ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 120 2020 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян[1], Ю. М. Григорьев[2], С. В. Саркисян[1,3], А. А. Гаврильева[4]

Локализованные волны в слое с нагруженной инерционной массой на основе упрощенной модели Коссера

(Представлено чл.-кор. НАН РА Ара С. Аветисяном 25/IX 2020)

Ключевые слова: *сдвиговые упругие волны, инерция вращения частиц среды, локализация энергии упругих колебаний.*

Введение. Локализация энергии распространяющейся упругой волны в окрестности границы, ограничивающей среду, на практике имеет как негативное (разрушение), так и позитивное (передача энергии без потерь) значение. Результаты изучения локализованных волн (колебаний) приводят к созданию различного рода устройств и приборов как для их гашения, так и усиления.

Исследования поверхностных упругих волн (или локализованных колебаний), таких как волны Рэлея, Лява, Стоунли, Гуляева-Блюстейна, Коненкова и др., связаны с решением задач для полубесконечных областей, например, поверхностные волны Рэлея в полупространстве или локализованные изгибные колебания Коненкова в полубесконечной пластинке.

Однако в реальности нет полубесконечных структур. Все структуры должны иметь определенную конечную глубину. Возникает вопрос: при какой глубине имеет место локализация энергии упругих колебаний в окрестности свободной границы, ограничивающей тело, в частности слой [1-5].

В настоящей работе исследовано распространение сдвиговых упругих волн в слое на основе упрощенной модели Коссера. Одна из плоскостей, ограничивающих слой, нагружена инерционной массой, вторая граница закреплена. Устанавливается возможность появления локализованной (поверхностной) волны вдоль нагруженной поверхности слоя. Определяется скорость распространения волн в коротковолновом и длинноволновом приближении.

1. Рассматривается распространение чисто сдвиговых упругих волн с учетом инерции вращения частиц в плоском слое. В прямоугольной декартовой системе координат *x, y, z* слой занимает область $-\infty \prec x \prec \infty, 0 \le y \le h, -\infty \prec z \prec \infty$.

Уравнение движения в напряжениях (антиплоская задача $u = v = 0, w = w(x, y, t)$) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где индексы 1, 2, 3 означают направления по координатам *x, y, z* соответственно.

Материальные уравнения для среды Коссера на основе упрощенной модели приняты в виде [6, 7]

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} + \mathrm{I}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \sigma_{31} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial x} - \mathrm{I}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \\ \sigma_{23} &= c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + \mathrm{I}\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}, \sigma_{23} = c_{44}\frac{\partial w}{\partial y} - \mathrm{I}\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

В (1.2) c_{44} – модуль сдвига материала, I – коэффициент, характеризующий инерцию вращения частиц среды.

С учетом (1.2) уравнение распространения сдвиговых волн в среде будет

$$c_{44}\Delta w + \mathrm{I}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа.

Предполагается, что на плоскости $y = 0$, ограничивающей слой, имеет место граничное условие [6, 7]

$$\sigma_{23} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{1.4}$$

При помощи граничного условия (1.4) моделируется влияние наличия инерционной массы на плоскости $y = 0$. Вторая плоскость, ограничивающая слой, принимается закрепленной:

$$w = 0 \text{ при } y = h. \tag{1.5}$$

Требуется найти решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничным условиям (1.4) и (1.5).

2. Решение уравнения (1.3) представляется следующим образом:

$$w = f(y)\exp i(\omega t - kx). \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.3) приводит к решению обыкновенного дифференциального уравнения относительно искомой функции $f(y)$

$$f''(y) - k^2\left(1 - \frac{\eta}{1-\chi\eta}\right) f(y) = 0, \tag{2.2}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_t^2}, \quad c_t^2 = \frac{c_{44}}{\rho}, \quad \chi = \frac{k^2 \mathrm{I}}{\rho}. \tag{2.3}$$

Согласно (2.1) граничное условие нагруженного края (1.4) приводится к виду

$$(1-\chi\eta) f' + \frac{mk^2\eta}{\rho} f = 0 \text{ при } y = 0. \tag{2.4}$$

Решение уравнения (2.2), удовлетворяющее граничному условию (2.4), будет

$$f(y) = A\left(\sinh(kpy) - \frac{\rho(1-\chi\eta)p}{km\eta}\cosh(kpy)\right), \tag{2.5}$$

где A – произвольная постоянная,

$$p = \sqrt{1 - \eta(1-\chi\eta)^{-1}}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что уравнение (2.2) имеет решение в виде гиперболических функций (в виде (2.5)), если выполняется условие

$$0 \prec \eta \prec \frac{1}{1+\chi}. \tag{2.7}$$

В противном случае решение уравнения (2.2) будет выражено через тригонометрические функции. В случае, если уравнение (2.2) имеет решение, удовлетворяющее условию (2.7), сдвиговая волна локализуется в окрестности поверхности слоя $y = 0$ [4, 5]. В частности, для полупространства $0 \le y \prec \infty$ условие (2.7) будет условием затухания амплитуды волны при $y \to \infty\left(w \to 0\right)$. Требование, чтобы решение (2.5) удовлетворяло граничному условию закрепленного края (1.5), приводит к решению дисперсионного уравнения относительно безразмерного параметра η, скорости распространения волны

$$\tanh\left(kph\right) = \frac{1-\chi\eta}{\theta\eta}\, p, \theta = \frac{mk}{\rho}. \tag{2.8}$$

В коротковолновом приближении $\left(kh \gg 1 \text{или } \tanh\left(kph\right) \approx 1\right)$ уравнение (2.8) приводится к виду

$$\sqrt{1-\chi\eta}\sqrt{1-\eta\left(1+\chi\right)} = \theta\eta. \tag{2.9}$$

Решением уравнения (2.9), удовлетворяющим условию затухания (2.7), будет

$$\eta = \frac{1+2\chi-\sqrt{1+4\theta^2}}{2\left(\chi\left(1+\chi\right)-\theta^2\right)}. \tag{2.10}$$

Нетрудно проверить, что скорость распространения локализованной волны, определяемой по формуле (2.10), совпадает со скоростью поверхностной сдвиговой волны (типа Лява) для полупространства с нагруженной поверхностью и с учетом внутреннего вращения частиц.

3. Уравнение (2.8) имеет решение $\eta = \left(1+\chi\right)^{-1}$, устанавливающее толщину слоя, при которой происходит переход от решений в виде тригонометрических функций (от объемных волн) к решениям в виде гиперболических функций (к локализованным волнам). Условие появления локализованных волн получается из уравнения (2.8) при предельном переходе $\eta \to \left(1+\chi\right)^{-1} (p \to 0)$ [4, 5]

$$kh = 1/\theta. \tag{3.1}$$

Из уравнения (2.8) в длинноволновом приближении $\left(kh\right)^2 \ll 1$, при $kh \prec 1/\theta$, получается

$$\eta = \left(\chi + kh\theta\right)^{-1}. \tag{3.2}$$

В принятом здесь приближении ω не зависит от волнового числа, поэтому необходимо рассматривать следующее приближение.

В случае, когда граница слоя $y = h$ свободна

$$\sigma_{23} = 0 \text{ при } y = h, \tag{3.3}$$

дисперсионное уравнение получается в виде

$$cth\left(kph\right)=\frac{1-\chi\eta}{\theta\eta}\,p. \tag{3.4}$$

В коротковолновом приближении из (3.4) получается уравнение, совпадающее с уравнением (2.9). В длинноволновом приближении

$$\eta=\frac{kh}{\left(1+\chi\right)kh+\theta}\,. \tag{3.5}$$

Согласно (3.5) скорость распространения сдвиговой волны удовлетворяет условию затухания (2.7), т.е. в этом случае локализованная волна всегда существует (независимо от толщины слоя или от kh).

Заключение. Исследование распространения сдвиговых упругих волн в слое на основе упрощенной модели Коссера, когда одна из плоскостей, ограничивающих слой, нагружена инерционной массой, а вторая граница закреплена, выявило возможность появления локализованной (поверхностной) волны вдоль нагруженной поверхности слоя. Определена скорость распространения волн в коротковолновом и длинноволновом приближении.

[1]Институт механики НАН РА
e-mail: mbelubekyan@yahoo.com
[2]Северо-Восточный федеральный ун-т им. М. К. Аммосова, г. Якутск
e-mail: grigyum@yandex.ru
[3]Ереванский государственный университет
e-mail: vas@ysu.am
[4]Институт физико-технических проблем Севера им. В. П. Ларионова, обособленное подразделение ФИЦ ЯНЦ СО РАН, г. Якутск

М. В. Белубекян, Ю. М. Григорьев, С. В. Саркисян, А. А. Гаврильева

Локализованные волны в слое с нагруженной инерционной массой на основе упрощенной модели Коссера

Исследовано распространение сдвиговых упругих волн в слое с учетом внутреннего вращения частиц (на основе упрощенной модели Коссера). Установлена возможность появления локализованной (поверхностной) волны вдоль нагруженной поверхности слоя. Определена скорость распространения волн в коротковолновом и длинноволновом приближениях.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Յ. Մ. Գրիգորև, Ս. Վ. Սարգսյան, Ա. Ա. Գավրիլևա

Իներցիոն զանգվածով բեռնավորված շերտում տեղայնացված ալիքները Կոսսերայի պարզեցված մոդելի հիման վրա

Շերտում մասնիկների ներքին պտտման դեպքում հետազոտված է սահքի առաձգական ալիքների տարածումը (Կոսսերայի պարզեցված մոդելի հիման վրա)։ Շերտի

բեռնավորված մակերևույթի երկայնքով հաստատված է տեղայնացված (մակերևութային) ալիքի առաջացման հնարավորություն: Կարճալիք և երկարալիք մոտարկումներում որոշվում են ալիքի տարածման արագությունները:

M. V. Belubekyan,Y. M. Grigoriev, S. V. Sarkisyan, A. A. Gavrileva

Localized Waves in a Layer with a Loaded Inertial Mass, on Based on the Simplified Cosserat Model

The propagation of elastic shear waves in the layer is investigated taking into account internal rotation of particles (based on the simplified model of Cosserat). The possibility of the appearance of a localized (surface) wave was set, along the loaded surface of the layer. The velocities of wave propagation in the short-wave and long-wave approximations are determined.

Литература

1. *Аветисян А. С., Камалян А. А.* – ДНАН Армении. 2014. Т. 114. № 2. С.108-115.
2. *Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzoca P.* – Journ. Acoustical Society of America. 2017. V. 141(3). P. 1947-1952.
3. *Belubekyan M. V.* – Proc. of the YSU. Physical and Mathematical Sciences. 2017. V. 51. Issue 1. P. 42–45.
4. *Белубекян М. В.* В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Ереван. Гитутюн. 2017. С. 93-98.
5. *Белубекян В. М., Белубекян М. В., Гараков В. Г.* – Вестн. РАУ. Серия физ.-мат. и естеств. наук. 2017. № 2. С. 81-90.
6. *Ambartsumyan S. A., Avetisyan A. S., Belubekyan M. V.* – Proc. of the NAS of Armenia. 2017. V. 70. № 2. P. 15–27.
7. *Аветисян А. С., Белубекуян М. В.* – Акустический журн. 2019. Т. 65. № 5. С.1-9.