А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 24 ФЕВРАЛЬ, 1986 ВЫПУСК 1

УДК: 52:53

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ III. СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ ФОТОНА В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

А. Г. НИКОГОСЯН

Поступила 29 апреля 1985

Принята к печати 15 сентября 1985

Предложенный в предыдущих статьях этой серии подход, основанный на принципе инвариантности и использовании производящих и характеристических функций, применяется для определения среднего времени пребывания фотона в трехмерной полубесконечной среде. При достаточно общих предположениях относительно элементарного акта рассеяния получены уравнения и формулы, позволяющие вычислять указанную среднюю величину в зависимости от характеристик исходного фотона. Показано, что среднее время пребывания в среде фотонов, покидающих ее в ходе диффузии, может быть найдено формальным дифференцированием по β соответствующего уравнения или формулы для вероятности выхода (или контура линии). Получено соотношение, которое устанавливает связь между средним числом рассеяний и средним временем пребывания в среде, рассчитанными для всех фотонов, независимо от того, поглощаются ли они впоследствии в среде, или покидают ее. Ход рассуждений, приведенный в работе, применим при определении любой непрерывно распределенной случайной величины, описывающей процесс многократного рассеяния.

1. *Введение.* В предыдущих двух статьях настоящей серии [1, 2] на примере задачи о нахождении среднего числа рассеяний иллюстрировался новый подход к определению статистических средних величин, характеризующих процесс диффузии в среде. Предложенный подход основывается на применении принципа инвариантности и широком использовании метода производящих функций. В данной работе показывается, что таким же способом можно определить статистические средние непрерывно распределенных случайных величин, но при этом следует пользоваться соответствующими характеристическими функциями. В качестве иллюстрации рассматривается представляющий большой интерес для практических применений вопрос о нахождении среднего времени пребывания фотона в рассеивающей среде. В общем случае, когда фотоны гибнут не только при рассеяниях, но и в полете, данная величина позволяет судить об относительной

роли диссипации энергии в среде и оттока энергии через границу. Другое важное применение указанной величины связано с часто встречающимися в астрофизических приложениях задачами о свечении среды, находящейся под воздействием нестационарных источников излучения. В этих задачах знание среднего времени пребывания фотона в среде позволяет выяснить, успевает ли установиться в среде лучистое равновесие. Указанная величина для монохроматического рассеяния в одномерной среде вычислялась В. В. Соболевым [3]. Для монохроматического рассеяния в трехмерной среде В. Ирвин [4, 5] и др. исследовали распределение траекторий фотонов по длинам, что дает возможность определить среднее время пребывания фотона в среде. Как мы убедимся ниже, задача о нахождении среднего времени пребывания фотона в среде в этом простейшем случае эквивалентна задаче о вычислении среднего числа рассеяний. В. В. Ивановым [6] исследовался вопрос об определении среднего пути, проходимого в среде фотоном резонансной линии, рассеивающимся с полным перераспределением по частотам. Этот вопрос не отличается от обсуждаемой здесь задачи, если допустить, что фотон затрачивает время только на путь между рассеяниями. В то же время важно отметить, что в указанной работе рассматривалось лишь интегральное значение среднего пути, взвешенное по мощности первичных источников энергии и получающееся в результате интегрирования по всем частотам, направлениям и глубинам, причем оно относится ко всем фотонам, независимо от того, погибают ли последние в среде, или покидают ее. Эта же величина при общем законе перераспределения по частотам определялась в работе [7]. Между тем, в астрофизических задачах часто возникает необходимость получить по возможности более полную информацию о фотонах, выходящих из среды. С другой стороны, представляет немаловажный интерес выявление зависимости различных средних величин от исходных характеристик фотона (частоты, направления движения и т. д.). Этот последний вопрос, насколько нам известно, до сих пор не ставился. Применяемый нами подход позволяет получить достаточно полное описание процесса диффузии фотонов и пригоден при весьма широких предположениях относительно элементарного акта рассеяния и при любом распределении первичных источников энергии.

В настоящей работе нас будет интересовать среднее время пребывания фотона в полубесконечной среде. При этом будем рассматривать достаточно общую задачу, в которой среда принимается трехмерной, а рассеяние — сопровождающимся перераспределением по частотам и направлениям. Однако получаемые результаты часто выписываются и для рассеяния с полным перераспределением по частотам. Как и в предыдущих статьях данной серии, величины, описывающие процесс рассеяния фотонов, покинувших среду, и фотонов, погибших в среде, будут отмечаться соответственно звездочкой и ноликом. Для других величин, введенных в указанных работах, используются принятые в них обозначения. Номера нужных нам формул из этих работ спереди отмечаются римскими цифрами I и II.

2. *Среда, освещаемая извне.* Приступая непосредственно к рассмотрению нашей задачи, отметим, что в математическом отношении представляет интерес лишь случай, когда фотон затрачивает время только на прохождение пути между рассеяниями. Поэтому в дальнейшем ограничимся обсуждением именно этого случая. Что же касается среднего времени, затрачиваемого фотоном в ходе диффузии на пребывание рассеивающих атомов в возбужденном состоянии, то оно при необходимости может быть учтено простым перемножением среднего числа рассеяний и среднего времени, затрачиваемого каждым из атомов на процесс переизлучения. Это можно сделать ввиду независимости последних двух случайных величин, что является следствием отсутствия корреляции между частотой поглощенного фотона и временем пребывания атома в возбужденном состоянии.

Для удобства временные промежутки всюду ниже будут измеряться в единицах $t_2 = 1/nck_{\nu_0}$, где n — число рассеивающих частиц в 1 см^3 и k_{ν_0} — коэффициент рассеяния в центральной частоте линии, рассчитанный на один атом. Величина t_2 представляет собой среднюю длину пробега между двумя последовательными рассеяниями для фотона в центре линии, если поглощение в непрерывном спектре отсутствует. Безразмерное время будет обозначаться через ω.

При рассмотрении среды, освещаемой снаружи, сначала нас будет интересовать та часть фотонов, которые в ходе диффузии покидают среду. Итак, пусть на полубесконечную плоскопараллельную среду под углом $\arccos \eta$ к внутренней нормали падает фотон безразмерной частоты x. По аналогии с функцией отражения ρ введем в рассмотрение функцию $\tilde{\rho}$, обладающую следующим смыслом: величина $\eta'\tilde{\rho}dx'\,d\eta'd\omega$ представляет собой вероятность того, что в результате многократных рассеяний из среды в направлении η' (отсчитываемого от внешней нормали к поверхности среды) внутри телесного угла $2\pi d\eta'$ за промежуток времени ω, $\omega + d\omega$ после освещения выйдет фотон с частотой, принадлежащей интервалу $(x', x' + dx')$.

Применение принципа инвариантности приводит к следующему уравнению для функции:

$$(\eta + \eta')\,\partial\tilde{\rho}/\partial\omega + [v(x)\,\eta' + v(x')\,\eta]\,\tilde{\rho}\,(x', \eta'; x, \eta; \omega) =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\, r\,(x', -\eta'; x, \eta)\,\delta\,(\omega) +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', \eta'')\bar{\rho}(x'', \eta''; x, \eta; \omega)\,dx'' +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta'\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(x', \eta'; x'', \eta''; \omega)\, r(x'', \eta''; x, \eta)\,dx'' +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\eta'\int_0^{\infty} d\omega'\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\rho}(x', \eta'; x'', \eta''; \omega') \times$$

$$\times\, dx''\int_0^1 d\eta'''\int_{-\infty}^{\infty} r(x''', -\eta'''; x'', \eta'')\tilde{\rho}(x''', \eta'''; x, \eta; \omega-\omega')\,dx''', \tag{1}$$

где $\delta(\omega)$ — дельта-функция Дирака, $v(x) = \alpha(x) + \beta$, а под $r(x', \eta'; x, \eta)$, как и ранее, понимаем усредненную по азимуту функцию перераспределения по частотам и направлениям. В качестве начального условия имеем $\tilde{\rho}(x', \eta'; x, \eta; 0) \equiv 0$.

При рассмотрении неотрицательной действительной случайной величины характеристическую функцию удобно заменить преобразованием Лапласа функции распределения, поэтому введем функцию

$$\Psi(x', \eta'; x, \eta; s) = \int_0^{\infty}\bar{\rho}(x', \eta'; x, \eta; \omega)\, e^{-s\omega}\,d\omega, \tag{2}$$

для которой на основе (1) будем иметь

$$[v(x)\eta' + v(x')\eta + s(\eta+\eta')]\,\Psi(x', \eta'; x, \eta; s) = \frac{\lambda}{2} r(x', -\eta'; x, \eta) +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} r(x', \eta'; x'', \eta'')\,\Psi(x'', \eta''; x, \eta; s)\,dx'' +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta'\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x', \eta'; x'', \eta''; s)\, r(x'', \eta''; x, \eta)\,dx'' +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\eta'\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x',\eta';x'',\eta'';s)\times$$

$$\times dx''\int_0^1 d\eta'''\int_{-\infty}^{\infty} r(x''',-\eta''';x'',\eta'')\,\Psi(x''',\eta''';x,\eta;s)\,dx'''. \tag{3}$$

Поскольку $\Psi(x',\eta';x,\eta;0)\equiv\rho(x',\eta';x,\eta)$, то полагая в (3) $s=0$, приходим к уравнению для функции отражения (ср. с I.2). Нужные нам средние величины выражаются через функцию

$$T(x',\eta';x,\eta)=-\,\partial\Psi(x',\eta';x,s)/\partial s\,|_{s=0}, \tag{4}$$

для которой на основе (3) получаем уравнение

$$[v(x)\eta'+v(x')\eta]\,T(x',\eta';x,\eta)=(\eta+\eta')\,\rho(x',\eta';x,\eta)+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} r(x',\eta';x'',\eta'')\,T(x'',\eta'';x,\eta)\,dx''+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta'\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} T(x',\eta';x'',\eta'')\,r(x'',\eta'';x,\eta)\,dx''+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\eta'\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} T(x',\eta';x'',\eta'')\,dx''\times$$

$$\times\int_0^1 d\eta'''\int_{-\infty}^{\infty} r(x''',-\eta''';x'',\eta'')\,\rho(x''',\eta''';x,\eta)\,dx'''+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\eta'\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x',\eta';x'',\eta'')\,dx''\times$$

$$\times\int_0^1 d\eta'''\int_{-\infty}^{\infty} r(x''',-\eta''';x'',\eta'')\,T(x''',\eta''';x,\eta)\,dx'''. \tag{5}$$

Если воспользоваться следующим соотношением для вероятности выхода с глубины τ

$$\frac{2}{\lambda}\alpha(x')\,p(0,\,x',\,\eta';\,x,\,\eta)=r(x',\,\eta';\,x,\,\eta)+$$

$$+\eta\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty} r(x',\,\eta';\,x'',\,-\eta'')\,\rho(x'',\,\eta'';\,x,\,\eta)\,dx'', \tag{6}$$

то уравнение (5) можно переписать в краткой форме

$$[v(x)\,\eta'+v(x')\,\eta]\;T(x',\,\eta';\,x,\,\eta)=(\eta+\eta')\,\rho(x',\,\eta';\,x,\,\eta)+$$

$$+\eta\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x'')\,p(0,\,x'',\,\eta'';\,x',\,\eta')\;T(x'',\,\eta'';\,x,\,\eta)\,dx''+$$

$$+\eta'\int_0^1 d\eta''\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x'')\,p(0,\,x'',\,\eta'';\,x,\,\eta)\;T(x'',\,\eta'';\,x',\,\eta')\,dx''. \tag{7}$$

Уравнение (7) лишь свободным членом отличается от полученного в [1] уравнения (I.16) для функции $\nu(x',\,\eta';\,x,\,\eta)$.

Пусть на среду под углом $\arccos\eta$ к нормали падает фотон частоты x. Тогда очевидно, что отношение T/ρ представляет собой среднее время, по истечении которого под углом $\arccos\eta'$ внутри телесного угла $2\pi d\eta'$ выйдет фотон с частотой, заключенной в интервале $(x',\,x'+dx')$. Отношение T/ρ, как нетрудно понять, является симметричной функцией относительно пар аргументов $x,\,\eta$ и $x',\,\eta'$, что вытекает из принципа обратимости оптических явлений. При близком знакомстве с уравнением (5) легко заметить, что последнее может быть получено непосредственно из уравнения (I.2) для функции отражения $\rho(x',\,\eta';\,x,\,\eta)$ почленным дифференцированием по параметру β и заменой знака на противоположный (то обстоятельство, что зависимость функций ρ, T, p и v от β не отмечается явным образом, не должно привести к недоразумениям). Поэтому для рассмотренного выше отношения T/ρ можно написать

$$T(x',\,\eta';\,x,\,\eta)/\rho(x',\,\eta';\,x,\,\eta)=-\partial\ln\rho(x';\,\eta';\,x,\,\eta)/\partial\beta. \tag{8}$$

Таким образом, в случае, когда речь идет о фотонах, диффузно отраженных от среды, процедуры, связанные с дифференцированием уравнения (3) по s и уравнения для функции отражения (I.2) по β, в одинаковой мере позволяют определить величину T/ρ, характеризующую среднее время пребывания фотона в среде. Более того, оказывается, что сказанное имеет место каждый раз, когда имеем дело с движущимися (но не с гибнущими) фотонами. Это один из основных результатов настоящей работы. Как легко увидеть, положение вещей здесь аналогично тому, что мы имели при нахождении среднего числа рассеяний указанных фотонов. Тогда приводила к цели процедура, связанная с дифференцированием соответствующих формул и уравнений по λ. Поэтому многое из того, что говорилось в [1] при определении среднего числа рассеяний для движущихся фотонов, остается в силе и при нахождении среднего времени пребывания фотонов в среде. Так, если мы располагаем явным выражением для интенсивности выходящего излучения, то формальным дифференцированием по β можно получить формулу для определения среднего времени пребывания в среде отраженных фотонов. Однако, вообще говоря, для нахождения указанной величины нет необходимости в предварительном определении интенсивности выходящего излучения, поскольку та же процедура дифференцирования по β дает возможность получить для среднего времени отдельное уравнение. Такой путь является особенно важным в тех случаях, когда замкнутого выражения для интенсивности отраженного излучения получить нельзя.

Поскольку уравнения (7) и (I.16) отличаются друг от друга лишь свободными членами, то все, что говорилось в [1] относительно решения уравнения (I.16) в общем случае некогерентного рассеяния, в одинаковой мере относится и к уравнению (7). В частности, и здесь, если воспользоваться билинейным разложением функции перераспределения, то задача может быть сведена к решению некоторой линейной системы функциональных уравнений (аналогичной I.18) относительно функций $\bar{\psi}_{ik}(x, \eta) = -\partial\varphi_{ik}(x, \eta)/\partial\beta$. Эту систему уравнений, как и (I.18), с вычислительной точки зрения, удобнее решать параллельно с системой функциональных уравнений (I.7) для функций $\varphi_{ik}(x, \eta)$.

Обращаясь к приближению полного перераспределения по частотам и замечая, что в этом частном случае

$$\rho(x', \eta'; x, \eta) = (\lambda/2)\varphi_0(x', \eta')\varphi_0(x, \eta)/[v(x)\eta' + v(x')\eta], \tag{9}$$

вместо (8) будем иметь

$$T(x', \eta'; x, \eta)/\rho(x', \eta'; x, \eta) = (\eta + \eta')/[v(x)\eta' + v(x')\eta] + g(x, \eta) + g(x', \eta'), \tag{10}$$

где

$$g(x, \eta) = -\partial \ln \varphi_0(x, \eta)/\partial\beta, \tag{11}$$

а функция $\varphi_0(x, \eta)$ является решением уравнения (I.9).

Соотношение (10) показывает, что для получения полной информации относительно среднего времени пребывания в среде фотонов, отражающихся в результате многократных рассеяний от среды, достаточно определить функцию $g(x, \eta)$. На основе (10) для функции $g(x, \eta)$ можно получить линейное уравнение, легко разрешимое численным путем:

$$\alpha(x)\, g(x, \eta) = C(x, \eta) + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x')\, \rho(x', \eta'; x, \eta)\, g(x', \eta')\, dx', \quad (12)$$

где

$$C(x, \eta) = \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0(x, \eta) \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\eta + \eta')\, \varphi_0(x', \eta')}{[v(x)\, \eta' + v(x')\, \eta]^2}\, \alpha(x')\, dx'. \quad (13)$$

Как мы помним, такому же уравнению, но с другим свободным членом, удовлетворяет функция $f(x, \eta)$ (ср. с I.20). Так же, как функция $f(x, \eta)$ при определении среднего числа рассеяний, так и функция $g(x, \eta)$ в вопросе вычисления среднего времени пребывания фотона в среде играет важную роль. Таблицы значений функции $g(x, \eta)$ будут приведены в следующей статье этой серии. Исходя из явного выражения функции $H(z) = \varphi_0(x, \eta)/\alpha_0(x)$, можно написать явное выражение и для $g(x, \eta)$. Наконец, нетрудно получить для этой функции сингулярное уравнение, однако на этих вопросах мы здесь не останавливаемся.

На практике часто может оказаться достаточным знание величины

$$\Omega_*(x, \eta) = -\partial \ln R_*(x, \eta)/\partial\beta =$$
$$= \int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} T(x', \eta'; x, \eta)\, dx' \Big/ \int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', \eta'; x, \eta)\, dx', \quad (14)$$

представляющей собой среднее время пребывания в среде тех из отраженных фотонов, которые падали на среду под углом $\arccos \eta$ к нормали и имели при этом частоту x. В предположении о полном перераспределении по частотам подстановка (10) в (14) дает

$$\Omega_*(x, \eta) = g(x, \eta) + \int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_0(x', \eta')}{v(x)\, \eta' + v(x')\, \eta} \Big[g(x', \eta') +$$
$$+ \frac{\eta + \eta'}{v(x)\, \eta' + v(x')\, \eta} \Big] dx' \Big/ \int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_0(x', \eta')}{v(x)\, \eta' + v(x')\, \eta}\, dx'. \quad (15)$$

При когерентном и изотропном рассеянии, пользуясь хорошо известной формулой

$$R_*(x, \eta) = 1 - \varphi(x, \eta)\sqrt{1-\lambda(x)}$$

($\lambda(x) = \lambda\alpha(x)/v(x)$) и первым из равенств (14), получаем

$$\Omega_*(x, \eta) = \left[\frac{\lambda(x)}{2v(x)\sqrt{1-\lambda(x)}} - g(x, \eta)\sqrt{1-\lambda(x)}\right] \times$$
$$\times \varphi(x, \eta)/(1 - \varphi(x, \eta)\sqrt{1-\lambda(x)}). \quad (16)$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае функция $\varphi(x, \eta)$, а следовательно и $R_*(x, \eta)$, зависят от β через посредство комбинации $\lambda(x)$. Отсюда вытекает, что

$$-\partial/\partial\beta = [\lambda/v(x)]\,\partial/\partial\lambda, \quad (17)$$

то есть действие оператора $-\partial/\partial\beta$ лишь множителем $1/v(x)$ отличается от действия оператора $\lambda\partial/\partial\lambda$. Поэтому при когерентном рассеянии (предположение об изотропности элементарного акта рассеяния не является существенным для нашего утверждения) имеет место

$$v(x)\,\Omega_*(x, \eta) = N_*(x, \eta). \quad (18)$$

Аналогичная связь существует между функциями $g(x, \eta)$ и $f(x, \eta)$: $v(x)\,g(x, \eta) = f(x, \eta)$, поэтому, располагая таблицей значений функции $f(x, \eta)$, нетрудно табулировать и функцию $g(x, \eta)$ для когерентного рассеяния. Функция $f(x, \eta)$ хорошо изучена: известно ее явное выражение, асимптотика для $\lambda = 1$ (см. [8]) и т. д. Заметим, что приведенная выше формула (18) допускает простое физическое истолкование. В самом деле, нетрудно увидеть, что величина $1/v(x)$ представляет собой не что иное, как среднее время пробега между двумя последовательными актами рассеяния для фотона частоты x:

$$\int_0^\infty \frac{\tau}{\eta} e^{-\frac{v(x)}{\eta}\tau} v(x)\frac{d\tau}{\eta} \Bigg/ \int_0^\infty e^{-\frac{v(x)}{\eta}\tau} v(x)\frac{d\tau}{\eta} = \frac{1}{v(x)}.$$

Поэтому соотношение (18) выражает собой факт статистической независимости двух случайных величин: числа рассеяний в среде и времени пробега между двумя последовательными актами рассеяния. Связь, аналогичную (18), можно написать и для гибнущих фотонов. Если для бесконечной среды такой результат нетрудно понять, то в случае полубесконечной среды он является не совсем очевидным и имеет место лишь при когерентном рассеянии.

Возвращаясь вновь к общему случаю перераспределения по частотам и направлениям, укажем, что на основе (7) для величины

$$T_*(x, \eta) = \int_0^1 \eta' d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} T(x', \eta'; x, \eta)\, dx' \tag{19}$$

может быть получено соотношение, которым мы воспользуемся ниже:

$$v(x) T_*(x, \eta) = \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') p(0, x', \eta'; x, \eta) T_*(x', \eta')\, dx' + \overline{I}_*(x, \eta), \tag{20}$$

где

$$\overline{I}_*(x, \eta) = R_*(x, \eta) + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', \eta'; x, \eta)\, dx' -$$

$$- \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \alpha(x) + \beta \right] T(x', \eta'; x, \eta)\, dx' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} T(x, \eta; x', \eta')\, dx' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', -\eta'; x'', \eta'') R_*(x'', \eta'')\, dx''.$$

Перейдем к рассмотрению среднего времени пребывания в среде фотонов, погибающих в ходе диффузии. По аналогии с функцией $\widetilde{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta')$ (см. [1]) введем функцию $\widetilde{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta'; \omega)$, которой припишем следующий вероятностный смысл. Допустим, как и ранее, что на среду под углом $\arccos \eta$ к нормали падает фотон частоты x. Тогда под $\widetilde{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta'; \omega)\, d\eta' dx' d\omega$ будем понимать вероятность того, что в результате многократных рассеяний за время ω, $\omega + d\omega$ фотон пересечет плоскость, находящуюся на глубине τ, в направлении η' внутри телесного угла $2\pi d\eta'$ в виде фотона, обладающего частотой, принадлежащей интервалу $(x', x' + dx')$.

Применение принципа инвариантности приводит к следующему уравнению для функции $\widetilde{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta'; \omega)$:

$$\eta \frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \omega} = - v(x)\, \widetilde{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta'; \omega) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x'', \eta'')\, \widetilde{Y}(\tau, x'', \eta''; x', \eta'; \omega)\, dx'' +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\int_{\tau}^{\omega}d\omega'\int_{0}^{1}d\eta''\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\rho}(x,\eta;x'',\eta'';\omega-\omega')\times$$

$$\times dx''\int_{0}^{1}d\eta'''\int_{-\infty}^{\infty}r(x'',-\eta'';x''',\eta''')\tilde{Y}(\tau,x''',\eta''';x',\eta';\omega)\,dx''', \quad (21)$$

с условием $\tilde{Y}(\tau, x, \eta; x', \eta'; \tau) = 2\pi\exp\left(-\frac{v(x)}{\eta}\tau\right)\delta(x-x')\delta(\eta-\eta')$.

Вероятность гибели рассматриваемого фотона где-либо в среде за время ω, $\omega+d\omega$ задается, очевидно, величиной

$$Z(x,\eta;\omega)=\int_{-1}^{1}\frac{d\eta'}{|\eta'|}\int_{0}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}u(x')\tilde{Y}(\tau,x,\eta;x',\eta';\omega)\,dx', \quad (22)$$

где $u(x)=(1-\lambda)\alpha(x)+\beta$.

Из уравнения (21) для преобразования Лапласа функции $Z(x, \eta; \omega)$ находим

$$[v(x)+s]\hat{Z}(x,\eta;s)=u(x)-\eta\int_{0}^{1}d\eta'\int_{-\infty}^{\infty}u(x')\Psi(x,\eta;x',\eta';s)\,dx'+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_{0}^{1}d\eta''\int_{-\infty}^{\infty}r(x,\eta;x'',\eta'')\hat{Z}(x'',\eta'';s)\,dx''+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\eta\int_{0}^{1}d\eta'\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,\eta;x',\eta';s)\,dx'\times$$

$$\times\int_{0}^{1}d\eta''\int_{-\infty}^{\infty}r(x',-\eta';x'',\eta'')\hat{Z}(x'',\eta'';s)\,dx''. \quad (23)$$

Теперь, если ввести обозначение $T_0(x,\eta)=-\partial\hat{Z}(x,\eta;s)/\partial s|_{s=0}$, то нетрудно убедиться, что величина $\Omega_0=T_0/R_0$ представляет собой среднее время пребывания в среде фотонов, гибнущих в ходе диффузии. Очевидно также, что $R_0(x,\eta)\equiv\hat{Z}(x,\eta;0)$.

Используя уравнение (23), для функции $T_0(x, \eta)$ легко получить

$$v(x)\, T_0(x, \eta) = \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x')\, p(0, x', \eta'; x, \eta)\, T_0(x', \eta')\, dx' + \overline{I}_0(x, \eta), \tag{24}$$

где

$$\overline{I}_0(x, \eta) = R_0(x, \eta) + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} u(x')\, T(x, \eta; x', \eta')\, dx' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} T(x, \eta; x', \eta')\, dx' \int_0^1 d\eta'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', -\eta'; x'', \eta'')\, R_0(x'', \eta'')\, dx''.$$

Заметим, что уравнение (I.29) для функции $R_0(x, \eta)$ вытекает также из (23), если в последнем положить $s = 0$.

Поскольку входящие в $\overline{I}_0(x, \eta)$ величины известны, то соотношение (24) может рассматриваться как уравнение относительно $T_0(x, \eta)$, которое можно решить, если воспользоваться представлением функции перераспределения в виде билинейного разложения. Однако проще вычислить $T_0(x, \eta)$, а вместе с нею и величину $\Omega_0(x, \eta)$, после определения величины

$$\langle \Omega(x, \eta) \rangle = T_*(x, \eta) + T_0(x, \eta) =$$
$$= R_*(x, \eta)\, \Omega_*(x, \eta) + R_0(x, \eta)\, \Omega_0(x, \eta), \tag{25}$$

которая, как нетрудно понять, представляет собой время пребывания в среде для фотона частоты x, падающего под углом $\arccos \eta$, независимо от того, поглотится ли он впоследствии в среде, или покинет ее. Сложив почленно уравнения (20) и (24), приходим к следующему уравнению относительно функции:

$$v(x) \langle \Omega(x, \eta) \rangle = \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x')\, p(0, x', \eta'; x, \eta) \langle \Omega(x', \eta') \rangle\, dx' +$$

$$+ 1 + \eta \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', \eta'; x, \eta)\, dx'. \tag{26}$$

Уравнения (I.29), (I.32) и (26), которым удовлетворяют величины $R_0(x, \eta)$, $\langle N(x, \eta) \rangle$ и $\langle \Omega(x, \eta) \rangle$, имеют одно и то же ядро

$\alpha(x')\,p(O, x', \eta'; x, \eta)$ и отличаются друг от друга лишь свободным членом.

Комбинируя указанные уравнения и принимая во внимание тождество $u(x) = (1-\lambda)\alpha(x) + \beta = (1-\lambda)v(x) + \lambda\beta$, получаем важное соотношение, связывающее между собой среднее число рассеяний и среднее время пребывания фотона в среде:

$$(1-\lambda)\langle N(x, \eta)\rangle + \lambda\beta\langle \Omega(x, \eta)\rangle = R_0(x, \eta). \tag{27}$$

Соотношение, аналогичное (27), для интегральных средних величин в приближении полностью некогерентного рассеяния было получено в [6]. Однако в отличие от этого последнего соотношения равенство (27) имеет более общую природу и не может быть получено из уравнения переноса.

Нетрудно видеть, что для нахождения $\langle \Omega(x, \eta)\rangle$ нет необходимости решать уравнение (26). После определения среднего числа рассеяний $\langle N(x, \eta)\rangle$ соотношение (27) позволяет вычислить величину $\langle \Omega(x, \eta)\rangle$. Знание же последней дает возможность в случае необходимости из (25) определить и $\Omega_0(x, \eta)$, Так, в частном случае, когда рассеяние сопровождается полным перераспределением по частотам, пользуясь явным выражением для $\langle N(x, \eta)\rangle$ из (I.38), в силу (27) получаем

$$\beta\langle \Omega(x, \eta)\rangle = R_0(x, \eta) - (1-\lambda)H(z)\,\alpha(x)/v(x)\sqrt{1-\bar{\lambda}}, \tag{28}$$

или

$$\langle \Omega(x, \eta)\rangle = \frac{1}{v(x)} + \frac{\lambda}{2}\frac{\alpha(x)}{v(x)}H(z)\left[\frac{2\delta(\beta)}{\sqrt{1-\bar{\lambda}}} - \right.$$
$$\left. - \gamma_{00}(\lambda, \beta) + \omega(z, \lambda, \beta)\right], \tag{29}$$

где

$$\gamma_{00}(\lambda, \beta) = \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)H(z)\,dz,$$

$$\delta(\beta) = A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(x)}{v(x)}\,dx = \int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)dz,$$

$$\omega(z, \lambda, \beta) = z\int_0^{1/\beta} G_0\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)\frac{H(z')}{z+z'}\,dz', \qquad G_0(z) = 2A\int_{x(z)}^{\infty}\alpha(x)\,dx.$$

Обращает на себя внимание тот факт, что при $\beta \to 0$ величина $\langle \Omega(x, \eta)\rangle \to \infty$, поскольку расходится интеграл $\delta(\beta)$. Действительно, принимая во внимание, что при изменении z от 0 до $1/\beta$, функция $H(z)$) меняется в пределах от 1 до $1/\sqrt{1-\tilde{\lambda}}$, имеем

$$\frac{2\delta(\beta)}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}}-\gamma_{00}(\lambda,\beta)+\omega(z,\lambda,\beta)=$$

$$=\int_0^{1/\beta}G_0\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right)\left[\frac{2}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}}-\frac{z'}{z+z'}H(z')\right]dz'\geqslant\frac{\delta(\beta)}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при любом конечном x и малых значениях β поведение величины $\langle\Omega(x,\eta)\rangle$ определяется поведением функции $\delta(\beta)$. Асимптотики $\delta(\beta)$ при $\beta\ll 1$ для различных профилей коэффициента поглощения приводятся в [8]. Так, например, для часто встречающегося доплеровского профиля при малых по сравнению с единицей значениях β имеет место $\delta(\beta)\sim\sqrt{-\ln\beta}$. Очевидно, что $\lim\limits_{\beta\to 0}\beta\delta(\beta)=0$, поэтому при $\beta\to 0$ соотношение (27) переходит в полученную в [1] формулу (I.34). Приведенные здесь соображения сохраняют свою силу и при других важнейших профилях коэффициента поглощения (например, фойгтовском и лоренцовском). Качественная картина зависимости $\langle\Omega(x,\eta)\rangle$ от β остается справедливой и для чисто доплеровского закона перераспределения по частотам.

Обратимся теперь к случаю когерентного рассеяния. При указанном механизме решение уравнения (I.32) имеет вид

$$\langle N(x,\eta)\rangle=R_0(x,\eta)/(1-\lambda(x))=\varphi(x,\eta)/\sqrt{1-\lambda(x)}. \tag{30}$$

Отсюда в силу (27) имеем

$$\langle\Omega(x,\eta)\rangle=R_0(x,\eta)/u(x)=\langle N(x,\eta)\rangle/v(x)=\varphi(x,\eta)/v(x)]\sqrt{1-\lambda(x)}. \tag{31}$$

Второе из равенств (31) можно было написать сразу на основе рассуждений, приведенных в начале данного раздела. Формулы (31) показывают, что при $\beta\to 0$ среднее время пребывания фотона в среде становится бесконечно большим лишь в далеких крыльях спектральной линии.

3. *Среднее время блужданий фотона, излучающегося внутри среды.* Изложенный в предыдущем разделе подход применим и в случае, когда исходный фотон движется внутри среды. Ход рассуждений здесь такой же, как и в [2] при нахождении среднего числа рассеяний в среде, содержащей источники энергии. Вместо рассмотренных выше функций

$\Omega_*(x, \eta)$ и $\Omega_0(x, \eta)$ введем величины $\Omega_*(\tau, x, \eta)$ и $\Omega_0(\tau, x, \eta)$, обладающие аналогичным физическим смыслом, но относящиеся к фотону, движущемуся на оптической глубине τ. Для удобства угловые переменные теперь отсчитываются от направления внешней нормали к поверхности среды. Очевидно, что $\Omega_*(0, x, -\eta) = \Omega_*(x, \eta)$ и т. д.

При определении $\Omega_*(\tau, x, \eta)$, то есть когда речь идет о движущемся фотоне, в согласии с выводами предыдущего раздела, будем иметь $\Omega_*(\tau, x, \eta) = -\partial \ln R_*(\tau, x, \eta)/\partial\beta$. Уравнение для функции R_* легко получить на основе (II.3). Оно имеет вид

$$\eta \frac{\partial R_*(\tau, x, \eta)}{\partial\tau} + v(x) R_*(\tau, x, \eta) =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') R_*(\tau, x', \eta')\, dx', \tag{32}$$

с условием $R_*(0, x, \eta) = 1$ при $\eta > 0$.

Формальное дифференцирование (32) по β приводит к следую щему уравнению для определения функции $T_* = -\partial R_*/\partial\beta$:

$$\eta \frac{\partial T_*(\tau, x, \eta)}{\partial\tau} + v(x) T_*(\tau, x, \eta) =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') T_*(\tau, x', \eta')\, dx' + R_*(\tau, x, \eta), \tag{33}$$

причем $T_*(0, x, \eta) = 0$ $(\eta > 0)$. Более строгий вывод уравнения (33) основывается на рассуждениях, приведенных в предыдущем разделе. Эти рассуждения позволяют также написать уравнение для функции $T_0 = R_0\Omega_0$. Оно отличается от уравнения (33) лишь свободным членом, который в данном случае равен $R_0(\tau, x, \eta)$. Тогда для функции

$$\langle \Omega(\tau, x, \eta) \rangle = T_*(\tau, x, \eta) + T_0(\tau, x, \eta)$$

будем иметь

$$\eta \frac{\partial \langle \Omega(\tau, x, \eta) \rangle}{\partial\tau} + v(x) \langle \Omega(\tau, x, \eta) \rangle =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} r(x, \eta; x', \eta') \langle \Omega(\tau, x', \eta') \rangle\, dx' + 1, \tag{34}$$

с условием $\langle \Omega(0, x, \eta) \rangle = 0$ при $\eta > 0$.

Комбинируя уравнения (32), (34) и (II.10), приходим к соотношению

$$(1-\lambda)\langle N(\tau, x, \eta)\rangle+\lambda\beta\langle\Omega(\tau, x, \eta)\rangle=R_0(\tau, x, \eta), \tag{35}$$

являющемуся непосредственным обобщением (27) на случай, когда исходный фотон испускается внутри среды.

Таким образом, величина $R_0(\tau, x, \eta)$, характеризующая вероятность гибели фотона где-либо в среде, представима в виде суммы двух слагаемых, причем наличие первого из них обусловлено возможностью гибели фотона при рассеянии, а второе — возможностью гибели в полете. При $\beta=0$ соотношение (35) переходит в полученную в [2] формулу (II.11). В консервативном случае имеем $\langle\Omega(\tau, x, \eta)\rangle=R_0(\tau, x, \eta)/\beta$. Легко также видеть, что для нахождения $\langle\Omega(\tau, x, \eta)\rangle$ нет необходимости в решении задачи (34): после определения поля излучения внутри изотермической атмосферы и среднего числа рассеяний величина $\langle\Omega(\tau, x, \eta)\rangle$ находится из (35). В частности, в предположении о полном перераспределении по частотам на основе (35), (II.16) и (II.17) можно написать явное выражение для $\langle\Omega(\tau, x, \eta)\rangle$.

В далеких крыльях линии, где $R_0\approx 1$, имеем $\langle N(\tau, x, \eta)\rangle\approx 1$ и $\langle\Omega(\tau, x, \eta)\rangle\approx 1/\beta$. Вообще говоря, значения величин $\langle N\rangle$ и $\langle\Omega\rangle$ заключены соответственно в интервалах $(1, 1/(1-\lambda))$ и $(0, 1/\beta)$. Порядковые оценки для центральной остаточной интенсивности $R_0(0, x, -\eta)$ позволяют оценить величины $\langle N(0, x, -\eta)\rangle$ и $\langle\Omega(0, x, -\eta)\rangle$ для фотонов в центральных частотах линии. При $1-\lambda\gg\beta\delta(\beta)$ величина $\langle\Omega(\tau, x, \eta)\rangle$ слабо зависит от β (λ-решение), при $1-\lambda\ll\beta\delta(\beta)$, наоборот, остается зависимость от β (β-решение).

Уравнение для определения среднего времени пребывания фотона в бесконечной среде можно получить из (34), отбрасывая член, содержащий производную по оптической глубине. Оно имеет вид

$$v(x)\langle\Omega(x)\rangle=\lambda\int_{-\infty}^{\infty} r(x', x)\langle\Omega(x')\rangle dx'+1. \tag{36}$$

Разумеется, уравнение (36) можно вывести и непосредственно. В частности, другим путем оно получено в работе [9]. Сопоставляя уравнения (36) и (II.10) (после отбрасывания в последнем члена с производной), в согласии с (35) находим

$$(1-\lambda)\langle N(x)\rangle+\lambda\beta\langle\Omega(x)\rangle=1, \tag{37}$$

ибо в данном случае $R_0=1$. Уравнение (36) или соответствующее уравнение для $\langle N(x)\rangle$ легко решаются численным путем. В частном случае полного перераспределения по частотам решение уравнения (36) записывается в виде

$$\langle \Omega(x) \rangle = 1 + \frac{\lambda \delta(\beta)}{1 - \tilde{\lambda}} \frac{a(x)}{v(x)}, \tag{38}$$

а при когерентном рассеянии

$$\langle \Omega(x) \rangle = 1/u(x). \tag{39}$$

При полностью некогерентном рассеянии, как показывает формула (38), $\langle \Omega(x) \rangle \underset{\beta \to 0}{\to} \infty$. Другими словами, если $\beta = 0$, то в бесконечной среде фстон блуждает в среднем бесконечно долго, хотя в конечном счете гибнет при рассеяниях.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

THE STATISTICAL DESCRIPTION OF A RADIATION FIELD ON THE BASIS OF THE INVARIANCE PRINCIPLE. III. THE MEAN TIME OF PHOTON TRAVEL IN THE SCATTERING MEDIUM

A. G. NIKOGHOSSIAN

The method suggested in the previous papers, which is based on the invariance principle and the applications of the generating and characteristic functions, is used to determine the mean time of photon travel in the three-dimensional semi-infinite medium. Under general assumptions, concerning the elementary act of scattering, the new equations and formulae are obtained to find out the dependence of the mentioned mean quantity on the characteristics of the original photon. It has been shown that the mean time of travel for photons escaping the medium can be found by formal differentiation in respect to β of the appropriate equations and formulae for photon exit probability. The new relation between the mean number of scatterings and the mean time of photon travel in the medium has been found. This approach can be applied when determining any continuously distributed stochastic quantity giving the statistical description of the radiation field.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 21, 323, 1984.
2. *А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 21, 579, 1984.
3. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
4. *W. M. Irvine*, Bull. Astron. Inst. Netherl., 17,266, 1964.
5. *W. M. Irvine*, Astrophys. J., 144, 1140, 1966.
6. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 6, 643, 1970.
7. *D. G. Hummer, P. B. Kunasz*, Astrophys. J., 236, 609, 1980.
8. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
9. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 213, 1972.