ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 120 2020 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Е. В. Варданян[1], член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян[2], А. А. Саруханян[1]

О решении плоской задачи Ламба для полуплоскости

(Представлено 5/XI 2020)

Ключевые слова: *идеальная жидкость, потенциал скорости, смешанная граничная задача, интегральное уравнение.*

Введение. В гидромеханике хорошо известна осимметрическая задача Ламба для полупространства об установившемся потенциальном течении идеальной жидкости через круглое отверстие в плоском тонком жестком экране [1]. Эта задача в цилиндрической системе координат математически формулируется как смешанная граничная задача теории потенциала, когда на круге границы полупространства, заполненного идеальной жидкостью, задано значение потенциала, а на остальной части границы полупространства вне круга нормальная производная потенциала обращается в ноль, т.е. нормальная компонента скорости обращается в ноль. Решение задачи Ламба, первоначально приведенное в [1], в дальнейшем применением метода дуальных интегральных уравнений существенно упрощено в [2].

В настоящей работе рассматривается плоская задача Ламба для плоскости, заполненной идеальной жидкостью и на своей границе контактирующей с абсолютно жестким плоским тонким экраном в виде двух сдвинутых друг относительно друга полубесконечных тонких пластин-стержней, т.е. в пространственном измерении в виде двух сдвинутых абсолютно жестких тонких полубесконечных пластин, образующих между собой отверстие в форме бесконечной в обоих направлениях полосы на границе полупространства. Поставленная задача при установившемся потенциальном течении формулируется в виде двухмерной смешанной граничной задачи теории классического потенциала. При помощи решения вспомогательной граничной задачи решение смешанной задачи сводится к решению определяющего интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода с симметрическим логарифмическим ядром или к решению эквивалентного сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром

Коши. Методом ортогональных многочленов Чебышева и методом СИУ построены точные (замкнутые) решения определяющих уравнений. Основные характеристики задачи – компоненты скоростей, значения потенциала под жестким экраном, расходы жидкости через сечения отверстия представлены явными аналитическими формулами простых структур. Рассмотрены частные случаи и получены условия ограниченности скоростей в концевых точках отверстия.

Отметим, что результаты по решению задачи Ламба могут быть использованы при исследовании закономерностей изменения характеристик артезианских водных ресурсов при наличии скважин и для количественных оценок этих характеристик.

Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть нижняя полуплоскость $y<0$, отнесенная к правой прямоугольной системе координат Oxy и заполненная идеальной жидкостью, на своей границе $y=0$ контактирует с двумя тонкими абсолютно жесткими экранами-пластинами $(-\infty,-a)\bigcup(a,\infty)$, сдвинутыми друг относительно друга на расстоянии $2a$. Рассмотрим плоское установившееся потенциальное (безвихревое) течение идеальной жидкости через отверстие $(-a,a)$, когда на этом интервале заданы значение потенциала и расход жидкости через отверстие $(-a,a)$. Такое течение идеальной жидкости, как известно [3], описывается потенциалом $\varphi(x,y)$, через который компоненты скоростей по координатным осям υ_x и υ_y выражаются формулами

$$\upsilon_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \upsilon_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\quad(-\infty<x<\infty;\ y<0). \tag{1}$$

Из этих формул и уравнения неразрывности вытекает, что потенциал $\varphi(x,y)$ в полуплоскости $y<0$ удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. является гармонической функцией. Следовательно, описанная граничная задача гидромеханики идеальной жидкости математически формулируется в виде следующей смешанной граничной задачи теории потенциала для полуплоскости $y<0$:

$$\begin{cases}\Delta\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\quad(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<0)\\ \upsilon_y\Big|_{y=-0}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=-0}=0\qquad\left(x\in(-\infty,-a)\bigcup(a,\infty)\right);\\ \varphi(x,y)\Big|_{y=-0}=f(x)\qquad(-a<x<a);\ \upsilon_x^2+\upsilon_y^2\to0\ \textit{при}\ x^2+y^2\to\infty;\end{cases} \tag{2}$$

где $f(x)$ – заданное на интервале $(-a,a)$ значение потенциала. Граничная задача [2] должна быть дополнена условием

$$Q=\int\limits_{-a}^{a}\upsilon_y(x,0)\,dx, \tag{3}$$

где Q – заданная величина расхода жидкости через отверстие $(-a,a)$ за единицу времени.

Решение смешанной граничной задачи (2) – (3) сведем к решению ИУ. С этой целью предварительно построим решение вспомогательной граничной задачи опять для полуплоскости

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad (-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<0)\\ \upsilon_y\Big|_{y=-0}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=-0}=\upsilon(x)\quad(-\infty<x<\infty),\ \upsilon_x^2+\upsilon_y^2\to 0\ \textit{при}\ x^2+y^2\to\infty;\end{cases} \tag{4}$$

где $\upsilon(x)$ – пока известная функция. Для решения задачи (4) введем в рассмотрение трансформанты Фурье по переменной x

$$\{\bar\varphi(\lambda,y);\,\bar\upsilon(\lambda)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(x,y);\,\upsilon(x)\}e^{i\lambda x}dx.$$

Тогда в трансформантах Фурье двухмерная задача (4) преобразуется в одномерную задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\lambda^2\bar\varphi=0\quad(y<0);\ \dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial y}\Big|_{y=-0}=\bar\upsilon(\lambda).\end{cases} \tag{5}$$

Исчезающее на бесконечности решение задачи (5) имеет вид

$$\bar\varphi(\lambda,y)=\frac{\bar\upsilon(\lambda)}{|\lambda|}e^{|\lambda|y}\quad(-\infty<y<0).$$

Отсюда по формуле обращения Фурье

$$\begin{aligned}&\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}K(|x-s|,y)\cos(\lambda(x-s))\,d\lambda,\\ &K(x,y)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{\lambda y}}{\lambda}\cos(\lambda x)\,d\lambda\ (-\infty<x<\infty;-\infty<y<0).\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь было учтено первое условие задачи (2), согласно которому $\upsilon(x)=0$ при $x=a$. Для вычисления ядра $K(x,y)$ продифференцируем его выражение из (6) по x и по y и воспользуемся выражениями известных интегралов из [4] (с.71, ф-ла 2.4.(1) и с.23, ф-ла 1.4.(1)). В результате

$$\frac{\partial K}{\partial x}=-\int_0^\infty e^{\lambda y}\sin(\lambda x)\,d\lambda=-\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial K}{\partial y}=\int_0^\infty e^{\lambda y}\cos(\lambda x)\,d\lambda=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$(-\infty<x<\infty;\ y<0)$$

Отсюда

$$dK=-\frac{xdx}{x^2+y^2}-\frac{ydy}{x^2+y^2}=d\left(\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

и, следовательно,

$$K(x,y)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+C, \tag{7}$$

где C – постоянная, которая применительно к обсуждаемой задаче определяется ниже. Теперь согласно (6) и (7) будем иметь

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-s)^2+y^2}}\upsilon(s)\,ds+C_0\quad(-\infty<x<\infty;-\infty<y\le 0;\ C_0=CQ/\pi). \tag{8}$$

При помощи (8) по формулам (1) могут быть вычислены компоненты скоростей через функцию $\upsilon(x)$:

$$\upsilon_x(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(s-x)\upsilon(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2};\quad \upsilon_y(x,y)=-\int_{-a}^{a}\frac{s\upsilon(s)\,ds}{(s-x)^2+y^2}\quad(-\infty<x<\infty;y<0)\cdot \tag{9}$$

Но чтобы определить функцию $\upsilon(x)$, исходя из (8) реализуем второе граничное условие задачи (2). В результате для определения функции $\upsilon(x)$ придем к ИУ Фредгольма первого рода

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\upsilon(s)\,ds=f(x)-C_0\quad(-a<x<a). \tag{10}$$

Решение ИУ (10) должно удовлетворять условию (3), которое записывается в виде

$$\int_{-a}^{a} \upsilon(x)\,dx = Q. \tag{11}$$

ИУ (10) при условии (11) совпадает с определяющим ИУ классической плоской контактной задачи математической теории упругости [5]. Поэтому рассматриваемая здесь задача Ламба и эти задачи в идейном и методологическом аспектах тесно примыкают друг другу.

Продифференцировав уравнение (10) по x, определение функции $\upsilon(x)$ можно свести к простейшему СИУ с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\upsilon(s)\,ds}{s-x} = f'(x) \quad (-a<x<a) \tag{12}$$

опять при условии (11).

Решение определяющих ИУ (10) – (11) и (12) – (11). Решение ИУ (10) – (11) построим методом ортогональных многочленов Чебышева. С этой целью воспользуемся спектральными соотношениями [6, 7]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s/a)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}T_n(x/a) & (n=1,2,\ldots); \\ \ln(2/a) & (n=0). \end{cases} \quad (-a<x<a) \tag{13}$$

Здесь $T_n(x) = \cos(n\arccos(x/a))$ – многочлены Чебышева первого рода [8], удовлетворяющие на интервале следующим условиям ортогональности:

$$\int_{-a}^{a} T_m(x/a)T_n(x/a)\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} 0 & (m\neq n); \\ \pi/2 & (m=n\neq 0); \\ \pi & (m=n=0). \end{cases} \quad (m,n=0,1,2,\ldots) \tag{14}$$

Исходя из (13) решение ИУ (10) представим в форме бесконечного ряда

$$\upsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty} x_n T_n(x/a) \quad (-a<x<a) \tag{15}$$

с неизвестными коэффициентами x_n. Далее (15) подставим в ИУ (10), поменяем порядок суммирования и интегрирования, а затем воспользуемся соотношениями (13). Имеем

$$x_0\ln(2/a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}T_n(x/a) = f(x) - C_0 \quad (-a<x<a). \tag{16}$$

Коэффициенты $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ определим из условий ортогональности (14), для чего обе части (16) умножим на $T_m(x/a)\sqrt{a^2-x^2}$ и проинтегрируем от $-a$ до a. Приняв во внимание условие (11), получим

$$x_0 = Q\big/\pi;\ x_n = \frac{2}{\pi} n f_n \left(n = 1, 2, ...\right); C_0 = \frac{1}{\pi}\left(f_0 - Q\ln\frac{2}{a}\right),$$
$$f_n = \int_{-a}^{a} \frac{f(x) T_n(x/a)\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(n = 0, 1, 2, ...\right). \tag{17}$$

Таким образом, решение ИУ (10) – (11) выражается формулами (15) – (17). Пусть, в частности, потенциал постоянен на отрезке $[-a, a]$, тогда по (17) $f_0 = \pi\Delta_0, f_n = 0\ (n = 1, 2, ...)$ и, следовательно, из (15) получим, что в данном частном случае решение определяющего ИУ (10) – (11) будет даваться формулой

$$\upsilon(x) = Q/\pi\sqrt{a^2 - x^2}\quad \left(-a < x < a\right), \tag{18}$$

и совпадет с известным решением Садовского в теории плоских контактных задач теории упругости [5].

Отметим, что согласно (15) и (18) решение определяющего ИУ (10) – (11) – вертикальная компонента скорости в интервале $(-a, a)$ – на концах этого интервала не ограничено. Чтобы получить ограниченное на концах интервала решение, предположим, что $f(x)$ – четная непрерывная на отрезке $[-a, a]$ функция, обладающая непрерывной производной в $(-a, a)$. Такая функция удовлетворяет условию ограниченности решения ИУ (10) на $(-a, a)$ [5], и по (17) $x_{2n-1} = 0\ (n = 1, 2, ...)$. Тогда в формуле (15) останутся только четные по индексу коэффициенты x_{2n}, и чтобы получить выражение ограниченного на концах интервала $[-a, a]$ решения, эту формулу преобразуем следующим образом:

$$\upsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x_{2n}\left[T_{2n}(x/a) - T_{2n}(1)\right] + \sum_{n=0}^{\infty} x_{2n} T_{2n}(1)\right\}\ \left(-a < x < a\right). \tag{19}$$

Для ограниченности решения в точках $x = \pm a$ в (19) потребуем выполнения соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{2n} T_{2n}(1) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} = -x_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} = -Q/\pi. \tag{20}$$

Оставшуюся часть (19) преобразуем дальше:

$$\upsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \left[T_{2n}(x/a) - 1 \right] = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \left[\cos\left(2n \arccos(x/a)\right) - 1 \right] =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} \sin^2\left(n \arccos(x/a)\right).$$

Так как [8] $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x) \big/ \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 < x < 1)$, где $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева второго рода, окончательно получим

$$\upsilon(x) = \frac{2}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} U_{n-1}^2(x/a) \quad (-a \le x \le a). \tag{21}$$

Пусть, в частности, $f(x) = -Ax^2 \, (A > 0)$. В этом случае по (17) все коэффициенты x_{2n}, кроме x_2, равны нулю, а $x_2 = -Aa^2$. Далее, приняв во внимание (20), имеем $Aa^2 = Q/\pi$, откуда $a = \sqrt{Q/\pi A}$. Последнее означает, что в случае ограниченного на отрезке $[-a, a]$ решения ИУ (10) – (11), как в [5], длина этого отрезка не может быть произвольной и должна даваться указанной формулой. Само решение согласно (21) будет даваться формулой

$$\upsilon(x) = \frac{2Q}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \le x \le a).$$

Очевидно, что эпюра распределения скоростей представляет собой эллипс

$$\frac{\upsilon^2}{(2Q/\pi a)^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \left(-a \le x \le a;\ \upsilon = \upsilon(x)\right).$$

Далее определим значение потенциала $\varphi(x, y)$ вне интервала $(-a, a)$ на лучах $|x| > a$. С этой целью воспользуемся смежными с спектральными соотношениями (13) интегральными соотношениями [6]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s/a)\,ds}{\sqrt{a^2-s^2}}=G_n(x)\quad(|x|>a);$$
$$G_n(x)\begin{cases}\frac{1}{n}\left[H(x)+(-1)^n H(-x)\right]\left[\left(|x|-\sqrt{x^2-a^2}\right)/a\right]^n & (n=1,2,...);\\ \ln\left[2\left(|x|-\sqrt{x^2-a^2}\right)/a^2\right] & (n=0);\end{cases}\tag{22}$$

где $H(x)$ – известная функция Хевисайда. Теперь, подставляя (15) в (8) и воспользовавшись (22), находим

$$\varphi(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\upsilon(s)\,ds+C_0=\sum_{n=0}^{\infty}x_nG_n(x)+C_0,\quad(|x|>a),$$

где коэффициенты x_n даются формулами (17). Дифференцируя обе части (22) по x, точно таким образом по первой формуле (9) определим $\upsilon_x(x,0)$ при $|x|>a$.

Решение разбираемой задачи построим также методом СИУ. С этой целью обе части ИУ (10) продифференцируем по x. В результате придем к простейшему СИУ с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\upsilon(s)\,ds}{s-x}=f'(x)\quad(-a<x<a),\tag{23}$$

где интеграл при $s=x$ понимается в смысле главного значения по Коши. Обращение этого СИУ в классе функций, не ограниченных на концах интервала $(-a,a)$, имеет вид [9]

$$\upsilon(x)=-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-s^2}\,f'(s)\,ds}{s-x}+\frac{C}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(-a<x<a).\tag{24}$$

Для определения постоянной C обе части (24) проинтегрируем по x и воспользуемся выражением интеграла

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,(s-x)}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-s^2}}\ln\frac{a^2-xs+\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-s^2)}}{a^2-xs-\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-s^2)}},\tag{25}$$

который легко получается из приведенного в [10] (с.111) интеграла. В результате

$$V(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \ln\frac{a^2 - xs + \sqrt{(a^2-x^2)(a^2-s^2)}}{a^2 - xs - \sqrt{(a^2-x^2)(a^2-s^2)}} f'(s)\,ds + c\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 \;\; (-a \le x \le a) \tag{26}$$

$$V(x) = \int_{-a}^{x} \upsilon(s)\,ds;\; V(-a) = 0;\; V(a) = Q,$$

где функция $V(x)$ представляет собой расход жидкости через сечения x в отверстия жесткого экрана в форме интервала $(-a,a)$. Далее, подставив в (26) $x = \pm a$, сразу находим $C = Q/\pi, C_1 = Q/2$. Поэтому в (24) следует положить $C = Q/\pi$.

Если $f(x)$ – четная функция, как выше, то, как показано в [5], при помощи элементарных преобразований из (24) можно получить ограниченное на концах интервала $(-a,a)$ следующее решение СИУ (23):

$$\upsilon(x) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2 - x^2}\int_{-a}^{a} \frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{a^2 - s^2}\,(s - x)} \qquad (-a \le x \le a). \tag{27}$$

Исходя из (24) и (27) в указанных выше частных случаях опять получим те же самые решения, приведенные выше.

Отметим, что решение обсуждаемой задачи представляется двумя формулами – (15) и (24), имеющими разные аналитические структуры. Но, как показано в [11], они идентичны.

Решение рассматриваемой здесь задачи можно также свести к решению классического гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ), а именно СИУ представим в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\upsilon(s) - Q}{s - x} ds = f'(x) - Q\ln\left(\frac{a - x}{a + x}\right) \qquad (-a < x < a)$$

и в левой части проведем интегрирование по частям. В результате придем к классическому ГСИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{W(s)\,ds}{(s - x)^2} = f'(x) - \frac{Q}{\pi}\ln\left(\frac{a - x}{a + x}\right) \;\; (-a < x < a),\;\; W(s) = \int_{-a}^{s}\left[\upsilon(u) - Q\right]du;\; W(\pm a) = 0. \tag{28}$$

Решение ГСИУ (28) на основании (25) и результатов работы [12] представляется формулой

$$W(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \ln \frac{a^2 - xs + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - s^2)}}{a^2 - xs - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - s^2)}} g(s)\,ds,\ g(s) = f'(s) - \frac{Q}{\pi}\ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right).$$

Заключение. Методом ортогональных многочленов Чебышева и СИУ построено точное решение задачи Ламба для полуплоскости. Это решение имеет разные аналитические представления, но, как показано ранее, они идентичны. При этом решение, полученное методом многочленов Чебышева, удобнее для проведения численного анализа характеристик задачи.

[1]Национальный университет архитектуры и строительства Армении
[2]Институт механики НАН РА
e-mail: smkhitaryan39@rambler.ru

**Е. В. Варданян, член-корреспондент НАН РА С. М. Мхитарян,
А. А. Саруханян**

О решении плоской задачи Ламба для полуплоскости

Рассматривается плоская задача Ламба об установившемся потенциальном течении идеальной жидкости в полуплоскости, заполненной этой жидкостью и на своей границе контактирующей с абсолютно жестким тонким плоским экраном в виде двух сдвинутых друг относительно друга полубесконечных жестких тонких пластин-стержней, ближние концы которых образуют отверстие-интервал конечной длины. На этом интервале задается значение потенциала, а вне него на полубесконечных интервалах вертикальная компонента скорости обращается в ноль. Задача математически формулируется в виде смешанной граничной задачи двухмерной теории классического потенциала. Решение последней при помощи интегрального преобразования Фурье сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода и одновременно к сингулярному интегральному уравнению. Построены точные решения этих уравнений и получены явные аналитические выражения характеристик задачи. Рассмотрены частные случаи.

**Ե. Վ. Վարդանյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Մ. Մխիթարյան,
Ա. Ա. Սարուխանյան**

Կիսահարթության համար Լամբի հարթ խնդրի լուծման մասին

Դիտարկվում է կիսահարթությունում իդեալական հեղուկի կայունացած պոտենցիալ հոսքի վերաբերյալ Լամբի հարթ խնդիրը, երբ կիսահարթությունը լցված է այդ հեղուկով և իր եզրագծի երկայնքով հպվում է երկու միմյանց նկատմամբ տեղաշարժված բացարձակ կոշտ կիսաանվերջ բարակ կոշտ սալ-ձողերի տեսքով բարակ կոշտ էկրանին: Էկրանի մոտակա ծայրակետերը կազմում են վերջավոր երկարության ինտերվալ-անցք: Այդ ինտերվալի վրա տրվում է պոտենցիալի արժեքը, իսկ այդ ինտերվալից դուրս՝ կիսաանվերջ ինտերվալների վրա արագության ուղղաձիգ բաղադրիչը դառնում է զրո: Խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպվում է պոտենցիալի երկչափ

տեսության խառը եզրային խնդրի տեսքով։ Վերջինիս լուծումը Ֆուրեյի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ բերված է Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման, իսկ այնուհետև համարժեք սինգուլյար ինտագրալ հավասարման լուծման։ Կառուցված է այդ հավասարումների ճշգրիտ լուծումերը և խնդրի բնութագրիչները ներկայացված են բացահայտ տեսքի անալիտիկ արտահայտություններով։ Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր։

E. V. Vardanyan, corresponding member of NAS RA S. M. Mkhitaryan, A. A. Sarukhanyan

On the Solution of the Plane Lamb Problem for a Half-Plane

Let us consider the plane Lamb problem about the steady-state potential flow of a perfect fluid in a half-plane filled with this fluid and contacting at its boundary with an absolutely rigid thin flat screen in the form of two semi-infinite rigid thin plate-bar the nearest ends of which form a hole-interval of finite length. On this interval, the value of the potential is given, and outside it, at semi-infinite intervals, the vertical component of the velocity turns to zero. The problem is mathematically formulated in the form of a mixed boundary value problem of the two-dimensional theory of the classical potential. Solution of the mentioned problem is given with the help of the Fourier integral transform and reduced to the solution of the Fredholm integral equation of the first kind and simultaneously to the singular integral equations. Exact solutions of these equations are constructed and explicit analytical expressions for the characteristics of the problem are obtained. Particular cases are considered.

Литература

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. М. Гостехиздат. 1947. М. – Л. 928 с.
2. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М. ИЛ. 1955. 668 с.
3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М. Физматгиз. 1963. 583 с.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А. и др.* Таблицы интегральных преобразований. Т. I. М. Наука. 1969. 344 с.
5. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М. – Л. Гостехиздат. 1949. 270 с.
6. *Мхитарян С. М.* – Доклады НАН РА. 1992. Т. 93. N 5. С. 220-226.
7. *Попов Г. Я.* – ПММ.1963. Вып. 5. С. 821-832.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. М. Наука. 1973. 294 с.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. Наука. 1977. 640 с.
10. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М. Наука. 1983. 488 с.
11. *Mkhitaryan S. M.* – Modern Analysis and Application Operator Theory. V. 191. 2009. P. 155-171. Birkhauser Verlag Baxl Switzerland. 10. 1007/98-3-7643-9921-4-10.
12. *Mkhitaryan S. M., Mkrtchyan M. S., Kanetzyan E. G.* – The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math. V. 73. Issue 1. 2020. P. 51-75.