c^4}(t_{ik} + \tau_{ik}). \tag{20}$$

К этой системе уравнений необходимо добавить уравнения гидродинамики (17). Что же касается (19), то они вытекают из (17) и (20).

В (20) предполагается, что тензоры t_{ik} и τ_{ik} известны. Здесь вопрос сводится к знанию уравнений состояния вещества $P = P(\rho)$ и вакуума $p_k = p_k(\varepsilon)$. Первое из них известно с достаточной степенью точности во всем диапазоне плотностей для изоэнтропической среды, какой является вырожденная сверхплотная плазма. Именно этот случай представляет интерес, так как предполагаемые вакуумные эффекты могут играть заметную роль только в теории сверхплотных небесных тел. Сложнее задача об уравнениях состояния вакуума. Уже отмечалось, что в искривленном пространстве — времени вакуум является неизотропной средой. По этой причине мы имеем дело с несколькими уравнениями состояния, число которых определяется симметрией гравитационного поля (индекс при вакуумном давлении p_k указывает на это обстоятельство). В рамках термодинамического рассмотрения нам не удалось решить вопрос об этих уравнениях состояния. Но очевидно, что τ_{ik} должен определяться полевыми величинами. Руководствуясь этим соображением, а также учитывая ограничения, накладываемые на теорию постньютоновским приближением, в случае статистического гравитационного поля можно получить правдоподобные ковариантные выражения для вакуумного тензора натяжений. Эти вопросы будут исследованы в нашей следующей работе (см. также [3, 4]).

Наконец, обсудим вопрос о функции (2). В (20) предполагается, что она должна быть как-то задана. Для ее нахождения начало отсчета $y = \varepsilon/\rho_0 c^2$ сместим на Δy: $y = y' + \Delta y$, где y' — значение $\varepsilon/\rho_0 c^2$ в новой шкале отсчета. Гравитационную постоянную при $y' = 0$ обозначим через $G_{\Delta y} = G(\Delta y, G_0)$. В качестве гипотезы будем предполагать, что имеет место принцип инвариантности, согласно которому при любом Δy гравитационная постоянная должна выражаться через y' и $G_{\Delta y}$ с помощью одной и той же функции (2), т. е. $G = G(y', G_{\Delta y})$. Иными словами,

$$G(y', G_{\Delta y}) = G[y - \Delta y,\ G(\Delta y,\ G_0)]$$

не должно зависеть от Δy, поэтому

$$G[y - \Delta y,\ G(\Delta y,\ G_0)] = G(y,\ G_0). \tag{21}$$

Принцип инвариантности был сформулирован в 40-е годы Амбарцумяном [10] и в последующем применялся к решению большого числа задач. Выражения, аналогичные (21), имеют место также в методе ренормализационной группы квантовой теории полей (см. [11] и приведенные там ссылки), где их называют соотношениями функциональной автомодельности [12]. Равенство (21) представим в виде

$$\gamma(y) = \gamma(\Delta y)\,\gamma(y - \Delta y),$$

откуда следует, что $\gamma(y) = \exp(-by)$, где b — безразмерная постоянная. Таким образом:

$$G = G_0 e^{b\varepsilon/\rho_0 c^2}.$$

Примечательно, что dG оказалось пропорциональным произведению G на изменение энергии вакуума $d\varepsilon$, в согласии с представлением о том, что гравитационная постоянная должна быть проявлением свойств упругости вакуума.

Институт прикладных проблем
физики АН АрмССР
Ереванский государственный
университет

ON THE THEORY OF GRAVITATION, TAKING INTO ACCOUNT THE ROLE OF VACUUM. I

L. SH. GRIGORIAN, G. S. SAHAKIAN

The paper develops the idea on a definite field of vacuum tensions appearing due to the violation of its symmetry properties caused by gravitation. The gravitational "constant" is assumed to be defined by the local state of vacuum. Equations describing the gravitational field and the mass distribution are deduced.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко*, Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях, Атомиздат, М., 1980.
2. *Н. Биррелл, П. Девис*, Квантованные поля в искривленном пространстве—времени, Мир, М., 1984.
3. *Л. Ш. Григорян, Г. С. Саакян*, Докл. АН СССР, 274, 1352, 1984; Астрофизика, 20, 615, 1984.
4. *L. Sh. Grigorian, G. S. Sahakian*, Astrophys. and Space Sci., 104, 19, 1984.
5. *Г. С. Саакян*, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, Наука, М., 1972.
6. *P. Jordan*, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig, 1955.
7. *P. Jordan*, Rev. Mod. Phys., 34, 596, 1962.
8. *C. Brans, R. H. Dicke*, Phys. Rev., 124, 925, 1961.
9. *K. Nordtvedt*, Astrophys. J., 161, 1059, 1970.
10. *В. А. Амбарцумян*, Докл. АН СССР, 38, 257, 1943.
11. *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей, Наука, М., 1984.
12. *Д. В. Ширков*, Теор. и мат. физ., 60, 218, 1984.