

$$IV) u_r(1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u_\varphi(1, \varphi) = f_2(\varphi), \quad (7)$$

где $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ – функции из класса Дирихле. В условиях (6), (7) $f_1(0) = f_1(2\pi) = 0$.

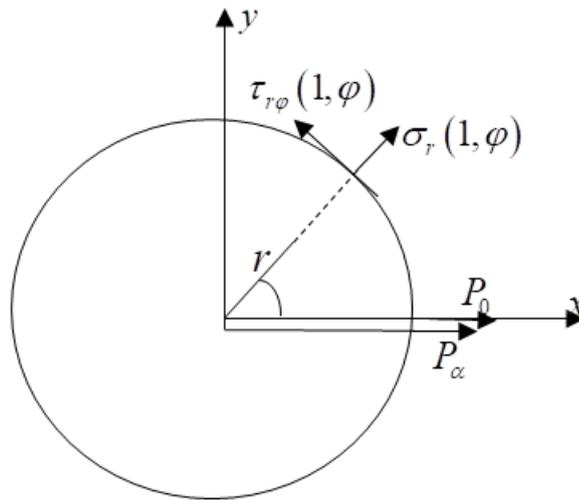


Рис. 1.

Граничные условия (2) и (3) связаны с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к упругим основаниям [5, 6].

Из условия равновесия накладок следует, что

$$\int_0^1 \tau_{r\varphi}(r, 0) dr = P_0, \quad \int_0^1 \tau_{r\varphi}(r, 2\pi) dr = P_\alpha,$$

а из моментного условия равновесия диска

$$\int_0^{2\pi} \tau_{r\varphi}(1, \varphi) d\varphi = 0.$$

Представляя решение бигармонического уравнения (1) в хорошо известном виде [4]

$$\Phi(r, \varphi) = r^{\lambda+1} [A \sin(\lambda+1)\varphi + B \cos(\lambda+1)\varphi + C \sin(\lambda-1)\varphi + D \cos(\lambda-1)\varphi],$$

для напряжения и перемещения имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi &= \lambda\lambda^+ r^{\lambda-1} [AS_\varphi^+ + BC_\varphi^+ + CS_\varphi^- + DC_\varphi^-], \\
\tau_{r\varphi} &= -\lambda r^{\lambda-1} [A\lambda^+ C_\varphi^+ - B\lambda^+ S_\varphi^+ + C\lambda^- C_\varphi^- - D\lambda^- C_\varphi^-], \\
\sigma_r &= -r^{\lambda-1} [A\lambda\lambda^+ S_\varphi^+ + B\lambda\lambda^+ C_\varphi^+ + C(3-\lambda)\lambda S_\varphi^- + D(3-\lambda)\lambda C_\varphi^-], \\
Eu_r &= r^\lambda [-A\lambda^+ \nu^+ S_\varphi^+ - B\lambda^+ \nu^+ C_\varphi^+ + C(4-\lambda^+ \nu^+) S_\varphi^- + D(4-\lambda^+ \nu^+) C_\varphi^-] + E(a \sin \varphi + b \cos \varphi), \\
Eu_\varphi &= r^\lambda [-A\lambda^+ \nu^+ C_\varphi^+ + B\lambda^+ \nu^+ S_\varphi^+ - C(4+\lambda^- \nu^+) C_\varphi^- + D(4+\lambda^- \nu^+) S_\varphi^-] + E(-a \cos \varphi + b \sin \varphi + cr),
\end{aligned} \tag{8}$$

где A, B, C, D, λ – произвольные постоянные; a, b, c – постоянные, определяющие перемещения упругого тела как жесткого целого, $\lambda^\pm = \lambda \pm 1$, $\nu^+ = 1 + \nu$, $S_\varphi^\pm = \sin(\lambda \pm 1)\varphi$, $C_\varphi^\pm = \cos(\lambda \pm 1)\varphi$. Из (8) следует, что напряжения при $0 < \text{Re } \lambda < 1$ будут обладать у вершины радиальной трещины сектора сингулярностью порядка $1 - \text{Re } \lambda$.

Для определения произвольных постоянных A, B, C, D удовлетворим на радиальных сторонах диска условиям (2) и (3). В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\lambda\lambda^+ (B + D) &= 0, \\
r^\lambda [-\lambda^+ \nu^+ B + (4 - \lambda^+ \nu^+) D] &= -Eb, \\
\lambda\lambda^+ (AS_\alpha^+ + BC_\alpha^+ + CS_\alpha^- + DC_\alpha^-) &= 0, \\
r^\lambda [-\lambda^+ \nu^+ S_\alpha^+ A - \lambda^+ \nu^+ C_\alpha^+ B + (4 - \lambda^+ \nu^+) (S_\alpha^- C + C_\alpha^- D)] &= -E(a \sin \alpha + b \cos \alpha).
\end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая, что к вершине радиальной трещины кругового диска не приложена сосредоточенная нагрузка, решение системы (9) дает

$$B = D = a = b = 0$$

и уравнение

$$\sin(\lambda + 1)\alpha \cdot \sin(\lambda - 1)\alpha = 0, \tag{10}$$

корни которого действительные и простые:

$$\lambda_k = \frac{k}{2} + 1, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{n}{2} - 1, \quad (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{11}$$

Требование конечности энергии упругой деформации в малой окрестности вершины радиальной трещины накладывает на корни уравнения (10) условия

$$\lambda_k > 0, \quad \tilde{\lambda}_n > 0,$$

которые ограничивают область изменения параметров k и n , а именно:

$$k = -1, 0, 1, \dots, \quad n = 3, 4, 5 \dots$$

Так как функции вида

$$\Phi_{kn}(r, \varphi) = C_k r^{\lambda_k + 1} \sin(\lambda_k - 1)\varphi + A_n r^{\tilde{\lambda}_n + 1} \sin(\tilde{\lambda}_n + 1)\varphi$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) и (3) на радиальных сторонах диска, функция напряжения Эри в данном случае принимает вид

$$\Phi(r, \varphi) = -C_{-1} r^{3/2} \sin \varphi / 2 + C_1 r^{5/2} \sin \varphi / 2 + C_2 r^3 \sin \varphi + \sum_{n=3}^{\infty} [C_n r^{\lambda_n + 1} + A_n r^{\tilde{\lambda}_n + 1}] \sin n\varphi / 2.$$

Напряжения и перемещения записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= -\frac{3}{4} C_{-1} r^{-1/2} \sin \varphi / 2 + \frac{15}{4} C_1 r^{1/2} \sin \varphi / 2 + 6C_2 r \sin \varphi + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} [C_n \lambda_n (\lambda_n + 1) r^{n/2} + A_n \tilde{\lambda}_n (\tilde{\lambda}_n + 1) r^{n/2-2}] \sin n\varphi / 2, \\ \sigma_r &= -\frac{5}{4} C_{-1} r^{-1/2} \sin \varphi / 2 + \frac{9}{4} C_1 r^{1/2} \sin \varphi / 2 + 2C_2 r \sin \varphi + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} [C_n \lambda_n (3 - \lambda_n) r^{n/2} - A_n \tilde{\lambda}_n (\tilde{\lambda}_n + 1) r^{n/2-2}] \sin n\varphi / 2, \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{4} C_{-1} r^{-1/2} \cos \varphi / 2 - \frac{3}{4} C_1 r^{1/2} \cos \varphi / 2 - 2C_2 r \cos \varphi - \\ &- \sum_{n=3}^{\infty} [C_n \lambda_n (\lambda_n - 1) r^{n/2} + A_n \tilde{\lambda}_n (\tilde{\lambda}_n + 1) r^{n/2-2}] \cos n\varphi / 2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Eu_\varphi(r, \varphi) &= C_{-1} (\lambda_1^- v^+ - 4) r^{1/2} \cos \varphi / 2 - C_1 (\lambda_1^- v^+ + 4) r^{3/2} \cos \varphi / 2 - \\ &- C_2 (\lambda_2^- v^+ + 4) r^2 \cos \varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n (\lambda_n^- v^+ + 4) r^{\lambda_n} + A_n \lambda_n^- v^+ r^{\tilde{\lambda}_n}] \cos n\varphi / 2 + E \cdot c, \\ Eu_r &= -C_{-1} (\lambda_1^+ v^+ - 4v) r^{1/2} \sin \varphi / 2 - C_1 (\lambda_1^+ v^+ - 4) r^{3/2} \sin \varphi / 2 - \\ &- C_2 (\lambda_2^+ v^+ - 4) r^2 \sin \varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n (\lambda_n^+ v^+ - 4) r^{\lambda_n} + A_n \lambda_n^- v^+ r^{\tilde{\lambda}_n}] \sin n\varphi / 2. \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения произвольных постоянных C_n и A_n удовлетворим граничным условиям (4) – (7). В результате получим системы уравнений

$$I) -\frac{5}{4}C_{-1}\sin\varphi/2 + \frac{9}{4}C_1\sin\varphi/2 + 2C_2\sin\varphi + \sum_{n=3}^{\infty} [C_n\lambda_n(3-\lambda_n) - A_n\tilde{\lambda}_n(\tilde{\lambda}_n+1)]\sin n\varphi/2 = f_1(\varphi), \quad (14)$$

$$\frac{1}{4}C_{-1}\cos\varphi/2 - \frac{3}{4}C_1\cos\varphi/2 - 2C_2\cos\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n\lambda_n(\lambda_n-1) + A_n\tilde{\lambda}_n(\tilde{\lambda}_n+1)]\cos n\varphi/2 = f_2(\varphi),$$

$$II) -\frac{5}{4}C_{-1}\sin\varphi/2 + \frac{9}{4}C_1\sin\varphi/2 + 2C_2\sin\varphi + \sum_{n=3}^{\infty} [C_n\lambda_n(3-\lambda_n) - A_n\tilde{\lambda}_n(\tilde{\lambda}_n+1)]\sin n\varphi/2 = f_1(\varphi), \quad (15)$$

$$C_{-1}(\lambda_1^-v^+ - 4)\cos\varphi/2 - C_1(\lambda_1^-v^+ + 4)\cos\varphi/2 - C_2(\lambda_2^-v^+ + 4)\cos\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n(\lambda_n^-v^+ + 4) + A_n\lambda_n^-v^+] \cos n\varphi/2 = E f_2(\varphi) - E \cdot c,$$

$$III) -C_{-1}(\lambda_1^+v^+ - 4v)\sin\varphi/2 - C_1(\lambda_1^+v^+ - 4)\sin\varphi/2 - C_2(\lambda_2^+v^+ - 4)\sin\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n(\lambda_n^+v^+ - 4) + A_n\lambda_n^-v^+] \sin n\varphi/2 = E f_1(\varphi), \quad (16)$$

$$\frac{1}{4}C_{-1}\cos\varphi/2 - \frac{3}{4}C_1\cos\varphi/2 - 2C_2\cos\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n\lambda_n(\lambda_n-1) + A_n\tilde{\lambda}_n(\tilde{\lambda}_n+1)]\cos n\varphi/2 = f_2(\varphi),$$

$$IV) -C_{-1}(\lambda_1^+v^+ - 4v)\sin\varphi/2 - C_1(\lambda_1^+v^+ - 4)\sin\varphi/2 - C_2(\lambda_2^+v^+ - 4)\sin\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n(\lambda_n^+v^+ - 4) + A_n\lambda_n^-v^+] \sin n\varphi/2 = E f_1(\varphi), \quad (17)$$

$$C_{-1}(\lambda_1^-v^+ - 4)\cos\varphi/2 - C_1(\lambda_1^-v^+ + 4)\cos\varphi/2 - C_2(\lambda_2^-v^+ + 4)\cos\varphi - \sum_{n=3}^{\infty} [C_n(\lambda_n^-v^+ + 4) + A_n\lambda_n^-v^+] \cos n\varphi/2 = E f_2(\varphi) - E \cdot c.$$

Умножая первые уравнения (14) – (17) на $\sin m\varphi/2$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), а вторые на $\cos m\varphi/2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируя по φ в интервале $(0, 2\pi)$ с учетом ортогональности тригонометрических функций, имеем [1–3]

$$I) C_{-1} = -\frac{2}{\pi}[\tilde{f}_{11} + 3\tilde{f}_{21}], \quad C_1 = -\frac{2}{3\pi}[\tilde{f}_{11} + 5\tilde{f}_{21}], \quad C_2 = \tilde{f}_{12}/2\pi = -\tilde{f}_{22}/2\pi, \quad (14.1)$$

$$C_n\lambda_n = \frac{\tilde{f}_{1n} - \tilde{f}_{2n}}{2\pi}, \quad A_n(\lambda_n - 2)(\lambda_n - 1) = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{n}{2}\tilde{f}_{1n} + \left(2 - \frac{n}{2}\right)\tilde{f}_{2n}\right], \quad (n = 3, 4, 5, \dots),$$

причём между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ имеет место соотношение

$$\tilde{f}_{22} + \tilde{f}_{12} = 0. \quad (14^*)$$

$$\begin{aligned} II) C_{-1} &= \frac{1}{\pi} \frac{(\nu^+/2+4)\tilde{f}_{11} + (9/4)\tilde{f}_{21}E}{\nu^+/2-14}, C_1 = \frac{1}{\pi} \frac{(\nu^+/2-4)\tilde{f}_{11} + (5/4)\tilde{f}_{21}E}{\nu^+/2-14}, c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi)d\varphi, \\ C_2 &= \frac{1}{2\pi} \tilde{f}_{12} = -\frac{1}{\nu^++4} \tilde{f}_{22}E, \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \frac{\nu^+ \tilde{f}_{1n} - (n/2-1)\tilde{f}_{2n}E}{[\nu^+ + 2(n/2-1)]} \\ A_n &= -\frac{1}{2\pi} \frac{(\nu^+n/2+4)\tilde{f}_{1n} + (n/2+1)(2-n/2)E\tilde{f}_{2n}}{[\nu^+ + 2(n/2-1)]n/2}, \quad (n=3,4,5,\dots). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Для этого случая вместо (14*) имеем

$$(\nu^+ + 4)\tilde{f}_{12} + 2E\tilde{f}_{22} = 0. \quad (15^*)$$

$$\begin{aligned} III) C_{-1} &= \frac{1}{2\pi} \frac{3E\tilde{f}_{11} - 2(5\nu^+ - 8)\tilde{f}_{21}}{\nu^+ - 4}, C_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{E\tilde{f}_{11} - 2(3\nu^+ - 8)\tilde{f}_{21}}{\nu^+ - 4}, \\ C_2 &= -\frac{1}{\pi} \frac{E\tilde{f}_{12}}{\lambda_2^+ \nu^+ - 4} = -\frac{1}{\pi} \frac{\tilde{f}_{22}}{2}, \quad C_n = \frac{1}{\pi} \frac{n(n/2-1)E\tilde{f}_{1n} - \nu^+ n\tilde{f}_{2n}}{n(n-2+\nu^+)}, \\ A_n &= -\frac{1}{\pi} \frac{n(n/2+1)E\tilde{f}_{1n} - ((n+4)\nu^+ - 8)\tilde{f}_{2n}}{n(n-2+\nu^+)}, \quad (n=3,4,5,\dots). \end{aligned} \quad (16.1)$$

В данном случае связь между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ такова:

$$2E\tilde{f}_{12} - (3\nu^+ - 4)\tilde{f}_{22} = 0. \quad (16^*)$$

$$\begin{aligned} IV) C_{-1} &= -\frac{E}{2\pi} \frac{(\nu^+/2+4)\tilde{f}_{11} - (5\nu^+/2-4)\tilde{f}_{21}}{\nu_0^2 - 16\nu_0 + 16}, c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi)d\varphi, \quad \nu_0 = \nu^+/2, \\ C_1 &= -\frac{E}{2\pi} \frac{(\nu^+/2-4)\tilde{f}_{11} - (3\nu^+/2-4)\tilde{f}_{21}}{\nu_0^2 - 16\nu_0 + 16}, \quad C_2 = -\frac{E}{\pi} \frac{\tilde{f}_{12}}{3\nu^+ - 4} = -\frac{E}{\pi} \frac{\tilde{f}_{22}}{(\nu^+/2+4)}, \\ C_n &= -\frac{E}{2\pi} \frac{\tilde{f}_{1n} - \tilde{f}_{2n}}{\nu^+ - 4}, \quad A_n = \frac{E}{\pi} \frac{(\nu^+n/2+4)\tilde{f}_{1n} - ((n/2+2)\nu^+ - 4)\tilde{f}_{2n}}{n\nu^+(\nu^+ - 4)}, \quad (n=3,4,5,\dots). \end{aligned} \quad (17.1)$$

Здесь функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ связаны соотношением

$$(\nu^+ + 4)\tilde{f}_{12} - (3\nu^+ - 4)\tilde{f}_{22} = 0. \quad (17^*)$$

Таким образом, решения поставленной задачи получены в виде сходящихся рядов, коэффициенты которых определены в явном виде.

Заметим, что возникшие в ходе решения этих задач соотношения между функциями $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ имеют конкретный механический смысл – это условие равновесия диска в направлении оси Oy , т.е. система сил, приложенная или возникшая на ободе диска, самоуравновешена на этой оси. Остальные уравнения статического равновесия удовлетворяются тождественно.

Как следует из (12), напряжения при $r \rightarrow 0$ имеют особенность типа $r^{-1/2}$. Причем степенная особенность напряжений обусловлена как первыми членами правой части формул (12), так и соответствующими членами рядов с множителями $r^{n/2-2}$ при $n=3$. Коэффициенты интенсивности напряжений (коэффициент при особенности) [7] в общем случае нагружения обода диска отличны от нуля. Однако подходящим подбором внешних воздействий эти особенности из решения (12) можно исключить. Тогда окрестность вершины радиальной трещины кругового диска будет находиться в малонапряженном состоянии [8]. Например, если в первой задаче $f_1(\varphi) = P_1 \sin 2\varphi$, $f_2(\varphi) = P_2 \cos 2\varphi$, то для коэффициентов Фурье функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ получим $\tilde{f}_{j4} = P_j \pi$ ($j=1,2$), остальные коэффициенты равны нулю. При этом выполняется соотношение (14*), а формулы для напряжения и перемещения примут вид

$$\sigma_\varphi = (2(P_1 - P_2)r^2 - P_1) \sin 2\varphi, \quad \sigma_r = P_1 \sin 2\varphi, \quad \tau_{r\varphi} = ((P_1 - P_2)r^2 - P_1) \cos 2\varphi,$$

$$Eu_\varphi = -\left(\frac{P_1 - P_2}{3}(v^+ + 2)r^3 - P_1 v^+ r\right) \cos 2\varphi, \quad Eu_r = -\left(\frac{2(P_1 - P_2)}{3}(v^+ - 1)r^3 - P_1 v^+ r\right) \sin 2\varphi.$$

Возникает естественный вопрос: можно получить приведенные выше решения из решений соответствующих задач теории упругости для кругового сектора [1–3] предельным переходом $\alpha \rightarrow 2\pi$? Ответ однозначен: можно, если внешние воздействия на дуговой части контура кругового диска в пределе, когда $\alpha \rightarrow 2\pi$, удовлетворяют условиям (14*) – (17*). Например, граничная задача кругового сектора, на дуговой части контура которого заданы нагрузки в виде $f_1(\varphi) = B_1 \delta(\varphi - \pi/2)$, $f_2(\varphi) = 0$, имеет реальный физический смысл при всех значениях угла раствора сектора α из интервала $0 < \alpha < 2\pi$. Когда $\alpha \rightarrow 2\pi$, нарушается условие равновесия диска в направлении оси y .

Институт механики НАН РА
e-mail: azat-sargsyan@mail.ru

A. M. Саргсян

**Упругое равновесие кругового диска с радиальной трещиной,
берега которой усилены жесткими накладками**

Рассматривается упругое равновесие кругового диска с радиальной трещиной, берега которой усилены жесткими накладками, а на ободе диска заданы: 1) нормальные и касательные напряжения, 2) нормальные и окружные перемещения, 3) нормальные напряжения и окружные перемещения, 4) касательные напряжения и нормальные перемещения. Замкнутые решения поставленных задач получаются методом разделения переменных. Исследуются особенности напряжений и поведения коэффициентов при особенности в окрестности вершины радиальной трещины.

Ա. Մ. Սարգսյան

**Շառավղային ճաքի ափերը կոշտ վերդրակներով ուժեղացված
շրջանային սկավառակի առաձգական հավասարակշռությունը**

Դիտարկված է շառավղային ճաքով շրջանային սկավառակի առաձգական հավասարակշռությունը, երբ ճաքի ափերն ուժեղացված են կոշտ վերդրակներով, իսկ սկավառակի եզրագծի վրա տրված են. 1) նորմալ և շոշափող լարումներ, 2) նորմալ և շոշափող տեղափոխություններ, 3) նորմալ լարումներ և շոշափող տեղափոխություններ, 4) շոշափող լարումներ և նորմալ տեղափոխություններ: Դրված խնդիրների փակ լուծումները ստացվել են փոփոխականների անջատման մեթոդով: Հետազոտված են լարումների եզակիությունը և եզակիության գործակիցների վարքը ճաքի գագաթի շրջակայքում:

A. M. Sargsyan

**The Elastic Equilibrium of a Circular Disc with a Radial Crack,
the Edges of which are Reinforced by Two Rigid Straps**

An elastic equilibrium of a circular disk with a radial crack, the borders of which are reinforced by two rigid straps and in the contour disk 1) normal and tangential stresses, 2) normal and tangential displacements, 3) normal stresses and tangential displacements, 4) tangential stresses and normal displacements are given, is considered. The closed solution of the stated problems is obtained by the method of separation of variables. The singularity of the stresses and the behavior of the coefficients with the singularity in the vicinity of the crack top are investigated.

Литература

1. *Саргсян А. М.* – Механика композитных материалов. 2017. Т. 53. № 1. С. 143-154.
2. *Саргсян А. М.* – ДНАН Армении. 2019. Т. 119. № 3. С. 224-231.
3. *Саргсян А. М.* В кн.: Матер. VI междунар. конф. “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, 01 – 06 октября 2019, Дилижан, Армения. Ереван. 2019. С. 282-286.
4. *Williams M. L.* – J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526-528.
5. *Melan E.* – Ing. – Archiv. 1932. Bd. 3. Heft 2. P. 123.
6. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* – Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
7. *Соврук М. П.* Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев. Наукова думка. 1988. 620 с.
8. *Чобанян К. С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван. Изд-во АН АрмССР. 1987. 338 с.