

О ГЕНЕРАЦИИ ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК И ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В ВИДЕ РАЗНОСТИ ДВУХ КВАДРАТОВ

Э.А.Асмарян

Аннотация

Получены общие формулы для нахождения всех примитивных и непримитивных троек, генерируемых данным числом x . Используя их, получены также формулы для полного количества представлений целых чисел в виде разности двух квадратов.

1. Введение

Рассматривается уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (1)$$

Решения этого уравнения в целых положительных числах x, y, z ($x, y > 2$) называются пифагоровыми тройками, а само уравнение при этом относится к классу диофантовых уравнений.

Если известна какая-либо тройка чисел x, y, z , удовлетворяющая (1), то умножением её элементов на произвольные числа можно получить бесконечное множество решений этого уравнения. Тройки с взаимно простыми x, y, z называются примитивными.

Со времен Эвклида известен способ, позволяющий вычислять пифагоровы тройки по двум целым числам k, l , таким, что

$$x = 2kl, \quad y = k^2 - l^2, \quad z = k^2 + l^2, \quad k > l \quad (2)$$

$$(2kl)^2 + (k^2 - l^2)^2 = (k^2 + l^2)^2$$

Если k и l взаимно простые числа разной чётности, то (2) даёт примитивные тройки.

Существуют и другие способы получения пифагоровых троек или их представления в виде специальных комбинаций определенных чисел.

В данной работе задача нахождения пифагоровых троек ставится в следующем виде:

- для произвольного заданного целого числа $x > 2$, найти количество всех возможных примитивных и непримитивных пифагоровых

троек, в которых x является одним из элементов в левой части (1) (или, как принято говорить, генерируемых числом x), а также предложить удобный способ их вычисления.

Вышеуказанные методы не дают решения такой задачи. Так, формула (2) дает лишь столько троек, сколькими способами заданное четное число x может быть представлено в виде $2 \cdot k \cdot l$ (или нечетное число - в виде $k^2 - l^2$). При этом (2), давая правильное количество примитивных троек, может дать также некоторое количество непримитивных (если k и l не являются взаимно простыми или оба нечетны). Однако, как будет показано ниже, полное количество непримитивных троек, генерируемых числом x может быть значительно больше количества таких троек, получаемых из (2) при целых k и l .

В настоящей работе получены общие формулы для нахождения всех примитивных и непримитивных троек, генерируемых данным числом x . Используя их, получены также формулы для полного количества представлений целых чисел в виде разности двух квадратов.

Часть этих результатов опубликована в [1].

2. Вычисление троек

Перейдем к вычислению пифагоровых троек и их количества.

Имея в виду, что числа x и y могут быть оба чётными или разной чётности, но не могут быть оба нечётными, используем следующую стандартную процедуру.

а) Пусть задано нечётное число $x > 1$. Тогда y чётно, z – нечетно, т.е. $z = y + (2m + 1)$, $m \geq 0$.

Из (1) имеем:

$$x^2 + [z - (2m + 1)]^2 = z^2,$$

$$z = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2m+1} + 2m + 1 \right], \quad y = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2m+1} - (2m + 1) \right] \quad (3)$$

Так как y и z должны быть целыми, то $2m + 1 \equiv d$ должно быть делителем числа x^2 . Подставляя значения делителей d_i , получим

$$y_i = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{d_i} - d_i \right), \quad z_i = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{d_i} + d_i \right) \quad (4)$$

и соответствующие тройки (x, y_i, z_i) .

Можно показать, что по (4) именно z получается нечётным, а y – чётным, кратным 4-м.

Чтобы определить количество всех различных троек с положительными элементами, в (4) нужно брать только делители $d_i < x$. Пусть N_d – количество всех делителей числа x^2 . Очевидно, что количества делителей $d_i < x$ и $d_i > x$ одинаковы. Следовательно, количество делителей $d_i < x$, а значит и количество N_{tr} различных пифагоровых троек, будет равно

$$N_{tr} = \frac{N_d - 1}{2} \quad (5)$$

Заметим, что квадраты целых чисел всегда имеют нечетное количество делителей.

б) Пусть задано чётное число $x > 2$. В этом случае y и z должны быть числами одинаковой четности, т.е. $z = y + 2m, m > 0$.

Тогда из (1) получим:

$$\begin{aligned} x^2 + (z - 2m)^2 &= z^2 \\ x^2 - 4mz + 4m^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$y = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{m} - m, \quad z = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{m} + m \quad (6)$$

Отсюда следует: для того, чтобы y и z были целыми, $m \equiv d$ должно быть делителем числа $(x/2)^2$. Если d_i – i -ый делитель $(x/2)^2$, то из (6) имеем:

$$y_i = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{d_i} - d_i, \quad z_i = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{d_i} + d_i, \quad (7)$$

Подставляя в (7) значения d_i , мы получим соответствующие тройки (x, y_i, z_i) . Чтобы определить количество всех различных троек с положительными элементами, в (7) нужно брать только $d_i < \frac{x}{2}$. Если N_d – количество делителей числа $\left(\frac{x}{2}\right)^2$, то число делителей, меньших $\frac{x}{2}$, будет $\frac{N_d - 1}{2}$. Следовательно, количество всех пифагоровых троек, генерируемых числом x , также будет $\frac{N_d - 1}{2}$.

Определим теперь N_d . Для удобства в дальнейшем переобозначим $x \equiv n$.

Как известно, полное количество Q делителей какого-либо числа n определяется из его канонического разложения

$$n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_q^{s_q}, \quad (8)$$

где $p_1, \dots, p_q$ - различные простые числа, не равные 1. Тогда

$$Q = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \dots (s_q + 1). \quad (9)$$

1. Пусть n нечетно. Из его канонического разложения (8) получим

$$n^2 = p_1^{2s_1} \cdot p_2^{2s_2} \cdot \dots \cdot p_q^{2s_q}, \quad (10)$$

$$N_d = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) \dots (2s_q + 1) \quad (11)$$

и количество пифагоровых троек N_{tr} будет равно

$$N_{tr} = \frac{(2s_1+1)(2s_2+1)\dots(2s_q+1)-1}{2} \quad (12)$$

2. Пусть n – четно. Считая $p_1 = 2$ и записав для удобства n в виде

$$n = 2^{s_1+1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_q^{s_q}, \quad s_1 \geq 0,$$

получим

$$\frac{n}{2} = 2^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_q^{s_q} \quad \left(\frac{n}{2}\right)^2 = 2^{2s_1} \cdot p_2^{2s_2} \cdot \dots \cdot p_q^{2s_q}, \quad (13)$$

Тогда полное количество троек дается тем же выражением (12), в котором $s_1, s_2, \dots, s_q$ берутся из канонического разложения (13).

Таким образом, получаем следующий результат:

- любое целое число $n > 2$ генерирует N_{tr} пифагоровых троек, имеющих вид:

а) для нечётных n :

$$\left\{ n, \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{d_i} - d_i \right), \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{d_i} + d_i \right) \right\}, \quad (14)$$

где d_i – делители числа n^2 , меньшие n , а N_{tr} – определяется по формуле (12) с $s_1, s_2, \dots, s_q$ из канонического разложения числа n ;

б) для чётных n :

$$\left\{ n, \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{d_i} - d_i, \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{d_i} + d_i \right\}, \quad (15)$$

где d_i – делители числа $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, меньшие $\frac{n}{2}$, а N_{tr} – определяется по формуле (12) с $s_1, s_2, \dots, s_q$ из канонического разложения числа $\frac{n}{2}$.

В качестве иллюстрации приведем пример:

$n = 120$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2 = 3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $N_d = 45$, количество пифагоровых троек, получающихся из (15), равно $N_{tr} = 22$ (в том числе 4 примитивные). По формуле (2) получаются всего 6 троек, из них 4 – примитивные.

Из формул (14) и (15) видно, что для данного n существуют максимальные и минимальные значения двух других членов пифагоровых троек, а именно:

- для нечётных n :

максимальные: $\frac{n^2-1}{2}$ и $\frac{n^2+1}{2}$, при $d_i = 1$

минимальные: $\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{d_{max}} - d_{max}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{d_{max}} + d_{max}\right)$, где d_{max} – делитель числа n^2 , наиболее близкий к n ;

- для чётных n :

максимальные: $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ и $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, при $d_i = 1$

минимальные: $\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{d_{max}} - d_{max}$ и $\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{d_{max}} + d_{max}$, где d_{max} –

делитель числа $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, наиболее близкий к $\frac{n}{2}$.

3. Определение количества примитивных троек

Найдем теперь количество содержащихся в N_{tr} примитивных троек.

3.1 Пусть число n нечетно.

Воспользуемся опять каноническим разложением (10). В качестве делителей d_i в (14) возьмем содержащиеся в (10) множители, меньшие чем

n , и представляющие из себя произведения чисел $p_j^{2s_j}$ между собой во всех возможных сочетаниях и количествах (единичных, двойных, тройных и т.д.), т.е. числа вида

$$p_j^{2s_j}, p_j^{2s_j} \cdot p_m^{2s_m}, p_j^{2s_j} \cdot p_m^{2s_m} \cdot p_r^{2s_r}, \dots < n \quad (16)$$

$$j, m, r \dots = 1, 2, \dots, q$$

Тогда в выражениях $\frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{d_i} \mp d_i \right)$ при делении числа n^2 , записанного в виде (10), на делители d_i вида (16) в первом члене в скобках все соответствующие $p_j, \dots, p_r$ исчезнут (сократятся), тогда как второй член содержит только эти $p_j, \dots, p_r$. Поэтому эти два члена не будут содержать одинаковых чисел $p_j, \dots, p_r$, и, значит, не могут одновременно делиться ни на один из делителей числа n . Следовательно, элементы таких пифагоровых троек будут взаимно простыми и эти тройки будут примитивными.

Так как в d_i вида (16), дающие примитивные тройки, числа $p_j^{2s_j}$ входят неделимым образом (т.е. их можно считать как бы «простыми», в степени 1), то, записав (10) в виде

$$n^2 = (p_1^{2s_1})^1 \cdot \dots \cdot (p_q^{2s_q})^1$$

и используя (9), получим, что количество делителей вида (16) будет равно $\frac{(1+1)^q}{2} = 2^{q-1}$.

Таким образом получаем следующий результат:

- количество примитивных троек, генерируемых нечетным числом n , равно

$$N_p = 2^{q-1}, \quad (17)$$

где q - количество простых чисел p_j в каноническом разложении числа n . Отметим, что в N_p всегда входит примитивная тройка, получающаяся при делителе $d_i = 1$.

3.2 Пусть n - четное число. Если $\frac{n}{2}$ нечетно, т.е. n не кратно 4-м, то из (15) видно, что y и z получаются четными при любых делителях d_i . Это подтверждает тот известный факт, что некратные 4-м четные числа x не могут генерировать примитивных троек. Если же $\frac{n}{2}$ четно, то для получения примитивных троек надо в (15) в качестве d_i брать множители

вида (16) из канонического разложения (13) числа $\left(\frac{n}{2}\right)^2$. Объединив эти два случая, получим следующий результат:

- количество примитивных троек, генерируемых четным числом n равно:

$$N_p = 2^{q-2} [1 + (-1)^{\frac{n}{2}}] , \quad (18)$$

где q - количество простых чисел p_j в каноническом разложении числа $\frac{n}{2}$.

Приведем пример в качестве иллюстрации.

$$n = 2220 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37; \quad \frac{n}{2} = 1110 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37,$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 37^2 = 1232100.$$

Общее количество троек $N_{tr} = \frac{(2+1)^4 - 1}{2} = 40$, количество примитивных троек $N_p = 2^{4-1} = 8$, они получаются из (15) при делителях d_i равных

$$d_1 = 1; d_2 = 2^2; d_3 = 3^2; d_4 = 5^2; d_5 = 2^2 \cdot 3^2; d_6 = 2^2 \cdot 5^2; d_7 = 3^2 \cdot 5^2; d_8 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

В работах [2], [3] найдено количество примитивных пифагоровых треугольников с заданным радиусом вписанной окружности. В настоящей работе мы фактически определили количество всех примитивных и непримитивных пифагоровых треугольников с заданным катетом.

4. Представление целых чисел в виде разности квадратов двух чисел

Формулы (14) и (15) оказываются полезными также для нахождения всех возможных представлений целых чисел в виде разности двух квадратов.

4.1 Пусть n – произвольное нечетное число, большее 1, и мы хотим представить его в виде

$$n = k^2 - l^2, \quad k, l > 0 \quad (19)$$

Из тождества (2), записанного в виде

$$(2kl)^2 + n^2 = (k^2 + l^2)^2,$$

ясно, что $2kl$ и $k^2 + l^2$ являются элементами пифагоровых троек, генерируемых нечетным числом n , а они, как мы уже знаем, даются выражениями (14). В частности, мы можем записать:

$$k^2 + l^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{d_i} + d_i \right) \quad (20)$$

Из (19) и (20) найдем k и l :

$$k = \frac{n + d_i}{2\sqrt{d_i}}, \quad l = \frac{n - d_i}{2\sqrt{d_i}} \quad (21)$$

Из (21) следует, что k и l будут целыми и положительными числами, если $d_i < n$ и являются квадратами целых чисел. Действительно, в этом случае $\sqrt{d_i}$ есть целое число, являющееся делителем n и d_i , и, кроме того, так как n и d_i оба нечетны, то их сумма и разность четны. Поэтому количество N_r всех возможных представлений нечетного числа n в виде разности квадратов двух целых чисел равно количеству делителей числа n^2 , меньших чем n , и являющихся в каноническом разложении (10) числами вида

$$p_j^{2\alpha_j}, p_j^{2\alpha_j} \cdot p_m^{2\alpha_m}, p_j^{2\alpha_j} \cdot p_m^{2\alpha_m} \cdot p_r^{2\alpha_r}, \dots < n \quad (22)$$

$$j, m, r \dots = 1, 2, \dots, q, \quad \alpha_j \leq s_j$$

Количество таких делителей найдем, записав (10) в виде

$$n^2 = (p_1^2)^{s_1} \cdot (p_2^2)^{s_2} \cdot \dots \cdot (p_q^2)^{s_q} \quad (23)$$

Считая теперь числа p_j^2 неделимыми и используя (9), а также учитывая только $d_i < n_i$ получим полное количество N_r представлений (19):

$$N_r = \frac{(s_1+1) \cdot (s_2+1) \cdot \dots \cdot (s_q+1)}{2}, \quad \text{если } n \text{ не является квадратом,} \quad (24)$$

т.е. хотя бы одно s_j нечетно

и

$$N_r = \frac{(s_1+1) \cdot (s_2+1) \cdot \dots \cdot (s_q+1) - 1}{2}, \quad \text{если } n \text{ является квадратом.} \quad (25)$$

т.е. все s_j четны

Отметим, что тривиальное решение $k = \sqrt{n}$, $l = 0$ в (25) не включено. Из (21) также видно, что k и l – числа с разной четностью.

Итак, N_r представлений (19) для нечетных n даются выражением:

$$n = \left(\frac{n+d_i}{2\sqrt{d_i}} \right)^2 - \left(\frac{n-d_i}{2\sqrt{d_i}} \right)^2 \quad (26)$$

где d_i - делители числа n^2 , меньшие n , и являющиеся квадратами целых чисел (включая 1).

К примеру, для $n = 3465 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, $n^2 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$, количество представлений (19) с целыми и положительными k и l равно

$$N_r = \frac{(2+1) \cdot (1+1)^3}{2} = 12,$$

и они легко вычисляются по (26) с d_i , равными: $1; 3^2; 5^2; 7^2; 3^4; 11^2; 3^2 \cdot 5^2; 3^2 \cdot 7^2; 3^2 \cdot 11^2; 5^2 \cdot 7^2; 3^4 \cdot 5^2; 5^2 \cdot 11^2$.

Соответствующие 12 пар (k, l) в (19) будут $(1733, 1732); (579, 576); (349, 344); (251, 244); (197, 188); (163, 152); (123, 108); (93, 72); (69, 36); (67, 32); (61, 16); (59, 4)$.

4.2. Пусть n – четное число, и мы хотим представить его в виде

$$n = k^2 - l^2, \quad k, l > 0 \quad (27)$$

Запишем (2) в виде

$$(2kl)^2 + n^2 = (k^2 + l^2)^2$$

Тогда, согласно (15)

$$k^2 + l^2 = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{d_i} + d_i \quad (28)$$

Из (27) и (28) находим

$$k = \frac{n+2d_i}{2\sqrt{2d_i}}, \quad l = \frac{n-2d_i}{2\sqrt{2d_i}} \quad (29)$$

Из (29) ясно, что k и l будут целыми и положительными только тогда, когда d_i четны, меньше $\frac{n}{2}$ и имеют вид

$$d_i = 2^{2a+1}(2b+1)^{2c}, \quad a, b, c \geq 0 - \text{целые числа} \quad (30)$$

Найдем количество таких делителей, используя каноническое разложение (13) для $\left(\frac{n}{2}\right)^2$. Так как максимальное значение $2a+1$ равно $2s_1-1$, то в (30) $0 \leq a \leq s_1-1$. Числа $(2b+1)^{2c}$ должны иметь вид (22), где $j = 2, \dots, q$.

Согласно (13) и (23), количество всех нечетных делителей числа $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, имеющих вид (22), равно

$$(s_2 + 1) \cdot (s_3 + 1) \cdot \dots \cdot (s_q + 1)$$

Тогда количество всех четных делителей вида (30) равно

$$\frac{1}{2} \cdot 2s_1 \cdot (s_2 + 1) \cdot (s_3 + 1) \cdot \dots \cdot (s_q + 1) \quad (31)$$

Учитывая, что для получения всех различных представлений (27) из количества (31) надо использовать только $d_i < \frac{n}{2}$, получаем следующий результат:

- количество представлений N_r четного числа n в виде (27) равно:

$$N_r = \frac{s_1 \cdot (s_2 + 1) \cdot \dots \cdot (s_q + 1)}{2}, \quad \text{если } n \text{ не является квадратом,} \quad (32)$$

т.е. либо s_1 четно, либо хотя бы одно
из $s_2, \dots, s_q$ нечетно

и

$$N_r = \frac{s_1 \cdot (s_2 + 1) \cdot \dots \cdot (s_q + 1) - 1}{2}, \quad \text{если } n \text{ является квадратом,} \quad (33)$$

т.е. s_1 нечетно, и $s_2, \dots, s_q$ четны

Все эти представления даются выражением

$$n = \left(\frac{n + 2d_i}{2\sqrt{2d_i}} \right)^2 - \left(\frac{n - 2d_i}{2\sqrt{2d_i}} \right)^2, \quad (34)$$

где d_i - делители числа $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, меньшие $\frac{n}{2}$ и имеющие вид (30). Из (29) можно видеть, что k и l -числа с одинаковой четностью.

Как видно из (32), при $s_1 = 0$ $N_r = 0$, т.е. четные числа не кратные 4-м не могут быть представлены как разности двух квадратов. Напомним, что они не дают также примитивных пифагоровых троек.

В работе [4] количества представлений (24), (25), (32) и (33) получены методом факторизации числа n . Если перейти к использованным там обозначениям, то выражения для N_r совпадают, с той лишь разницей, что, в отличие от [4], в (25) и (33) не включен тривиальный случай $k = \frac{1}{n^2}$, $l = 0$.

Пример. $n = 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $\frac{n}{2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4$

$$N_r = \frac{1 \cdot (2+1)^2 - 1}{2} = 4$$

Соответствующие пары $(k, l) : (226, 224); (78, 72); (50, 40); (34, 16)$. Они получаются при : $d_1 = 2$; $d_2 = 2 \cdot 3^2$; $d_3 = 2 \cdot 3^4$; $d_4 = 2 \cdot 5^2$.

Вернемся к пифагоровым тройкам и выясним , как можно вычислить все N_{tr} троек по (2).

Пусть задано нечетное число $n = k^2 - l^2$. Заметим, что если в (8) все $s_j = 1$, то количество представлений N_r из (24) равно количеству примитивных троек $N_p = 2^{q-1}$, а вообще говоря, $N_r \geq N_p$. Их разность $N_r - N_p$ дает какое-то количество непримитивных троек, которыми однако, все такие тройки не исчерпываются. Оставшиеся $N_{tr} - N_r$ непримитивные тройки получаются по (14) с теми делителями $d_i < n$, которые не являются квадратами целых чисел. Для таких делителей выражения (21) дают иррациональные k и l (при этом $2kl$, $k^2 - l^2$ и $k^2 + l^2$ остаются целыми). С другой стороны, это именно те непримитивные тройки, которые не могут быть получены по (2) с целыми k и l . Следовательно, полное количество N_{tr} можно получить и по (2), если в ней использовать все целые и иррациональные k, l даваемые выражениями (21), где d_i - все делители числа n^2 , меньшие n .

Пусть теперь задано четное число $n = 2kl$. Тогда согласно (15)

$$k^2 + l^2 = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{d_i} + d_i, \quad k^2 - l^2 = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{d_i} - d_i,$$

и мы получаем

$$k = \frac{n}{2\sqrt{d_i}}, \quad l = \sqrt{d_i} \quad (35)$$

Следовательно, все N_{tr} троек, генерируемых заданным четным числом n , получаются по формуле (2), если в ней использовать все целые и иррациональные k, l , получаемые по (35), где d_i - все делители числа $\left(\frac{n}{2}\right)^2$, меньшие $\frac{n}{2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В более поздних способах генерации пифагоровых троек используются различные специальные представления генерирующих чисел, в частности, представление числами Фибоначчи [5], геометрические представления, например, метод Диксона [6] и другие [7], [8]. Поэтому они не дают универсальных формул для нахождения всех генерируемых троек.

В данной работе получены общие формулы для нахождения всех примитивных и непримитивных троек, генерируемых заданным числом, представляемым в самом общем виде – в виде канонического разложения. Этот метод использован также для нахождения всех возможных представлений целых чисел в виде разности двух квадратов, а также для выявления связи между количествами этих представлений и троек. Также показан способ получения по формуле Эвклида (2) всех генерируемых троек, которые не могут быть получены по этой формуле при целых k и l .

Все эти результаты получены единым методом – используя формулы (14), (15) и канонические разложения соответствующих чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.А.Асмарян. О пифагоровых тройках. *Итоги науки, вып.26,Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки.,Миасс, сентябрь 2016г., М., РАН, 2016, стр. 3-11.*
2. Neville Robbins. On the number of primitive triangles with a given inradius. *The Fibonacci Quarterly*, **44**, 4 (2006), p.p. 368-369
3. Tron Omland. How many Pythagorean triples with a given inradius. *Journal of Number Theory*, **170**, 1 (2017) p.p.1-2
4. M.A. Nyblom. On the Representation of the Integers as a Difference of Squares. *The Fibonacci Quarterly*, **40**, 3(2002), p.p. 243-246.
5. Horadam F.F. Fibonacci number triples. *American Mathematical Monthly*, **68**, 1961, p.p. 751-753

6. Dickson L.E. History of the Theory of Numbers. vol. II *Diofantine Analysis*. Carnegie Institution, New York: Dover Publications, 2005 [1920]
7. Roberto Amato. A Characterization of Pythagorean Triples. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Application*, **39**, 2, (2017), p.p. 221-230
8. Tanay Roy and Farjana Jasmin Sonia A direct Method to generate Pythagorean Triples and its Generalization to Pythagorean Quadruples and n-triples. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1201/1201.2145.pdf>

Институт радиофизики и электроники НАН РА
0203, г.Аштарак, ул. Бр.Алиханян, 1

Эл.почта: emilas@irphe.am

Опубликовано: *International Journal of Mathematics and Computer Science*, v. 13 (2018), no 1, p.p. 59-71
<http://ijmcs.future-in-tech.net/13.1/R-Asmaryan.pdf>