АСТРОФИЗИКА

ТОМ 24 . АПРЕЛЬ, 1986 ВЫПУСК 2

УДК: 521.19:517.952

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО КОЛЛАПСА БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ

Е. А. МАЛКОВ

Поступила 18 июня 1984

Принята к печати 2 декабря 1985

В работе исследуется устойчивость семейства нестационарных моделей, обладающих одинаковой полной энергией, но отличающихся энергией хаотического движения. Семейство включает, как предельные случаи, стационарную функцию распределения однородного шара Камма и пылевую функцию распределения, соответствующую космологическому решению Фридмана с отрицательной полной энергией. Показано, что все модели, за исключением стационарной, неустойчивы относительно радиальных возмущений, в то время как относительно квадрупольного возмущения модель становится неустойчивой, когда отношение энергии хаотического движения к полной энергии в момент времени, соответствующий максимальной скорости расширения, становится меньше 0.62.

1. В рамках схемы, по которой скопления галактик (галактики) образуются в результате скучивания протогалактик (газово-звездных комплексов, шаровых скоплений), их эволюцию должны представлять модели, основанные на решениях бесстолкновительного кинетического уравнения и уравнения Пуассона. Давно известно поведение малых возмущений однородного фона частиц с нулевыми случайными скоростями, это известные гидродинамические решения Боннора для пыли [1]. При наличии дисперсии скоростей задача о развитии возмущений в однородном, изотропном, бесстолкновительном мире решалась в работе [2]. Существуют точные пылевые решения, описывающие, как эволюционируют объекты типа галактик или скопления галактик, отпочковавшись от остального фона. Сферически-симметричные решения [3] служат неплохим приближением на ранних стадиях фрагментации, однако эти решения на стадии сжатия неустойчивы по отношению к возмущению, переводящему шар в эллипсоид. Коллапс однородного пылевого эллипсоида исследовался в работах [4, 5] и др. Эволюция такого эллипсоида приводит к сингулярности типа «блин».

Наша задача заключается в выяснении вопроса: каким образом дисперсия скоростей влияет на поведение возмущений коллапсирующего бесстолкновительного шара, в частности, как дисперсия скоростей противодействует росту возмущения, переводящего шар в сфероид?

2. В качестве невозмущенной модели следует подобрать семейство решений бесстолкновительного кинетического уравнения и уравнения Пуассона, описывающих системы с одинаковой полной энергией E_T, но отличающихся энергией хаотического движения частиц. В работе [6] найдено семейство функций распределения, описывающих нелинейные пульсации однородного шара Камма [7]. В лагранжевых переменных функция распределения имеет вид

$$f_0 \propto \left[\omega^2 (r_0^2 - \xi_r^2) - \xi_{\vartheta_\perp}^2 \left(1 - \frac{\xi_r^2}{r_0^2}\right) - \xi_{\vartheta_r}^2\right]^{-1/2}, \tag{1}$$

где ξ_r — радиальная координата, r_0 — радиус шара, $\xi_{\vartheta_\perp}$ — трансверсальная скорость, ξ_{ϑ_r} — радиальная скорость, $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho_0$, ρ_0 — плотность. Размеры шара меняются по закону $\Pi(t) = \sqrt{a^2 + \omega^2 b^2}$, где $a(t)$, $b(t)$ задают линейное преобразование, связывающее эйлеровы и лагранжевы переменные, и подчиняются уравнениям

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\dfrac{\omega^2 a}{(a^2 + \omega^2 b^2)^{3/2}}, \\ \ddot{b} = -\dfrac{\omega^2 b}{(a^2 + \omega^2 b^2)^{3/2}} \end{cases} \tag{2}$$

и условию (в силу теоремы Лиувилля)

$$a\dot{b} - b\dot{a} = 1. \tag{3}$$

То есть $\Pi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\Pi} = \frac{\omega^2}{\Pi^3} - \frac{\omega^2}{\Pi^2}. \tag{4}$$

Единственным (в силу фиксированного значения интеграла «момента», являющегося следствием (3)) параметром семейства моделей является интеграл «энергии» уравнения (4). Энергия хаотического движения в этих моделях от $-E_T$ (стационарный шар) до нуля, но при этом и полная энергия зависит от параметра семейства моделей. Вместо (1) возьмем функцию распределения вида

$$f_0 \propto \frac{1}{\alpha^2}\left[\alpha^2\omega^2\left(r_0^2-\xi_r^2\right)-\xi_{\theta}^2\left(1-\frac{\xi_r^2}{r_0^2}\right)-\xi_{\theta}^2\right]^{-1/2}, \tag{5}$$

где $\alpha^2 \in [0, 1]$. Вместо [4] будем иметь

$$\ddot{\Pi}=\frac{\alpha^2\omega^2}{\Pi^3}-\frac{\omega^2}{\Pi^2}. \tag{6}$$

Зафиксировав интеграл «энергии» h (например, $h=\omega^2/2$), получаем иное, чем в [6] однопараметрическое семейство функций распределения, зависящих от α^2. В переменных Эйлера они имеют вид:

$$f_0=\frac{\rho_0}{\pi r_0^2\alpha^2\omega^2}\left[\alpha^2\omega^2\left(r_0^2-\frac{r^2}{\Pi^2}\right)-\Pi^2\left(\left(R-\frac{\dot{\Pi}}{\Pi}r\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+T\left(1-\frac{r^2}{\Pi^2 r_0^2}\right)\right)\right]^{-1/2}, \tag{7}$$

где r — радиальная координата, R — радиальная скорость, T — квадрат трансверсальной скорости, $\Pi(t)=1-e\cos\eta$, $t=\omega^{-1}(\eta-e\sin\eta)$, $e=\sqrt{1-\alpha^2}$.

Потенциал этой системы равен

$$\Phi_0=\frac{2}{3}\pi G\rho_0\frac{r^2}{\Pi^3}-2\pi G\rho_0 r_c^2\frac{1}{\Pi}, \tag{8}$$

второе слагаемое нормирует потенциал так, чтобы его значение на границе $r_\text{г}=r_0\Pi$ было равно ньютоновскому потенциалу с массой $M=\frac{4}{3}\pi\rho_0 r_0^3$.

Полная энергия всей системы равна

$$E_T=-\frac{8}{15}\pi G\rho_0^2 r_0^5. \tag{9}$$

Отношение энергии хаотического движения, определяемой дисперсией скоростей, к полной энергии системы равно

$$E_x/E_T=-\frac{1-e^2}{1-e\cos\eta}. \tag{10}$$

Таким образом, параметр $e=\sqrt{1-\frac{E_x}{|E_T|}}\Big|_{\eta=\frac{\pi}{2}}$ определяет это отношение. При $e=0$ функция распределения (7) переходит в функцию распределения однородного стационарного шара Камма, и вся кинетическая энергия заключена в хаотическом движении частиц

$E_x = -E_T$. При $e=1$ хаотические движения отсутствуют и (7) переходит в функцию распределения, соответствующую пылевому космологическому решению Фридмана [3],

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi \Pi^3} \varepsilon\left(r_0 - \frac{r}{\Pi}\right) \delta\left(R - \frac{\dot{\Pi}}{\Pi} r\right) \delta(T), \qquad (11)$$

где $\delta(x)$ — дельта функция, $\varepsilon(x)$ — единичная функция Хэвисайда.

Решения (7) и решения, полученные в [6], можно получить, применяя преобразование Шюрера [8], выведенное Р. Куртом в [9], что было замечено Кузьминым в работе [10]. Заметим, что исследование устойчивости однопараметрической последовательности, полученной в [6], было приведено в [11].

3. Для исследования поведения малых возмущений воспользуемся методом вариации фазового объема [12]. Возмущенная фазовая плотность имеет вид

$$f = \frac{\rho_0}{\pi r_0^2 \alpha^2 \omega^2} \left[\alpha^2\omega^2\left(r_0^2 - \frac{r^2}{\Pi^2}\right) - \Pi^2\left(\left(R - \frac{\dot{\Pi}}{\Pi} r\right)^2 + T\left(1 - \frac{r^2}{\Pi^2 r_0^2}\right)\right) - \varepsilon\chi\right]^{-1/2}, \qquad (12)$$

а возмущенный потенциал

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1.$$

Линеаризованное кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{d\chi}{dt} = 2\Pi^2\left(R - \frac{\dot{\Pi}}{\Pi} r\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{2\Pi^2}{r} T^{1/2} \cos\beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\left(1 - \frac{r^2}{\Pi^2 r_0^2}\right), \qquad (13)$$

где $\beta = \operatorname{arctg} \frac{\vartheta_\theta}{\vartheta_\varphi}$, ϑ_θ, ϑ_φ — компоненты трансверсальной скорости. Мы будем исследовать возмущение, не зависящее от азимутального угла, поэтому в (13) опустили член, содержащий $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}$. Перейдем к переменным $\hat{r} = r/\Pi$, $\hat{t} = \int \frac{dt}{\Pi^2}$ и индуцированным этим преобразованием переменным $\hat{R} = \Pi\left(R - \frac{\dot{\Pi}}{\Pi} r\right)$, $\hat{T} = \Pi^2 T$. Уравнение (13) запишется в этих переменных следующим образом:

$$\frac{d\chi}{d\hat{t}} \frac{1}{\Pi^2} = 2\hat{R}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \hat{r}} + \frac{2}{\hat{r}} \hat{T}^{1/2} \cos\beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\left(1 - \frac{\hat{r}^2}{r_0^2}\right) \qquad (14)$$

или

$$\frac{d\chi}{d\hat{t}}\frac{1}{\Pi^2} = 2\frac{d\Phi_1}{d\hat{t}} - 2\frac{\partial\Phi_1}{\partial\hat{t}} - 2\frac{\hat{r}\hat{T}^{1/2}}{r_0^2}\cos\beta\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}. \tag{15}$$

4. Выберем возмущение потенциала в виде

$$\Phi_1 = \hat{r}^2 P_2(\cos\theta)\,\varphi(\hat{t}). \tag{16}$$

Смещение границы находим из условия

$$\alpha^2\omega^2\left(r_0^2 - \frac{r^2}{\Pi^2}\right) - \varepsilon\chi_0 = 0, \tag{17}$$

где $\chi_0 = \chi(\hat{R} = 0,\ \hat{T}^{1/2} = 0)$. Из (17) находим радиальную координату возмущенной границы $r_{\text{вг}} = \Pi\sqrt{r_0^2 - \varepsilon\chi_0/\alpha^2\omega^2}$, откуда смещение границы $\Delta r_{\text{г}}$ равно

$$\Delta r_{\text{г}} = r_{\text{вг}} - r_{\text{г}} = -\frac{1}{2}\varepsilon\chi_0\frac{\Pi}{\alpha^2\omega^2}\bigg|_{\hat{r}=r_0}. \tag{18}$$

С другой стороны, при переходе через слой с поверхностной плотностью σ производная потенциала терпит разрыв величины $4\pi G\sigma$ [13]. В нашем случае $\sigma = \frac{\rho_0}{\Pi^3}\Delta r_{\text{г}}$. Таким образом,

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\bigg|_{r_{\text{г}}+0} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\bigg|_{r_{\text{г}}-0} = 4\pi G\frac{\rho_0}{\Pi^3}\Delta r_{\text{г}}, \tag{19}$$

$\Phi_1\big|_{r_{\text{г}}-0} = \frac{r^2}{\Pi^2}P_2(\cos\theta)\,\varphi(\hat{t})$, из условия $\Phi_1\big|_{r_{\text{г}}-0} = \Phi_1\big|_{r_{\text{г}}+0}$ получаем $\Phi_1\big|_{r_{\text{г}}+0} = \frac{\Pi^3}{r^3}P_2(\cos\theta)\,\varphi(\hat{t})$. Положим далее $\omega^2 = 1$, $r_0 = 1$. И из (19) получаем

$$\Delta r_{\text{г}} = -\frac{5}{3}\Pi^2 P_2(\cos\theta)\,\varphi(\hat{t}). \tag{20}$$

Функцию χ_0 получаем из уравнения (15) интегрированием по траекториям. Поскольку величина $\hat{r}\hat{T}^{1/2}$ вдоль траектории сохраняется, а нас интересует $\chi\big|_{\hat{T}=0}$, игнорируем последний член в (15).

$$\chi = 2\Pi^2\hat{r}^2 P_2(\cos\theta)\,\varphi(\hat{t}) - 2\int\limits_{-\infty}^{\hat{t}}\hat{r}'^2 P_2(\cos\theta')\,(\Pi^2\varphi'_{\hat{t}} + 2\Pi\Pi'_{\hat{t}}\varphi)\,d\hat{t}'. \tag{21}$$

Траектории имеют вид:

$$\begin{cases} \hat{x}' = \dfrac{\hat{\vartheta}_x}{\alpha}\sin\alpha\tau + \hat{x}\cos\alpha\tau, \\ \hat{\vartheta}'_x = \hat{\vartheta}_x\cos\alpha\tau - \alpha\hat{x}\sin\alpha\tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \hat{\vartheta}'_z = \hat{\vartheta}_z\cos\alpha\tau - \alpha\hat{z}\sin\alpha\tau, \end{cases} \tag{22}$$

где $\tau = \hat{t}' - \hat{t}$, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ — компоненты $\hat{\bar{r}}$, $\hat{\vartheta}_x$, $\hat{\vartheta}_y$, $\hat{\vartheta}_z$ — декартовы компоненты скорости $\hat{\bar{\vartheta}}$. Тогда (21) запишется в виде

$$\chi = 2\Pi^2\hat{r}^2P_2(\cos\theta)\,\varphi(\hat{t}) -$$

$$-3\int_{-\infty}^{\hat{t}}\left(\hat{z}^2\cos^2\alpha\tau + \frac{\hat{\vartheta}_z^2}{\alpha^2}\sin^2\alpha\tau + \frac{\hat{\vartheta}_z}{\alpha}\hat{z}\sin 2\alpha\tau\right)d(\Pi^2\varphi) +$$

$$+\int_{-\infty}^{\hat{t}}\left(\hat{r}^2\cos^2\alpha\tau + \frac{\hat{\vartheta}^2}{\alpha^2}\sin^2\alpha\tau + \frac{\hat{r}\hat{R}}{\alpha}\sin 2\alpha\tau\right)d(\Pi^2\varphi). \tag{23}$$

Отсюда получаем

$$\chi_0 = \left[\Pi^2\varphi(\hat{t}) - \int_{-\infty}^{\hat{t}}\cos^2\alpha\tau\, d(\Pi^2\varphi)\right]\cdot 2\hat{r}^2P_2(\cos\theta). \tag{24}$$

Сравнивая (18) и (20), получаем уравнение для $\varphi(\hat{t})$:

$$\int_{-\infty}^{\hat{t}}\cos^2\alpha\tau\, d(\Pi^2\varphi) = \Pi^2\varphi - \frac{5}{3}\Pi\alpha^2\varphi. \tag{25}$$

Интегрируя по частям интеграл в (25) и учитывая, что $\Pi^2\varphi(-\infty) = 0$, получаем

$$\int_{+\infty}^{\hat{t}}\Pi^2\varphi\sin 2\alpha\tau\, d\hat{t}' = -\frac{5}{3}\Pi\alpha\varphi. \tag{26}$$

Дифференцируем по $\hat{t}$ дважды —

$$2\alpha \int\limits_{-\infty}^{\hat{t}} \Pi^2\varphi \sin 2\alpha\tau\, d\hat{t}' = \frac{5}{6}\left(\Pi''_{\hat{t}\hat{t}}\varphi + 2\Pi'_{\hat{t}}\varphi'_{\hat{t}} + \Pi\varphi''_{\hat{t}\hat{t}}\right) - \Pi^2\varphi. \qquad (27)$$

Сравнивая (27) и (26), получаем дифференциальное уравнение для $\varphi(\hat{t})$:

$$\varphi''_{\hat{t}\hat{t}} + 2\frac{\Pi'_{\hat{t}}}{\Pi}\varphi'_{\hat{t}} + \left(\frac{\Pi''_{\hat{t}\hat{t}}}{\Pi} - \frac{6}{5}\Pi + 4\alpha^2\right)\varphi = 0. \qquad (28)$$

Перейдем к переменной t:

$$\ddot{\varphi} + 4\frac{\dot{\Pi}}{\Pi}\dot{\varphi} + \left(2\frac{\dot{\Pi}^2}{\Pi^2} - \frac{11}{5}\frac{1}{\Pi^3} + 5\frac{\alpha^2}{\Pi^4}\right)\varphi = 0, \qquad (29)$$

коэффициент при φ получаем с учетом $\ddot{\Pi} = \frac{\alpha^2}{\Pi^3} - \frac{1}{\Pi^2}$. При $e = 0$, $\alpha^2 = 1$ получаем, что $\varphi = e^{\pm i\sqrt{\frac{14}{5}}\,t}$ в соответствии с результатом работы [12].

5. Для удобства анализа перейдем в уравнении (29) к переменной η и сделаем подстановку $\varphi = u/\Pi^3$, тогда вместо (29) имеем уравнение

$$u'' + \left(\frac{7}{2}\frac{\alpha^2}{\Pi^2} - \frac{1}{4}\frac{\Pi'^2}{\Pi^2} - \frac{7}{10}\frac{1}{\Pi}\right)u = 0. \qquad (30)$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами известно, что структура решений уравнения (30) определяется собственными значениями λ_1, λ_2 матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u_1(3\pi) & u_1'(3\pi) \\ u_2(3\pi) & u_2'(3\pi) \end{pmatrix},$$

где u_1, u_2 — решения уравнения (30) с начальными условиями $u_1(\pi) = 1$, $u_1'(\pi) = 0$, $u_2(\pi) = 0$, $u_2'(\pi) = 1$. При этом имеются следующие возможности:

1) λ_1, λ_2 — вещественные, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2^{-1}$. В этом случае имеется экспоненциально растущее решение.

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тогда существует линейно растущее решение.

3) λ_1, λ_2 — комплексно сопряженные, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Решения (30) представляют собой сумму произведений периодических функций.

Численный расчет показал, что для уравнения (30) в интервале $e \in [0, 0.62)$ реализуется случай 3), для $e \in [0.62, 0.88)$ — случай 1); для $e \in [0.88, 0.92)$ — опять 3) и для $e > 0.92$ — случай 1).

6. Заметим, что относительно радиальных возмущений модели (7) неустойчивы при любом значении e, кроме $e = 0$. Действительно, возьмем моду $\Phi_1 = \hat{r}^2 \psi(\hat{t})$. Возмущенная модель — это просто смещение по фазе или амплитуде невозмущенной модели. Ее пульсация описывается также решением уравнения (6), но с другими, близкими, начальными условиями. Варьируя это решение по амплитуде, находим, что

$$\psi \propto \frac{2e}{1 - e\cos\eta} - \frac{(1 - e^2)\cos\eta}{(1 - e\cos\eta)^2} + \frac{e(1 - e^2)\sin^2\eta}{(1 - e\cos\eta)^3} - \\ - \frac{3e^2 \sin\eta}{(1 - e\cos\eta)^3}(\eta - e\sin\eta). \tag{31}$$

То есть имеет место линейная неустойчивость.

7. Если предположить, что модели, описываемые (7), достаточно адекватно описывают реальные эволюционирующие системы в смысле исследованных выше свойств, то можно сделать следующий вывод космогонического характера: если к моменту сжатия энергия случайных движений достигает значения, соответствующего $e < 0.62$, то система релаксирует к сферически-симметричной форме, в противном случае образуется эллипсоидальная система.

Астрофизический институт
АН Каз.ССР

THE STABILITY OF THE SPHERICAL COLLAPSE OF THE COLLISIONLESS GRAVITATION SYSTEMS

E. A. MALKOV

The stability of the family of nonstationary models that have identical total energy but nonidentical energy of chaotic motion has been investigated in this work. This family includes the stationary distribution function of the homogeneous sphere by Camm and the dusty distribution function corresponding to Friedmann cosmological solution with negative total energy as limit cases. All models with the exception of the stationary are instable relative to the radial pertur-

bation while these models are instable relative to the quadrupole mode when the ratio of the chaotic energy to the total energy is less than 0.62.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. B. Bonnor*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 117, 104, 1957.
2. *Г. С. Бисноватый-Коган, Я. Б. Зельдович*, Астрон. ж., 47, 942, 1970.
3. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Строение и эволюция Вселенной, Наука, М., 1975.
4. *C. C. Lin, L. Mestel, F. H. Shu*, Astrophys. J., 142, 1431, 1965.
5. *Я. Б. Зельдович*, Астрон. ж., 41, 873, 1964.
6. *В. А. Антонов, С. Н. Нуритдинов*, Вестн. ЛГУ, № 7, 133, 1975.
7. *G. L. Camm*, Mon. Notic. Roy. Astron. Soc., 112, 155, 1952.
8. *M. Schurer*, Astron. Nachr., 273, 1943.
9. *R. Kurth*, Z. Astrophys., 26, 100—136, 1949.
10. *Г. Г. Кузьмин*, Публ. Тартуск. астрофиз. обсерв., 34, 457, 1964.
11. *С. Н. Нуритдинов*, Астрон. ж., 60, 40, 1983.
12. *В. Л. Поляченко И. Г. Шухман*, Препр. Сиб.ИЗМИР СО АН СССР, № 1—72.
13. *Г. Н. Дубошин*, Небесная механика, Наука, М., 1975.