

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПЛАЗМЫ

Грачя Багдасарович Нерсисян^{a,b}

^a Лаборатория теоретической физики, институт радиоп физики и электроники, НАН
Армении, 378410 Аштарак, Армения

^b Центр физики сильных полей, Ереванский государственный университет, ул. Алекс
Манукян 1, 375025 Ереван, Армения

e-mail: hrachya@irphe.am

Оглавление

1	ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ	4
1.1	Уравнения электромагнитного поля	4
1.2	Линейная электродинамика	6
1.3	Тензор комплексной диэлектрической проницаемости	7
1.4	Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн	8
1.5	Электромагнитные волны в изотропной среде	9
1.6	Начальная и граничная задачи в электродинамике	11
1.7	Закон сохранения энергии (среда без дисперсии)	14
1.8	Потери энергии электромагнитного поля в среде	16
1.9	Уравнения для медленно изменяющихся амплитуд	16
1.10	Закон сохранения энергии (среда с дисперсией)	19
1.11	Уравнения электродинамики в неоднородной среде	20
1.12	Распространение электромагнитных волн в неоднородной среде	21
1.13	Модель “холодной” плазмы	26
1.14	Продольные и поперечные волны в холодной плазме	28
1.15	Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле	30
1.16	Распространение волн вдоль магнитного поля	33
1.17	Распространение волны поперек магнитного поля	37
1.18	Одножидкостная модель плазмы	39
1.19	Двухжидкостная гидродинамика. Ионный звук	42
1.20	Токовая (Бунемановская) неустойчивость	44
1.21	Кинетическое уравнение Власова	48
1.22	Тензор диэлектрической проницаемости в кинетической модели	49
1.23	Ленгмюровские волны в Максвелловской плазме	52
1.24	Затухание Ландау	55
1.25	Скин-эффект	57
1.26	Поле движущейся частицы в среде	59
1.27	Излучение поперечных волн (Черенковское излучение)	62
1.28	Излучение продольных волн (поляризационные потери)	62
1.29	Флуктуации электромагнитного поля в плазме	65
1.30	Флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ)	66
1.31	Стохастическое ускорение	67
1.32	Флуктуации плотности заряда в плазме	69
1.33	Основы теории рассеяния	71
1.34	Рассеяние и трансформация волн	73
1.35	Ток рассеяния и коэффициент экстинкции в плазме	74
1.36	Рассеяние коротких волн ($\lambda_0 < \lambda_{De}$)	75
1.37	Рассеяние длинных волн ($\lambda_0 > \lambda_{De}$)	77

2	ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ	81
2.1	Нелинейное материальное уравнение	81
2.2	Основные нелинейные процессы	83
2.3	Нелинейное укороченное уравнение	84
2.4	Взаимодействие трех волн	88
2.5	Законы сохранения при взаимодействии трех волн	90
2.6	Приближение заданного поля (начальная задача)	92
2.7	Граничная задача в приближении заданного поля	94
2.8	Параметрические неустойчивости	96
2.9	Нелинейное взаимодействие волн со случайными фазами	99
2.10	Одночастичная модель плазмы в нелинейной электродинамике	103
2.11	Ток увлечения	106
2.12	Нелинейная диэлектрическая проницаемость для плазмы	107
2.13	Процессы трехволнового взаимодействия в плазме	109
2.14	Пондеромоторные (стрикционные) силы в плазме	113
2.15	Гидродинамика плазмы в высокочастотном электромагнитном поле	115
2.16	Дисперсионное уравнение для плазмы, находящейся в электромагнитном поле	116
2.17	Модуляционная неустойчивость	118
2.18	Филаментация	121
2.19	Вынужденное рассеяние	122
2.20	Параметрические неустойчивости (Продолжение)	124
2.21	Плазменная турбулентность	125
2.22	Захваченные частицы	128
2.23	Нелинейные волны. Солитоны	130
2.24	Равновесие плазмы в высокочастотном поле	133
2.25	Самофокусировка электромагнитных волн	136
A	Тензоры	139
B	Случайные функции	140

Глава 1

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

1.1 Уравнения электромагнитного поля

Электромагнитное поле в материальной среде удовлетворяет уравнениям, которые часто называют уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{E}$ -вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{B}$ -вектор магнитной индукции, $\mathbf{j}$ -плотность электрического тока, ρ -плотность электрического заряда. Все эти величины являются функциями координат и времени.

Уравнения (1.1) в математической форме выражают экспериментально установленные законы, в соответствии с которыми изменяются электрические и магнитные поля в среде. Чтобы понять, какие законы соответствуют уравнениям (1.1), рассмотрим интегральные соотношения, вытекающие из этих уравнений. Для этого проинтегрируем первое уравнение по некоторой поверхности S

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.2)$$

где $d\mathbf{S}$ -элемент поверхности. Перепишем это соотношение в виде:

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (1.3)$$

где L -контур, ограничивающий поверхность S , $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ -поток магнитной индукции, $\mathcal{E}$ -электродвижущая сила. Таким образом, изменение со временем потока магнитной индукции через поверхность S создает электродвижущую силу в контуре L , ограничивающим эту поверхность (закон индукции Фарадея).

Аналогичным образом проинтегрируем второе уравнение системы (1.1). В результате получим

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.4)$$

Циркуляция магнитной индукции по контуру определяется током смещения (второе слагаемое справа) и полным током (ток проводимости), протекающим через поверхность S (первое слагаемое справа). По-существу, второе уравнение в системе (1.1) является обобщенной формой закона Био и Савара.

Последние два уравнения системы (1.1) проинтегрируем по произвольному объему V . Согласно теореме Гаусса найдем

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho \, d\mathbf{r} = 4\pi Q, \\ \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, d\mathbf{r} &= \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Первое из полученных соотношений является обобщением закона Кулона для распределенного в пространстве заряда. Действительно, если выбранный объем является сферой, то в сферической системе координат $d\mathbf{S} = \mathbf{n} r^2 d\Omega$, где $d\Omega$ -элемент телесного угла, $\mathbf{n}$ -единичная внешняя нормаль к поверхности сферы. Поэтому для точечного заряда Q , находящегося в центре сферы, напряженность поля на расстоянии r равна $E = Q/r^2$. Это и есть обычная формула для закона Кулона.

Последнее интегральное соотношение для индукции магнитного поля есть отражение того факта, что свободных магнитных зарядов не существует.

Входящие в уравнение (1.1) плотности тока $\mathbf{j}$ и заряда ρ не являются независимыми и связаны между собой. Чтобы установить эту связь, вычислим дивергенцию от второго уравнения системы (1.1). Найдем

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right). \quad (1.6)$$

Таким образом, величины $\mathbf{j}$ и ρ связаны соотношением, которое называется уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

Физический смысл соотношения (1.7) легко понять, если его проинтегрировать по некоторому объему V

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, d\mathbf{r} = \frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.8)$$

Изменение заряда в объеме со временем определяется током, протекающим через ограничивающую объем поверхность.

Часто вместо (1.1) используют другую форму записи уравнений электромагнитного поля в среде. Для этого разделяют величины $\mathbf{j}$ и ρ на два слагаемых

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (1.9)$$

где $\mathbf{j}_0$, ρ_0 -внешние (сторонние) токи и заряды, которые являются заданными функциями координат и времени и не зависят от полей; $\mathbf{j}'$, ρ' -индуцированные (связанные) токи и заряды, которые возникают в среде под действием полей и через них выражаются.

Вместо индуцированных зарядов и токов вводят величину $\mathbf{D}$, которую называют вектором электрической индукции

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t') \, dt'. \quad (1.10)$$

В результате исключения величин $\mathbf{j}'$ и ρ' из уравнений (1.1) их представляют в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho_0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Для того, чтобы система уравнений (1.1) (или (1.11)) была замкнута, нужно установить связь между индуцированными в среде токами (или электрической индукцией) и напряженностью электрического поля

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}'(\mathbf{E}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}). \quad (1.12)$$

Соотношения (1.12) называются материальными уравнениями и их вид зависит от свойств конкретной среды, от модели, которая используется для ее описания. Заметим, что достаточно установить связь $\mathbf{j}'$ (или $\mathbf{D}$) с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$, ибо магнитная индукция сама выражается через это поле. Помимо этого не нужно отдельного соотношения для индуцированных зарядов, поскольку последние связаны с плотностью тока $\mathbf{j}'$ -уравнением непрерывности.

1.2 Линейная электродинамика

Достаточно широкий круг вопросов можно рассмотреть, не привлекая модели конкретной среды, а используя общие соображения о виде материальных уравнений. Простейшее соображение такого рода состоит в том, что связь между индуцированным током (или индукцией) и напряженностью электрического поля является линейной. Электродинамика, базирующаяся на таких материальных уравнениях, называется линейной электродинамикой.

Наиболее простым являются линейные материальные уравнения вида

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.13)$$

Для простоты записи штрих у плотности тока опущен. Величина σ называется коэффициентом электропроводности (или проводимостью), ϵ -диэлектрической постоянной (или проницаемостью). Величины σ и ϵ считаются постоянными, и из соотношений (1.13) следует, что векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{D}$ направлены также, как и вектор $\mathbf{E}$. Это значит, что рассматриваемая среда не имеет никаких выделенных направлений, связанных с ее структурой. Такие среды, у которых свойства не зависят от направления, называются изотропными.

Несколько более сложный вид имеет материальное уравнение в анизотропных средах, свойства которых различны в разных направлениях. В анизотропной среде направление индуцируемого поля тока (а также вектор индукции) не обязательно совпадает с направлением поля $\mathbf{E}$. В этом случае связь между векторами $\mathbf{j}$ (или $\mathbf{D}$) и $\mathbf{E}$ выражается через тензоры

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \sigma_{ij} E_j(\mathbf{r}, t), \quad D_i(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{ij} E_j(\mathbf{r}, t), \quad (1.14)$$

где σ_{ij} , ϵ_{ij} -соответственно тензоры электропроводности и диэлектрической проницаемости. Смысл соотношений (1.14) заключается в том, что направления векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{D}$ в общем случае не совпадают с направлением вектора $\mathbf{E}$. Так, например, компонента поля E_x может вызывать ток не только в направлении OX , но и в направлении OY и OZ .

Следующим шагом в обобщении линейного материального уравнения является учет запаздывания во времени реакций среды на действие электрического поля. Очевидно, что мгновенное изменение поля со временем не может сопоставляться мгновенным током или индукцией. Инерция зарядов, создающих ток, приводит к тому, что ток не успевает изменяться со временем точно также как поле. Эту инерционность можно учесть, введя интегральную связь поля и тока (индукции)

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t - t') E_j(\mathbf{r}, t'), \quad (1.15)$$

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \epsilon_{ij}(\mathbf{r}, t - t') E_j(\mathbf{r}, t'). \quad (1.16)$$

Запаздывание свойств среды называется временной (или частотной) дисперсией. Нижний предел в выражениях (1.15) и (1.16) выбран из принципа причинности-вклад в ток (или индукцию) могут давать только моменты времени, предшествующие данному. Разностная зависимость ядер интегральных соотношений (1.15) и (1.16) является следствием неизменности свойств среды во времени (стационарная среда). Поэтому вклад более ранних моментов времени в значение тока, который имеется в данный момент времени, зависит лишь от того, на сколько эти моменты отстают от данного момента t . Тем самым никакой момент времени ничем не выделен и вклад

предыдущих моментов времени зависит только от времени запаздывания, но не зависит от самого значения t .

Ну и, наконец, возможна нелокальность свойств среды, когда значение тока (или индукции) зависит от напряженности поля не только в данной точке, но и в других точках. Это свойство называется пространственной дисперсией и соответствующие материальные уравнения имеют вид:

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \sigma_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(\mathbf{r}', t'), \quad (1.17)$$

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(\mathbf{r}', t'). \quad (1.18)$$

Разностная зависимость от координат в ядрах интегральных соотношений (1.17) и (1.18) связана с независимостью свойств среды от координат (однородная среда). В этом случае вклад соседних точек в значение тока (индукции) в данной точке зависит только от расстояния до данной точки, но не зависит от положения этой точки.

Для перехода от общих выражений (1.17), (1.18) к формулам (1.13), в которых не учитывается дисперсия, следует положить

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \sigma \delta_{ij} \delta(t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \varepsilon \delta_{ij} \delta(t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.20)$$

1.3 Тензор комплексной диэлектрической проницаемости

Рассмотрим материальное уравнение (1.17) для случая, когда поле $\mathbf{E}$ является полем плоской монохроматической волны. Остановимся коротко на формах записи такого поля. Наиболее очевидной является форма записи через гармонические функции

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi), \quad (1.21)$$

где $\mathbf{E}_0$ -амплитуда волны, φ -начальная фаза, $\mathbf{k}$ -волновой вектор, ω -круговая частота. Аргумент функции в формуле (1.21) называется фазой. Поверхность постоянной фазы в пространстве определяет волновой фронт. В данном случае эта поверхность является плоскостью (плоская волна). Если направление вектора $\mathbf{E}_0$ одинаково во всем пространстве, то говорят, что волна имеет линейную поляризацию.

Формулу (1.21) удобно записать в более компактном виде, учтя соотношение $\cos \psi = \operatorname{Re} e^{i\psi}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)} \right]. \quad (1.22)$$

Введем комплексную амплитуду $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi}$. Тогда, опустив знак Re , поле волны представим в форме

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.23)$$

Именно эта форма записи является наиболее употребимой. Используя ее, следует помнить, что амплитуда является комплексной и содержит информацию о начальной фазе волны (о фазе, которую имела волна в момент времени $t = 0$ в точке $\mathbf{r} = 0$).

Подставим поле (1.23) в выражение для индукции (1.18). Введем новые переменные интегрирования $t'' = t - t'$, $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. В результате найдем

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.24)$$

где использовано обозначение

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty dt'' \int d\mathbf{r}'' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}'', t'') e^{i(\omega t'' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'')}. \quad (1.25)$$

Выражение (1.25) называют тензором комплексной диэлектрической проницаемости. Если ввести комплексную амплитуду вектора электрической индукции

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.26)$$

то связь между комплексными амплитудами электрического поля и индукции оказывается весьма простой

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.27)$$

В изотропной среде и в пренебрежении пространственной дисперсией $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\omega) \delta_{ij}$. Используя это выражение, получим

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.28)$$

Если бы величина $\varepsilon(\omega)$ была действительна, то начальная фаза вектора индукции совпадала с начальной фазой вектора напряженности электрического поля. Наличие мнимой части у величины $\varepsilon(\omega)$ приводит к тому, что начальные фазы этих векторов не совпадают. Таким образом, мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ определяет сдвиг фазы между вектором напряженности электрического поля и вектором индукции.

Аналогичное рассмотрение материального уравнения в формуле (1.17) приводит к соотношению

$$j_i(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.29)$$

где $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ -комплексный тензор электропроводности.

Между тензорами $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ имеется простая связь. Она следует из определения (1.10). Если в эту формулу подставить электрическое поле (1.23) и использовать соотношения (1.26), (1.27) и (1.29), то получим:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.30)$$

При выводе этого соотношения предполагается, что поле волны отсутствовало при $t \rightarrow -\infty$.

Из определения комплексной диэлектрической проницаемости (1.25) следует ряд свойств:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega) &= \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega), & \varepsilon'_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega) &= \varepsilon'_{ij}(\mathbf{k}, \omega), \\ \varepsilon''_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega) &= -\varepsilon''_{ij}(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где ε'_{ij} и ε''_{ij} -соответственно действительная и мнимая части тензора.

1.4 Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн

Рассмотрим уравнения электромагнитного поля в форме (1.11), считая, что внешних токов и зарядов нет. Очевидно, что тогда эти уравнения описывают такие поля, которые могут существовать в среде и не поддерживаться внешними источниками. Любое поле можно представить как набор волн (разложение Фурье). В рамках линейной электродинамики эти волны распространяются независимо друг от друга (принцип суперпозиции) и поэтому можно рассмотреть поле в виде одной волны.

Из первых двух уравнений системы (1.11) следует

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.32)$$

Рассмотрим, что следует из уравнения (1.32), если напряженность электрического поля взята в виде плоской монохроматической волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$, а индукция связана с полем соотношением (1.27). Проведя операцию дифференцирования, из уравнения (1.32) получаем

$$[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]] + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}_0 = 0. \quad (1.33)$$

Используя известную формулу для двойного векторного произведения, перепишем это выражение в виде:

$$k_i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - k^2 E_{0i} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_{0j} = 0. \quad (1.34)$$

Полученная формула легко преобразовать к форме, когда величина E_{0j} является общим множителем:

$$\left[\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \right] E_{0j} \equiv M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_{0j} = 0. \quad (1.35)$$

Величину $M_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ иногда называют максвелловским тензором. Формула (1.35) соответствует сокращенной форме записи системы линейных однородных алгебраических уравнений для комплексной амплитуды $\mathbf{E}_0$. Условием существования у такой системы не нулевых решений является равенство нулю определителя (детерминанта) из коэффициентов в этой системе

$$\det \left\| \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \right\| = 0. \quad (1.36)$$

Зная явное выражение для тензора ε_{ij} и вычисляя определитель (1.36), получим уравнение, связывающее частоту волны ω с волновым вектором $\mathbf{k}$. Это уравнение называется дисперсионным уравнением. Решение уравнения $\omega_s(\mathbf{k})$ называется законом дисперсии для волны или дисперсионным соотношением. Если имеется несколько решений дисперсионного уравнения, то говорят, что имеется несколько ветвей волн.

Таким образом, в любой среде могут существовать волны, не поддерживаемые внешними источниками, которые часто называют собственными волнами. Для этих волн частота, характеризующая изменение электромагнитного поля со временем, связана с длиной волны, характеризующей изменение поля волны в пространстве. При свободном распространении волн изменения их полей в пространстве и во времени происходят не независимо, а связаны между собой дисперсионным уравнением.

Рассмотрим еще несколько форм записи уравнения (1.36). Введем вектор поляризации волны (единичный комплексный вектор ($\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* = |\mathbf{e}|^2 = 1$), направленный вдоль вектора напряженности электрического поля)

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|}, \quad e_i = \frac{E_{0i}}{|\mathbf{E}_0|}. \quad (1.37)$$

Умножим векторное уравнение (1.35) на e_i^* . В результате получим еще одну форму записи дисперсионного уравнения

$$|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} e_i^* e_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (1.38)$$

Часто вместо волнового вектора $\mathbf{k}$ вводят безразмерный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{k}c/\omega$ и записывают формулу (1.38) в форме

$$|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}|^2 - n^2 + e_i^* e_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{n}, \omega) = 0. \quad (1.39)$$

1.5 Электромагнитные волны в изотропной среде

Для исследования различных типов электромагнитных волн в материальной среде необходимо знать тензор комплексной диэлектрической проницаемости. Вид этого тензора в общем случае определяется свойствами среды. Однако в случае изотропных сред можно сделать достаточно общие заключения о типах возможных электромагнитных волн без использования конкретного выражения для тензора ε_{ij} .

В изотропной среде все направления эквивалентны и ни одно ничем не выделено по отношению к другому. Если не учитывать пространственной дисперсии (т.е. нелокальности свойств среды), то тензор комплексной диэлектрической проницаемости не зависит от волнового вектора $\mathbf{k}$. Следовательно в изотропной среде и в пренебрежении пространственной дисперсией тензор комплексной диэлектрической проницаемости можно записать в виде $\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}$, где

$\varepsilon(\omega)$ -комплексная скалярная величина. Это единственно возможный вид тензора второго ранга, который не зависит ни от каких векторов.

Если среда изотропная, но учитывается пространственная дисперсия, то для образования тензора второго ранга можно использовать также компоненты вектора $\mathbf{k}$. Наиболее общий вид тензора второго ранга, построенного из компонент вектора $\mathbf{k}$, следующий:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = A(k, \omega) \frac{k_i k_j}{k^2} + B(k, \omega) \delta_{ij}, \quad (1.40)$$

где $A(k, \omega)$, $B(k, \omega)$ -скалярные комплексные функции, зависящие от длины вектора $\mathbf{k}$, но не от его направления. Обычно вместо постоянных $A(k, \omega)$ и $B(k, \omega)$ используют другие коэффициенты, записывая тензор в виде:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_{tr}(k, \omega) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_l(k, \omega), \quad (1.41)$$

где функции $\varepsilon_{tr}(k, \omega)$ и $\varepsilon_l(k, \omega)$ называют соответственно поперечной и продольной диэлектрической проницаемостью. Такие две постоянные возникают только при учете пространственной дисперсии. Если ее не учитывать, то продольная и поперечная проницаемости равны друг другу и $\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{tr}(\omega) \delta_{ij} = \varepsilon_l(\omega) \delta_{ij}$.

Воспользовавшись формулами (1.31) и (1.41) можно найти свойства симметрии для $\varepsilon_l(k, \omega)$ и $\varepsilon_{tr}(k, \omega)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l, tr}(k, -\omega) &= \varepsilon_{l, tr}^*(k, \omega), \\ \varepsilon'_{l, tr}(k, -\omega) &= \varepsilon'_{l, tr}(k, \omega), \quad \varepsilon''_{l, tr}(k, -\omega) = -\varepsilon''_{l, tr}(k, \omega). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Подставляя формулу (1.41) в дисперсионное уравнение (1.38), получим

$$\left(\varepsilon_{tr}(k, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2}{k^2} \right) + \frac{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2}{k^2} \varepsilon_l(k, \omega) = 0. \quad (1.43)$$

Рассмотрим поперечные электромагнитные волны, у которых вектор поляризации направлен поперек вектора $\mathbf{k}$, направление которого в изотропной среде совпадает с направлением распространения волны. Для этих волн $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0$ и из приведенной выше формулы получаем

$$\varepsilon_{tr}(k, \omega) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}. \quad (1.44)$$

Соотношение (1.44) определяет закон дисперсии для поперечных волн в изотропной среде. В этих волнах помимо электрического поля имеется магнитное поле. Его величина, согласно первому из уравнений (1.11), выражается через напряженность электрического поля

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]. \quad (1.45)$$

Отсюда видно, что магнитное поле направлено перпендикулярно как к электрическому полю, так и к волновому вектору $\mathbf{k}$.

Рассмотрим теперь продольные волны, в которых вектор напряженности электрического поля параллелен вектору $\mathbf{k}$ (вдоль направления распространения волны). Для этих волн $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2 = k^2$ и закон дисперсии имеет вид

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 0. \quad (1.46)$$

Очевидно, что в продольных волнах нет магнитного поля. Это следует из приведенного выше выражения для $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$. Часто при изучении этих волн используют не вектор напряженности электрического поля, а скалярный потенциал φ . Поскольку $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, то вектор напряженности электрического поля можно представить в виде $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. Поэтому эти волны часто называют потенциальными.

Заметим, что дисперсионное уравнение для продольных волн можно получить, используя не полную систему уравнений электромагнитного поля, а лишь одно из них $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Действительно, для плоской волны в изотропной среде из этого уравнения следует

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = k_i \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) \varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (1.47)$$

Поскольку амплитуда волны предполагается отличной от нуля ($\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \neq 0$), то $\varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega) = 0$.

1.6 Начальная и граничная задачи в электродинамике

Дисперсионное уравнение устанавливает связь между пространственными и временными масштабами изменения полей в электромагнитных волнах. При этом можно искать решение уравнения относительно частоты $\omega = \omega(\mathbf{k})$, считая независимой переменной волновой вектор $\mathbf{k}$. А можно наоборот, считать независимой переменной частоту ω и искать $\mathbf{k}(\omega)$. Таким двум возможностям соответствуют постановки двух различных физических задач.

Обсудим сначала такую постановку, когда задан волновой вектор $\mathbf{k}$, и из дисперсионного уравнения определяется соответствующая частота $\omega(\mathbf{k})$. Этой математической постановке соответствует предположение о том, что в начальный момент времени $t = 0$ во всем пространстве задано электромагнитное поле с пространственным периодом $\lambda = 2\pi/k$. Решение дисперсионного уравнения дает ответ на вопрос о том, как это поле будет изменяться со временем. Естественно называть такую постановку задачи начальной.

Поскольку в дисперсионном уравнении тензор диэлектрической проницаемости является комплексным, то можно думать, что и решения уравнения также будут комплексными ($\omega = \omega' + i\omega''$). Это значит, что со временем поле в волне изменяется по закону $e^{-i\omega t} = e^{-i\omega' t} e^{\omega'' t}$. Действительная часть частоты определяет периодические во времени изменения поля, а мнимая часть характеризует монотонное изменение поля. Если $\omega'' < 0$, то со временем ($t \rightarrow +\infty$) поле с данным волновым вектором исчезнет и начальная волна затухнет. Принято говорить, что в этом случае среда устойчива по отношению к рассматриваемому начальному возмущению. Если же $\omega'' > 0$, то с ростом t начальное поле волны нарастает и говорят, что среда неустойчива по отношению к начальному возмущению с данным волновым вектором.

Если затухание или нарастание волны медленное ($\omega'' \ll \omega'$), то можно решить дисперсионное уравнение и найти ω'' в достаточно общем виде. Покажем это на примере изотропной среды. Начнем с дисперсионного уравнения (1.44) для поперечных волн. Представим поперечную диэлектрическую проницаемость в виде $\varepsilon_{tr} = \varepsilon'_{tr} + i\varepsilon''_{tr}$ ($\varepsilon'_{tr} = \text{Re } \varepsilon_{tr}$, $\varepsilon''_{tr} = \text{Im } \varepsilon_{tr}$) и $\omega = \omega' + i\omega''$. Подставляя эти соотношения в уравнение (1.44), получим

$$k^2 c^2 = (\omega' + i\omega'')^2 [\varepsilon'_{tr}(k, \omega' + i\omega'') + i\varepsilon''_{tr}(k, \omega' + i\omega'')]. \quad (1.48)$$

Поскольку $\omega'' \ll \omega'$, то можно разложить все входящие в это равенство величины в ряд Тейлора и ограничиться первыми членами разложения

$$k^2 c^2 \simeq (\omega'^2 + 2i\omega'\omega'') \left[\varepsilon'_{tr}(k, \omega') + i\omega'' \frac{\partial \varepsilon'_{tr}(k, \omega')}{\partial \omega'} + i\varepsilon''_{tr}(k, \omega') - \omega'' \frac{\partial \varepsilon''_{tr}(k, \omega')}{\partial \omega'} \right]. \quad (1.49)$$

Величина ε''_{tr} определяет затухание (нарастание) волны. Будем считать ее малой в смысле $\varepsilon''_{tr} \ll \varepsilon'_{tr}$ и пренебрежем последним слагаемым в квадратной скобке справа. Приравнявая действительные и мнимые части в оставшемся выражении, найдем

$$k^2 c^2 \simeq \omega'^2 \varepsilon'_{tr}(k, \omega'), \quad (1.50)$$

$$2\omega'' \varepsilon'_{tr}(k, \omega') + \omega' \omega'' \frac{\partial}{\partial \omega'} \varepsilon'_{tr}(k, \omega') + \omega' \varepsilon''_{tr}(k, \omega') \simeq 0. \quad (1.51)$$

Первое из этих соотношений является уравнением для определения действительной части частоты ω' . Второе равенство определяет величину ω'' , для которой часто используют обозначение

$$\gamma_{tr} \equiv \omega'' = -\frac{\omega'^2 \varepsilon''_{tr}(k, \omega')}{\frac{\partial}{\partial \omega'} [\omega'^2 \varepsilon'_{tr}(k, \omega')]} \quad (1.52)$$

Если $\gamma_{tr} < 0$ и начальное возмущение со временем затухает, то величину γ_{tr} называют *декрементом*. Если $\gamma_{tr} > 0$ и начальное возмущение нарастает со временем, то величину γ_{tr} называют *инкрементом*.

Аналогичные соотношения можно получить и для продольных волн. Запишем дисперсионное уравнение (1.46) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon'_l(k, \omega' + i\omega'') + i\varepsilon''_l(k, \omega' + i\omega'') \\ \simeq \varepsilon'_l(k, \omega') + i\omega'' \frac{\partial}{\partial \omega'} \varepsilon'_l(k, \omega') + i\varepsilon''_l(k, \omega') = 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Приравнявая нулю действительную и мнимую части этого выражения, найдем, что действительная часть частоты определяется уравнением

$$\varepsilon'_l(k, \omega') = 0 \quad (1.54)$$

а декремент (инкремент) равен

$$\gamma_l \equiv \omega'' = -\frac{\varepsilon''_l(k, \omega')}{\frac{\partial}{\partial \omega'} \varepsilon'_l(k, \omega')} \quad (1.55)$$

Как уже отмечалось выше, всякое поле можно представить в виде разложения по плоским волнам. Поэтому задание произвольного начального состояния эквивалентно заданию набора плоских волн. Если среди этого набора найдутся волны с такими длинами (волновыми числами) и частотами, что для них $\gamma > 0$, то именно эти волны и будут нарастать со временем. Те же волны, для которых $\gamma < 0$, через некоторое время затухнут. Если для любых значений волнового вектора начальные волны со временем затухают, то состояние среды устойчивое. Если же для некоторых значений k величина $\gamma > 0$ и волны со временем нарастают, то состояние среды неустойчиво.

Зачастую электромагнитные поля в среде (плазме) создаются определенными источниками. Наиболее наглядным примером такого источника является граница, на которую извне падает электромагнитная волна. Задача состоит в том, чтобы по заданному на границе полю найти поле внутри среды, где источники отсутствуют (граничная задача). При этом в рамках линейной электродинамики справедлив принцип суперпозиции, и каждая из волн распространяется независимо от других волн. Поэтому достаточно рассматривать распространение от границы лишь одной волны с заданной частотой.

При решении граничной задачи в дисперсионном уравнении следует считать частоту ω известной действительной величиной и определять волновой вектор k . При этом из одного уравнения можно найти всего лишь одну компоненту вектора k , а остальные компоненты также следует считать заданными. Ответ на вопрос о том, какие компоненты волнового вектора заданы, а какую нужно найти из дисперсионного уравнения, зависит от конкретных граничных условий.

Рассмотрим наиболее характерный пример. Пусть плоскость $x = 0$ является границей раздела вакуума (полупространство $x < 0$) и среды (полупространство $x > 0$). На плоскую границу среды наклонно падает из вакуума электромагнитная волна. Поле волны внутри среды изменяется по закону $e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t}$ (вектор k лежит в плоскости XY , т.е. $k_z = 0$). Из условия непрерывности поля на границе следует, что периодичность его изменения вдоль оси OY , характеризуемая компонентой k_y , одинакова как в среде, так и вне ее. Поэтому величину k_y следует считать равной k_{0y} , где k_0 — волновой вектор в вакууме. Эту компоненту легко выразить через частоту ω и угол падения θ . Согласно уравнению (1.44) в вакууме ($\varepsilon_{tr} = 1$) справедливо соотношение $k_0 = \omega/c$. Следовательно

$$k_{0y} = k_0 \sin \theta = \frac{\omega}{c} \sin \theta = k_y. \quad (1.56)$$

Для определения величины k_x , характеризующей изменение поля волны в среде в перпендикулярном к границе направлении, используем уравнение (1.44). Как и в случае начальной задачи, будем считать затухание волны слабым ($\varepsilon''_{tr} \ll \varepsilon'_{tr}$). Представим компоненту k_x в виде $k_x = k'_x + ik''_x$, где $k''_x \ll k'_x$. Запишем уравнение (1.44):

$$\omega^2 [\varepsilon'_{tr}(k'_x + ik''_x, k_y, \omega) + i\varepsilon''_{tr}(k'_x + ik''_x, k_y, \omega)] = c^2 [k_y^2 + (k'_x + ik''_x)^2]. \quad (1.57)$$

Как и в случае начальной задачи разложим входящие в это соотношение величины в ряд и ограничимся линейными по малым величинам k''_x слагаемыми. В результате для определения действительной части компоненты k'_x получим:

$$\omega^2 \varepsilon'_{tr}(k'_x, k_y, \omega) = c^2 (k_x'^2 + k_y^2). \quad (1.58)$$

Величина k'_x определяет периодическое изменение поля вдоль оси ОХ. Мнимая часть k''_x характеризует монотонную зависимость поля от координаты x и определяется соотношением

$$\kappa_{tr} \equiv k''_x = -\frac{\varepsilon''_{tr}(k'_x, k_y, \omega)}{\frac{\partial}{\partial k'_x} \left[\varepsilon'_{tr}(k'_x, k_y, \omega) - \frac{k_x'^2 c^2}{\omega^2} \right]}. \quad (1.59)$$

Если $\kappa_{tr} > 0$, то амплитуда волны уменьшается по мере проникновения ее в среду ($e^{i(k'_x - i\kappa_{tr})x} = e^{ik'_x x} e^{-\kappa_{tr} x}$). В этом случае величину κ_{tr} называют коэффициентом затухания. Если $\kappa_{tr} < 0$, то при удалении от границы амплитуда волны возрастает и величину $-\kappa_{tr} = |\kappa_{tr}|$ называют коэффициентом усиления. Среда, в которых имеет место усиление волн, называют активными.

Соотношения, подобные (1.58) и (1.59), легко вывести и для продольных волн

$$\varepsilon_l(k'_x, k_y, \omega) = 0, \quad \kappa_l \equiv k''_x = -\frac{\varepsilon''_l(k'_x, k_y, \omega)}{\frac{\partial}{\partial k'_x} \varepsilon'_l(k'_x, k_y, \omega)}. \quad (1.60)$$

Между величиной γ , определяющей медленное затухание (нарастание) волн во времени и величиной κ , характеризующей изменение амплитуды волны в пространстве, имеется простая связь. Рассмотрим ее на примере поперечных волн. Формула (1.58) в неявном виде устанавливает связь между ω и k'_x . Используя правило дифференцирования функций, заданных в неявном виде, из (1.58) получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial k'_x} = -\frac{\frac{\partial}{\partial k'_x} \left[\varepsilon'_{tr}(k'_x, k_y, \omega) - \frac{k_x'^2 c^2}{\omega^2} \right]}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon'_{tr}(k'_x, k_y, \omega)]}. \quad (1.61)$$

С помощью этого соотношения перепишем формулу (1.59)

$$\kappa_{tr} = \frac{\varepsilon''_{tr}(k'_x, k_y, \omega)}{\frac{\partial \omega}{\partial k'_x} \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon'_{tr}(k'_x, k_y, \omega)]}. \quad (1.62)$$

Из сравнения полученного выражения для κ_{tr} с формулой (1.52) следует

$$\kappa_{tr} = -\frac{\gamma_{tr}}{\partial \omega / \partial k'_x}. \quad (1.63)$$

Вектор с компонентами $\partial \omega / \partial k_i$ называется *групповой скоростью* и записывается сокращенно в виде

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (1.64)$$

Таким образом в соотношение (1.63) в качестве коэффициента связи между величинами κ_{tr} и γ_{tr} входит компонента групповой скорости в направлении оси ОХ и $\kappa_{tr} = -\gamma_{tr} / v_{gx}$.

В изотропной среде в пренебрежении временной и пространственной дисперсией ($\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$) из формулы (1.38) следует

$$\mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega) = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon = 0. \quad (1.65)$$

Отсюда, согласно определению (1.64), получаем выражение для групповой скорости

$$\mathbf{v}_g = -\frac{\partial \mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega) / \partial \mathbf{k}}{\partial \mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega) / \partial \omega} = \omega \frac{\mathbf{k} - \text{Re}[\mathbf{e}^* (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e})]}{k^2 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2}. \quad (1.66)$$

В более общем случае выражение для групповой скорости рассмотрено ниже.

1.7 Закон сохранения энергии (среда без дисперсии)

Закон сохранения энергии является одним из фундаментальных законов физики. Он имеет место и для электромагнитного поля. Наиболее просто этот закон вывести и проанализировать, если не учитывать временную и пространственную дисперсию в материальном уравнении.

Рассмотрим систему уравнений (1.11) в отсутствии сторонних токов и зарядов ($\rho_0 = 0, \mathbf{j}_0 = 0$). Умножим первое уравнение на $\mathbf{B}$, второе — на $\mathbf{E}$ и вычтем из второго первое. В результате получим:

$$\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{E} = \frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (1.67)$$

Используя известное соотношение

$$\text{div} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{ rot } \mathbf{b} \quad (1.68)$$

перепишем полученное выражение в следующем виде:

$$\frac{c}{4\pi} \text{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.69)$$

Если пренебречь дисперсией и считать среду изотропной, то можно использовать материальное уравнение (1.13). Формула (1.69) преобразуется к виду

$$\frac{c}{4\pi} \text{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (B^2 + \epsilon E^2) = 0. \quad (1.70)$$

Это соотношение и представляет закон сохранения энергии в среде без дисперсии. Величина

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \quad (1.71)$$

называется *плотностью потока энергии* или *вектором Умова-Пойнтинга*,

$$W = \frac{1}{8\pi} (B^2 + \epsilon E^2) \quad (1.72)$$

— плотность энергии. С помощью таких обозначений формула (1.70) записывается в виде

$$\text{div } \mathbf{S} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (1.73)$$

Чтобы понять смысл закона сохранения энергии и введенных при его формулировке названий, проинтегрируем (1.73) по некоторому объему V

$$\oint_{S'} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V W d\mathbf{r}. \quad (1.74)$$

Такая интегральная форма записи закона сохранения показывает, что изменение полной энергии в объеме V со временем связано с притоком (или оттоком) этой энергии через поверхность S' , ограничивающую объем. Очевидно, что величина S определяет поток энергии.

Рассмотрим закон сохранения энергии для электромагнитной волны, когда поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left(\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right). \quad (1.75)$$

Согласно первому уравнению системы (1.11) такому электрическому полю соответствует вектор магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \text{Re} \left\{ \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right\}. \quad (1.76)$$

Поскольку электрическое и магнитное поля в каждой точке среды периодически изменяются со временем, то имеет смысл рассматривать закон сохранения энергии для величин, усредненных по периоду. Процедура усреднения обозначается скобками $\langle \dots \rangle$ и предполагает выполнение следующей операции

$$\langle A \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} A(t') dt' = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} A(t') dt'. \quad (1.77)$$

Средний вектор плотности потока энергии равен

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{c^2}{4\pi\omega} \left\langle \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right] \times \text{Re} \left\{ [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right\} \right\rangle \\ &= \frac{c^2}{8\pi\omega} \text{Re} [\mathbf{E}_0 \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0^*]]. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Если раскрыть двойное векторное произведение и использовать вектор поляризации волны $\mathbf{e} = \mathbf{E}_0/|\mathbf{E}_0|$, то получим

$$\langle S \rangle = \frac{c^2}{8\pi\omega} \text{Re} [\mathbf{k} - \mathbf{e}^* (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e})] |\mathbf{E}_0|^2. \quad (1.79)$$

Аналогично вычисляется средняя плотность энергии

$$\langle W \rangle = \frac{1}{16\pi} \left(\varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 + |\mathbf{B}_0|^2 \right) = \frac{1}{16\pi} \left(\varepsilon + \frac{c^2}{\omega^2} |\mathbf{k} \times \mathbf{e}|^2 \right) |\mathbf{E}_0|^2. \quad (1.80)$$

В этом выражении первое слагаемое определяет плотность энергии электрического поля, а второе — магнитного. Эти слагаемые можно объединить с помощью закона дисперсии (1.65) для волн в изотропной среде без дисперсии ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$). В результате оказывается, что для непродольных волн с $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2 \neq k^2$ плотность энергии электрического поля равна плотности энергии магнитного поля, так что

$$\langle W \rangle = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2. \quad (1.81)$$

Между величинами $\langle S \rangle$ и $\langle W \rangle$ имеется простая связь. Используем выражения (1.65), (1.66), (1.79) и формулу (1.81). В результате для непродольной волны ($|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2 \neq k^2$) (с групповой скоростью (1.66)) получим

$$\langle S \rangle = \frac{k^2 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2}{(\omega^2/c^2) \varepsilon} \omega \frac{\mathbf{k} - \text{Re} [\mathbf{e}^* (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e})]}{k^2 - |\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2} \frac{\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 = v_g \langle W \rangle. \quad (1.82)$$

Это соотношение показывает, что энергия непродольной волны переносится в пространстве с групповой скоростью. Используя формулу (1.82), перепишем уравнение (1.73) в виде

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + (\mathbf{v}_g \cdot \nabla) \langle W \rangle = 0. \quad (1.83)$$

Таким образом, в среде без дисперсии, где нет поглощения энергии, закон сохранения энергии устанавливает, что изменение энергии в объеме со временем происходит только за счет втекания или вытекания энергии через поверхность, ограничивающую этот объем.

1.8 Потери энергии электромагнитного поля в среде

Временная дисперсия связана с запаздыванием тока (или индукции) при изменении электрического поля в среде. Для электромагнитной волны это запаздывание выражается в том, что между полем и током (индукцией) имеется сдвиг фазы, который в изотропной среде (см. §1.3) определяется мнимой частью диэлектрической проницаемости ε'' . С другой стороны, мнимая часть диэлектрической проницаемости в изотропной среде определяет и затухание волн. Таким образом, из-за запаздывания в реакции среды электромагнитное поле совершает работу и возникают потери его энергии.

Чтобы найти работу, которую совершает поле волны в единицу времени в единице объема, рассмотрим в формуле (1.69) среднее значение от слагаемого

$$Q = \frac{1}{4\pi} \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle. \quad (1.84)$$

Используем выражения для поля и индукции в действительной форме

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left(\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right), \quad \mathbf{D} = \text{Re} \left(\mathbf{D}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right). \quad (1.85)$$

В результате после усреднения получим

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0^* - \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{D}_0). \quad (1.86)$$

Подставляя материальное уравнение (1.27) и произведя замену индексов в первом слагаемом, найдем для потерь энергии электромагнитной волны в единице объема среды в единицу времени следующее выражение

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} (\varepsilon_{ij}^* E_{0i} E_{0j}^* - \varepsilon_{ij} E_{0i}^* E_{0j}) = -\frac{i\omega}{8\pi} \varepsilon_{ij}^A E_{0i}^* E_{0j}, \quad (1.87)$$

где ε_{ij}^A — антиэрмитовская часть тензора комплексной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji}^*). \quad (1.88)$$

С помощью вектора поляризации $\mathbf{e} = \mathbf{E}_0 / |\mathbf{E}_0|$ соотношение (1.87) можно переписать в виде

$$Q = -\frac{i\omega}{8\pi} (e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^A) |\mathbf{E}_0|^2. \quad (1.89)$$

Если не учитывать дисперсию ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$, $\varepsilon'' = 0$), то потери в среде равны нулю.

1.9 Уравнения для медленно изменяющихся амплитуд

Затухание (или нарастание) волны приводит к тому, что комплексная амплитуда не постоянна и изменяется во времени и пространстве. При этом поле волны не является монохроматическим и уже нельзя утверждать, что оно изменяется строго на одной частоте. При разложении в интеграл Фурье поля затухающей (нарастающей) волны возникает не одна гармоника, а целый спектр. Однако, если нарастание или затухание волны происходит медленно во времени или пространстве, то можно ее поле рассматривать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right], \quad (1.90)$$

где комплексная амплитуда $\mathbf{E}_0$ является медленной функцией времени и координат в том смысле, что

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \ll \mathbf{E}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial x_i} \ll k_i \mathbf{E}_0. \quad (1.91)$$

Такую волну называют *квазимонохроматической*.

Для описания квазимонохроматических волн можно использовать упрощенную систему уравнений Максвелла-так называемые уравнения для медленно изменяющихся амплитуд или укороченные уравнения поля. С помощью таких уравнений легко вывести также закон сохранения энергии, в котором последовательно учитывается дисперсия. Изложение этого круга вопросов начнем с вывода соответствующего материального уравнения. Рассмотрим формулу (1.18) для волны вида (1.90)

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_{0j}(\mathbf{r}', t') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega t'}. \quad (1.92)$$

Произведем замену переменных $t'' = t - t'$, $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \int_0^\infty dt'' \int d\mathbf{r}'' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}'', t'') e^{i\omega t'' - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}''} E_{0j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - t'') \right\}. \quad (1.93)$$

Функция $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}'', t'')$ зависит от времени t'' , характеризующего запаздывание реакции среды на действие поля, и от расстояния $\mathbf{r}''$, на котором проявляются нелокальные свойства среды. Если запаздывание и нелокальность малы и амплитуда волны мало изменяется за время t'' и на расстоянии $\mathbf{r}''$, то для амплитуды можно использовать разложение в ряд

$$E_{0j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'', t - t'') \simeq E_{0j}(\mathbf{r}, t) - t'' \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \mathbf{r}'' \cdot \frac{\partial E_{0j}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.94)$$

Подставим это разложение в материальное уравнение и воспользуемся соотношениями, вытекающими из определения (1.25)

$$i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = - \int_0^\infty t'' dt'' \int d\mathbf{r}'' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}'', t'') e^{i\omega t'' - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}''}, \quad (1.95)$$

$$i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^\infty dt'' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{r}'' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}'', t'') e^{i\omega t'' - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}''}. \quad (1.96)$$

В результате получаем

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[D_{0i} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right] = \text{Re} \left[e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \left(\varepsilon_{ij} E_{0j} + i \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - i \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial E_{0j}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right]. \quad (1.97)$$

Это и есть материальное уравнение для квазимонохроматической электромагнитной волны, у которой амплитуда изменяется медленно со временем и в пространстве. Если амплитуда не зависит от времени и координат, то формула (1.97) переходит в (1.27). Еще раз подчеркнем, что соотношение (1.97) является приближенным и учитывает только слагаемые, пропорциональные первым производным по времени и координатам от амплитуды.

Из уравнений поля в отсутствии источников следует одно уравнение (1.32) для напряженности электрического поля. Это уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка. Покажем, что в случае квазимонохроматической волны из этого уравнения следует более простое уравнение первого порядка, описывающее изменение амплитуды волны во времени и в пространстве.

Используем формулу (1.90) и вычислим производные в формуле (1.32). При этом ограничимся учетом слагаемых, содержащих только первые производные от амплитуды

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{Re} \left[(\text{rot } \mathbf{E}_0 + i [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right], \quad (1.98)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} \simeq \text{Re} \left\{ [i \text{rot} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] + i [\mathbf{k} \times \text{rot } \mathbf{E}_0] - [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]]] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right\}, \quad (1.99)$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} \simeq \text{Re} \left[\left(-i\omega D_{0i} + \varepsilon_{ij} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right], \quad (1.100)$$

$$\frac{\partial^2 D_i}{\partial t^2} \simeq \text{Re} \left[e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \left(-\omega^2 \varepsilon_{ij} E_{0j} - i\omega^2 \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \omega} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} + i\omega^2 \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{\partial E_{0j}}{\partial \mathbf{r}} - 2i\omega \varepsilon_{ij} \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} \right) \right] \quad (1.101)$$

Подставляя полученные соотношения в исходное уравнение, запишем его в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_{ij}) \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} - \omega \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial k_l} \frac{\partial E_{0j}}{\partial x_l} - \frac{c^2}{\omega} \{ \text{rot} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]_i + [\mathbf{k} \times \text{rot} \mathbf{E}_0]_i \} \\ - i\omega \left[\varepsilon_{ij} (\mathbf{k}, \omega) + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \right] E_{0j} = 0. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Ранее было показано, что затухание электромагнитной волны определяется антиэрмитовской частью тензора комплексной диэлектрической проницаемости (см. §1.8). Поэтому разобьем тензор ε_{ij} на эрмитовскую и антиэрмитовскую части и, учитывая, что затухание волны мало, в слагаемых, пропорциональных производным от амплитуды, оставим только эрмитовскую часть. Тогда используя комплексный единичный вектор поляризации $\mathbf{e} = \mathbf{E}_0/\mathcal{E}$, где $\mathcal{E} = |\mathbf{E}_0|$, для волны с $\mathbf{e} = \text{const}$ получим¹

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \left[\omega^2 \frac{\partial}{\partial k_l} (e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H) + 2c^2 \text{Re} (e_l (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^*) - k_l) \right] \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_l} \\ - i\omega^2 e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^A \mathcal{E} - i \left\{ c^2 [|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2 - k^2] + \omega^2 e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H \right\} \mathcal{E} = 0. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Если бы не было затухания волны и амплитуда её была постоянна, то все слагаемые в полученном выражении, кроме последнего, были бы равны нулю. Последнее же слагаемое определяло закон дисперсии волны

$$\mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \frac{\omega^2}{c^2} e_i^* e_j M_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega) = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}|^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (1.104)$$

Будем считать, что и в случае, когда есть затухание, закон дисперсии (1.104) выполняется. Тогда равенство нулю оставшихся слагаемых определит уравнение для медленно изменяющейся во времени и пространстве амплитуды волны. Это уравнение удобно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \frac{2 \text{Re} [e_l (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^*)] - 2k_l + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial k_l} (e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H)}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_l} - \frac{i e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^A}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H)} \mathcal{E} = 0. \quad (1.105)$$

Входящие в уравнение величины имеют определенный физический смысл. Чтобы понять этот смысл, вычислим с помощью формулы (1.104) групповую скорость

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = - \frac{\partial \mathcal{D} / \partial \mathbf{k}}{\partial \mathcal{D} / \partial \omega} = - \frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} (e_i^* e_j M_{ij}^H)}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j M_{ij}^H)} \\ = - \frac{2 \text{Re} [\mathbf{e} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^*)] - 2\mathbf{k} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} (e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H)}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H)}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Видно, что коэффициент перед производной от амплитуды по координате есть соответствующая компонента групповой скорости. Величина

$$\gamma = -i \frac{e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^A}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \varepsilon_{ij}^H)} \quad (1.107)$$

¹ При сделанных предположениях вектор $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + i \mathbf{e}_2 \sin \varphi = \text{const}$, где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ действительные постоянные единичные векторы, φ — некоторая постоянная фаза. Например, в случае линейно и циркулярно-поляризованных волн $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, соответственно.

является декрементом (инкрементом), характеризующим затухание волны. В случае изотропной среды из формулы (1.107) с помощью выражения (1.41) легко получить (с точностью до знака) соотношения (1.52) и (1.55).

Таким образом, уравнение для медленно изменяющейся амплитуды имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{r}} + \gamma \mathcal{E} = 0. \quad (1.108)$$

Из уравнения (1.108) следуют результаты, полученные в §1.6 при рассмотрении начальной и граничной задачи в электродинамике. Если амплитуда волны не зависит от координат, как это предполагалось при рассмотрении начальной задачи, то уравнение

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\gamma \mathcal{E} \quad (1.109)$$

имеет решение $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)e^{-\gamma t}$. В случае граничной задачи амплитуда не зависит от времени. Если помимо этого она изменяется только вдоль оси ОХ, то из уравнения (1.108) получим $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(0)e^{-\kappa x}$, где $\kappa = \gamma/v_{gx}$.

Уравнение (1.108) позволяет получить те же результаты, что и дисперсионное уравнение с комплексной диэлектрической проницаемостью, если при решении последнего предполагать, что затухание (нарастание) волны медленное.

1.10 Закон сохранения энергии (среда с дисперсией)

Из уравнения (1.108) следует закон сохранения энергии волны в среде при учете как временной, так и пространственной дисперсии. Чтобы вывести этот закон, умножим его на $2\mathcal{E}$ и полученный результат представим в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}^2 + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{E}^2 = -2\gamma \mathcal{E}^2. \quad (1.110)$$

Умножим формулу (1.110) на

$$\frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \epsilon_{ij}^H). \quad (1.111)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \epsilon_{ij}^H) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}^2 + \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \epsilon_{ij}^H) \left(\mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathcal{E}^2 \right) \\ = 2i\omega (e_i^* e_j \epsilon_{ij}^A) \frac{\mathcal{E}^2}{16\pi}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Сравнивая стоящее справа выражение с формулой (1.89), видим, что с точностью до знака эта величина определяет потери энергии электромагнитной волны в единице объема в единицу времени. Поэтому слагаемые слева определяют тоже изменение энергии в единице объема (плотности энергии) в единицу времени. Отсюда вытекает, что плотность энергии в среде с дисперсией равна

$$\langle W \rangle = \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \epsilon_{ij}^H) \mathcal{E}^2. \quad (1.113)$$

В этих обозначениях закон сохранения энергии в среде с дисперсией принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W \rangle + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle W \rangle = -Q. \quad (1.114)$$

Из определений (1.89), (1.107) и (1.113) следует, что стоящую в правой стороне формулы (1.114) величину можно записать в виде $Q = 2\gamma \langle W \rangle$ и представить формулу (1.114) в другой форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle W \rangle + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle W \rangle = -2\gamma \langle W \rangle. \quad (1.115)$$

Прежде всего проверим, что из формулы (1.115) следует закон сохранения энергии в среде без дисперсии. Для этого положим, что нет поглощения $\epsilon_{ij}^A = 0$ и ϵ_{ij}^H не зависит от частоты. Из определения (1.113) получаем при $\epsilon_{ij}^H = \epsilon \delta_{ij}$ формулу (1.81), а из (1.115) следует (1.83).

Отметим, что при учете дисперсии средняя энергия волны (1.113) зависит от частоты и для разных частот различна даже при одной и той же амплитуде. Это связано с тем, что в энергию волны входит также и энергия частиц среды, двигающихся под действием поля.

1.11 Уравнения электродинамики в неоднородной среде

Обычно плазма является неоднородной и концентрация частиц, температура, скорость течения и другие ее параметры зависят от координат. Распространение электромагнитных волн в неоднородных средах и, в частности, в плазме имеет свои особенности, зачастую очень существенные для практических целей. В этом и следующем параграфах рассмотрим коротко распространение волн в неоднородных средах. Обсудим ряд явлений, возникающих из-за неоднородности.

При рассмотрении неоднородной среды пренебрежем пространственной дисперсией, но учтем временную дисперсию. Помимо этого будем считать среду изотропной. Материальное уравнение тогда имеет вид (см. (1.16)):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \epsilon(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'). \quad (1.116)$$

Пренебрежение пространственной дисперсией справедливо для быстрых электромагнитных волн в среде, когда перенос заряда из точки в точку за период изменения поля не успевает происходить. При этом зависимость диэлектрической проницаемости ϵ от координат связана только с неоднородностью среды.

Рассмотрим уравнение (1.32), которое справедливо и для неоднородной среды. Будем считать поле периодической функцией времени и искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (1.117)$$

Подчеркнем, что в этом выражении для поля зависимость от времени определена, в то время как зависимость поля от координат нужно найти из уравнения (1.32). Иными словами, поле является монохроматическим во времени и задача состоит в определении его пространственного изменения при условии, что свойства неоднородной среды известны.

Рассмотрим сначала материальное уравнение (1.116). Подставим в него приведенное выше выражение для поля

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \epsilon(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t'} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega \tau} \epsilon(\mathbf{r}, \tau). \quad (1.118)$$

Введем комплексную диэлектрическую проницаемость неоднородной среды

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega \tau} \epsilon(\mathbf{r}, \tau). \quad (1.119)$$

Тогда материальное уравнение принимает простой вид:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (1.120)$$

Анализ уравнений поля начнем с уравнения $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$. Подставив в него выражение для вектора индукции, получим

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}) \frac{\nabla \epsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)}. \quad (1.121)$$

Обратимся теперь к уравнению (1.32). Используем формулу (1.121) и соотношение

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (1.122)$$

В результате получим уравнение, определяющее пространственную зависимость поля

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)} \right] = 0. \quad (1.123)$$

В пределе однородной среды $\nabla \varepsilon(\omega) = 0$ из уравнения (1.123) следует решение $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega). \quad (1.124)$$

Последнее соотношение является законом дисперсии для поперечных волн в изотропной среде (1.44).

Часто при изучении распространения электромагнитных волн в неоднородной среде более удобно исследовать уравнение для магнитной индукции $\mathbf{B}$. Чтобы получить это уравнение, сделаем ряд преобразований с уравнениями (1.11). Из второго уравнения (при отсутствии токов $\mathbf{j}_0 = 0$) получим

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{D}. \quad (1.125)$$

Если считать, что все поля зависят от времени по закону $e^{-i\omega t}$, т.е. $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$, то получим

$$\text{rot rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c} [\nabla \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r})]. \quad (1.126)$$

Но из первого уравнения (1.11) следует, что

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (1.127)$$

а из второго уравнения

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.128)$$

Используя эти соотношения, получим

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \left[\frac{\nabla \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)} \times \text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right] = 0. \quad (1.129)$$

Видно, что уравнения (1.123) и (1.129) подобны по своей структуре.

1.12 Распространение электромагнитных волн в неоднородной среде

Рассмотрим среду, свойства которой изменяются только в одном направлении и диэлектрическая проницаемость зависит от одной пространственной переменной x . Будем считать, что в такой среде (часто ее называют плоско-слоистой) в направлении ОХ распространяется поперечная электромагнитная волна $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_y \mathcal{E}_\omega(x)$, поляризованная вдоль оси ОУ ($E_x = E_z = 0$). Тогда уравнение (1.123) преобразуется к виду

$$\mathcal{E}_\omega''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x, \omega) \mathcal{E}_\omega(x) = 0. \quad (1.130)$$

Решение такого уравнения существенно зависит от вида функции $\varepsilon(x, \omega)$. Без конкретизации этой функции можно построить лишь приближенное решение для сред, свойства которых меняются медленно (приближение геометрической оптики). В этом случае решение уравнения ищут в виде $\mathcal{E}_\omega(x) = \mathcal{E}_{0\omega}(x) e^{i\varphi_\omega(x)}$, где $\mathcal{E}_{0\omega}(x)$ и $\varphi_\omega(x)$ — действительные функции, определяющие

амплитуду и фазу волны. (Величину $\varphi_\omega(x)$ называют эйконалом). Подставляя решение в таком виде в уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{0\omega}''(x) + 2i\varphi_\omega'(x)\mathcal{E}_{0\omega}'(x) + i\varphi_\omega''(x)\mathcal{E}_{0\omega}(x) - [\varphi_\omega'(x)]^2\mathcal{E}_{0\omega}(x) \\ + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(x, \omega)\mathcal{E}_{0\omega}(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Отделяем в этом выражении действительную часть и отбрасываем слагаемое $\mathcal{E}_{0\omega}''(x)$, полагая, что амплитуда волны $\mathcal{E}_{0\omega}$ изменяется медленно, так что вторая производная от нее мала. В результате получаем уравнение для $\varphi_\omega(x)$ (уравнение эйконала)

$$[\varphi_\omega'(x)]^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(x, \omega). \quad (1.132)$$

Решение этого уравнения очевидно:

$$\varphi_\omega(x) = \pm \frac{\omega}{c} \int_{x_0}^x dx' \sqrt{\varepsilon(x', \omega)}. \quad (1.133)$$

Часто величину $\varphi_\omega'(x)$ обозначают $\kappa_\omega(x)$ и называют волновым числом, зависящим от координат. В пределе однородной среды эта величина постоянна и действительно является волновым числом, а уравнение эйконала переходит в дисперсионное уравнение (1.44).

Приравнявая нулю мнимую часть уравнения, получим

$$\frac{d}{dx} [\mathcal{E}_{0\omega}^2(x)\kappa_\omega(x)] = 0 \quad (1.134)$$

и, следовательно, $\kappa_\omega(x)\mathcal{E}_{0\omega}^2(x) = \text{const.}$ Для определения постоянной нужно знать волновое число и амплитуду в какой-либо точке среды. Если среда ограничена и волна нормально падает на нее из вакуума, где $\varepsilon = 1$ и $\kappa_\omega = \omega/c$, то

$$\mathcal{E}_{0\omega}(x) = \frac{\mathcal{E}_0}{[\varepsilon(x, \omega)]^{1/4}}. \quad (1.135)$$

Здесь $\mathcal{E}_0$ -амплитуда падающей волны на границе. Тогда поле волны внутри среды в приближении геометрической оптики имеет вид

$$\begin{aligned} E_y(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}}{[\varepsilon(x, \omega)]^{1/4}} \left\{ \exp \left[i \frac{\omega}{c} \int_{x_0}^x dx' \sqrt{\varepsilon(x', \omega)} \right] \right. \\ \left. + \exp \left[-i \frac{\omega}{c} \int_{x_0}^x dx' \sqrt{\varepsilon(x', \omega)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

При выводе выражения (1.136) было отброшено слагаемое $\mathcal{E}_{0\omega}''(x)$. Такое отбрасывание оправдано, если это слагаемое мало по сравнению с $(\omega^2/c^2)\varepsilon(x, \omega)\mathcal{E}_{0\omega}(x)$. В окрестности точки x_0 , где $\varepsilon(x_0, \omega) = 0$, приближение геометрической оптики не пригодно. Это видно также из того, что в точке x_0 амплитуда волны обращается в бесконечность. Реально, точка x_0 является той точкой, от которой волна отражается. Эту точку называют еще точкой поворота.

В решении (1.136) первое слагаемое определяет волну, идущую слева направо, а второе-волну, идущую в обратном направлении, т.е. отраженную волну. В отсутствии поглощения полное поле (1.136) является полем стоячей волны.

Если неоднородность среды такова, что имеется не одна, а две точки поворота x_{01} и x_{02} , то между ними могут существовать запертые волны (Рис. 1.1). Эти волны имеют дискретный набор частот. Связано это с тем, что отраженная от одной точки поворота волна не должна гасить волну, отраженную от другой точки. Условием этого является укладывание между точками поворота целого числа длин волн и математически это записывается следующим образом

$$\oint \varphi_\omega'(x) dx = 2 \frac{\omega}{c} \int_{x_{01}}^{x_{02}} \sqrt{\varepsilon(x, \omega)} dx = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.137)$$

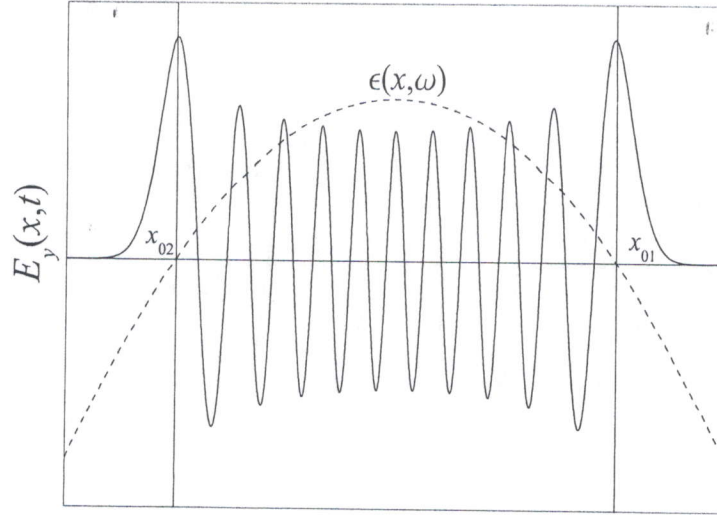


Рис. 1.1: Запертые волны в неоднородной среде, где имеются две точки поворота x_{01} и x_{02} .

Вопрос о распространении в неоднородной среде электромагнитной волны, падающей на нее из вакуума, представляет большой практический интерес и поэтому остановимся на нем более подробно. Рассмотрим наклонное падение, когда направление распространения падающей волны не совпадает с направлением неоднородности. При этом надо различать два независимых случая поляризации. Если вектор электрического поля $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения (плоскость XY), то говорят, что волна имеет *p* поляризацию (*B*-волна). Если вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости падения, то говорят, что волна *s* поляризована (*E*-волна). Рассмотрим сначала более простой, второй случай. Пусть плоскость $x = 0$ является границей раздела вакуума (полупространство $x < 0$) и среды (полупространство $x > 0$). В выбранной системе координат отлична от нуля только z -компонента поля, которая представим виде $E_z(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_\omega(x) e^{ik_y y}$, $E_x(\mathbf{r}) = E_y(\mathbf{r}) = 0$, где k_y -компонента волнового вектора вдоль оси OY . В этом направлении среда однородна. Для магнитного поля из (1.127) найдем $B_x(\mathbf{r}) = ik_y \mathcal{E}_\omega(x) e^{ik_y y}$, $B_y(\mathbf{r}) = -\mathcal{E}'_\omega(x) e^{ik_y y}$, $B_z(\mathbf{r}) = 0$. Как было установлено выше, поле волны в среде удовлетворяет уравнению (1.123). Если ввести угол падения θ и учесть, что компонента k_y неизменна и поэтому такая же, как и в вакууме ($k_{0y} = k_y = (\omega/c) \sin \theta$), то получим

$$\mathcal{E}_\omega''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} [\epsilon(x, \omega) - \sin^2 \theta] \mathcal{E}_\omega(x) = 0. \quad (1.138)$$

В приближении геометрической оптики поле $\mathcal{E}_\omega(x)$ можно представить в виде:

$$\mathcal{E}_\omega(x) = \mathcal{E}_0 \left[\frac{\cos^2 \theta}{\epsilon(x, \omega) - \sin^2 \theta} \right]^{1/4} \left\{ \exp \left[i \int_{x_0}^x \kappa_\omega(x') dx' \right] + \exp \left[-i \int_{x_0}^x \kappa_\omega(x') dx' \right] \right\}, \quad (1.139)$$

где $\kappa_\omega(x) = (\omega/c) \sqrt{\epsilon(x, \omega) - \sin^2 \theta}$. Заметим, что уравнение эйконала определяет величину $\kappa_\omega(x)$ и формально совпадает с дисперсионным уравнением для поперечных волн.

Величина $\kappa_\omega(x)$ обращается в ноль в точке x_0 , где $\epsilon(x_0, \omega) = \sin^2 \theta$. Именно от этой точки и отражается *s*-поляризованная волна при наклонном падении ее на неоднородную среду. Структура поля вдоль оси OX схожа со структурой поля при нормальном падении, но точка отражения смещена в сторону больших значений ϵ (Рис. 1.2).

При *p*-поляризации падающей волны имеются две компоненты у вектора напряженности электрического поля E_x и E_y ($E_z = 0$), а магнитная индукция имеет только компоненту B_z . Из уравнения $\text{rot } \mathbf{B} = (1/c) (\partial \mathbf{D} / \partial t)$ следует связь между этими величинами. Полагая, что все поля во

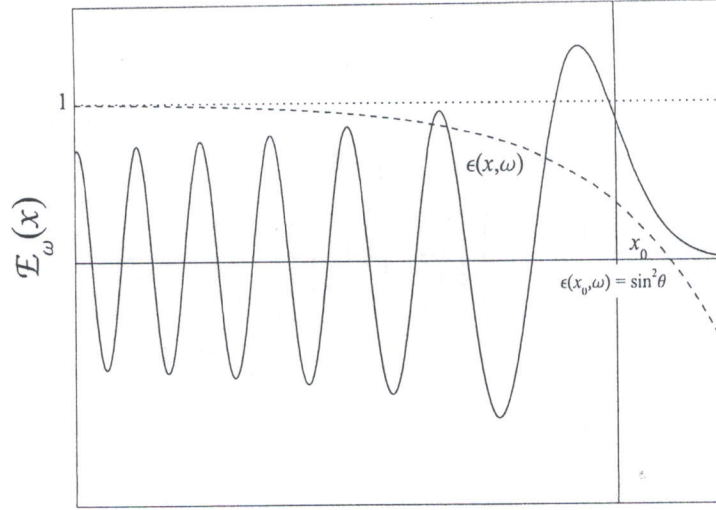


Рис. 1.2: Структура поля волны $\mathcal{E}_\omega(x)$ при наклонном падении.

времени изменяются с частотой ω по закону $e^{-i\omega t}$, получим

$$E_x(\mathbf{r}) = \frac{ic}{\omega} \frac{1}{\epsilon(x, \omega)} \frac{\partial B_z(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad E_y(\mathbf{r}) = -\frac{ic}{\omega} \frac{1}{\epsilon(x, \omega)} \frac{\partial B_z(\mathbf{r})}{\partial x}. \quad (1.140)$$

Поскольку в направлении оси ОУ среда однородна, то можно принять зависимость всех полей от переменной y в виде $e^{ik_y y}$, т.е. $B_z(\mathbf{r}) = \mathcal{B}_\omega(x) e^{ik_y y}$. Тогда получим

$$E_x(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ik_y y}}{\epsilon(x, \omega)} \mathcal{B}_\omega(x) \sin \theta, \quad E_y(\mathbf{r}) = -\frac{ic}{\omega} \frac{e^{ik_y y}}{\epsilon(x, \omega)} \mathcal{B}'_\omega(x). \quad (1.141)$$

Таким образом, компоненты $E_x(\mathbf{r})$ и $E_y(\mathbf{r})$ выражаются через $\mathcal{B}_\omega(x)$. Для определения $\mathcal{B}_\omega(x)$ используем уравнение (1.129). Если в нем подставить $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \mathcal{B}_\omega(x) e^{ik_y y}$, где $k_y = (\omega/c) \sin \theta$, то получим:

$$\mathcal{B}_\omega''(x) - \frac{\epsilon'(x, \omega)}{\epsilon(x, \omega)} \mathcal{B}_\omega'(x) + \frac{\omega^2}{c^2} [\epsilon(x, \omega) - \sin^2 \theta] \mathcal{B}_\omega(x) = 0. \quad (1.142)$$

В окрестности точки x_1 , где $\epsilon(x_1, \omega) = 0$, решение уравнения (1.142) не имеет особенностей и при $x \rightarrow x_1$ магнитное поле стремится к постоянному значению. Тогда в соответствии с формулой (1.141) направленная вдоль неоднородности компонента электрического поля E_x обращается в бесконечность при $x \rightarrow x_1$. Фактически, конечно, эта компонента не бесконечна, но может быть достаточно велика. Такое возрастание продольной (направленной вдоль направления неоднородности) компоненты поля называется линейной трансформацией поперечной волны в продольную (Рис. 1.3). Эту терминологию легко понять, если вспомнить, что согласно (1.46) закон дисперсии продольных волн есть и в случае среды без пространственной дисперсии $\epsilon_l(\omega) = \epsilon_{tr}(\omega) = \epsilon(\omega)$. Физически это явление линейной трансформации связано с тем, что p -поляризованная падающая поперечная волна имеет компоненту электрического поля вдоль оси ОХ. В окрестности точки, где $\epsilon = 0$ эта компонента играет роль вынуждающей силы и резонансно возбуждает продольные волны. При этом поперечная волна трансформируется в продольную. В других точках неоднородной среды равенство $\epsilon(x, \omega) = 0$ также может выполняться. Но определяемая этим равенством частота не совпадает с частотой падающей поперечной волны и никакого резонанса не возникает.

Рассмотрим также коротко распределение поля в неоднородной среде в области где неприменимо приближение геометрической оптики. Будем считать, что плотность среды увеличивается по мере удаления от границы раздела, $n'_e(x) > 0$. Этому соответствует неравенство $\epsilon'(x_0, \omega) < 0$, т.е. диэлектрическая проницаемость уменьшается по мере удаления от границы.

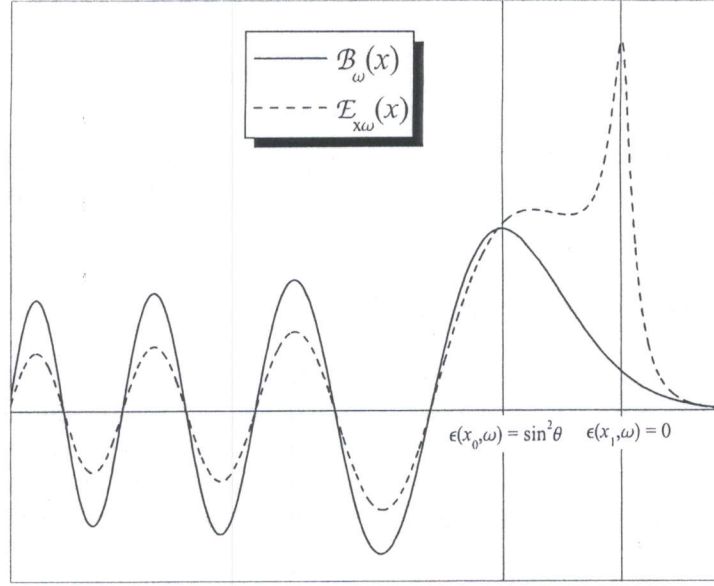


Рис. 1.3: Компоненты $B_\omega(x)$ (сплошная линия) и $E_{x\omega}(x)$ (пунктирная линия) при p -поляризации падающей волны.

В случае s -поляризованной волны в окрестности точки x_0 , где $\epsilon(x_0, \omega) = \sin^2 \theta$, уравнение (1.138) можно представить в виде:

$$\mathcal{E}_\omega''(x) - \frac{x - x_0}{\lambda^3(\omega)} \mathcal{E}_\omega(x) = 0. \quad (1.143)$$

Введя новое переменное ξ

$$\xi = \frac{x - x_0}{\lambda(\omega)}, \quad \lambda(\omega) = \left(\frac{c^2}{\omega^2 |\epsilon'(x_0, \omega)|} \right)^{1/3}, \quad (1.144)$$

уравнение (1.143) приведем к виду $\mathcal{E}_\omega''(\xi) - \xi \mathcal{E}_\omega(\xi) = 0$. Это уравнение Эйри (см., например, [1]) решение которого при граничном условии $\mathcal{E}_\omega(x)|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ выражается через функцию Эйри $\text{Ai}(\xi)$:

$$\mathcal{E}_\omega(x) = \mathcal{E}_{01} \text{Ai}(\xi) = \mathcal{E}_{01} \text{Ai}\left(\frac{x - x_0}{\lambda(\omega)}\right). \quad (1.145)$$

Здесь $\mathcal{E}_{01}$ некоторая постоянная интегрирования. При больших x ($|x| \rightarrow \infty$) поле имеет следующий асимптотический вид:

$$\mathcal{E}_\omega(x)|_{x \rightarrow -\infty} \simeq \frac{\mathcal{E}_{01}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda(\omega)}{x_0 - x} \right)^{1/4} \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \left(\frac{x_0 - x}{\lambda(\omega)} \right)^{3/2} \right], \quad (1.146)$$

$$\mathcal{E}_\omega(x)|_{x \rightarrow \infty} \simeq \frac{\mathcal{E}_{01}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda(\omega)}{x - x_0} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{x - x_0}{\lambda(\omega)} \right)^{3/2} \right]. \quad (1.147)$$

Видно, что поле затухает по мере удаления от плоскости $x = x_0$, которое является точкой поворота. Чтобы найти отраженную волну представим выражение (1.146) в виде:

$$\mathcal{E}_\omega(x)|_{x \rightarrow -\infty} \simeq \frac{\mathcal{E}_{01}}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda(\omega)}{x_0 - x} \right)^{1/4} \left[e^{-i\psi(x)} + e^{i\psi(x)} \right], \quad (1.148)$$

где

$$\psi(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \left(\frac{x_0 - x}{\lambda(\omega)} \right)^{3/2}. \quad (1.149)$$

В решении (1.148) первое слагаемое определяет волну, идущую слева направо, а второе — волну, идущую в обратном направлении, т.е. отраженную волну. Из (1.146) видно, что полное поле является полем стоячей волны.

1.13 Модель “холодной” плазмы

В модели “холодной” плазмы использован ряд упрощающих предположений относительно движения частиц плазмы сорта α ($\alpha = e, i$ для электронов и ионов, соответственно) в электромагнитном поле волны. Во-первых, действие магнитного поля волны не учитывается. Основанием для этого является малость силы, действующей на частицу со стороны магнитного поля по сравнению с силой действия электрического поля. Действительно, уравнение движения частицы сорта α имеет вид

$$m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_\alpha = m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = e_\alpha \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha, t) + \frac{e_\alpha}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha, t)]. \quad (1.150)$$

Здесь $e_\alpha = -e$, $e_\alpha = e_i$ и $m_\alpha = m$, $m_\alpha = m_i$ для электронов и ионов, соответственно. Если напряженность полей даже одного порядка ($B \sim E$), то при скорости движения частицы, малой по сравнению со скоростью света ($v_\alpha \ll c$), второе слагаемое в правой стороне формулы (1.150) мало по сравнению с первым слагаемым. При этом естественно движение частицы считается не релятивистским. Во-вторых, предполагается, что в отсутствие электрического поля частица покоится и скорость его равна нулю. Это соответствует пренебрежению тепловым движением. Поэтому эта модель плазмы и называется *моделью холодной плазмы*. В-третьих, в модели “холодной” плазмы использовано предположение о том, что скорость движения частицы намного меньше, чем фазовая скорость волны. Именно это последнее предположение дает возможность решить уравнение движения и выразить скорость и координату частицы через напряженность электрического поля.

Для того чтобы показать, как строится модель “холодной” плазмы, рассмотрим движение частицы сорта α в поле волны вида (1.23). Отбросим в уравнении (1.150) силу, связанную с магнитным полем и запишем

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = e_\alpha \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}. \quad (1.151)$$

Это уравнение определяет траекторию частицы $\mathbf{r}_\alpha(t)$. При решении его используем теорию возмущений $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_{0\alpha} + \mathbf{r}_{1\alpha}$, где $\mathbf{r}_{0\alpha}$ — положение частицы в отсутствие поля, $\mathbf{r}_{1\alpha}$ — линейное по полю смещение частицы. Если поле изменяется в пространстве достаточно плавно, а смещение частицы из начального положения мало, то при вычислении $\mathbf{r}_{1\alpha}(t)$ можно брать поле в точке $\mathbf{r}_{0\alpha}$. В результате найдем

$$\mathbf{v}_\alpha \simeq \mathbf{v}_{1\alpha} = \dot{\mathbf{r}}_{1\alpha} = i\mathbf{v}_{\alpha E} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0\alpha} - \omega t)}, \quad (1.152)$$

$$\mathbf{r}_\alpha \simeq \mathbf{r}_{1\alpha} = -\mathbf{r}_{\alpha E} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0\alpha} - \omega t)}, \quad (1.153)$$

где $\mathbf{v}_{\alpha E} = e_\alpha \mathbf{E}_0 / m_\alpha \omega$, $\mathbf{r}_{\alpha E} = e_\alpha \mathbf{E}_0 / m_\alpha \omega^2$. Еще раз подчеркнем, что замена в выражении для поля волны реального положения частицы $\mathbf{r}_\alpha(t)$ на его начальное положение $\mathbf{r}_{0\alpha}$ оправдано только при условии, что электрическое поле мало изменяется на амплитуде колебаний частицы. Поскольку изменение поля характеризуется длиной волны $\lambda = 2\pi/k$, а максимальное смещение частицы равно $r_{\alpha E}$, то условие пригодности модели “холодной” плазмы означает выполнение неравенства $r_{\alpha E} \ll \lambda = 2\pi/k$. Учтя соотношение $r_{\alpha E} = v_{\alpha E} / \omega$, перепишем это неравенство иначе

$$v_{\alpha E} \ll \frac{\omega}{k} = v_\varphi. \quad (1.154)$$

Это неравенство утверждает, что фазовая скорость волны намного превышает скорость движения частицы.

Зная скорость осцилляций частицы, легко рассчитать плотность тока частиц, возникающего в поле волны. Для этого нужно концентрацию частиц n_α умножить на заряд и на скорость $\mathbf{v}_\alpha$ и просуммировать по всем сортам частиц. В результате, полагая что $\lambda \gg r_{0\alpha}$ (или $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0\alpha} \ll 1$), получим

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \sum_{\alpha} i \frac{n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega}. \quad (1.155)$$

Сравнивая это выражение с формулой (1.29), заключаем, что в модели “холодной” плазмы тензор электропроводности равен

$$\sigma_{ij}(\omega) = \sum_{\alpha} i \frac{n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega} \delta_{ij}. \quad (1.156)$$

Зная тензор $\sigma_{ij}(\omega)$, с помощью формулы (1.30) легко найти тензор комплексной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega) \delta_{ij}, \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{m \omega^2} - \frac{4\pi n_i e_i^2}{m_i \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (1.157)$$

Величину, стоящую в формуле (1.157), часто называют плазменной или ленгмюровской частотой, $\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$, где

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}. \quad (1.158)$$

Заметим, что как правило $m_i \gg m_e$, следовательно $\omega_{pe} \gg \omega_{pi}$ и $\omega_p \simeq \omega_{pe}$, т.е. плазменная частота определяется электронной компонентой плазмы.

Из формулы (1.157) можно найти продольную и поперечную диэлектрические проницаемости. Для этого обратимся к формуле (1.41). Сравнивая ее с формулой (1.157), получим

$$\varepsilon_{tr}(k, \omega) = \varepsilon_l(k, \omega) = \varepsilon(\omega). \quad (1.159)$$

Таким образом в рассматриваемой модели нет разницы между продольной и поперечной диэлектрическими проницаемостями.

До сих пор предполагалось, что частицы сорта α , двигаясь в электрическом поле волны, не сталкиваются с другими частицами (сорта β). В действительности при своем осцилляторном движении частицы α приближаются к частицам β и удаляются от них. Поле частиц сорта β действует на частиц сорта α , изменяет их скорость движения. Наиболее просто учесть взаимодействие частиц сорта α и β , введя силу трения, которая действует на движущийся заряд

$$m_{\alpha} \dot{\mathbf{v}}_{\alpha} = e_{\alpha} \mathbf{E} - m_{\alpha} \nu \mathbf{v}_{\alpha}, \quad (1.160)$$

где величину ν называют эффективной частотой столкновений заряженных частиц сорта α с частицами сорта β , когда $\alpha \neq \beta$. Смысл этого названия легко понять. Если бы электрического поля не было, то заряд сорта α , имевший в момент времени $t = 0$ скорость $\mathbf{v}_{\alpha}(0)$, тормозился по закону $\mathbf{v}_{\alpha}(t) = \mathbf{v}_{\alpha}(0) e^{-\nu t}$. Можно сказать, что величина ν^{-1} определяет время свободного пробега, а обратная величина ν характеризует частоту столкновений.

Подставим в уравнение (1.160) поле плоской волны (1.23), которое берется в точке $\mathbf{r}_{0\alpha}$. Будем искать решение в виде $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{v}_{0\alpha} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0\alpha} - i\omega t}$. В результате получим

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \frac{ie_{\alpha}}{m_{\alpha}(\omega + i\nu)} \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0\alpha} - \omega t)} \simeq \frac{ie_{\alpha}}{m_{\alpha}(\omega + i\nu)} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (1.161)$$

Отсюда найдем плотность тока $\mathbf{j}$ и затем тензор электропроводности

$$\sigma_{ij}(\omega) = \sum_{\alpha} \frac{in_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}(\omega + i\nu)} \delta_{ij}. \quad (1.162)$$

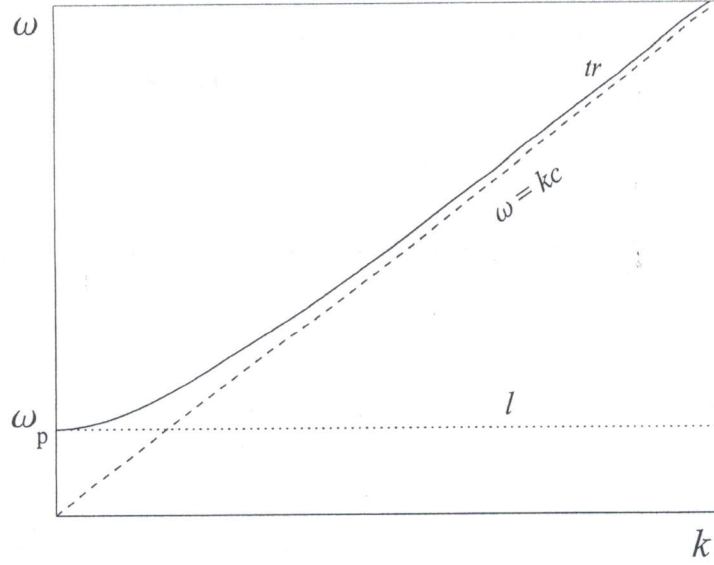


Рис. 1.4: Дисперсионная кривая для поперечных волн.

Согласно формуле (1.30) тензор комплексной диэлектрической проницаемости при этом имеет вид $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$, где

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \quad (1.163)$$

Если частота столкновений мала по сравнению с частотой изменения поля волны ($\nu \ll \omega$), то полученное выражение упрощается

$$\varepsilon(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i \frac{\nu \omega_p^2}{\omega^3}. \quad (1.164)$$

Как видно из формул (1.163), (1.164) при учете диссипативных эффектов тензор диэлектрической проницаемости является комплексным.

1.14 Продольные и поперечные волны в холодной плазме

Ранее в §1.5 было показано, что в изотропной среде могут распространяться поперечные и продольные волны. При этом они удовлетворяют законам дисперсии соответственно (1.44) и (1.46). Посмотрим, какие следствия вытекают из этих формул в случае модели холодной плазмы.

Начнем анализ формулы (1.44), пренебрегая сначала столкновения электронов. Используя соотношения (1.157) и (1.159), найдем закон дисперсии для поперечных волн

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (1.165)$$

На Рис. 1.4 показана зависимость $\omega(k)$ (дисперсионная кривая). Из нее видно, что с увеличением длины волны λ , следовательно, с уменьшением волнового числа частота волны стремится к постоянному значению ω_p . Наоборот с уменьшением длины волны наличие плазмы все меньше сказывается на ее распространении. Волна распространяется почти также, как в вакууме и закон дисперсии (1.165) переходит в $\omega \simeq kc$.

Скорость распространения поверхности, на которой постоянна фаза волны, называется фазовой скоростью. Постоянство фазы означает постоянство величины $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const}$. Если выбрать за ось направление, вдоль которого направлен волновой вектор $\mathbf{k}$, то получим $kx - \omega t = \text{const}$.

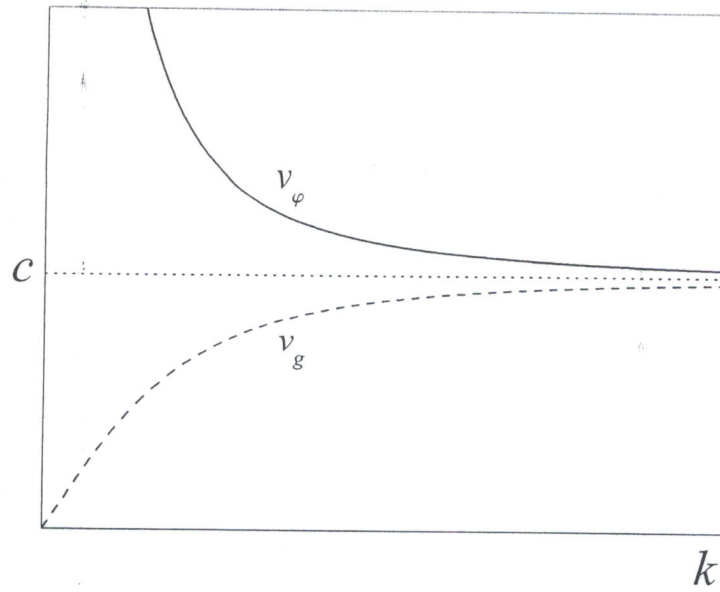


Рис. 1.5: Фазовая скорость поперечной волны в зависимости от волнового числа k .

Это соотношение определяет зависимость координаты поверхности постоянной фазы от времени $x = (\text{const} + \omega t)/k$. Дифференцируя его, найдем

$$\dot{x} = v_\varphi = \frac{\omega}{k}. \quad (1.166)$$

В данном случае поперечных волн из формул (1.166) и (1.165) получаем

$$v_\varphi = \frac{1}{k} \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}. \quad (1.167)$$

На Рис. 1.5 показан график функции v_φ . Видно, что при всех длинах волн фазовая скорость больше скорости света и в пределе $k \rightarrow 0$, $v_\varphi \rightarrow \infty$.

В отличие от фазовой групповая скорость поперечной волны, определяемая формулами (1.64), (1.165), всегда меньше скорости света (см. Рис. 1.5) и равна

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}}. \quad (1.168)$$

Учет столкновений частиц плазмы привел к тому, что у диэлектрической проницаемости появилась мнимая часть. Именно мнимая часть поперечной диэлектрической проницаемости (см. §1.6) определяет затухание волн. При решении начальной задачи это затухание характеризуется декрементом (1.52). Используя эту формулу и выражение (1.164), получим ($\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$)

$$\gamma_{tr}(k) = -\frac{\nu}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 + k^2 c^2}. \quad (1.169)$$

На Рис. 1.6 показана зависимость $|\gamma_{tr}(k)|$. Видно, что с уменьшением длины волны декремент уменьшается. Такого результата следовало ожидать, поскольку с уменьшением длины волны плазма все менее влияет на распространение поперечных волн.

Закон дисперсии для продольных волн (1.46) в пренебрежении столкновениями определяет частоту, которая не зависит от длины волны

$$\omega^2 = \omega_p^2. \quad (1.170)$$

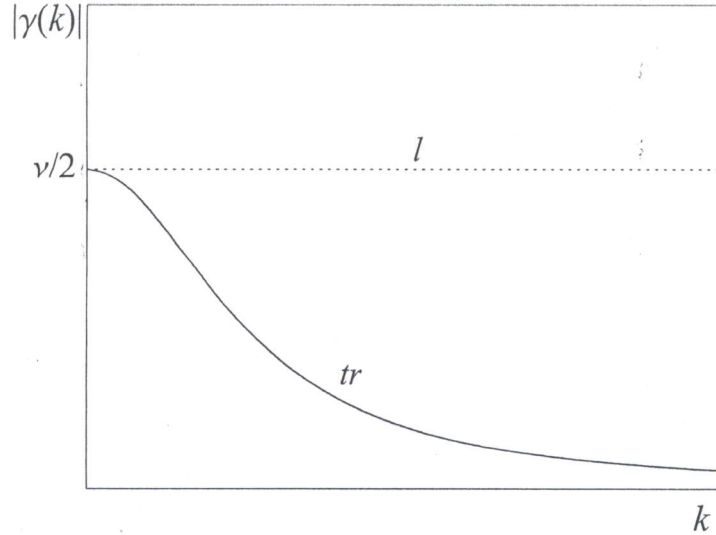


Рис. 1.6: Декремент затухания поперечных (tr) и продольных (l) волн.

В рамках модели холодной плазмы продольные волны с различными длинами имеют одну и ту же частоту. Поэтому часто говорят не о волнах, а о продольных колебаниях электронов и ионов (ленгмюровские колебания). Такие волны имеют нулевую групповую скорость и не переносят энергии. На Рис. 1.4 показан закон дисперсии для продольных волн.

Декремент затухания продольных волн определяется формулой (1.55) и согласно (1.164) равен

$$\gamma_l = -\frac{\nu}{2} \quad (1.171)$$

Как и частота, декремент не зависит от длины волны (см. Рис. 1.6).

1.15 Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле

Для вывода тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле (часто используют термин замагниченная или магнитоактивная плазма) нужно решить уравнение движения частиц сорта α

$$\dot{\mathbf{v}}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} + \zeta_\alpha \omega_{c\alpha} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{b}] - \nu \mathbf{v}_\alpha, \quad (1.172)$$

где $\omega_{c\alpha} = |e_\alpha| B_0 / m_\alpha c$ — циклотронная частота (гирочастота) частиц сорта α (она определяет частоту вращения частицы в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю.), $\zeta_\alpha = |e_\alpha| / e_\alpha$, $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0 / B_0$, $\mathbf{B}_0$ — вектор индукции внешнего магнитного поля. Член $-\nu \mathbf{v}_\alpha$ в уравнении (1.172) учитывает диссипацию.

Как и в §1.13, будем считать, что электрическое поле изменяется по закону $\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0\alpha} - i\omega t}$, где $\mathbf{r}_{0\alpha}$ — начальная координата частиц сорта α . В модели холодной плазмы будем считать что $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0\alpha}} \simeq 1$, так что поле изменяется по закону $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$.

Из уравнений движения видно, что в направлении магнитного поля движение частицы определяется таким же уравнением, как и в отсутствии магнитного поля. Поэтому

$$v_{\parallel} = \frac{ie_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_0) \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\nu}. \quad (1.173)$$

Здесь $v_{\parallel} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_{\alpha})$. Уравнения для поперечных по отношению к направлению магнитного поля $\mathbf{b}$ компонент скорости частицы $\mathbf{V}_1 = [\mathbf{b} \times \mathbf{v}_{\alpha}]$ и $\mathbf{V}_2 = [\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{v}_{\alpha}]] = \mathbf{b}v_{\parallel} - \mathbf{v}_{\alpha}$ связаны между собой. Уравнения для этих величин следуют из исходных уравнений движения:

$$\dot{\mathbf{V}}_1 + \nu \mathbf{V}_1 + \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} \mathbf{V}_2 = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] e^{-i\omega t}, \quad (1.174)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_2 + \nu \mathbf{V}_2 - \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} \mathbf{V}_1 = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0]] e^{-i\omega t}. \quad (1.175)$$

Чтобы найти $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, введем новые искомые величины $\mathbf{V}_{\pm} = \mathbf{V}_1 \pm i\mathbf{V}_2$. Уравнения для этих величин можно найти из (1.174) и (1.175). Для этого умножим уравнение для $\mathbf{V}_2$ на i и сложим (вычтем) с уравнением для $\mathbf{V}_1$. В результате получим

$$\dot{\mathbf{V}}_+ - i(\zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu) \mathbf{V}_+ = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \{[\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] + i[\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0]]\} e^{-i\omega t}, \quad (1.176)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_- + i(\zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} - i\nu) \mathbf{V}_- = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \{[\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] - i[\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0]]\} e^{-i\omega t}. \quad (1.177)$$

Особенность полученных уравнений состоит в том, что каждое из них является уравнением лишь для одной из величин (либо $\mathbf{V}_+$, либо $\mathbf{V}_-$). Будем искать решение в виде $\mathbf{V}_{\pm} = \mathbf{W}_{\pm} e^{-i\omega t}$, где $\mathbf{W}_{\pm}$ -новая искомая величина. После подстановки в уравнения получим

$$\mathbf{V}_+ = \frac{ie_{\alpha}}{m_{\alpha}} \{[\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] + i[\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0]]\} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu}, \quad (1.178)$$

$$\mathbf{V}_- = \frac{ie_{\alpha}}{m_{\alpha}} \{[\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] - i[\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0]]\} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu}. \quad (1.179)$$

Искомая компонента скорости частицы $\mathbf{V}_2$ выражается через $\mathbf{V}_{\pm}$ и равна

$$\mathbf{V}_2 = \frac{e_{\alpha}}{2m_{\alpha}} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{[\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] + i[\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0]]}{\zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + \omega + i\nu} + \frac{[\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] - i[\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0]]}{\zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} - \omega - i\nu} \right\}. \quad (1.180)$$

Отсюда, учитывая соотношение $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{b}v_{\parallel} - \mathbf{V}_2$ окончательно получим:

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \frac{e_{\alpha}}{2m_{\alpha}} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{2i\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_0)}{\omega + i\nu} - \frac{[\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] + i[\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0]}{\omega + \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu} + \frac{[\mathbf{b} \times \mathbf{E}_0] - i[\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0]}{\omega - \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu} \right\}. \quad (1.181)$$

Если известны скорости частиц то можно рассчитать плотность тока $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} \frac{in_{\alpha}e_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \left\{ \frac{2\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{E})}{\omega + i\nu} + \frac{\mathbf{E} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{E}) + i[\mathbf{b} \times \mathbf{E}]}{\omega + \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu} + \frac{\mathbf{E} - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{E}) - i[\mathbf{b} \times \mathbf{E}]}{\omega - \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu} \right\}. \quad (1.182)$$

Сравнивая полученные выражения для плотности тока с определением (1.29), найдем тензор электропроводности для замагниченной холодной плазмы:

$$\sigma_{ij}(\omega) = \sum_{\alpha} \frac{in_{\alpha}e_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} \left(\frac{2b_i b_j}{\omega + i\nu} - \frac{b_i b_j - \delta_{ij} + ie_{ijl} b_l}{\omega + \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu} - \frac{b_i b_j - \delta_{ij} - ie_{ijl} b_l}{\omega - \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu} \right), \quad (1.183)$$

где e_{ijl} -совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга. Если магнитное поле отсутствует ($\omega_{c\alpha} = 0$), то у тензора (1.183) отличны от нуля только диагональные компоненты. Легко убедиться, что в этом пределе тензор $\sigma_{ij}(\omega)$ совпадает с формулой (1.162).

Тензор диэлектрической проницаемости выражается через тензор электропроводности с помощью формулы (1.30) и для замагниченной холодной плазмы имеет следующий вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_1(\omega) \delta_{ij} + \varepsilon_2(\omega) b_i b_j + i\varepsilon_3(\omega) e_{ijl} b_l, \quad (1.184)$$

где введены следующие обозначения

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \frac{\omega + i\nu}{\omega_{c\alpha}^2 - (\omega + i\nu)^2}, \quad (1.185)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu)} \frac{\omega_{c\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2 - (\omega + i\nu)^2}, \quad (1.186)$$

$$\varepsilon_3(\omega) = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \frac{\zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha}}{\omega_{c\alpha}^2 - (\omega + i\nu)^2}. \quad (1.187)$$

В отличие от изотропной плазмы тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле (1.184) является комплексным даже в пренебрежении столкновениями частиц. Однако эта комплексность не связана с затуханием волн. Чтобы в этом убедиться, рассчитаем антиэрмитовскую часть этого тензора $\varepsilon_{ij}^A(\omega)$, которая и определяет потери энергии волны (см. §1.8). Используя формулу (1.184) и определение (1.88), легко проверить, что $\varepsilon_{ij}^A(\omega) = 0$ при $\nu = 0$. Таким образом, тензор (1.184) является эрмитовским в пренебрежении столкновениями частиц.

Следует заметить, что в магнитном поле имеется еще одно ограничение на применимость модели холодной плазмы. Из-за теплового движения в перпендикулярной к направлению магнитного поля плоскости частицы двигаются по кружкам. Средний радиус таких кружков равен $a_{c\alpha} = v_{th,\alpha}/\omega_{c\alpha}$ (ларморовский радиус частиц сорта α), где $v_{th,\alpha}$ — тепловая скорость. Пренебрежение таким движением (циклотронным) частиц оправдано, если величина $a_{c\alpha}$ мала по сравнению с масштабом, на котором изменяется электрическое поле в указанной плоскости.

Общее дисперсионное уравнение (1.36) при использовании тензора (1.184) сводится к равенству нулю определителя

$$\det \|(\varepsilon_1(\omega) - \mathcal{N}^2) \delta_{ij} + \mathcal{N}^2 n_i n_j + \varepsilon_2(\omega) b_i b_j + i\varepsilon_3(\omega) e_{ijl} b_l\| = 0, \quad (1.188)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$, $\mathcal{N} = kc/\omega = c/v_{\varphi}$. Величина $\mathcal{N}$, определяющее отношение скорости света к фазовой скорости волны называется *показателем преломления*. Введем угол распространения волны θ (угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}$). Тогда дисперсионное уравнение (1.188) принимает вид:

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon(\omega) [\mathcal{N}^2 - \varepsilon_-(\omega)] [\mathcal{N}^2 - \varepsilon_+(\omega)]}{[\varepsilon(\omega) - \mathcal{N}^2] [\varepsilon_1(\omega) \mathcal{N}^2 - \varepsilon_-(\omega) \varepsilon_+(\omega)]}. \quad (1.189)$$

Здесь $\varepsilon_{\pm}(\omega) = \varepsilon_1(\omega) \pm \varepsilon_3(\omega)$,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (1.190)$$

$$\varepsilon_-(\omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \frac{1}{\omega + \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu}, \quad (1.191)$$

$$\varepsilon_+(\omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \frac{1}{\omega - \zeta_{\alpha} \omega_{c\alpha} + i\nu}. \quad (1.192)$$

В системе координат где $k_y = 0$ и магнитное поле направлено вдоль оси OZ уравнения поля (1.35) при подстановке явного вида тензора диэлектрической проницаемости (1.184) принимают вид

$$E_x [\varepsilon_1(\omega) - \mathcal{N}^2 \cos^2 \theta] + i\varepsilon_3(\omega) E_y + \mathcal{N}^2 E_z \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (1.193)$$

$$\mathcal{N}^2 E_x \sin \theta \cos \theta + E_z [\varepsilon(\omega) - \mathcal{N}^2 \sin^2 \theta] = 0, \quad (1.194)$$

$$i\varepsilon_3(\omega) E_x + E_y [\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1(\omega)] = 0. \quad (1.195)$$

Напомним, что условием разрешимости этой системы представляет собой дисперсионное уравнение (1.189) электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме.

Из уравнений (1.193)-(1.195) видно, что в магнитоактивной плазме в общем случае продольные и поперечные волны не являются независимыми, как в изотропной плазме. Не распадается на независимые уравнения для продольных и поперечных волн и дисперсионное уравнение (1.189). Как будет показано ниже такой распад, строго говоря, имеет место только в случае чисто продольного (вдоль магнитного поля) распространения волн ($\theta = 0$).

1.16 Распространение волн вдоль магнитного поля

Волны, распространяющиеся в магнитоактивной плазме, в общем случае не являются ни продольными, ни поперечными. Однако имеются два направления распространения (вдоль ($\theta = 0$) и поперек ($\theta = \pi/2$) магнитного поля), когда можно выделить волны с продольной и поперечной поляризацией. Ниже проанализируем этот вопрос в случае отсутствия затухания волн ($\nu = 0$). Если волна распространяется вдоль магнитного поля, то $\theta = 0$ и общее выражение (1.189) существенно упрощается. Тогда дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\varepsilon(\omega) [\mathcal{N}^2 - \varepsilon_-(\omega)] [\mathcal{N}^2 - \varepsilon_+(\omega)] = 0. \quad (1.196)$$

Имеются две возможности для обращения в ноль полученного выражения. Равенство нулю величины $\varepsilon(\omega)$ определяет закон дисперсии для продольных волн. Действительно, из этого равенства следует, что $\omega^2 = \omega_p^2$. Этот результат совпадает с формулой (1.170). В продольных волнах электроны и ионы смещаются вдоль вектора $\mathbf{k}$ и, следовательно, вдоль магнитного поля $\mathbf{B}_0$. На такое движение частиц плазмы магнитное поле не влияет и в рассматриваемом случае продольные волны ничем не отличаются от случая изотропной плазмы. Аналогичный вывод следует также из уравнений (1.193)-(1.195) при $\theta = 0$. В этом случае для компонент электрического поля получим $E_x = E_y = 0$ и $\varepsilon(\omega) E_z = 0$. Поскольку $\varepsilon(\omega) = 0$, то $E_z \neq 0$ и поле является продольным.

Вторая возможность обращения в ноль полученного выражения (1.196) приводит к дисперсионному уравнению для двух типов поперечных волн

$$\mathcal{N}^2 = \varepsilon_{\pm}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \mp \omega_{ci})}. \quad (1.197)$$

В отличие от изотропной плазмы, где поперечные волны были линейно поляризованы, в замагниченной плазме поперечные волны имеют циркулярную (круговую) поляризацию. Дисперсионному соотношению $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_+(\omega)$ соответствует левое направление вращения плоскости поляризации, а соотношению $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_-(\omega)$ - правое. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим структуру поля в волне. Согласно формулам (1.193)-(1.195) между компонентами электрического поля в волне имеется определенная связь. Из этих уравнений следует, что в интересующем нас случае распространения волны вдоль магнитного поля ($\theta = 0$)

$$E_x = \frac{\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_3(\omega)} i E_y, \quad \varepsilon(\omega) E_z = 0. \quad (1.198)$$

Поскольку $\varepsilon(\omega) \neq 0$, следовательно в этих типах волн $E_z = 0$ и они являются чисто поперечными. Согласно закону дисперсии (1.197) выражение $\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1(\omega)$ равно $\pm \varepsilon_3(\omega)$ при $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_+(\omega)$ и $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_-(\omega)$ соответственно и, следовательно, $E_x = \pm i E_y$. Такая связь компонент напряженности электрического поля в волне как раз и определяет ее циркулярную поляризацию. Действительно, введем единичные орты $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ в направлении осей OX и OY и запишем поле волны в действительном виде ($k_x = k_y = 0$, $k = k_z$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re} \left[(\mathbf{e}_x E_{0x} + \mathbf{e}_y E_{0y}) e^{ikz - i\omega t} \right] = \text{Re} \left[(\mathbf{e}_x E_{0x} \mp i \mathbf{e}_y E_{0x}) e^{ikz - i\omega t} \right] \\ &= E_{0x} [\mathbf{e}_x \cos(kz - \omega t) \pm \mathbf{e}_y \sin(kz - \omega t)]. \end{aligned} \quad (1.199)$$

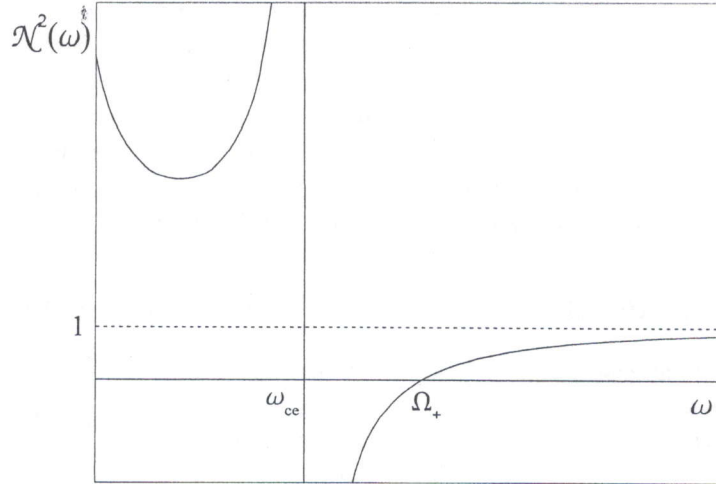


Рис. 1.7: График функции $\mathcal{N}^2(\omega)$ для необыкновенных (с правой круговой поляризацией) волн при $\theta = 0$.

При фиксированных z полный вектор напряженности поля в плоскости XY вращается со временем с частотой ω против (при $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_+(\omega)$) или по часовой стрелке (при $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_-(\omega)$). Если зафиксировать время, то получим, что в пространстве концы вектора напряженности поля лежат на спирали. Поэтому такие волны называют еще спиральными. Для лево-поляризованной волны (с дисперсионным уравнением $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_+(\omega)$) в каждой данной точке вектор напряженности поля вращается против часовой стрелки, а в пространстве концы вектора напряженности поля лежат на спирали с левым вращением.

Рассмотрим теперь более детально дисперсионные уравнения (1.197). Для волны с правым направлением вращения поляризации с дисперсионным уравнением $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_-(\omega)$ (так называемая необыкновенная волна) график функции $\mathcal{N}^2(\omega)$ показан на Рис. 1.7. Если $\mathcal{N}^2(\omega) < 0$, то волновой вектор k является мнимым и волна не может распространяться в плазме. Для того, чтобы распространение волны было возможно необходимо, чтобы волновое число было действительно и $\mathcal{N}^2(\omega) > 0$. Из формулы (1.197) следует, что необыкновенные волны существуют только при условии, что их частота $\omega < \omega_{ce}$ или превышает значение Ω_+ , где $\varepsilon_-(\Omega_+) = \varepsilon_-(-\Omega_-) = 0$,

$$\Omega_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_{ce} - \omega_{ci})^2 + \omega_{ce}\omega_{ci} + \omega_p^2} \pm \frac{1}{2}(\omega_{ce} - \omega_{ci}) \simeq \sqrt{\frac{1}{4}\omega_{ce}^2 + \omega_p^2} \pm \frac{1}{2}\omega_{ce}. \quad (1.200)$$

Частота Ω_+ называется частотой отсечки и необыкновенные волны с частотами $\omega_{ce} < \omega < \Omega_+$ в плазме не распространяются. Закон дисперсии для этих волн особенно прост при $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$, ω_p^2/ω_{ce} , где

$$\mathcal{N}^2(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega\omega_{ce}}, \quad (1.201)$$

и, следовательно,

$$\omega(k) \simeq k^2 c^2 \frac{\omega_{ce}}{\omega_p^2}. \quad (1.202)$$

Чем меньше длина волны, тем больше фазовая скорость таких волн ($\omega/k \sim k \sim \sqrt{\omega}$). Необыкновенные волны в области низких частот ($\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$) называют *свистящими атмосфериками* или *свистами* (в металлах такие волны называются *геликонами*).

Перейдем к лево-поляризованной волне с дисперсионным уравнением $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_+(\omega)$ (так называемая обыкновенная волна). График функции $\mathcal{N}^2(\omega)$ в этом случае показан на Рис. 1.8. Видно, что дисперсионная кривая для лево-поляризованной волны отличается от кривой для волны с правым направлением вектора поляризации тем, что обыкновенная волна не может распространяться в области низких (ионных) частот. В этой области имеется интервал $\omega_{ci} < \omega < \Omega_-$

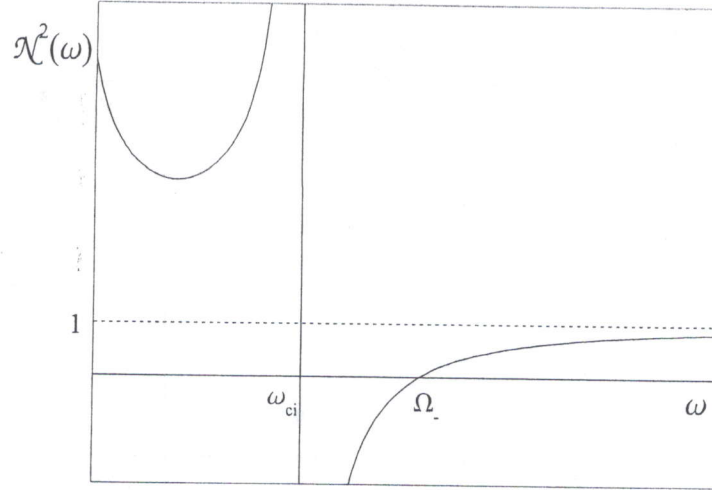


Рис. 1.8: График функции $\mathcal{N}^2(\omega)$ для обыкновенных (с левой круговой поляризацией) волн при $\theta = 0$.

(Ω_- -частота отсечки), где $\mathcal{N}^2(\omega) < 0$. Такое отличие между право- и лево-поляризованными волнами связано с тем, что у первых направление вращения плоскости поляризации совпадает с направлением вращения электрона а у вторых-с направлением вращения иона в магнитном поле. Если при этом совпадают и частоты вращения, то имеет место так называемый циклотронный резонанс ($\mathcal{N}^2 \rightarrow \infty$). В окрестности резонанса необходимо учитывать такие эффекты, которые не включены в рассматриваемую модель (поглощение, релятивизм и т.д.).

Исходя из выражения (1.197) можно представить общий ход кривой $\omega(k)$, если учесть, что при $k \rightarrow \infty$ уравнения $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_-(\omega)$ и $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_+(\omega)$ допускают решения $\omega \rightarrow \omega_{ce}$ и $\omega \rightarrow \omega_{ci}$, соответственно.

Ход кривой $\omega(k)$ для поперечных электромагнитных волн представлен на Рис. 1.9. Видно, что в холодной магнитоактивной плазме существует пять ветвей колебаний, распространяющихся вдоль магнитного поля, причем четыре из них описывают поперечные, а одна-продольные волны. Поперечные волны в области частот $\omega < \omega_{ci}$ называют магнитогидродинамическими, причем ветвь колебаний, которая при $k \rightarrow \infty$ соответствует $\omega \rightarrow \omega_{ci}$, называют альвеновской волной, а ветвь колебаний, которая при $k \rightarrow \infty$, соответствует $\omega \rightarrow \omega_{ce}$, для колебаний в области частот $\omega < \omega_{ci}$ -быстрой магнитозвуковой волной. В области промежуточных частот $\omega_{ci} \ll \omega \ll \omega_{ce}$ поперечная волна представляет собой свистящим атмосфериком с законом дисперсии (1.202). Следует отметить, что все эти колебания в рассматриваемом бесстолкновительном пределе являются незатухающими.

Что же касается решений дисперсионного уравнения для поперечных волн (1.197), то в общем случае они выражаются громоздкими формулами. Простые аналитические выражения для спектров частот этих волн удастся получить лишь в предельных случаях:

$$\omega_{R,L}^2(k) = k^2 V_A^2 \left[1 \pm \frac{k v_A}{\omega_{ci} (1 + v_A^2/c^2)^{3/2}} \right], \quad \omega \ll \omega_{ci} \quad (1.203)$$

$$\omega_{R,L}^2(k) = k^2 c^2 + \omega_p^2 \left(1 \pm \frac{\omega_{ce}}{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_p^2}} \right), \quad \omega \gg \omega_{ce} \quad (1.204)$$

где $V_A^2 = v_A^2/(1 + v_A^2/c^2)$, $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$ -альвеновская скорость, $\rho = n_i m_i + n_e m \simeq n_i m_i$ -массовая плотность плазмы.

Возможность распространения в замагниченной плазме двух типов поперечных волн с различными направлениями вращения плоскости поляризации приводит к интересному и широко

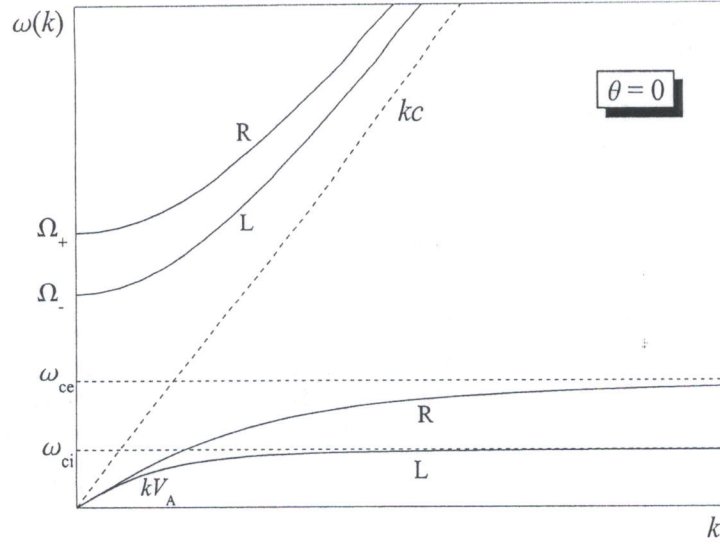


Рис. 1.9: Схематический ход кривой $\omega(k)$ для поперечных волн распространяющихся строго вдоль магнитного поля ($\theta = 0$). Символами R и L показаны право- и лево-поляризованные волны, соответственно.

используемому физическому явлению-вращению плоскости поляризации линейно поляризованной волны (*Фарадеево вращение, эффект Фарадея*). Представим себе, что на слой замагниченной плазмы падает линейно поляризованная волна. Поле в такой волне можно представить как сумму полей двух циркулярно поляризованных волн с одинаковыми амплитудами. В плазме эти волны при одной и той же частоте имеют разные длины и соответственно волновые числа k_R и k_L . Суммарное поле при этом равно

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L = E_0 \left[\mathbf{e}_x (e^{ik_R z} + e^{ik_L z}) + i \mathbf{e}_y (e^{ik_L z} - e^{ik_R z}) \right] e^{-i\omega t}. \quad (1.205)$$

В точке, отстоящей от границы слоя на расстоянии z , отношение компонент поля есть

$$\frac{E_x(z)}{E_y(z)} = -i \frac{e^{ik_R z} + e^{ik_L z}}{e^{ik_L z} - e^{ik_R z}} = -\operatorname{ctg} \frac{\Delta k z}{2}, \quad (1.206)$$

где $\Delta k = k_L - k_R$. Если, скажем, в точке $z = 0$ компонента E_y равна нулю и отношение компонент бесконечно, то, пройдя плазменный слой с толщиной L , отношение станет равно $\cot \alpha$, где

$$\alpha = (k_L - k_R) \frac{L}{2}. \quad (1.207)$$

В относительно слабом магнитном поле ($\omega > \omega_{ce} \gg \omega_{ci}$) из формулы (1.197) получим приближенные выражения для волновых чисел при $\omega > \omega_p$

$$k_L \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)}, \quad k_R \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)}, \quad (1.208)$$

и, следовательно, угол поворота вектора поляризации равен

$$\alpha = \frac{\omega_{ce} L}{2\omega c} \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}. \quad (1.209)$$

Видно, что угол поворота пропорционален напряженности магнитного поля. Измеряя его, можно судить о величине магнитного поля в плазме.

1.17 Распространение волны поперек магнитного поля

Рассмотрим теперь распространение электромагнитных волн в поперечном по отношению к магнитному полю направлении, когда $\theta = \pi/2$ ($k_x \neq 0$, $k_y = k_z = 0$). Из формулы (1.189) получим дисперсионное уравнение

$$[\varepsilon(\omega) - \mathcal{N}^2] [\varepsilon_1(\omega) \mathcal{N}^2 - \varepsilon_-(\omega) \varepsilon_+(\omega)] = 0. \quad (1.210)$$

Обращение в ноль первого сомножителя приводит к закону дисперсии для поперечных волн, полученному ранее для изотропной плазмы

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \mathcal{N}^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (1.211)$$

В этих линейно поляризованных волнах электрическое поле направлено вдоль магнитного $E_x = E_y = 0$, $E_z \neq 0$ а спектр частот этих волн определяется соотношением $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$ (см. выражение (1.165)). Поэтому последнее не влияет на осцилляторное движение электронов и ионов и такие волны принято называть обыкновенными.

Обращение в ноль второго сомножителя в формуле (1.210) позволяет найти закон дисперсии так называемой необыкновенной волны

$$\mathcal{N}^2(\omega) = \frac{\varepsilon_1^2(\omega) - \varepsilon_3^2(\omega)}{\varepsilon_1(\omega)} = \frac{(\omega^2 - \Omega_-^2)(\omega^2 - \Omega_+^2)}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - \omega_{\text{ЛН}}^2)}. \quad (1.212)$$

Здесь $\Omega_{\pm}$ определяются формулой (1.200), ω_H и $\omega_{\text{ЛН}}$ — верхне- и ниже-гибридные частоты, соответственно, удовлетворяющие уравнению $\varepsilon_1(\omega_H) = \varepsilon_1(\omega_{\text{ЛН}}) = 0$. В явном виде они определяются формулой

$$\omega_{\text{Н,ЛН}}^2 = \frac{\omega_{\text{He}}^2 + \omega_{\text{Hi}}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{\text{He}}^2 + \omega_{\text{Hi}}^2)^2}{4} - (\omega_{\text{ce}}^2 \omega_{\text{ci}}^2 + \omega_{\text{pe}}^2 \omega_{\text{ci}}^2 + \omega_{\text{pi}}^2 \omega_{\text{ce}}^2)}, \quad (1.213)$$

где $\omega_{\text{H}\alpha}^2 = \omega_{\text{c}\alpha}^2 + \omega_{\text{p}\alpha}^2$ ($\alpha = e, i$) — верхне-гибридная частота частиц сорта α . Приближенно эти частоты определяются согласно формул:

$$\omega_{\text{H}}^2 \simeq \omega_{\text{ce}}^2 + \omega_{\text{pe}}^2, \quad \omega_{\text{ЛН}}^2 \simeq \omega_{\text{ci}} \omega_{\text{ce}} \frac{\omega_{\text{ce}} \omega_{\text{ci}} + \omega_{\text{pe}}^2}{\omega_{\text{ce}}^2 + \omega_{\text{pe}}^2}. \quad (1.214)$$

В общем случае электронно-ионной плазмы характерные частоты $\Omega_{\pm}$, ω_H и $\omega_{\text{ЛН}}$ удовлетворяют условиям $\omega_{\text{ЛН}} < \Omega_- < \omega_H < \Omega_+$, $\omega_{\text{ЛН}} \ll \omega_H$. График функции $\mathcal{N}^2(\omega)$ схематически показан на Рис. 1.10. Видно, что есть два значения частоты, при котором $\mathcal{N}^2(\omega) \rightarrow \infty$, $\omega = \omega_{\text{ЛН}}$ и $\omega = \omega_H$. При этих частотах имеет место резонанс и рассмотрение его требует уточнения модели холодной плазмы. При $\theta = \pi/2$ необыкновенная волна может распространяться в плазме только в области частот $\omega < \omega_{\text{ЛН}}$, $\Omega_- < \omega < \omega_H$ и $\omega > \Omega_+$.

Для необыкновенных волн распространяющихся поперек магнитному полю $E_z = 0$ (см. уравнения (1.193)-(1.195)) и, следовательно, вектор поляризации перпендикулярен к магнитному полю. Но в общем случае нельзя сказать, что волна является поперечной или продольной. Однако при определенных частотах соотношения между компонентами напряженности электрического поля в волне E_x и E_y таковы, что приближенно можно говорить о продольных и поперечных волнах. Из уравнений (1.193)-(1.195) получим точное соотношение между E_x и E_y :

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{i \varepsilon_1(\omega)}{\varepsilon_3(\omega)} = i \frac{(\omega^2 - \omega_{\text{H}}^2)(\omega^2 - \omega_{\text{ЛН}}^2)}{\omega(\omega_{\text{pe}}^2 \omega_{\text{ce}} - \omega_{\text{pi}}^2 \omega_{\text{ci}})}. \quad (1.215)$$

Так, в области очень высоких частот ($\omega \gg \omega_H$) или в области очень низких частот ($\omega \ll (\omega_H \omega_{\text{ЛН}})^2 / \omega_{\text{pe}}^2 \omega_{\text{ce}} \sim \omega_{\text{ci}}$), $E_y \gg E_x$ и волна имеет поляризацию, близкую к поперечной. В окрестности циклотронной частоты ($\omega \sim \omega_{\text{ce}}$) $E_x \simeq i E_y$. Если же частота близка к ниже- или выше-гибридной, $\omega \sim \omega_{\text{ЛН}}$, $\omega \sim \omega_H$, то $E_x \gg E_y$ и волна является квазипродольной.

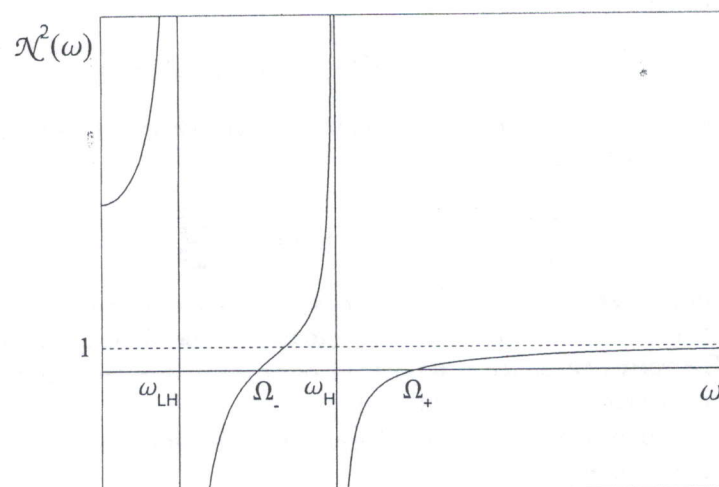


Рис. 1.10: График функции $\mathcal{N}^2(\omega)$ для необыкновенных волн при $\theta = \pi/2$.

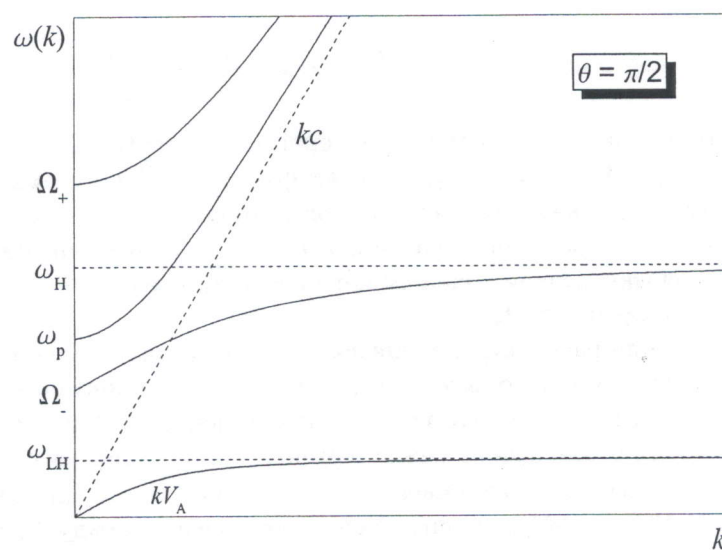


Рис. 1.11: Схематический ход кривой $\omega(k)$ для необыкновенных волн распространяющихся строго поперек магнитному полю ($\theta = \pi/2$).

Простые аналитические соотношения для спектров частот необыкновенной волны удается получить в предельных случаях:

$$\omega^2(k) = \omega_{\text{ЛН}}^2 \frac{k^2 c^2}{k^2 c^2 + \Omega_-^2 \Omega_+^2 / \omega_{\text{Н}}^2}, \quad \omega \ll \Omega_- \quad (1.216)$$

$$\omega^2(k) = \frac{1}{2} \left[\omega_{\text{се}}^2 + 2\omega_{\text{ре}}^2 + k^2 c^2 \pm \sqrt{4\omega_{\text{се}}^2 \omega_{\text{ре}}^2 + (k^2 c^2 - \omega_{\text{се}}^2)^2} \right], \quad \omega \gg \omega_{\text{ЛН}} \quad (1.217)$$

$$\omega^2(k) = k^2 V_A^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2 / c^2}, \quad \omega \ll \omega_{\text{ЛН}} \quad (1.218)$$

Учитывая формулы (1.216)-(1.218), а также замечая, что при $k \rightarrow \infty$ уравнение (1.212) имеет предельные решения $\omega \rightarrow \omega_{\text{ЛН}}$ и $\omega \rightarrow \omega_{\text{Н}}$ легко представить общий ход дисперсионных кривых $\omega(k)$, который приведен на Рис. 1.11. Из рисунка видно, что число ветвей колебаний, распространяющихся строго поперек магнитного поля в холодной бесстолкновительной плазме, равно четырем, причем одна из них описывает чисто поперечные волны (ветвь с $\omega = \omega_p$ при $k = 0$), а остальные три-продольно-поперечные волны. Колебания с частотой $\omega < \omega_{\text{ЛН}}$ в этом случае соответствуют магнитогидродинамической волне, распространяющейся поперек магнитного поля; отсутствуют колебания, соответствующие альвеновской ветви.

1.18 Одножидкостная модель плазмы

Другой моделью для описания плазмы является модель электронной жидкости (одножидкостная модель плазмы). В этой модели ионы плазмы предполагаются неподвижными, а электроны рассматриваются как заряженная жидкая среда. Состояние ее характеризуется заданием ряда параметров-концентрации $n_e(\mathbf{r}, t)$, плотности $\rho_e(\mathbf{r}, t) = m n_e(\mathbf{r}, t)$, скорости течения жидкости $\mathbf{v}_e(\mathbf{r}, t)$, температуры $T_e(\mathbf{r}, t)$. Электронная жидкость взаимодействует с ионами через коллективные электрические ($\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$) и магнитные ($\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$) поля. Все эти величины зависят от координат и времени.

Уравнения, описывающие движение электронной жидкости, устанавливают связь между изменением указанных величин. Скорость и плотность связаны уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}(\rho_e \mathbf{v}_e) = 0. \quad (1.219)$$

Это уравнение учитывает, что изменение плотности электронной жидкости в данной точке со временем возникает из-за того, что электронная жидкость втекает (вытекает) в данную точку. Возникновение электронов из-за ионизации или исчезновение из-за рекомбинации при этом не учитывается. Вместо уравнения для плотности обычно пишут уравнение для концентрации

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{v}_e) = 0. \quad (1.220)$$

Второе уравнение одножидкостной гидродинамики определяет, как изменяется скорость течения электронной жидкости в данной точке со временем под действием различных факторов ($-e$ -заряд электрона, $-en_e(\mathbf{r}, t)$ -есть плотность заряда)

$$\rho_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -en_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] \right) - \nabla p_e - \rho_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e. \quad (1.221)$$

Изменение импульса единицы объема жидкости связано с действием сил электрического поля (первое слагаемое справа) с действием сил магнитного поля (второе слагаемое), сил теплового давления (третье слагаемое, где $p_e(\mathbf{r}, t)$ -давление), перетеканием жидкости из соседних точек в данную (последнее слагаемое).

Реально, конечно, электроны не являются жидкостью, а представляют из себя идеальный газ. Но уравнения гидродинамики сохраняют силу и в случае газа. При этом для уравнения состояния справедливо соотношение $p_e = n_e T_e$ (температура T_e измеряется в единицах энергии и постоянная Больцмана опускаем).

Вероятно, имеет смысл сделать некоторые разъяснения относительно последнего слагаемого в уравнении движения (1.221) (часто его называют уравнением Эйлера). Рассмотрим два элемента объема, отстоящие на расстоянии $\Delta \mathbf{r}$ друг от друга. Скорость течения жидкости в этих объемах в момент времени t равна $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}, t)$. Рассмотрим, как изменяется скорость течения в точке $\mathbf{r}$ через время Δt . Это изменение равно:

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} \simeq - \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (1.222)$$

Переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$, получим изменение скорости жидкости в единицу времени (ускорение), которое и входит в уравнение движения (1.221).

Обычно уравнение движения записывают в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] \right) - \frac{T_e}{m} \nabla (\ln n_e). \quad (1.223)$$

Температура электронов при этом принята постоянной и не зависящей от координат. С одной стороны это допущение представляется достаточно разумным, поскольку столкновения не учитываются и длина свободного пробега электронов бесконечна. С другой стороны, само введение температуры предполагает наличие столкновений. В этом месте имеется определенная непоследовательность данной модели и поэтому часто ее называют не гидродинамической, а квазигидродинамической.

Для того, чтобы рассмотреть вопрос о том, какие волны могут распространяться в электронной жидкости, нужно определить сначала то состояние, в котором находится плазма в отсутствии волн. Это состояние называют *основным* (или *невозбужденным*) состоянием. Будем считать, что в основном состоянии в плазме нет электрических и магнитных полей, концентрация электронов постоянна и однородна (n_{e0}) и электронная жидкость неподвижна. Кроме этого примем, что в каждой точке отсутствует электрический заряд (плазма нейтральна) и выполнено условие $-en_{e0} + e_i n_{i0} = 0$ (e_i -заряд одного иона, n_{i0} -концентрация ионов). Если $e_i \doteq Ze$ (Z -зарядовое число ионов), то из условия нейтральности следует $n_{e0} = Zn_{i0}$.

Рассмотрим малые отклонения от основного состояния (возбуждения, возмущения). Пусть эти отклонения сопровождаются изменением концентрации электронов $\delta n_e(\mathbf{r}, t)$, появлением скорости $\delta \mathbf{v}_e$ течения и электрических и магнитных полей ($\delta \mathbf{E}$, $\delta \mathbf{B}$). Температуру будем считать постоянной. Подставим все величины в уравнения (1.220) и (1.223)

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_{e0} + \delta n_e) + \text{div} [(n_{e0} + \delta n_e) \delta \mathbf{v}_e] = 0, \quad (1.224)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\delta \mathbf{v}_e \cdot \nabla) \delta \mathbf{v}_e = -\frac{e}{m} \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\delta \mathbf{v}_e \times \delta \mathbf{B}] \right) - \frac{T_e}{m} \frac{\nabla (n_{e0} + \delta n_e)}{n_{e0} + \delta n_e}. \quad (1.225)$$

Отбросим слагаемые, равные нулю. Считая все отклонения от основного состояния малыми, учтем только линейные по этим возмущениям слагаемые, а квадратичные отбросим. В оставшейся системе уравнений будем считать, что все величины зависят от координат и времени по закону $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$. Как уже обсуждалось ранее в §1.3, закон изменения соответствует бегущей в электронной жидкости волне. В результате дифференцирования получим

$$-i\omega \delta n_e + i(\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_e) n_{e0} = 0, \quad (1.226)$$

$$-i\omega \delta \mathbf{v}_e = -\frac{e}{m} \delta \mathbf{E} - \frac{v_{th}^2}{n_{e0}} i\mathbf{k} \delta n_e, \quad (1.227)$$

где введено обозначение $v_{th}^2 = v_{th,e}^2 = T_e/m$. Величину v_{th} принято называть *тепловой скоростью* электронов. Исключим из двух уравнений величину δn_e и получим для определения компонент вектора $\delta \mathbf{v}_e$ уравнение

$$T_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \delta v_{e,j}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{ie}{m\omega} \delta E_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.228)$$

где

$$T_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2}. \quad (1.229)$$

Если не учитывать теплового давления ($v_{th}^2 = 0$), то $\delta \mathbf{v}_e \parallel \delta \mathbf{E}$ и движение электронной жидкости происходит в направлении электрического поля. Учет теплового давления ведет к тому, что появляется дополнительное смещение у жидкости, направленное не вдоль поля, а вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$, характеризующего направление неоднородности концентрации электронов.

Для того, чтобы найти компоненты скорости $\delta \mathbf{v}_e$, надо находить обратный тензор T_{ij}^{-1} (см. Приложение А). Используя формулу (А.7), запишем

$$T_{ii}^{-1} = \delta_{ii} + \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2 - k^2 v_{th}^2} \frac{k_i k_i}{k^2}. \quad (1.230)$$

В результате для компонент вектора скорости находим

$$\delta v_{e,i}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{ie}{m\omega} \left(\delta_{ij} + \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2 - k^2 v_{th}^2} \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \delta E_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.231)$$

Видно, что наряду с движением жидкости вдоль поля возникает движение вдоль волнового вектора. Плотность электронного тока связана в линейном приближении со скоростью течения жидкости соотношением

$$\delta \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = -en_{e0} \delta \mathbf{v}_e(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.232)$$

или

$$\delta j_i(\mathbf{k}, \omega) = \frac{in_{e0}e^2}{m\omega} \left(\delta_{ij} + \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2 - k^2 v_{th}^2} \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \delta E_j(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \delta E_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.233)$$

Отсюда находим тензор электропроводности в гидродинамической модели

$$\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{in_{e0}e^2}{m\omega} \left(\delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2 - k^2 v_{th}^2} \right). \quad (1.234)$$

Для определения тензора диэлектрической проницаемости используем формулу (1.30)

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \delta_{ij} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2 - k^2 v_{th}^2} \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (1.235)$$

Если сравнить этот тензор с общим выражением (1.41), справедливым в любой изотропной среде, то найдем

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{th}^2 - \omega^2}, \quad \varepsilon_{tr}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (1.236)$$

Воспользуемся выражениями (1.236) для исследования законов дисперсии волн. Поскольку выражение для ε_{tr} совпадает с полученным в модели холодной плазмы (сравни с (1.157)), то для поперечных волн сохраняются старые результаты.

Из закона дисперсии для продольных волн (1.46) с помощью (1.236) находим

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 v_{th}^2. \quad (1.237)$$

Основное отличие от результата (1.170) состоит в том, что теперь частота ω зависит от волнового числа k . При этом групповая скорость для ленгмюровских волн отлична от нуля и равна

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{k v_{th}^2}{\sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 v_{th}^2}}. \quad (1.238)$$

Из последней формулы видно, что фазовые скорости ленгмюровских волн больше, чем тепловые скорости частиц, а групповые-меньше.

Представление о тепловом давлении можно использовать, если за период изменения поля в волне частица при своем тепловом движении смещается на расстояние, малое по сравнению с длиной волны ($v_{th}/\omega < 1/k$). Поскольку частота близка к ленгмюровской, то это неравенство принимает вид $kv_{th} < \omega_{pe}$ или $k\lambda_{De} < 1$, где $\lambda_{De} = v_{th}/\omega_{pe}$ -Дебаевский радиус для электронов. Таким образом, полученные результаты справедливы для волн, длина которых превосходит дебаевский радиус.

1.19 Двухжидкостная гидродинамика. Ионный звук

До сих пор ионы плазмы считались неподвижными. Это предположение кажется достаточно естественным в связи с большой массой ионов. Однако при медленных движениях в низкочастотных волнах произойдет и смещение ионов. Это смещение можно учесть, если считать, что плазма представляет смесь двух жидкостей-электронной и ионной. Каждая жидкость движется со своей скоростью и имеет свою плотность, а взаимодействие между ними осуществляется через коллективные электрические и магнитные поля.

Уравнения двухжидкостной гидродинамики содержат помимо уравнений для электронной жидкости (1.220) и (1.223) аналогичные уравнения и для ионной жидкости

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i = \frac{e_i}{m_i} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] \right) - \frac{v_{th,i}^2}{n_i} \nabla n_i. \quad (1.239)$$

Здесь n_i -концентрация ионов, $\mathbf{v}_i$ -скорость течения ионной жидкости, $v_{th,i}^2 = T_i/m_i$, T_i -температура ионов, $v_{th,i}$ -тепловая скорость ионов. Следует отметить, что в плазме часто выполняется условие $T_e \gg T_i$ (неизотермическая плазма). Это связано с тем, что обычно нагреваются более эффективно электроны, а обмен энергией между электронами и ионами происходит весьма медленно из-за большой разницы в массах.

Как видно из предыдущего параграфа, основные отличия между результатами одночастичной и двухжидкостной моделей возникают для продольных волн. Поэтому рассмотрим на базе двухжидкостной гидродинамики только продольные волны. Как известно (см. §1.5), для получения закона дисперсии продольных волн можно воспользоваться потенциальностью их поля ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$) и уравнением

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi(-en_e + e_i n_i). \quad (1.240)$$

Рассмотрим снова вопрос о малых возмущениях основного состояния нейтральной плазмы, в которой справедливо соотношение $n_{e0} = Zn_{i0}$. Будем характеризовать возмущение величинами δn_e , $\delta \mathbf{v}_e$, δn_i , $\delta \mathbf{v}_i$ и $\delta \mathbf{E}$. Из уравнений двухжидкостной гидродинамики в линейном приближении получим:

$$\frac{\partial \delta n_e}{\partial t} + n_{e0} \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_e = 0, \quad \frac{\partial \delta \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m} \delta \mathbf{E} - \frac{v_{th,e}^2}{n_{e0}} \nabla \delta n_e, \quad (1.241)$$

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + n_{i0} \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_i = 0, \quad \frac{\partial \delta \mathbf{v}_i}{\partial t} = \frac{e_i}{m_i} \delta \mathbf{E} - \frac{v_{th,i}^2}{n_{i0}} \nabla \delta n_i. \quad (1.242)$$

Эти, казалось бы, две независимые системы уравнений связаны через общее электрическое поле $\delta \mathbf{E}$, для которого имеет место уравнение

$$\operatorname{div} \delta \mathbf{E} = 4\pi(-e\delta n_e + e_i \delta n_i). \quad (1.243)$$

Положим, что возмущение распространяется в плазме в виде волны и все величины пропорциональны $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$. Кроме этого вместо поля используем потенциал $\delta\varphi$ ($\delta \mathbf{E} = -\nabla\delta\varphi$). В результате получим для возмущений плотности (концентрации)

$$\delta n_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \frac{n_{\alpha 0} e_\alpha}{m_\alpha} \delta\varphi(\mathbf{k}, \omega) \frac{k^2}{\omega^2 - k^2 v_{th,\alpha}^2}, \quad (1.244)$$

где $\alpha = e, i$, $e_\alpha = e_i$ и $e_\alpha = -e$ для ионов и электронов, соответственно. Подставив эти выражения в уравнение для поля, найдем закон дисперсии продольных волн в электронно-ионной жидкости

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{th,e}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{th,i}^2 - \omega^2}. \quad (1.245)$$

Видно, что вклад электронов и ионов входит в диэлектрическую проницаемость аддитивно. При $m_i \rightarrow \infty$ вклад от ионов исчезает и из (1.245) получаем результат (1.236).

Уравнение $\varepsilon_l(k, \omega) = 0$ с выражением (1.245) является биквадратным и допускает точное решение:

$$\omega^2(k) = \frac{1}{2} \left[\omega_p^2 + k^2 v_{th}^2 \pm \sqrt{(\omega_p^2 + k^2 v_{th}^2)^2 - 4k^2 v_{th,e}^2 v_{th,i}^2 (k^2 + k_D^2)} \right]. \quad (1.246)$$

Здесь $\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \simeq \omega_{pe}^2$, $v_{th}^2 = v_{th,e}^2 + v_{th,i}^2 \simeq v_{th,e}^2$, $k_D^2 = k_{De}^2 + k_{Di}^2$, $k_{D\alpha} = 1/\lambda_{D\alpha}$ ($\alpha = e, i$), $\lambda_{D\alpha}$ -Дебаевский радиус частиц сорта α . Кроме того, рассмотрим приближенные решения дисперсионного уравнения в разных областях скоростей волн. Это позволяет нам более наглядно и просто получить результаты.

Начнем с быстрых волн, фазовая скорость которых намного больше тепловых скоростей ионов и электронов ($\omega \gg kv_{th,e} \gg kv_{th,i}$). В этом пределе из (1.245) получаем $\omega^2 = \omega_p^2$. Это есть частота Ленгмюровских колебаний, в выражении для которой присутствует не только вклад от электронов, но и малый вклад от ионов. Результат этот находится в соответствии с результатом одночастичной модели.

Рассмотрим более медленные волны с фазовыми скоростями, превышающими ионные тепловые скорости, но малыми по сравнению с электронными тепловыми скоростями ($kv_{th,e} \gg \omega \gg kv_{th,i}$). Решение уравнения (1.245) в этом случае имеет вид

$$\omega^2(k) = \omega_{pi}^2 \frac{(k\lambda_{De})^2}{(k\lambda_{De})^2 + 1}. \quad (1.247)$$

Эти волны связаны с движением ионов и в пределе $m_i \rightarrow \infty$ они исчезают. Их называют *ионным звуком*. Такое название имеет под собой определенное основание. Дело в том, что для обычного звука в газах закон дисперсии подобен закону дисперсии (1.247) в пределе длинных волн ($k\lambda_{De} < 1$). Для того, чтобы убедиться в этом, перепишем формулу (1.247) в другом виде

$$\omega^2(k) = \frac{k^2 v_s^2}{k^2 \lambda_{De}^2 + 1}. \quad (1.248)$$

Возникшую в числителе величину

$$v_s = \omega_{pi} \lambda_{De} = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_{e0} e^2} \frac{4\pi n_{i0} e_i^2}{m_i}} = \sqrt{\frac{Z T_e}{m_i}} \quad (1.249)$$

называют ионно-звуковой скоростью. На Рис. 1.12 показан закон дисперсии ионно-звуковых волн. Для волн с достаточно большой длиной ($k\lambda_{De} \ll 1$) закон дисперсии практически линейный $\omega = kv_s$, как и для обычного звука в газах.

Обсудим вопрос о том, когда могут существовать ионно-звуковые волны. Для этого вернемся к условию $kv_{th,e} \gg \omega \gg kv_{th,i}$. Если длины ионно-звуковых волн достаточно большие ($k\lambda_{De} < 1$), то отсюда получим $(m_i/m)T_e > ZT_e > T_i$. Обычно зарядовое число ионов Z составляет единицы и для существования ионно-звуковых волн необходима неизотермическая плазма ($T_e > T_i$). Для коротких длин волн ($k\lambda_{De} > 1$) частота близка к ионной ленгмюровской частоте ($\omega = \omega_{pi}$). При этом условии $\omega > kv_{th,i}$ сводится к $k\lambda_{Di} < 1$. Совместно с требованием $k\lambda_{De} > 1$ это приводит к условию $\lambda_{De} > \lambda_{Di}$, которое выполняется только при $ZT_e > T_i$. Таким образом, и в этом случае требуется неизотермическая плазма.

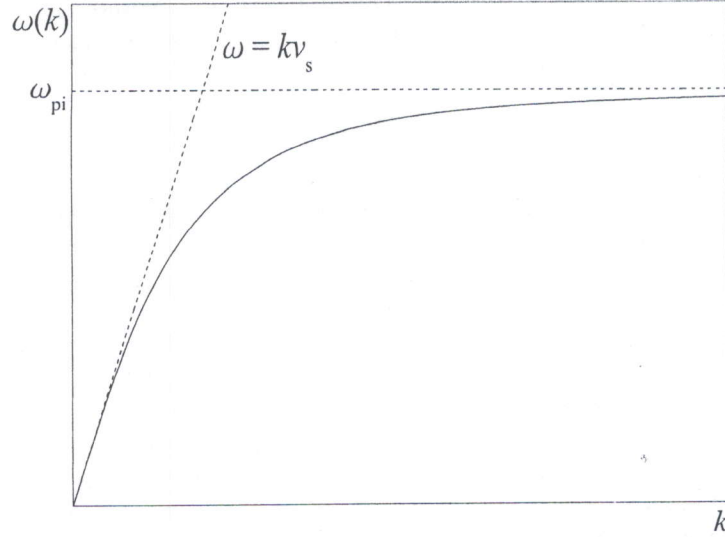


Рис. 1.12: Спектр ионно-звуковых колебаний в электронно-ионной неизотермической плазме.

Обсудим еще вопрос об относительной величине возмущений электронной и ионной концентраций в ионно-звуковых волнах. Используя приведенные выше выражения для δn_e и δn_i , запишем их отношение

$$\frac{\delta n_e}{\delta n_i} = \frac{n_{e0} m_i e \omega^2 - k^2 v_{th,i}^2}{n_{i0} m e_i k^2 v_{th,e}^2 - \omega^2} \simeq \frac{m_i}{m} \frac{\omega^2}{k^2 v_{th,e}^2}. \quad (1.250)$$

Если звук длинноволновый ($\omega \simeq k v_s$), то $\delta n_e / \delta n_i \simeq Z$. При $Z \sim 1$ возмущения концентраций электронов и ионов одного порядка. Если звук коротковолновый ($k \lambda_{De} > 1$ и $\omega \simeq \omega_{pi}$), то

$$\frac{\delta n_e}{\delta n_i} \simeq \frac{m_i}{m} \frac{4\pi n_{i0} e_i^2}{m_i k^2 v_{th,e}^2} = \frac{Z \omega_{pe}^2}{k^2 v_{th,e}^2} = \frac{Z}{k^2 \lambda_{De}^2} < 1. \quad (1.251)$$

В этом случае возмущения ионной концентрации намного превышают возмущения концентрации электронов.

Для лучшего понимания причин, по которым оказываются возможными ионно-звуковые волны в плазме, рассмотрим Рис. 1.13. Если в плазме возникло возмущение ионной плотности, то на электроны начнет действовать поле разделения зарядов и возникнет возмущение плотности электронов. Но электроны при $T_e > T_i$ имеют большее значение. Сила давления всегда стремится выровнять плотность, сделать ее однородной. Но из-за поля разделения зарядов эта сила действует и на ионы. Электроны не могут выровнять свою плотность не перераспределив ионы. Возникает волна, в которой силы электронного давления действуют на ионы. В случае больших длин волн и низких частот обе плотности двигаются почти вместе (Рис. 1.13). В случае же коротких волн электроны возмущаются слабо, поле разделения зарядов значительно больше. В основном происходят возмущения плотности ионов.

1.20 Токовая (Бюнемановская) неустойчивость

Рассмотренные до сих пор основные состояния плазмы были таковы, что малые возмущения распространялись в виде волн и не нарастали. Такие состояния плазмы называются *устойчивыми*. Если же малое отклонение от основного состояния (возмущение) растет и система (плазма) все больше отходит от начального основного состояния, то говорят о *неустойчивости*. Имеется разветвленная классификация неустойчивостей. Один из методов классификации — указание основной особенности неравновесного основного состояния плазмы (токовые, потоковые, дрейфовые,

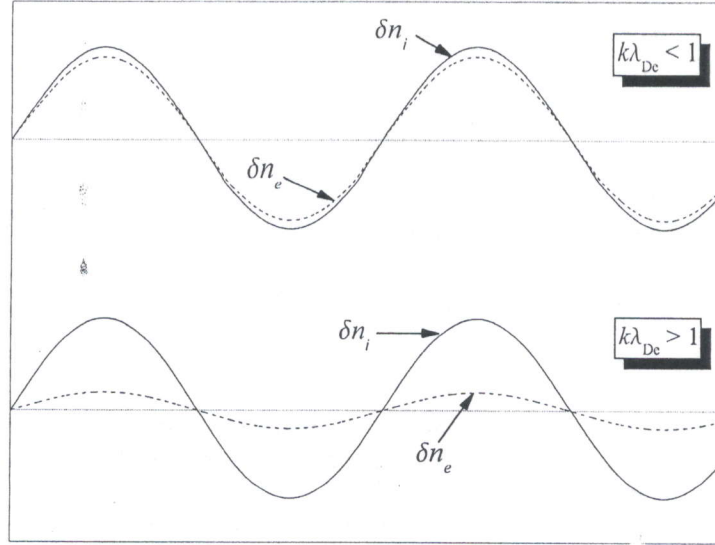


Рис. 1.13: Схематическое изображение возмущений электронной (δn_e) и ионной (δn_i) плотностей.

анизотропия температуры, параметрические и т.д.). Другой метод—указание характера развития возмущений со временем (апериодические, осцилляторные и т.д.). Третий метод—указание роли отдельных частиц (гидродинамические, кинетические). Четвертый метод—указание эволюции возмущения во времени и пространстве (абсолютные, конвективные).

Рассмотрим одну из наиболее широко известных и часто встречающихся неустойчивостей, так называемую *токовую неустойчивость*. Она была открыта в 1959 году Бюнемом (поэтому ее часто называют *Бюнемановской неустойчивостью*).

Пусть в плазме движется пучок заряженных частиц с постоянной скоростью $\mathbf{u}$ и невозмущенной плотностью n_{b0} и, следовательно, по плазме течет ток. Будем характеризовать основное состояние плазмы концентрациями частиц (n_{b0} , $n_{\alpha 0}$, $\alpha = e, i$) и скоростью пучка $\mathbf{u}$. Рассмотрим малые отклонения от этого основного состояния. Из уравнений (1.220), (1.223) и (1.239) для электронов, ионов и частиц пучка получим

$$\frac{\partial \delta n_b}{\partial t} + n_{b0} \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_b + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta n_b = 0, \quad (1.252)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}_b}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{v}_b = -\frac{e_b}{m_b} \nabla \delta \varphi - \frac{v_{th,b}^2}{n_{b0}} \nabla \delta n_b, \quad (1.253)$$

$$\frac{\partial \delta n_\alpha}{\partial t} + n_{\alpha 0} \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad \frac{\partial \delta \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \nabla \delta \varphi - \frac{v_{th,\alpha}^2}{n_{\alpha 0}} \nabla \delta n_\alpha. \quad (1.254)$$

Если положить, что все возмущения зависят от координат и времени по закону $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$, то из уравнений для возмущений получим

$$\delta n_b = n_{b0} \frac{\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_b}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}}, \quad \delta \mathbf{v}_b = \frac{\mathbf{k}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}} \left(\frac{e_b}{m_b} \delta \varphi + \frac{v_{th,b}^2}{n_{b0}} \delta n_b \right), \quad (1.255)$$

$$\delta n_\alpha = n_{\alpha 0} \frac{\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{v}_\alpha}{\omega}, \quad \delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \delta \varphi + \frac{v_{th,\alpha}^2}{n_{\alpha 0}} \delta n_\alpha \right). \quad (1.256)$$

Видно, что все отличие от случая неподвижных электронов и ионов состоит в том, что в уравнениях для пучка вместо ω входит величина $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$. Поэтому легко догадаться, что дисперсионное уравнение, в котором вклад от различных сортов частиц (электронов, ионов и частиц пучка) входит аддитивно, отличается от (1.245) добавлением слагаемого пропорционального

$\omega_b^2 = 4\pi n_{b0} e_b^2 / m_b$ (плазменная частота пучка) и заменой ω на $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$,

$$1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2 - k^2 v_{th,b}^2} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 v_{th,\alpha}^2} = 0. \quad (1.257)$$

Следует заметить, что замена ω на $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$ связана с эффектом Допплера. Если имеется волна с частотой ω и $\mathbf{k}$ и среда (пучок частиц) смещается со скоростью $\mathbf{u}$, то в лабораторной системе частота волны изменится и станет $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$. Так, например, в случае бесконечной массы ионов и электронов ($\omega_{p\alpha} = 0$) и в пренебрежении тепловым давлением из дисперсионного уравнения следует

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \pm \omega_b. \quad (1.258)$$

Если $\mathbf{u} = 0$, то решению $\omega = +\omega_b$ отвечает пространственно-временная зависимость $e^{ikx - i\omega_b t}$, которая соответствует волне, идущей слева направо. Если же взять решение $\omega = -\omega_b$, то получим волну, идущую справа налево.

Если имеется поток заряженных частиц (пучок), то поле волны, идущей в направлении потока, есть $e^{ikx - i(\omega_b + ku)t}$ и частота волны возрастает. Если же волна идет навстречу потоку, то поле в ней изменяется по закону $e^{i(\omega_b - ku)t + ikx}$ и частота падает. При выполнении условия $\omega_b = ku$ волна останавливается и ее поле относительно лабораторной системы изменяется только в пространстве, но не изменяется со временем.

Рассмотрим теперь решение дисперсионного уравнения (1.257). Будем считать, что фазовые скорости волн большие в собственной системе $|\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}| > kv_{th,b}$, $|\omega| > kv_{th,\alpha}$. Пренебрежем тепловым движением и тепловым давлением частиц. В результате получим

$$1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0. \quad (1.259)$$

Если скорость движения пучка мала ($|\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}| < |\omega|$), то из уравнения (1.259) следует закон дисперсии ленгмюровских волн. Если наоборот скорость течения большая ($|\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}| > |\omega|$), то получим

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_b^2 / (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2}. \quad (1.260)$$

Видно, что при $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}| < \omega_b$, $\omega^2 < 0$ и решение для ω чисто мнимое. В этом случае возмущение нарастает со временем экспоненциально и $\text{Im } \omega = \gamma$ определяет инкремент:

$$\gamma(k) = \omega_p \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})}{\sqrt{\omega_b^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2}}. \quad (1.261)$$

Поскольку $\text{Re } \omega = 0$, то говорят, что неустойчивость является аperiодической.

При $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \rightarrow \omega_b$ согласно полученной формуле $\gamma \rightarrow \infty$. Но при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \omega_b$ нарушается условие $|\omega| < |\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}|$ и решение уравнения требует уточнения. Положим, что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \omega_b$ и $|\omega| \ll \omega_b$. Тогда из уравнения (1.259) найдем

$$\omega_1 = -\frac{1}{2^{1/3}} \omega_p \left(\frac{\omega_b}{\omega_p} \right)^{1/3}, \quad \omega_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \left(\frac{\omega_b}{\omega_p} \right)^{1/3}. \quad (1.262)$$

Мнимая часть частоты, характеризующая инкремент, равна

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \left(\frac{\omega_b}{\omega_p} \right)^{1/3}. \quad (1.263)$$

Таким образом, при $\omega_b > \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$, $\gamma \simeq (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) (\omega_p / \omega_b)$. При $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \sim \omega_b$ инкремент достигает максимума и равен (1.263). Заметим, что полученные выражения (1.261)-(1.263) справедливы для плотных пучков, для которых $\omega_b \gg \omega_p$.

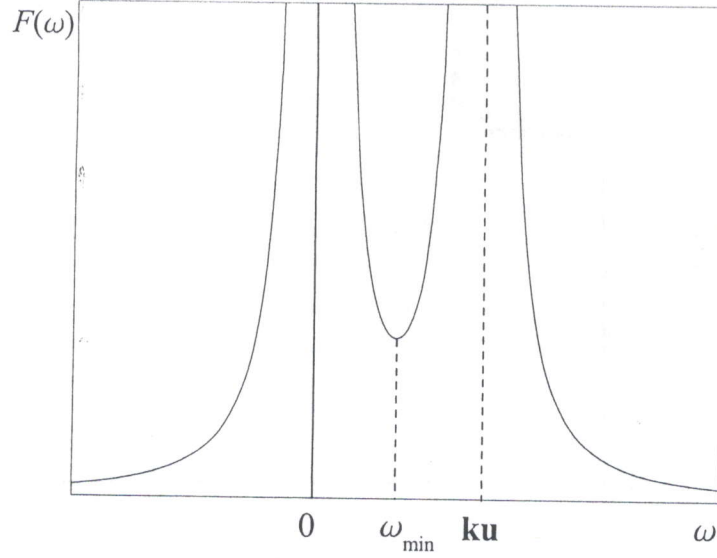


Рис. 1.14: Схематическое изображение функции $F(\omega)$, см. выражение (1.264).

Для общего анализа дисперсионного уравнения (1.259) при произвольных значениях величины ω_b/ω_p рассмотрим вспомогательную функцию:

$$F(\omega) = \frac{\omega_b^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (1.264)$$

Эта функция везде положительна и в точке $\omega = \omega_{\min} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) / (\xi + 1)$ (где $\xi = (\omega_b/\omega_p)^{2/3}$) имеет минимум (см. Рис. 1.14), значение которого равно $F_{\min} = \omega_{\text{cr}}^2 / (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2$, где $\omega_{\text{cr}} = \omega_p (\xi + 1)^{3/2} = \omega_b (1 + 1/\xi)^{3/2}$. Таким образом, если $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) > \omega_{\text{cr}}$, то $F_{\min} < 1$ и дисперсионное уравнение $F(\omega) = 1$ имеет четыре действительных корней, при этом Бюнемановская неустойчивость не возникает. Для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) < \omega_{\text{cr}}$ (длинные волны или медленные пучки). При этом $F_{\min} > 1$ и дисперсионное уравнение $F(\omega) = 1$ имеет два действительных корней и две комплексных.

В случае когда $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \rightarrow 0$, инкремент и частота неустойчивой ветви колебаний равны

$$\gamma(k) \simeq (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \frac{\xi^{3/2}}{\xi^3 + 1} \left\{ 1 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2}{\omega_p^2} \frac{1}{2(\xi^3 + 1)} \left[1 - \frac{8\xi^3}{(\xi^3 + 1)^2} \right] \right\}, \quad (1.265)$$

$$\text{Re } \omega(k) \simeq \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})}{\xi^3 + 1} \left[1 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2}{\omega_p^2} \frac{2\xi^3 (\xi^3 - 1)}{(\xi^3 + 1)^3} \right]. \quad (1.266)$$

Видно, что в случае плотных пучков ($\xi \gg 1$), первое слагаемое в выражении (1.265) совпадает с полученным ранее значением инкремента. С увеличением величины $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})$ инкремент растет и, достигая при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \lesssim \max(\omega_b, \omega_p)$ максимального значения (1.263), при $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = \omega_{\text{cr}}$ стремится к нулю.

Точные и сравнительно простые выражения для спектров колебаний можно найти при условии $\omega_b = \omega_p$ ($\xi = 1$). При этом значение критической частоты равно $\omega_{\text{cr}} = 2^{3/2}\omega_p$. Введя безразмерные переменные $x = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})/\omega_p$ и $y = \omega/\omega_p$, решения дисперсионного уравнения (1.259) при $x > 2^{3/2}$

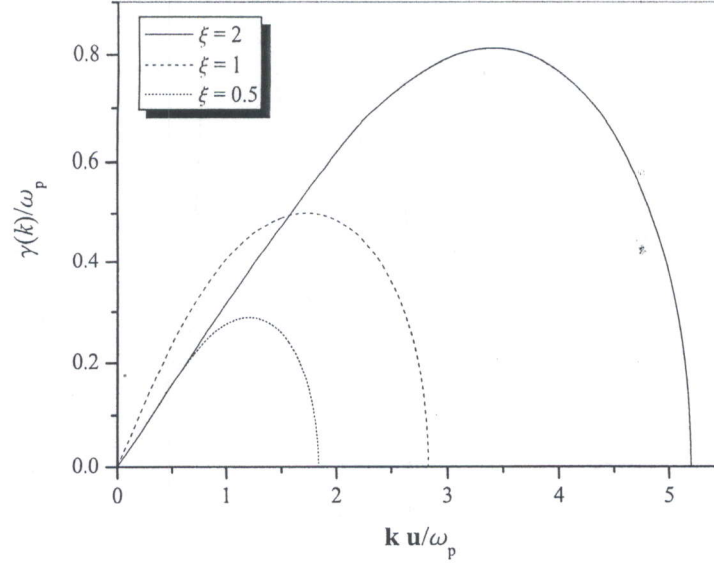


Рис. 1.15: Инкремент Бунемановской неустойчивости $\gamma(k)$ (в единицах ω_p) в зависимости от величины $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})/\omega_p$ при различных значениях параметра $\xi = (\omega_b/\omega_p)^{2/3}$.

(($\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$) $> \omega_{cr}$ и неустойчивость отсутствует) можно представить в виде:

$$y_{1,2} = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}, \quad (1.267)$$

$$y_{3,4} = \frac{x}{2} \pm \frac{x}{4} \sqrt{\frac{x^2 - 8}{x^2/4 + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}}. \quad (1.268)$$

Если же $x \leq 2^{3/2}$ (($\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$) $< \omega_{cr}$) то решения (1.268) являются комплексными. При этом инкремент Бунемановской неустойчивости определяется выражением

$$\frac{\gamma}{\omega_p} = \frac{x}{4} \sqrt{\frac{8 - x^2}{x^2/4 + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}}. \quad (1.269)$$

График для инкремента в зависимости от параметра $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})$ показан на Рис. 1.15 для нескольких значений параметра ξ .

Остановимся на физической причине Бунемановской неустойчивости. Если пучок движется слева направо, то бегущая им навстречу волна в лабораторной системе координат замедляется. Как уже отмечалось, в случае $\omega_b = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$ частота этой волны просто равна нулю и имеется застывшее периодическое возмущение концентрации частиц пучка. Такое стационарное поле действует на частиц плазмы и приводит к возмущению их концентрации. В свою очередь возмущение концентрации плазмы позволяет увеличить возмущение концентрации пучка и этот процесс нарастает лавинообразно. В результате на однородном распределении плотности возникает периодическая структура, амплитуда которой нарастает со временем.

1.21 Кинетическое уравнение Власова

Наиболее полной является кинетическая модель плазмы. В этой модели для описания плазмы используется функция распределения частиц $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$; (α -сорт частиц, $\alpha = e$ -электроны, $\alpha = i$ -ионы), $\mathbf{r}$ -координата, t -время, $\mathbf{v}$ -скорость частиц. Величина $f_\alpha \Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{v}$ определяет число частиц сорта α , находящихся в момент времени t в элементе объема $\Delta \mathbf{r}$ вблизи точки $\mathbf{r}$ и имеющих

скорость в интервале $\Delta \mathbf{v}$ вблизи значения $\mathbf{v}$. Произведение $\Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{v}$ называют *элементом фазового объема*.

В пренебрежении столкновениями частиц изменение функции распределения определяется уравнением Власова, которое имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{w}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.270)$$

где $\mathbf{w}_\alpha$ — ускорение частицы.

Смысл уравнения Власова легче всего понять, рассмотрев баланс частиц в элементе фазового объема. Функция распределения определяет число частиц, находящихся в элементе фазового объема в момент времени t . Имеется две причины, по которым это число за время δt изменяется. Либо частицы из соседних точек приходят в данный элемент объема, имея при этом скорость $\mathbf{v}$

$$\frac{f_\alpha(\mathbf{r} - \delta \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\delta t} = -\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.271)$$

Либо имеющиеся в объеме $\Delta \mathbf{r}$ частицы изменяют свою скорость и тем самым выходят из интервала $\Delta \mathbf{v}$

$$\frac{f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}, t) - f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\delta t} = -\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.272)$$

В результате полное изменение числа частиц в элементе фазового объема со временем равно

$$\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} = -\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta t} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.273)$$

Переходя к пределу $\delta t \rightarrow 0$, получим уравнение Власова (1.270).

В плазме ускорение частиц определяется силой, действующей на них со стороны электрических и магнитных полей

$$\mathbf{w}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right). \quad (1.274)$$

Поля в формуле (1.274) сами зависят от движения заряженных частиц плазмы. Если считать, что сторонних источников поля в плазме нет, то поля полностью определяются движением частиц плазмы и называются *самосогласованными*. Величина их определяется из уравнений Максвелла (1.1), в которых плотность тока $\mathbf{j}$ и плотность заряда ρ создаются частицами плазмы и сами выражаются через функцию распределения

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (1.275)$$

Суммирование проводится по частицам различных сортов.

Система уравнений Максвелла совместно с кинетическим уравнением Власова наиболее детально описывает коллективные поля в плазме в пренебрежении столкновениями частиц.

1.22 Тензор диэлектрической проницаемости в кинетической модели

Рассмотрим выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, которое получается с помощью уравнения Власова. Будем считать, что в отсутствие электромагнитных волн плазма однородна, стационарна и функция распределения есть $F_\alpha(v)$. В изотропной плазме где нет выделенных направлений, функция F_α зависит только от абсолютной величины скорости частиц и не зависит от направления скорости.

Малое отклонение от равновесного состояния приводит к изменению функции распределения на величину $\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. При этом также могут возникать электрическое $\delta \mathbf{E}$ и магнитное $\delta \mathbf{B}$ поля.

Из уравнения Власова (1.270), в котором для ускорения использована формула (1.274), получим в линейном приближении

$$\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.276)$$

Будем считать, что возмущение представляет из себя монохроматическую волну и все характеризующие его величины зависят от координат и времени по закону $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$. Из уравнения (1.276) получим возмущение функции распределения

$$\delta f_\alpha(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) = -\frac{ie_\alpha}{m_\alpha(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \left(\delta \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)] \right) \cdot \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.277)$$

Величина возмущения функции распределения δf_α существенно зависит от скоростей частиц и обращается в бесконечность при выполнении условия

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.278)$$

Частицы, удовлетворяющие условию (1.278), называются *резонансными*, в отличие от остальных частиц, которые называются *нерезонансными*, *пролетными* (или *адиабатическими*). Выделенность резонансных частиц связана с тем, что со стороны волны на них действует постоянное поле.

Рассмотрим волну, распространяющуюся с фазовой скоростью ω/k вдоль оси ОХ. В системе координат,двигающейся вместе с волной, поля постоянны и не зависят от времени. Поэтому на частицу,двигающуюся в ту же сторону, что и волна и имеющую скорость, совпадающую с фазовой скоростью волны, действуют постоянные поля. Под действием этих полей происходит регулярное изменение скорости частицы связанное с этим сильное возмущение функции распределения. При этом постоянные поля действуют не только на те частицы, которые двигаются строго в направлении распространения волны, но и на частицы, которые двигаются под углом к ее волновому фронту. Для резонансного взаимодействия нужно, чтобы проекция скорости движения частицы на направление распространения волнового фронта совпадала с фазовой скоростью. Естественно, что рассмотрение резонансных частиц возможно только в кинетической модели плазмы.

Между электрическим и магнитным полями в волне имеется связь (см. первое уравнение в формулах (1.1)), которая в случае волны имеет вид

$$\delta \mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}]. \quad (1.279)$$

Поэтому входящая в выражение для возмущения функции распределения величина выражается только через напряженность электрического поля

$$\begin{aligned} \delta E_i + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}]_i &= \delta E_i + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v} \times [\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}]]_i \\ &= \delta E_i + \frac{1}{\omega} [k_i (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{E}) - \delta E_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})] \\ &= \frac{1}{\omega} [k_i v_j + \delta_{ij} (\omega - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}))] \delta E_j = \alpha_{ij} \delta E_j. \end{aligned} \quad (1.280)$$

Если в волне отсутствует магнитное поле (продольная волна), то $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$.

Используя такое соотношение, запишем возмущение функции распределения в более компактном виде

$$\delta f_\alpha = -\frac{ie_\alpha}{m_\alpha(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \alpha_{ij} \delta E_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_i}. \quad (1.281)$$

Возмущению функции распределения соответствует возмущение плотности тока. Из формулы (1.275) получим

$$\delta j_i(\mathbf{k}, \omega) = \sum_\alpha e_\alpha \int v_i \delta f_\alpha(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = -\sum_\alpha \frac{ie_\alpha^2}{m_\alpha} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \alpha_{lj} \delta E_j \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_l}. \quad (1.282)$$

В соответствии с общим определением (1.29) для тензора электропроводности отсюда получаем

$$\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = - \sum_{\alpha} \frac{ie_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \alpha_{lj} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial v_l}. \quad (1.283)$$

Далее, традиционным путем, используя формулу (1.30), получим тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega^2} \int d\mathbf{v} v_i \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial v_l} \left(\delta_{lj} + \frac{k_l v_j}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \right). \quad (1.284)$$

Выражение для $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ зависит от вида функции распределения частиц в невозмущенном состоянии F_{α} . В частности, для “холодной” плазмы скорости всех частиц в основном состоянии равны нулю и

$$F_{\alpha}(v) = n_{\alpha} \delta(\mathbf{v}), \quad (1.285)$$

где n_{α} -концентрация частиц сорта α . Легко убедиться, что функция (1.285) удовлетворяет очевидному условию

$$\int d\mathbf{v} \mathbf{v} F_{\alpha}(v) = n_{\alpha} \mathbf{v}. \quad (1.286)$$

В формуле (1.284) проведем сначала интегрирование по частям, а затем подставим выражение (1.285). В результате получим

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \right) = \delta_{ij} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (1.287)$$

Полученный результат совпадает с формулой (1.157). Таким образом, из кинетической модели в пределе “холодной” плазмы следуют результаты, полученные ранее.

Рассмотрим формулу (1.284) для случая изотропной плазмы, когда все направления в пространстве эквивалентны и функция распределения F_{α} зависит лишь от абсолютной величины скорости частицы. В этом случае

$$\frac{\partial F_{\alpha}(v)}{\partial v_l} = \frac{v_l}{v} F'_{\alpha}(v). \quad (1.288)$$

Из формулы (1.284) найдем

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega^2} \int d\mathbf{v} F'_{\alpha}(v) \frac{v_i v_j}{v} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad (1.289)$$

где $F'_{\alpha}(v) = \partial F_{\alpha} / \partial v$.

Согласно общей формуле (1.41) в изотропной среде тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ выражается через две скалярные функции $\varepsilon_l(k, \omega)$ и $\varepsilon_{tr}(k, \omega)$. Если известен тензор $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, то эти функции легко найти, используя свертку

$$\varepsilon_l(k, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \quad (1.290)$$

и вычислив след тензора

$$\text{Tr} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)] = \varepsilon_{ii}(\mathbf{k}, \omega) = 2\varepsilon_{tr}(k, \omega) + \varepsilon_l(k, \omega). \quad (1.291)$$

С помощью полученного выражения $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ найдем продольную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega k^2} \int d\mathbf{v} \frac{F'_{\alpha}(v)}{v} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (1.292)$$

Для $\varepsilon_l(k, \omega)$ часто используется другая форма записи. Чтобы ее получить используем тождество

$$\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} = \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} - 1. \quad (1.293)$$

Подставим его в формулу (1.292). От единицы возникает интеграл

$$\int d\mathbf{v} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{F'_\alpha(v)}{v}, \quad (1.294)$$

который равен нулю как интеграл от антисимметричной функции в симметричных пределах. В результате найдем

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{m_\alpha k^2} \int d\mathbf{v} \frac{F'_\alpha(v)}{v} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (1.295)$$

Для поперечной диэлектрической проницаемости с помощью приведенных выше соотношений получаем

$$\varepsilon_{tr}(k, \omega) = \frac{1}{2} \{ \text{Tr} [\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)] - \varepsilon_l(k, \omega) \} = 1 + \sum_\alpha \frac{2\pi e_\alpha^2}{m_\alpha \omega k^2} \int d\mathbf{v} \frac{F'_\alpha(v)}{v} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}]^2}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (1.296)$$

Таким образом, при кинетическом рассмотрении тензор диэлектрической проницаемости зависит от функции распределения частиц. Исследовать возможные типы волн в плазме можно только в том случае, когда вид функции распределения F_α известен.

1.23 Ленгмюровские волны в Максвелловской плазме

Для того, чтобы воспользоваться формулами кинетической теории, нужно задать функцию распределения частиц в основном состоянии. Вид этой функции зависит от способа создания плазмы. Обычно принято считать, что функция распределения является максвелловской и имеет вид:

$$F_\alpha(v) = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha} \right) = \frac{n_\alpha}{(2\pi)^{3/2} v_{th,\alpha}^3} \exp \left(-\frac{v^2}{2v_{th,\alpha}^2} \right). \quad (1.297)$$

Плазму, функция распределения частиц в которой имеет вид (1.297), принято называть максвелловской. В этом случае производная от функции распределения $F'_\alpha(v)$ выражается снова через $F_\alpha(v)$. Действительно, из (1.297) получим $F'_\alpha(v) = -\left(v/v_{th,\alpha}^2\right) F_\alpha(v)$. Используем это соотношение и запишем выражение (1.295) для продольной диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \sum_\alpha \frac{1}{k^2 \lambda_{D\alpha}^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{th,\alpha}^3} \int d\mathbf{v} e^{-v^2/2v_{th,\alpha}^2} \left(1 - \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \right), \quad (1.298)$$

где $\lambda_{D\alpha} = v_{th,\alpha}/\omega_{p\alpha} = (T_\alpha/4\pi n_\alpha e_\alpha^2)^{1/2}$ - дебаевский радиус частиц сорта α . Перепишем выражение для $\varepsilon_l(k, \omega)$ в виде:

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \sum_\alpha \frac{1}{k^2 \lambda_{D\alpha}^2} [1 - J_+(\zeta_\alpha)], \quad (1.299)$$

где $\zeta_\alpha = \omega/kv_{th,\alpha}$ - отношение фазовой скорости волны к тепловой скорости частиц плазмы сорта α , $J_+(\zeta) = 1 - W(\zeta)$, $W(\zeta)$ - дисперсионная функция плазмы,

$$J_+(\zeta) = \frac{\zeta}{(2\pi)^{3/2}} \int du \frac{e^{-u^2/2}}{\zeta - \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{u}} \quad (1.300)$$

и $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ - единичный вектор вдоль $\mathbf{k}$.

Введем декартову систему координат с осью OZ вдоль вектора $\mathbf{k}$. Воспользовавшись выражением для интеграла Пуассона, проведем интегрирование по u_x и u_y . В результате получим

$$J_+(\zeta) = \frac{\zeta}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{\zeta - u}. \quad (1.301)$$

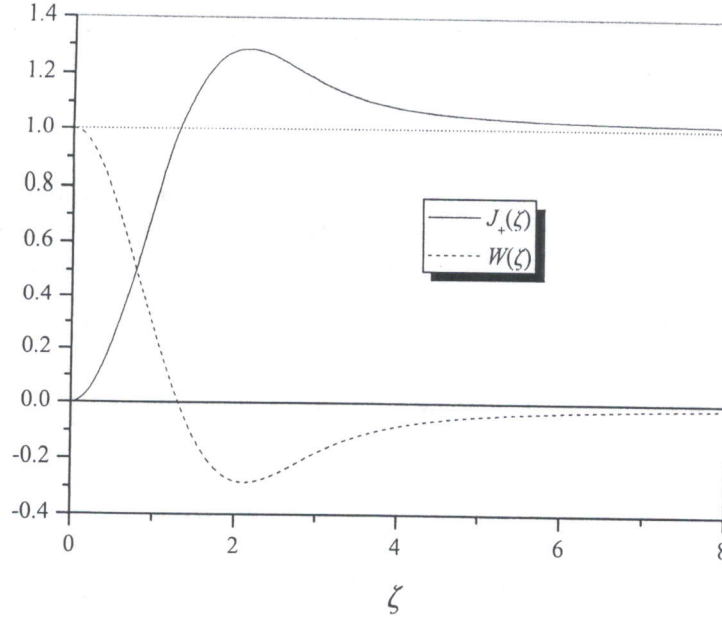


Рис. 1.16: Дисперсионные функции плазмы $J_+(\zeta)$ (сплошная линия) и $W(\zeta)$ (пунктирная линия).

Формула (1.301) была получена Власовым и первоначально особенность $u = \zeta$ входящего в нее несобственного интеграла понималась в смысле главного значения

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\zeta - u} e^{-u^2/2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\zeta - \varepsilon} \frac{du}{\zeta - u} e^{-u^2/2} + \int_{\zeta + \varepsilon}^{\infty} \frac{du}{\zeta - u} e^{-u^2/2} \right\}. \quad (1.302)$$

В этом случае можно построить график функции (1.301) в зависимости от параметра ζ (Рис. 1.16). Знание асимптотик функции $J_+(\zeta)$ позволяет получить простые законы дисперсии для продольных волн в кинетическом приближении. Так, из формулы (1.301) можно получить асимптотические разложения функции $J_+(\zeta)$ при малых ($\zeta < 1$) и больших ($\zeta > 1$) значениях аргумента соответственно:

$$J_+(\zeta) \simeq \zeta^2, \quad J_+(\zeta) \simeq 1 + \frac{1}{\zeta^2} + \frac{3}{\zeta^4}. \quad (1.303)$$

Рассмотрим сначала быстрые продольные волны, фазовая скорость которых превышает тепловые скорости частиц плазмы ($\omega/k > v_{th,e} > v_{th,i}$). Тогда $\zeta_i > \zeta_e > 1$ и согласно (1.299) и (1.303) имеем из условия $\varepsilon_l = 0$:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{3k^2 v_{th,e}^2}{\omega^2} \right) + \omega_{pi}^2. \quad (1.304)$$

Это еще не есть решение дисперсионного уравнения. Но, поскольку второе слагаемое в круглой скобке мало, то в нем можно положить $\omega \simeq \omega_{pe}$ и записать

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2) + \omega_{pi}^2. \quad (1.305)$$

Полученная в гидродинамическом приближении формула (1.237) отличается от формулы (1.305) в двух отношениях—в ней не учитывается движение ионов и вместо числа 3 стоит число 1. Учет движения ионов в гидродинамике (см. §1.19) привел также к появлению ионной ленгмюровской частоты. Что же касается числа 3, то его появление показывает недостаток гидродинамической модели. Действительно, в гидродинамической модели использовалось уравнение состояния (см. §1.18) $p_e = n_e T_e$ и считалось, что такое уравнение состояния сохраняется и для возмущений, которые происходят при постоянной температуре $\delta p_e = T_e \delta n_e$. Из уравнения Пуассона можно

выразить δn_e через возмущения потенциала $\delta\varphi$ и записать

$$\delta p_e = -T_e \frac{k^2 \delta\varphi}{4\pi e}. \quad (1.306)$$

В действительности же тепловое движение частиц приводит к тому, что они, переходя из одной точки пространства в другую, переносят импульс. В результате импульс частиц в данном элементе объема может измениться. Связанное с этим изменение плотности импульса частиц в элементе объема в единицу времени и определяет плотность силы, действующую на элемент объема из-за теплового движения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \int m_{\alpha} \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v} = - \sum_{\alpha} \int m_{\alpha} \mathbf{v} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} \right) d\mathbf{v} \\ - \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right] d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.307)$$

Второе слагаемое в формуле (1.307) можно преобразовать к виду:

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\mathbf{v} E_i + \mathbf{v} v_s \frac{1}{c} e_{isl} B_l \right) d\mathbf{v} = \mathbf{E} \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} - \frac{1}{c} \left[\mathbf{B} \times \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v} \right], \quad (1.308)$$

где $n_{\alpha} = \int f_{\alpha} d\mathbf{v}$ — плотность частиц сорта α . Далее, рассмотрим малые возмущения $f_{\alpha} = F_{\alpha} + \delta f_{\alpha}$, $n_{\alpha} = n_{0\alpha} + \delta n_{\alpha}$. Учитывая условия нейтральности плазмы и отсутствия тока в основном состоянии,

$$\sum_{\alpha} n_{0\alpha} e_{\alpha} = 0, \quad \int \mathbf{v} F_{\alpha}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 0 \quad (1.309)$$

приходим к выводу, что выражение (1.308) является квадратичным относительно малых величин δf_{α} , δn_{α} , δ и $\delta \mathbf{B}$

$$\delta \mathbf{E} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \delta n_{\alpha} - \frac{1}{c} \left[\delta \mathbf{B} \times \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} \delta f_{\alpha} d\mathbf{v} \right] \quad (1.310)$$

и, следовательно, ее можно отпустить. Кроме того, при распространении ленгмюровской волны существенно только тепловое движение электронов и в сумме по α следует удерживать лишь одно слагаемое (электронное). Поскольку в основном состоянии плазма однородна и F_e не зависит от координат, то сила $\mathbf{F}_T$ связана только с возмущением функции распределения. Для продольной волны из (1.281) найдем

$$\delta f_e = \frac{ie}{m(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \left(\delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \right). \quad (1.311)$$

Используя это выражение и учитывая, что $\delta f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta f_e(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$, получим для силы $\mathbf{F}_T$ в результате интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T(\mathbf{k}, \omega) = -ie\delta\varphi(\mathbf{k}, \omega) \int \mathbf{v} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \right)}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} \\ = ie\delta\varphi(\mathbf{k}, \omega) \int d\mathbf{v} F_e(v) \frac{[\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) + k^2 \mathbf{v}](\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) + k^2 \mathbf{v}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2}. \end{aligned} \quad (1.312)$$

Для продольных волн имеется единственное выделенное направление — это направление вектора $\mathbf{k}$. Поэтому сила может быть направлена по вектору $\mathbf{k}$ и равна

$$F_T(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}_T}{k} = iek\delta\varphi(\mathbf{k}, \omega) \int d\mathbf{v} F_e(v) \left[\frac{\omega^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} - 1 \right]. \quad (1.313)$$

В интересующем нас случае ленгмюровских волн $\omega \gg \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ и стоящую под интегралом функцию легко разложить в ряд. В результате интегрирования получим

$$F_T(\mathbf{k}, \omega) = -ik \left(-3T_e \frac{k^2 \delta \varphi \omega_{pe}^2}{4\pi e \omega^2} \right). \quad (1.314)$$

Сопоставляя это выражение с $F_p = -ik\delta p_e$, получим при $\omega = \omega_{pe}$ отличие на коэффициент 3.

Аналогично, из формул (1.296) и (1.297) можно получить выражение для поперечной диэлектрической проницаемости максвелловской плазмы

$$\varepsilon_{tr}(k, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} J_+(\zeta_{\alpha}). \quad (1.315)$$

Рассмотрим поперечные волны, подразумевая что они являются быстрыми, т.е. фазовая скорость превышает тепловые скорости частиц плазмы ($\omega/k > v_{th,e} > v_{th,i}$). Тогда $\zeta_i > \zeta_e > 1$ и согласно (1.303) и (1.315) имеем из условия $(\omega^2/c^2) \varepsilon_{tr}(k, \omega) = k^2$:

$$\omega^2 \simeq \omega_p^2 + k^2 c^2 + \frac{k^2}{\omega^2} \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 v_{th,\alpha}^2. \quad (1.316)$$

Поскольку слагаемое пропорциональное ω^{-2} мало, то в нем можно положить $\omega^2 \simeq \omega_p^2 + k^2 c^2$ и записать

$$\omega^2 \simeq \omega_p^2 + k^2 c^2 \left(1 + \sum_{\alpha} \frac{v_{th,\alpha}^2}{c^2} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_p^2 + k^2 c^2} \right). \quad (1.317)$$

1.24 Затухание Ландау

Как уже отмечалось выше, в плазме имеется особая группа резонансных частиц, скорости которых удовлетворяют условию (1.278). Для этих частиц возмущения функции распределения очень велики и теория возмущений в той форме, которую мы использовали, не пригодна.

В 1946 году Л.Д.Ландау обошел эту трудность с помощью следующей модификации теории возмущений. Если представить, что поле волны возникло мгновенно в некоторый момент времени, скажем при $t = 0$, то оно не успеет так же мгновенно изменить функцию распределения. Для изменения функции распределения потребуется некоторое время и в течение этого времени можно использовать теорию возмущений. За это время будет не только происходить изменение функции распределения, но и будет изменяться амплитуда волны. Поэтому поле волны следует задать в виде $\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i(\omega' + i\omega'')t}$. Множитель $e^{\omega''t}$ учитывает затухание ($\omega'' < 0$) или нарастание амплитуды волны. В течение какого времени можно считать возмущение функции распределения малым? На этот вопрос теория Ландау ответа не дает, но заведомо имеется время, в течение которого это так и есть.

По-существу, Ландау предложил считать частоту волны комплексной. Тогда все выводы Власова остаются справедливыми, но в формулах (1.299) и (1.301) для максвелловской плазмы следует заменить ζ_{α} на $\zeta'_{\alpha} + i\zeta''_{\alpha}$, где $\zeta'_{\alpha} = \omega'/kv_{th,\alpha}$, $\zeta''_{\alpha} = \omega''/kv_{th,\alpha}$,

$$J_+(\zeta_{\alpha}) = \frac{\zeta'_{\alpha} + i\zeta''_{\alpha}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{\zeta'_{\alpha} + i\zeta''_{\alpha} - u}. \quad (1.318)$$

Если амплитуда волны в момент включения очень мала, то время искажения функции распределения весьма велико, а, следовательно, велико и время изменения амплитуды, т.е. $\omega'' \rightarrow 0$. Строго говоря, вопрос о предельном переходе $\omega'' \rightarrow 0$ связан с предельным переходом $\mathbf{E}_0 \rightarrow 0$. Но можно все же положить, что $\omega'' \rightarrow 0$ и найти эту величину, имея в виду необходимость предположения малости $\mathbf{E}_0$.

Запишем стоящую в знаменателе формулы для $J_+(\zeta_\alpha)$ величину в виде

$$\frac{1}{\zeta'_\alpha + i\zeta''_\alpha - u} = \frac{\zeta'_\alpha - u - i\zeta''_\alpha}{(\zeta'_\alpha - u)^2 + \zeta''_\alpha{}^2}. \quad (1.319)$$

Если ζ''_α мало (для определенности будем считать, что $(\zeta''_\alpha \rightarrow +0)$), то при $\zeta'_\alpha - u \neq 0$ этой величиной можно пренебречь и мы получаем старый результат Власова. Если же $\zeta'_\alpha - u = 0$, то выражение равно $-i/\zeta''_\alpha$ и при малом ζ''_α становится весьма большим. Формально это учитывается с помощью т.н. формулы Сохоцкого-Племеля ($\varepsilon \rightarrow +0$)

$$\frac{1}{x - x_0 + i\varepsilon} = P \frac{1}{x - x_0} - \pi i \delta(x - x_0). \quad (1.320)$$

Используем формулу (1.320) и запишем выражение (1.318) в виде ($\zeta_\alpha = \zeta'_\alpha$)

$$J_+(\zeta_\alpha) = \frac{\zeta_\alpha}{\sqrt{2\pi}} P \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-u^2/2}}{\zeta_\alpha - u} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta_\alpha e^{-\zeta_\alpha^2/2} \quad (1.321)$$

Таким образом, продольная диэлектрическая проницаемость помимо действительной части, которую получил и исследовал Власов, содержит мнимую часть

$$\varepsilon_l''(k, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha} \frac{1}{k^2 \lambda_{D\alpha}^2} \zeta_\alpha e^{-\zeta_\alpha^2/2}, \quad (1.322)$$

где $\zeta_\alpha = \zeta'_\alpha = \omega'/kv_{th,\alpha}$. Если рассмотреть ленгмюровские волны и считать затухание малым, то можно положить приближенно $\omega' \simeq \omega_{pe}$. Тогда

$$\varepsilon_l''(k, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k^3 \lambda_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{De}^2}\right). \quad (1.323)$$

Отсюда с помощью формулы (1.55) легко найти декремент затухания ленгмюровских волн (затухание Ландау)

$$\gamma_l \equiv \omega'' = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}}{2k^3 \lambda_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{De}^2}\right). \quad (1.324)$$

Этот результат, полученный Ландау, определяет затухание ленгмюровских волн. На Рис. 1.17 показан график функции (1.324) в зависимости от параметра $k\lambda_{De}$. При $k\lambda_{De} \sim 1$ получим $\gamma \sim \omega_{pe}$ и такие волны в плазме распространяться не могут. Это один из важных выводов кинетической теории и связан он с тем, что для таких волн практически все частицы плазмы являются резонансными ($\omega_{pe} \sim kv_{th,e}$).

Если не считать распределение частиц максвелловским, то

$$\varepsilon_l''(k, \omega) = - \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right), \quad (1.325)$$

$$\varepsilon_l'(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k^2} P \int \frac{d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right). \quad (1.326)$$

Использував снова формулу (1.55), отсюда легко найти декремент затухания, который нам будет нужен в дальнейшем

$$\gamma_l = \pi \frac{\sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} P \int \frac{d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right)}. \quad (1.327)$$

Обсудим теперь физическую причину затухания Ландау. Когда включается поле волны, которую мы будем считать продольной, то в поле этой волны имеются резонансные частицы, а

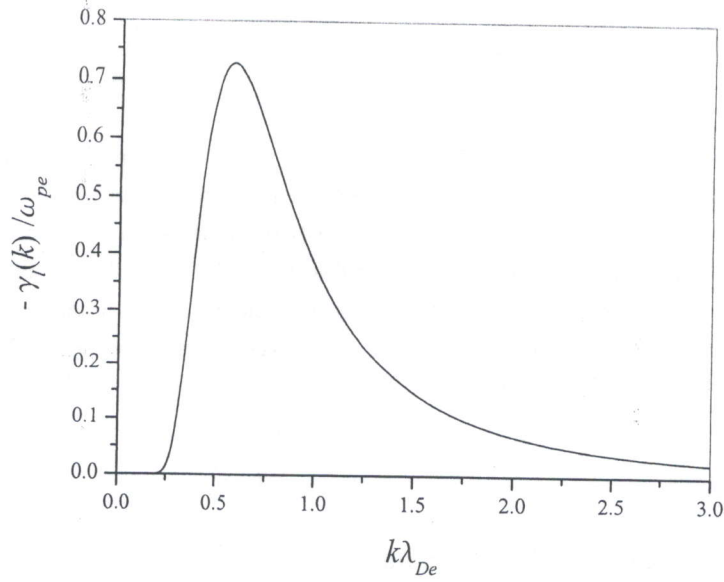


Рис. 1.17: Зависимость декремента затухания Ландау от $k\lambda_{De}$.

также имеются более медленные и более быстрые частицы. Резонансные частицы двигаются все время в постоянном поле и, конечно, их энергия изменяется, хотя в линейном приближении этот эффект не учитывается. Более медленные частицы стремятся отстать от волны, но поле волны подгоняет их и при этом совершает работу. Более быстрые частицы обгоняют волну и поле волны их тормозит. В результате, полное изменение энергии волны определяется тем, каких частиц больше-медленных или быстрых. Для максвелловского распределения

$$\frac{F_m - F_b}{\Delta v} \rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{v=\omega/k} < 0 \quad (1.328)$$

и больше энергии теряется, чем получается. В результате имеется затухание. Еще раз подчеркнем, что в линейном приближении число медленных и быстрых частиц считается неизменным и определяется начальным распределением по скоростям.

В конце этого раздела остановимся коротко на другой форме записи дисперсионной функции плазмы $W(\zeta) = 1 - J_+(\zeta)$, где $J_+(\zeta)$ с учетом затухания Ландау определяется формулой (1.321). Можно показать, что действительная и мнимая части дисперсионной функции ($W(\zeta) = g(\zeta) + if(\zeta)$) определяются выражениями

$$f(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \zeta e^{-\zeta^2/2}, \quad (1.329)$$

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= 1 + \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2} du}{u - \zeta} = 1 - \zeta \sqrt{2} \int_0^{\infty} dt e^{-t^2} \sin(\zeta t \sqrt{2}) \\ &= 1 - \zeta \sqrt{2} \text{Di}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \quad (1.330)$$

где $\text{Di}(\zeta)$ -функция Доусона

$$\text{Di}(\zeta) = e^{-\zeta^2} \int_0^{\zeta} e^{t^2} dt. \quad (1.331)$$

1.25 Скин-эффект

Электромагнитные волны достаточно низкой частоты, падая на плазму, глубоко в нее не проникают и отражаются от нее. Поле таких волн имеется только вблизи границы плазмы в узком

скин-слое. Такой эффект непроникновения волн связан с движением электронов и называется *скин-эффектом*. Обычно поле вглубь плазмы спадает по закону $e^{-x/\delta}$, где величина δ называется глубиной проникновения.

Глубина проникновения зависит от частоты падающего излучения. Можно выделить три области частот, в которых толщина скин-слоя определяется различными физическими механизмами.

Начнем с высоких частот ($\omega > \nu$), когда для поперечных волн справедлив закон дисперсии (1.165). Ответ на вопрос о проникновении поля можно получить, решая дисперсионное уравнение относительно k (граничная задача, см. §1.6). Из выражения (1.165) следует $k = \pm(1/c)\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$ и, следовательно, при $\omega < \omega_p$ волновое число является чисто мнимым. Выбирая знак таким образом, чтобы поле волны затухало вглубь плазмы, получим при $\omega < \omega_p$

$$\delta(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}. \quad (1.332)$$

Формула (1.332) определяет глубину проникновения поля. Физика скин-эффекта связана с тем, что полное поле в плазме является суммой поля падающего излучения и поля, излучаемого осциллирующими электронами. Электроны имеют собственную резонансную частоту $\omega_{pe} \simeq \omega_p$. Если $\omega > \omega_p$, то поле падающей волны и поле, излучаемое электронами, не гасят друг друга в плазме. Если же $\omega < \omega_p$, то поля внутри плазмы взаимно гасятся. Вне плазмы излучаемое электронами поле образует отраженную волну.

Мы пренебрегли тепловым движением электронов и считали, что осциллируют все электроны на толщине δ . Если $v_{th,e}/\omega > \delta$, то часть электронов за период изменения поля выйдет из скин-слоя и не сможет полноценно осциллировать в поле волны. При $\omega < \omega_p$ это неравенство означает $\omega_p(v_{th,e}/c) > \omega$. Чтобы определить, как изменится закон проникновения поля в плазму при таких более низких частотах, нужно отбросить те электроны, которые за период поля успевают войти в скин-слой и выйти из него. Если электрон движется под углом α по отношению к нормали к поверхности со скоростью $v_{th,e}$, то он приближается к поверхности со скоростью $v_{th,e} \cos \alpha$. За период он пройдет расстояние $(v_{th,e}/\omega) \cos \alpha$. Если этот путь больше, чем 2δ , то электрон не успеет проосциллировать и принять участие в излучении. Такому условию удовлетворяют электроны, для которых

$$\cos \alpha > \frac{2\omega\delta}{v_{th,e}}. \quad (1.333)$$

При $\omega < \omega_p$ согласно (1.332)

$$\delta(\omega) \simeq \frac{c}{\omega_p} = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_e e^2}}. \quad (1.334)$$

Уменьшим число n_e в $v_{th,e}/\omega\delta$ раз. Взаимодействовать с волной будет $n'_e = n_e(\omega\delta/v_{th,e})$ электронов. Поэтому

$$\delta(\omega) = \frac{c}{\omega'_p} = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_e e^2 \frac{\omega\delta(\omega)}{v_{th,e}}}}. \quad (1.335)$$

и глубина скин-слоя при этом равна

$$\delta(\omega) \simeq \frac{c}{\omega_p} \left(\frac{v_{th,e}}{c} \frac{\omega_p}{\omega} \right)^{1/3}. \quad (1.336)$$

В этом случае принято говорить об *аномальном скин-эффекте*.

Рассмотрим еще более низкие частоты, когда $\omega < \nu$. Согласно формуле (1.163)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} \simeq 1 + i \frac{\omega_p^2}{\omega\nu}. \quad (1.337)$$

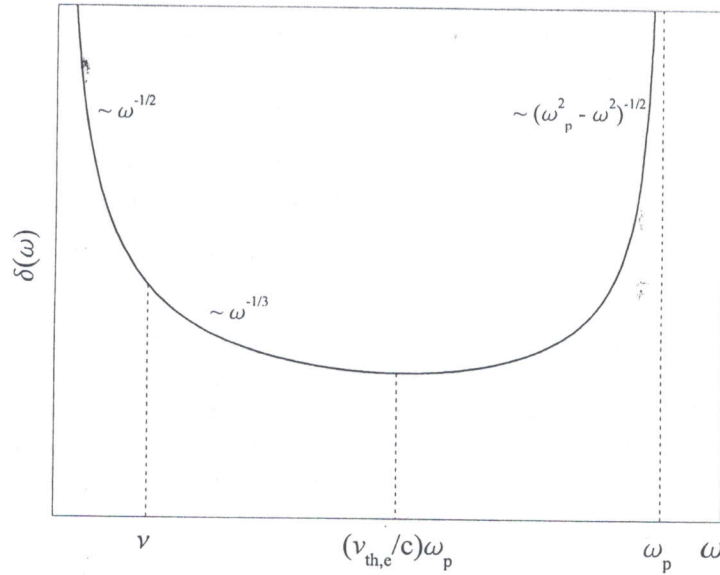


Рис. 1.18: Глубина проникновения $\delta(\omega)$ в плазму электромагнитной волны как функция частоты. Показаны три различные области соответствующие трем различным физическим механизмам возникновения скин-эффекта.

Используя дисперсионное уравнение для поперечных волн $k^2 c^2 = \omega^2 \epsilon(\omega)$, найдем при $\omega < \nu < \omega_p^2/\nu$

$$k^2 \simeq i \frac{\omega_p^2 \omega}{\nu c^2}. \quad (1.338)$$

Отсюда для глубины скин-слоя получаем

$$\delta(\omega) = \frac{c}{\omega_p} \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (1.339)$$

В этом случае говорят о нормальном скин-эффекте. Заметим, что глубина проникновения поля тем больше, чем больше частота столкновений ν . Это связано с тем, что из-за столкновений фаза осцилляций электронов не совпадает с фазой падающей волны. Соответственно с ростом частоты столкновений растет разность фаз между полем излучения и полем падающей волны. На Рис. 1.18 представлена итоговая диаграмма, показывающая изменение функции $\delta(\omega)$ в зависимости от частоты.

1.26 Поле движущейся частицы в среде

Рассматривая кинетическую модель плазмы, мы столкнулись с особой группой т.н. резонансных частиц. Эти частицы сопровождают волну и на них действует постоянное поле. В результате такие частицы наиболее эффективно взаимодействуют с волнами и приводят к т.н. затуханию Ландау. В процессе этого затухания уменьшается амплитуда волны и возрастает энергия частиц. Очевидно, что возможен и обратный процесс, когда уменьшается энергия частиц, но возрастает энергия волны. В этом случае говорят, что частицы излучают волны.

Чтобы лучше понять, какие волны излучают частицы, мы рассмотрим задачу о поле, создаваемом одной частицей, движущейся в материальной среде. Такую частицу принято называть пробной, хотя таковой применительно к плазме может быть любая частица.

Пусть рассматриваемая частица имеет заряд q и массу M и движется с постоянной скоростью v . По отношению к среде эта частица является внешней и она несет внешний заряд и создает

внешний ток. Плотности заряда и тока определяются формулами

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}), \quad \rho_0(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}). \quad (1.340)$$

Внешние источники создают электромагнитные поля в среде, для определения которых можно использовать уравнения Максвелла в форме (1.11). Из первых двух уравнений легко получить одно уравнение

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_0}{\partial t}, \quad (1.341)$$

где вектор индукции $\mathbf{D}$ в линейной электродинамике связан с вектором напряженности электрического поля линейным материальным уравнением (1.18).

Частица создает сложное поле, которое изменяется во времени и в пространстве отнюдь не простым образом и уж, конечно, не представляет из себя поле монохроматической волны. Однако, как мы знаем, любую функцию координат и времени $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ можно представить как сумму плоских волн, т.е. разложить в интеграл Фурье

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} \mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.342)$$

Если мы будем знать Фурье-компоненты функции $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega)$, то с помощью приведенной формулы сможем найти саму функцию.

Уравнение для Фурье-компонент электромагнитного поля получается из уравнения (1.341). Используя разложение (1.342) получим

$$[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]] + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.343)$$

Видно, что уравнение для Фурье-компонент поля является не дифференциальным, а алгебраическим и его можно решить

$$\left[\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \right] E_j(\mathbf{k}, \omega) \equiv M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega} j_{0i}(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.344)$$

Здесь $M_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ -максвелловский тензор.

Для решения системы уравнений (1.344) нужно свернуть ее с обратным максвелловским тензором

$$M_{li}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = E_l(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega} M_{li}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) j_{0i}(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.345)$$

Поэтому напряженность электрического поля, создаваемого заданным сторонним током $\mathbf{j}_0$, выражается в виде интеграла от Фурье-компонент плотности тока

$$E_l(\mathbf{r}, t) = -4\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} M_{li}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) j_{0i}(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.346)$$

В случае движущейся пробной частицы плотность тока мы выписали раньше. Найдем от нее Фурье-компоненту

$$j_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t} = \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}).$$

Используем это выражение и получим напряженность электрического поля, создаваемого пробным зарядом

$$E_l(\mathbf{r}, t) = -\frac{2iqv_i}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{vt})} M_{li}^{-1}(\mathbf{k}, \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}). \quad (1.347)$$

Таким образом, зная электромагнитные свойства среды (т.е. тензор (1.344)), можно рассчитать поле пробного заряда.

Ограничимся рассмотрением изотропной среды, когда тензор $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ определяется формулой (1.41) и

$$M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_l(k, \omega) + \left[\varepsilon_{tr}(k, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right] \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (1.348)$$

Используя выражения (A.4) и (A.8), легко убедиться, что обратный тензор имеет вид

$$M_{li}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_l k_i}{k^2} \frac{1}{\varepsilon_l(k, \omega)} + \frac{1}{\varepsilon_{tr}(k, \omega) - k^2 c^2 / \omega^2} \left(\delta_{li} - \frac{k_l k_i}{k^2} \right). \quad (1.349)$$

Используя эту формулу, получим поле пробного заряда в среде в виде суммы двух слагаемых

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2iq}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)} \left\{ \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_l(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(k^2 \mathbf{v} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}))}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \varepsilon_{tr}(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - k^2 c^2} \right\}. \quad (1.350)$$

Первое слагаемое определяет электростатическую компоненту поля. Оно отлично от нуля и для покоящейся частицы. Второе слагаемое определяет электромагнитную компоненту поля, т.е. электромагнитные волны, которые излучает заряд.

Часто интерес представляет не само поле, создаваемое частицей, а только энергия излучения ей в единицу времени (интенсивность). Эту энергию легко найти, если учесть, что она возникает как следствие уменьшения кинетической энергии частицы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Mv^2}{2} \right) = M\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (1.351)$$

Ускорение (замедление) частицы связано с действием излучаемых ей полей на нее саму

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{v}t, t). \quad (1.352)$$

Поэтому интенсивность излучения с обратным знаком равна потерям энергии частицей dW/dt . Используя выражение (1.350) для поля, найдем потери энергии

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{2q^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k^2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_l(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} + \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}]^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \varepsilon_{tr}(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - k^2 c^2} \right\} \\ &= \frac{dW_l}{dt} + \frac{dW_{tr}}{dt}. \end{aligned} \quad (1.353)$$

Здесь мы использовали свойства симметрии диэлектрических проницаемостей, см. выражения (1.42). Первое слагаемое в формуле (1.353) определяет потери энергии на излучение продольных волн, второе — на излучение поперечных волн.

Формулу (1.353) можно представить в другом виде, если вычислить интегралы по углам. Тогда получаем:

$$-\frac{dW}{dt} = \int_0^\infty \Im(\omega) d\omega, \quad (1.354)$$

где

$$\Im(\omega) \equiv \Im_l(\omega) + \Im_{tr}(\omega) = \frac{2q^2}{\pi v} \omega \int_{\omega/v}^\infty \frac{dk}{k} \operatorname{Im} \left[\frac{-1}{\varepsilon_l(k, \omega)} + \frac{k^2 v^2 - \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon_{tr}(k, \omega)} \right] \quad (1.355)$$

спектральная плотность интенсивности излучения. Видно, что могут возбуждаться только те волны для которых $k > \omega/v$, т.е. фазовая скорость волны должна быть меньше чем скорость движения внешнего заряда.

1.27 Излучение поперечных волн (Черенковское излучение)

Рассмотрим излучение поперечных волн. Связанные с этим излучением потери энергии частицы равны

$$\frac{dW_{tr}}{dt} = \frac{2q^2}{(2\pi)^2} \int dk \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k^2} \operatorname{Im} \left\{ \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}]^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \varepsilon_{tr}(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - k^2 c^2} \right\}. \quad (1.356)$$

Основной вклад в интеграл вносят те значения $\mathbf{k}$, для которых мал знаменатель и выполнены условия

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{tr}(k, \omega), \quad \omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.357)$$

Первое условие означает закон дисперсии поперечных волн, второе — условие резонанса частицы с этими волнами. Если пренебречь дисперсией и считать, что ε_{tr} не зависит от волнового числа k и частоты ω , то из формулы (1.357) получим угол, под которым излучается волна (θ — угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$)

$$\cos \theta = \frac{c}{v \sqrt{\varepsilon_{tr}}} < 1. \quad (1.358)$$

Отсюда видно, что необходимым условием для излучения волн является требование, чтобы скорость частицы v превосходила фазовую скорость поперечных волн в среде $v_\varphi = c/\sqrt{\varepsilon_{tr}}$. Это может быть только в средах, где $\varepsilon_{tr} > 1$. В плазме, как мы знаем, $\varepsilon_{tr} < 1$ и поэтому черенковского излучения поперечных волн нет.

Если величина ε_{tr} не зависит от частоты, то и угол излучения не зависит от частоты излучаемой волны. Если же ε_{tr} зависит от частоты, то под каждым углом излучается своя частота.

Часто процесс излучения волн частицами интерпретируют с точки зрения квантовой механики как излучение электроном фотона. При этом должны быть выполнены законы сохранения энергии и импульса

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}' + \hbar \mathbf{k}, \quad E_0 = E' + \hbar \omega, \quad (1.359)$$

где $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}'$, E_0 , E' — соответственно начальные и конечные импульсы и энергии электрона. Если излучаемый импульс мал и, следовательно, мало изменение скорости частицы, то

$$\frac{p_0^2 - p'^2}{2m} = \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}')(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}')}{2m} \simeq \frac{\mathbf{p}_0}{m} \cdot \hbar \mathbf{k} = \hbar \omega \quad (1.360)$$

или $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Иными словами, условие излучения, полученное в классической электродинамике, эквивалентно закону сохранения энергии в квантовой механике.

1.28 Излучение продольных волн (поляризационные потери)

Рассмотрим теперь продольные поля, создаваемые частицей. Согласно формуле (1.350)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2iq}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)} \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_l(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}. \quad (1.361)$$

Если среды нет и частица движется в вакууме ($\varepsilon_l = 1$), то стоящий в выражении для поля интеграл вычисляется и равен

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{2q}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|}. \quad (1.362)$$

Как и следовало ожидать, мы получили *кулоновское поле*, но для движущейся частицы.

Рассмотрим теперь максвелловскую плазму, через которую проходит пробная частица. Продольная диэлектрическая проницаемость определяется формулами (1.299) и (1.321). Если частица движется медленно ($v \ll v_{th,i} \ll v_{th,e}$), то функции $J_+(\omega/kv_{th,e,i})$ много меньше единицы и $\varepsilon_l \simeq 1 + k^{-2} \lambda_D^{-2}$, где $\lambda_D^{-2} = \lambda_{De}^{-2} + \lambda_{Di}^{-2}$. Поле частицы определяется известным интегралом

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2q}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2 + \lambda_D^{-2}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{q e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|/\lambda_D}}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|}. \quad (1.363)$$

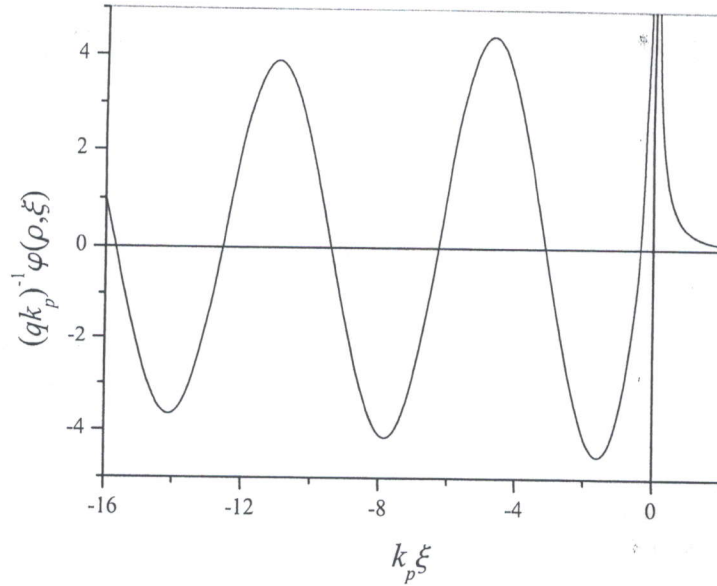


Рис. 1.19: Потенциал кильватерного поля $\varphi(\rho, \xi)$ быстрой заряженной частицы (движущейся вдоль оси OZ со скоростью v) как функция от $k_p \xi$ ($\xi = z - vt$) при $k_p \rho = 0.1$, $\nu/\omega_p = 0.04$, $k_p = \omega_p/v$. Здесь ν -частота столкновений, ρ -расстояние точки наблюдения от траектории частицы. Потенциал получен в модели холодной плазмы.

Стоящая в формуле (1.363) величина известна как *дебаевский потенциал*. Физическая причина отличия потенциала частицы в плазме от кулоновского состоит в том, что быстрые частицы плазмы, пролетая мимо пробной частицы, искривляют траекторию. При этом возникает перераспределение их плотности. Это динамическое перераспределение, а не статическое. В результате суммарное поле пробной частицы и частиц плазмы уже не является кулоновским. Оно более быстро спадает при удалении от пробной частицы или, как говорят, поле частицы экранируется частицами плазмы.

Если пробная частица движется с большей скоростью ($v > v_{th,e} \gg v_{th,i}$), то можно считать, что она налетает на практически покоящиеся частицы плазмы. В результате перед ней частицы плазмы не успевают сместиться и поле фактически является кулоновским. Позади пробной частицы возникает возмущение концентрации электронов плазмы и связанное с этим коллективное поле разделения зарядов. В этом поле электроны плазмы осциллируют с ленгмюровской частотой. В системе координат, связанной с частицей, этому полю разделения зарядов соответствует осциллирующий с координатой потенциал и знакопеременное поле (Рис. 1.19). Длина, на которой происходит изменение поля ($v/\omega_p = 1/k_p = \lambda_p/2\pi$), следует из условия резонансного взаимодействия ленгмюровских волн с частицей. Впервые на возможность осциллирующего поля за частицей указал в 1948 г. Н.Бор. Это поле называют *кильватерным полем*.

Возникновение кильватерного поля означает фактически возбуждение частицей продольной ленгмюровской волны. При этом частица тратит свою энергию и такие потери энергии называют *поляризационными потерями*. Из формулы (1.353) можно рассчитать величину этих потерь

$$-\frac{dW_l}{dt} = \frac{2q^2}{(2\pi)^2} \int dk \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k^2} \operatorname{Im} \frac{-1}{\epsilon_l(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}. \quad (1.364)$$

Как мы уже говорили, области прозрачности плазмы для распространения продольных волн отвечает условие $\epsilon_l'' \rightarrow 0$ (слабое затухание). Запишем знаменатель в этом предельном случае

$$\operatorname{Im} \frac{-1}{\epsilon_l} = \operatorname{Im} \frac{-1}{\epsilon_l' + i\epsilon_l''} = \operatorname{sign}(\epsilon_l'') \frac{|\epsilon_l''|}{\epsilon_l'^2 + \epsilon_l''^2} \Big|_{\epsilon_l'' \rightarrow 0} \rightarrow \pi \operatorname{sign}(\epsilon_l'') \delta(\epsilon_l'). \quad (1.365)$$

Поэтому поляризационные потери равны

$$-\frac{dW_l}{dt} = \frac{q^2}{2\pi} \int dk \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k^2} \delta(\varepsilon'_l) \operatorname{sign} \varepsilon''_l, \quad (1.366)$$

где для плазмы

$$\varepsilon'_l(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2}. \quad (1.367)$$

Введем цилиндрическую систему координат с осью OZ вдоль скорости частицы

$$-\frac{dW_l}{dt} = \frac{q^2 v}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_0^\infty \frac{k_\parallel dk_\parallel}{k_\parallel^2 + k_\perp^2} \delta\left(1 - \frac{\omega_p^2}{k_\parallel^2 v^2}\right). \quad (1.368)$$

Часто при вычислениях возникают δ -функции от сложных аргументов, которые можно представить в виде суммы δ -функций от более простых аргументов:

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|\varphi'(x_n)|}, \quad (1.369)$$

где $\varphi(x_n) = 0$. В нашем случае решение уравнения $1 - \omega_p^2/k_\parallel^2 v^2 = 0$ дает $k_\parallel = \pm \omega_p/v$ и

$$-\frac{dW_l}{dt} = q^2 \omega_p \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \int_0^\infty \frac{k_\parallel dk_\parallel}{k_\parallel^2 + k_\perp^2} \delta\left(k_\parallel - \frac{\omega_p}{v}\right) = \frac{q^2 \omega_p^2}{2v} \ln\left(1 + \frac{k_{\perp, \max}^2 v^2}{\omega_p^2}\right). \quad (1.370)$$

На верхнем пределе выражение расходится. Поэтому мы ввели обрезаящий параметр $k_{\perp, \max}$, который можно оценить двумя способами. Во-первых, начиная с $k_\perp \sim \lambda_D^{-1}$, волны затухают ($\varepsilon''_l \neq 0$) и поэтому $k_{\perp, \max} = \lambda_D^{-1}$. Если учесть это обстоятельство, то получим ответ

$$-\frac{dW_l}{dt} = \frac{q^2 \omega_p^2}{2v} \ln\left(1 + \frac{v^2}{v_{th,e}^2}\right). \quad (1.371)$$

(1952 г., Бом и Гросс). Во-вторых, расходимость интеграла связана с тем обстоятельством, что близкие столкновения с отклонениями на большие углы должным образом не учитываются при расчете диэлектрической проницаемости по бесстолкновительному уравнению Власова. Значение $k_{\perp, \max}$ является обратной величиной наименьшего классического расстояния, на которое могут сблизиться пробная частица и средняя плазменная частица:

$$k_{\perp, \max} = \frac{\mu \langle v_r^2 \rangle}{2|q|e} = \frac{\mu}{2|q|e} (v_{th,e}^2 + v^2). \quad (1.372)$$

Здесь μ -приведенная масса пробной и плазменной частицы, $\langle v_r^2 \rangle$ -среднее значение квадрата относительной скорости сталкивающихся частиц, которое с хорошей точностью можно представить в виде $\langle v_r^2 \rangle = v_{th,e}^2 + v^2$.

Следует заметить, что испускание продольных волн отличается от излучения поперечных волн. Фазовые скорости волн не постоянны ($\omega = \omega_p = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$). В результате, не возникает конуса и в основном поле излучения сосредоточено позади частицы, хотя волна распространяется вместе с частицей. На Рис. 1.20 показан график для поляризационных потерь в зависимости от скорости частицы. Видно, что они убывают с ростом скорости и возрастают при $v \rightarrow v_{th,e}$. Может возникнуть вопрос о том, почему же в плазме не накапливаются излученные волны. Ответ на этот вопрос состоит в том, что при $v < v_{th,e}$ частицы поглощают энергию. Для них можно говорить не о потерях, а о приобретении энергии или, как говорят, о *стохастическом нагреве*, см. §1.31.

1.29 Флуктуации электромагнитного поля в плазме

До сих пор мы обсуждали поле, создаваемое одной пробной частицей в среде. В плазме в качестве таковой можно взять любую частицу плазмы. Но из-за хаотического движения этих частиц сумма создаваемых ими полей (суммарное поле) также является случайной функцией координат и времени. Это значит, что можно указать лишь статистические средние характеристики поля. Про такие случайные электромагнитные поля говорят “флуктуации электромагнитного поля” или электромагнитные флуктуации. Часто вместо слова флуктуации используют слово “шум”.

Рассмотрим флуктуации продольных полей в плазме. Если выбрать начало координат таким образом, что в момент времени $t = 0$ частица находится в точке $\mathbf{r}_0$, то закон ее движения имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$. Если имеются частицы не одного, а многих сортов, то введем еще индекс сорта α и будем его приписывать к заряду, скорости, координате $(e_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)$. Продольное поле для частицы с начальным условием $\mathbf{r}_\alpha$ и $\mathbf{v}_\alpha$ в точке в момент времени t согласно формуле (1.350) равно

$$\mathbf{E}_{\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha t}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2ie_\alpha}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k^2 \epsilon_l(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\alpha)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha t)}. \quad (1.373)$$

Если в окрестности точки $\mathbf{r}_\alpha$ в объеме $d\mathbf{r}_\alpha$ в начальный момент находилось $N_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d\mathbf{v}_\alpha$ (N_α -фазовая плотность) частиц в интервале скоростей $d\mathbf{v}_\alpha$, то можно найти поле, создаваемое ими. Реально, это число меняется со временем и наш начальный момент ничем не выделен. Суммарное поле зависит от мгновенного числа частиц N_α , находящихся в окрестности заданной точки и имеющих данную скорость. Но если взять среднее по времени значение фазовой плотности, то оно от времени не зависит и равно функции распределения $F_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)$. По-существу, переход к использованию функции распределения эквивалентен усреднению по ансамблю реализации или в квазистатическом случае по времени. Можно сказать, что начальные условия берутся усредненными по времени (см. Приложение В). Полное среднее поле в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t в изотропной среде должно быть равно нулю. В этом легко убедиться

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \sum_\alpha \int d\mathbf{r}_\alpha \int d\mathbf{v}_\alpha F_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \mathbf{E}_{\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha t}(\mathbf{r}, t) \\ &= - \sum_\alpha \frac{2ie_\alpha}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}_\alpha \int d\mathbf{v}_\alpha F_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k^2 \epsilon_l(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\alpha)} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha t)}. \end{aligned} \quad (1.374)$$

Единственный вектор, от которого зависит поле в изотропной среде, это координата точки наблюдения $\mathbf{r}$. Но в однородной среде ни одна точка ничем не выделена по отношению к другой и поле не может являться функцией точки наблюдения и, следовательно, равно нулю.

Рассмотрим теперь автокорреляционную функцию для поля

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \rangle = \sum_\alpha \int d\mathbf{r}_\alpha d\mathbf{v}_\alpha F_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \mathbf{E}_{\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha t}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{r}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha t}(\mathbf{r}', t'). \quad (1.375)$$

Подставив сюда выражение для поля и используя формулу

$$\int d\mathbf{r}_\alpha e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_\alpha} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (1.376)$$

получим

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \rangle = \int d\mathbf{k} d\omega e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\omega(t - t')} P(\mathbf{k}, \omega). \quad (1.377)$$

В соответствии с общим свойством стационарных и однородных случайных функций корреляционная функция для поля зависит от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $t - t'$. Фурье-компонента для корреляционной функции $P(\mathbf{k}, \omega) = (E^2)_{\mathbf{k}, \omega}$ (спектральная плотность автокорреляционной функции) равна

$$P(\mathbf{k}, \omega) = (E^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2 |\epsilon_l(k, \omega)|^2} \sum_\alpha e_\alpha^2 \int d\mathbf{v} F_\alpha(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (1.378)$$

Задавая функцию распределения и вычисляя спектральную плотность (1.378), можно найти корреляционную функцию продольного поля в плазме.

1.30 Флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ)

В состоянии термодинамического равновесия имеется простая и универсальная связь между диэлектрической проницаемостью и спектральной плотностью корреляционной функции поля. Найдем эту связь на примере плазмы.

Согласно определению (1.295) продольная диэлектрическая проницаемость плазмы равна

$$\epsilon_l(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k^2} \int d\mathbf{v} \frac{F'_{\alpha}(v)}{v} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0}. \quad (1.379)$$

В состоянии равновесия функция распределения является максвелловской (1.297) и температура для всех частиц плазмы одинакова и равна T . При этом $F'_{\alpha}(v) = -\frac{1}{m_{\alpha} T} v F_{\alpha}(v)$. Подставим это выражение в ϵ_l и используем формулу Сахоцкого-Племеля (1.320)

$$\epsilon_l(k, \omega) = 1 - \frac{1}{T} \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2} \left[P \int d\mathbf{v} F_{\alpha}(v) \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} - \pi i \omega \int d\mathbf{v} F_{\alpha}(v) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \right]. \quad (1.380)$$

Отсюда получаем для мнимой части диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_l''(k, \omega) = \frac{\omega}{T} \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 e_{\alpha}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} F_{\alpha}(v) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (1.381)$$

Сравнивая это выражение с формулой (1.378), найдем

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4T}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_l''(k, \omega)}{\omega |\epsilon_l(k, \omega)|^2} = \frac{4T}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \frac{-1}{\epsilon_l(k, \omega)}. \quad (1.382)$$

Соотношение (1.382) и является флуктуационно-диссипационной теоремой. В общем виде для любых материальных сред эта теорема была сформулирована в 1951г. Калленом и Велтоном.

Рассмотрим средний квадрат напряженности поля в плазме для термодинамически равновесных флуктуаций. Согласно общему выражению

$$\langle E^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \int P(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{8\pi T}{\omega} \operatorname{Im} \frac{-1}{\epsilon_l(k, \omega)}. \quad (1.383)$$

Учтем только такие поля, которым отвечают излучаемые частицами продольные волны в плазме. Это значит, что эти поля слабо затухают и $\epsilon_l'' \rightarrow 0$ (если не учитывать пространственную дисперсию, то знак ϵ_l'' совпадает со знаком ω). Подставим $\epsilon_l'(k, \omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ в выражение для среднего квадрата напряженности поля. В результате получим

$$\langle E^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{4T}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \delta\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} 4\pi T. \quad (1.384)$$

Как и в 1.28, введем обрезание при интегрировании по k на величине λ_D^{-1} . В результате получим

$$\langle E^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{2T}{3\pi \lambda_D^3}. \quad (1.385)$$

Средний квадрат напряженности поля в плазме связан с плотностью энергии флуктуационных полей. Действительно, для одной монохроматической продольной волны согласно формуле (1.113) средняя по времени плотность энергии $\langle W \rangle$ равна

$$\langle W \rangle = \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \epsilon_l'(k, \omega)] |\mathbf{E}_0|^2. \quad (1.386)$$

Амплитуда волны связана со средним по времени значением поля в волне соотношением $\langle \mathbf{E}^2 \rangle = |\mathbf{E}_0|^2 / 2$ и при $\varepsilon'_l(k, \omega) \simeq 1 - \omega_p^2 / \omega^2$ $\langle W \rangle = \langle \mathbf{E}^2 \rangle / 4\pi$. Согласно определению $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ получаем

$$\langle W \rangle = \frac{T}{6\pi^2 \lambda_D^3} = \frac{n_e T}{6\pi^2 (n_e \lambda_D^3)}. \quad (1.387)$$

Видно, что отношение средней плотности энергии флуктуационных полей составляет лишь малую часть, пропорциональную $(n_e \lambda_D^3)^{-1}$, от плотности кинетической энергии частиц, поскольку для идеальной плазмы число частиц в дебаевской сфере $n_e \lambda_D^3 \gg 1$.

Формулу (1.387) легко получить из правил квазиклассического квантования и предположения, что на каждую колебательную степень свободы приходится энергия T .

1.31 Стохастическое ускорение

Поляризационные потери, рассмотренные в §1.28, не являются единственным механизмом обмена энергией между пробным зарядом и плазменной средой. Можно представить себе механизм набора энергии, при котором пробный заряд отбирает энергию у окружающих флуктуирующих электрических полей. Ясно, что такой "противодействующий" механизм должен существовать, так как пробный заряд с энергией, равной средней тепловой энергии плазмы, находится в равновесии и не теряет, и не увеличивает энергию. В то время как поляризационные потери не зависят от массы пробной частицы, скорость набора энергии обратно пропорциональна массе. Поэтому стохастический набор энергии играет существенную роль при движении через плазму легкой частицы (электрона), но им можно пренебречь для ионов.

Уравнение движения пробного заряда (заряд q , масса M), находящегося в некоторой точке $\mathbf{r}(t)$ в момент времени t , есть

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{q}{M} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) \quad (1.388)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ -полное самосогласованное электрическое поле в точке нахождения частицы. Интегрируя уравнение движения, получаем

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{q}{M} \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(\mathbf{r}(t'), t') dt' \simeq \mathbf{v}_0 + \frac{q}{M} \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(\mathbf{R}(t'), t') dt', \quad (1.389)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{q}{M} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t''), t'') dt'' \\ &\simeq \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{q}{M} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} \mathbf{E}(\mathbf{R}(t''), t'') dt'', \end{aligned} \quad (1.390)$$

где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ -положение и скорость в начальный момент времени $t = -\infty$ соответственно. Вторая форма уравнений (1.389) и (1.390) является приближенной, основанной на предположении, что в течение выбранного короткого интервала времени траектория частицы мало отличается от прямой линии:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t. \quad (1.391)$$

В этом же приближении электрическое поле можно разложить в ряд Тейлора:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) = \mathbf{E}(\mathbf{R}(t), t) + \frac{q}{M} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' E_j(\mathbf{R}(t''), t'') \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{R}(t), t)}{\partial X_j}, \quad (1.392)$$

где суммирование по j проводится по всем трем ортогональным координатам.

В формулу для скорости изменения энергии пробного заряда (см. выражения (1.351) и (1.352))

$$\frac{dW}{dt} = q \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) \rangle \quad (1.393)$$

подставим (1.389) и (1.392) для $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t)$ соответственно и удержим члены вплоть до второго порядка по q , тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} = & q \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}(t), t) \rangle + \frac{q^2}{M} \int_{-\infty}^t dt' \langle \mathbf{E}(\mathbf{R}(t'), t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}(t), t) \rangle \\ & + \frac{q^2}{M} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left\langle E_j(\mathbf{R}(t''), t'') \frac{\partial}{\partial X_j} [\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}(t), t)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.394)$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю.

Так как усредненное по времени значение флуктуирующей части $\mathbf{E}$ равно нулю, то, следовательно, электрическое поле, входящее в первый член уравнения (1.394), обусловлено самим движущимся пробным зарядом. Действительно, этот первый член в точности равен поляризационным потерям, которые обсуждались в предыдущем разделе, и вычисляя его, мы приходим к выражению (1.364). В уравнении (1.394) интересными для нас будут второй и третий члены; они представляют скорость обмена энергией, обусловленного пространственно-временными корреляциями между флуктуирующими полями плазмы. После довольно длинных преобразований Фурье второй и третий члены можно записать через спектральную плотность мощности $P(\mathbf{k}, \omega) = \langle \mathbf{E}^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}$ флуктуации электрического поля. Оказалось, что эти два члена можно объединить; в результате получим

$$\frac{dW_{st}}{dt} = \frac{\pi q^2}{M} \int d\mathbf{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega P(\mathbf{k}, \omega)] \right\}_{\omega=\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (1.395)$$

При выводе (1.395) индекс ноль у вектора начальной скорости $\mathbf{v}_0$ был опущен и были использованы соотношения $[\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] = 0$ (рассматривается только продольное поле) и

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}', \omega') \rangle = P(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \delta(\omega' + \omega), \quad (1.396)$$

$$\langle [\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] [\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}', \omega')] \rangle = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) P(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \delta(\omega' + \omega). \quad (1.397)$$

Плотность мощности $P(\mathbf{k}, \omega)$ для термически равновесной плазмы определяется выражением (1.382), а для неравновесной плазмы — выражением (1.378). Так как рассматривается изотропная плазма, то спектральная плотность мощности $P(\mathbf{k}, \omega)$ не зависит от направления волнового вектора $\mathbf{k}$, т.е. $P(\mathbf{k}, \omega) = P(k, \omega)$. Поэтому в (1.395) можно провести интегрирование по углам; это приведет к следующему результату:

$$\frac{dW_{st}}{dt} = \frac{(2\pi)^2 q^2}{M} \int_0^\infty P(k, kv) k^2 dk. \quad (1.398)$$

В частном случае, когда пробный заряд движется через термически равновесную плазму, выражение для скорости стохастического набора энергии частицей имеет вид

$$\frac{dW_{st}}{dt} = \frac{2Tq^2}{\pi Mv} \int_0^\infty \text{Im} \frac{-1}{\epsilon_l(k, kv)} k dk. \quad (1.399)$$

Заметим, что интеграл обрывается при некотором значении $k = k_{\max}$.

В случае максвелловской электронной плазмы (считаем, что диэлектрическая проницаемость $\epsilon_l(k, \omega)$ определяется вкладом только электронной компоненты, согласно (1.299) и (1.321)) для стохастического набора энергии получим:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{st}}{dt} = & \frac{m\omega_p^2 q^2}{\pi Mv} \left\{ \frac{f(\lambda)}{2} \ln \frac{[g(\lambda) + \xi^2]^2 + f^2(\lambda)}{g^2(\lambda) + f^2(\lambda)} \right. \\ & \left. - g(\lambda) \left[\arctan \frac{g(\lambda) + \xi^2}{f(\lambda)} - \arctan \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.400)$$

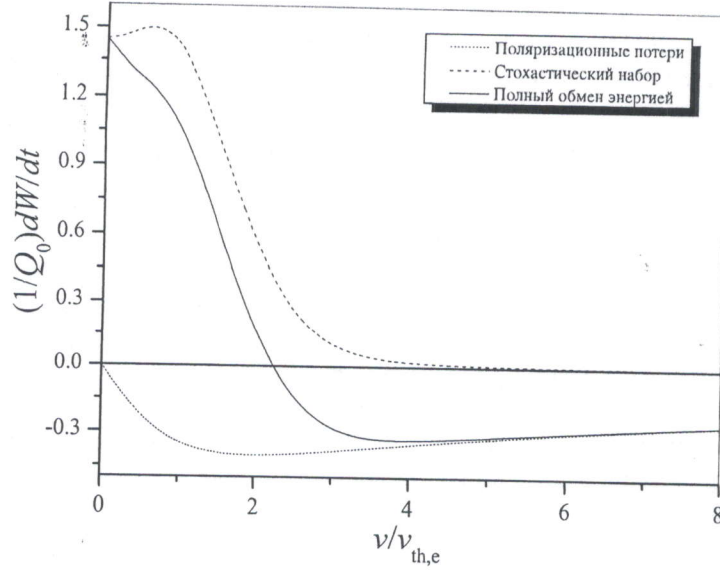


Рис. 1.20: Зависимость изменения энергии в единицу времени (в единицах $Q_0 = q^2 \omega_p^2 / v_{th,e}$) от скорости движения частицы.

где $\lambda = v/v_{th,e}$, $\xi = k_{max} \lambda_D$, а функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ определяются формулами (1.329) и (1.330) соответственно.

На Рис. 1.20 результат численного расчета (1.400) для случая движения пробного электрона ($M = m$) через электронную плазму представлен верхней пунктирной кривой. Сплошная кривая на Рис. 1.20 представляет полную скорость обмена энергией. Видно, что поляризационные потери преобладают при высоких скоростях электрона ($v > v_{th,e}$), а стохастическое ускорение преобладает при малых скоростях. Когда энергия пробного электрона равна средней тепловой энергии электронов плазмы, $mv^2/2 = T$, пробный электрон находится в тепловом равновесии с частицами среды и поэтому в среднем не приобретает и не теряет энергии.

1.32 Флуктуации плотности заряда в плазме

Флуктуации продольного электрического поля в плазме связаны с флуктуациями плотности заряда $\delta\rho(\mathbf{r}, t)$, которые можно найти с помощью уравнения Пуассона $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\delta\rho$. Используя Фурье-разложение, установим с помощью этого уравнения связь между Фурье-компонентами напряженности электрического поля и плотности заряда

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i \mathbf{k} \delta\rho(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 \varepsilon_l(k, \omega)}. \quad (1.401)$$

Спектральная плотность корреляционной функции связана со средним значением Фурье-компонент (см. Приложение В)

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (E^2)_{\mathbf{k}, \omega} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (1.402)$$

$$\langle \delta\rho(\mathbf{k}, \omega) \delta\rho(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (\delta\rho^2)_{\mathbf{k}, \omega} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (1.403)$$

Подставим формулу (1.401) в первое из этих равенств и используем второе равенство

$$(E^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{(4\pi)^2}{k^2 |\varepsilon_l(k, \omega)|^2} (\delta\rho^2)_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (1.404)$$

Таким образом устанавливается связь между спектральными плотностями корреляционных функций флуктуаций плотности заряда и электрического поля. Далее, используя формулу (1.378), легко находим

$$(\delta\rho^2)_{\mathbf{k},\omega} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v} F_{\alpha}(v) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (1.405)$$

В формулу (1.405) не входит диэлектрическая проницаемость плазмы и она определяет флуктуации невзаимодействующих, свободно движущихся частиц. В действительности же при возникновении флуктуаций заряда сопровождается коллективными электрическими полями, которые в свою очередь ведут к дополнительному возмущению плотности заряда. В результате полные флуктуации заряда в плазме отличаются от тех, которые определяются формулой (1.405).

Учтем индуцированный заряд. Для этого примем, что полное возмущение плотности заряда состоит из двух слагаемых $\delta\rho$ и $\delta\rho'$. Первое слагаемое описывает флуктуации свободно движущихся частиц, а второе — флуктуации индуцированного заряда. Создаваемое этими зарядами поле удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi [\delta\rho + \delta\rho'(\mathbf{E})], \quad (1.406)$$

где $\delta\rho'$ выражается через $\mathbf{E}$, а $\delta\rho$ — не выражается.

Из уравнения непрерывности следует, что

$$\delta\rho' = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{j}') = \frac{1}{\omega} k_i \sigma_{ij} E_j. \quad (1.407)$$

Для Фурье-компоненты электрического поля получаем

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 4\pi \left(\delta\rho + \frac{1}{\omega} k_i \sigma_{ij} E_j \right). \quad (1.408)$$

или $ik_i \varepsilon_{ij} E_j = 4\pi \delta\rho$. По-существу мы пришли к уравнению $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \delta\rho$. Этого и следовало ожидать, поскольку индукция $\mathbf{D}$ в отличие от поля $\mathbf{E}$ учитывает и индуцированные заряды.

Рассмотрим изотропную среду и продольные поля. Это значит, что $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ задается выражением (1.41) и $\mathbf{E} = (\mathbf{k}/k) E$. Тогда из уравнения $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \delta\rho$ получим связь между $\delta\rho$ и $\mathbf{E}$, совпадающую с формулой (1.401).

Найдем теперь плотность индуцированного электронного заряда

$$\delta\rho' = \frac{1}{\omega} k_i \sigma_{ij}^{(e)} E_j = -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{k_i k_j \sigma_{ij}^{(e)}}{k^2} \frac{\delta\rho}{\varepsilon_l}. \quad (1.409)$$

Каждый сорт частиц вносит аддитивный вклад в диэлектрическую проницаемость

$$\begin{aligned} \varepsilon_l(k, \omega) &= \frac{k_i k_j \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2} = \frac{k_i k_j}{k^2} \left[\delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sum_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega) \right] \\ &= 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{k_i k_j \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2} = 1 + \sum_{\alpha} \delta\varepsilon_{\alpha}(k, \omega), \end{aligned} \quad (1.410)$$

где

$$\delta\varepsilon_{\alpha}(k, \omega) = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{k_i k_j \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_l^{(\alpha)}(k, \omega) \quad (1.411)$$

т.н. парциальная диэлектрическая проницаемость. Используя это обозначение, получим $\delta\rho'_e = -(\delta\varepsilon_e/\varepsilon_l)\delta\rho$. Аналогично можно рассчитать индуцированную плотность ионного заряда $\delta\rho'_i = -(\delta\varepsilon_i/\varepsilon_l)\delta\rho$. Теперь можно вычислить, скажем, полную плотность электронного заряда

$$\begin{aligned} \rho_e &= \delta\rho_e + \delta\rho'_e = \delta\rho_e - \frac{\delta\varepsilon_e}{\varepsilon_l} \delta\rho = \delta\rho_e - \frac{\delta\varepsilon_e}{\varepsilon_l} (\delta\rho_e + \delta\rho_i) \\ &= \delta\rho_e \frac{\varepsilon_l - \delta\varepsilon_e}{\varepsilon_l} - \frac{\delta\varepsilon_e}{\varepsilon_l} \delta\rho_i. \end{aligned} \quad (1.412)$$

Поскольку $\varepsilon_l = 1 + \delta\varepsilon_l + \delta\varepsilon_i$, то окончательно получим

$$\rho_e = \delta\rho_e \frac{1 + \delta\varepsilon_i}{\varepsilon_l} - \frac{\delta\varepsilon_e}{\varepsilon_l} \delta\rho_i. \quad (1.413)$$

Это выражение записано для Фурье-компонент. Найдём спектральную плотность флуктуаций заряда. Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \langle \rho_e(\mathbf{k}, \omega) \rho_e(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= \langle \delta\rho_e(\mathbf{k}, \omega) \delta\rho_e(\mathbf{k}', \omega') \rangle \frac{1 + \delta\varepsilon_i(k, \omega)}{\varepsilon_l(k, \omega)} \frac{1 + \delta\varepsilon_i(k', \omega')}{\varepsilon_l(k', \omega')} \\ &+ \langle \delta\rho_i(\mathbf{k}, \omega) \delta\rho_i(\mathbf{k}', \omega') \rangle \frac{\delta\varepsilon_e(k, \omega) \delta\varepsilon_e(k', \omega')}{\varepsilon_l(k, \omega) \varepsilon_l(k', \omega')}. \end{aligned} \quad (1.414)$$

Слагаемое $\langle \delta\rho_e \delta\rho_i \rangle$ равно нулю, поскольку свободные флуктуации плотности электронов и ионов статистически независимы. Используя процедуру усреднения

$$\langle \delta\rho_\alpha(\mathbf{k}, \omega) \delta\rho_\alpha(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (\delta\rho_\alpha^2)_{\mathbf{k}, \omega} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (1.415)$$

найдем окончательный ответ

$$(\rho_e^2)_{\mathbf{k}, \omega} = (\delta\rho_e^2)_{\mathbf{k}, \omega} \left| \frac{1 + \delta\varepsilon_i(k, \omega)}{\varepsilon_l(k, \omega)} \right|^2 + (\delta\rho_i^2)_{\mathbf{k}, \omega} \left| \frac{\delta\varepsilon_e(k, \omega)}{\varepsilon_l(k, \omega)} \right|^2, \quad (1.416)$$

где $(\delta\rho_\alpha^2)_{\mathbf{k}, \omega}$ определено формулой (1.405). Видно, что с учетом индуцированного заряда флуктуации ионов влияют на флуктуации электронов. Помимо этого, флуктуации зависят от свойств плазмы. Если $\varepsilon_l \rightarrow 0$, то флуктуации становятся особенно большими. Эти флуктуации, возникнув в одном месте, распространяются в виде волн по всей плазме.

1.33 Основы теории рассеяния

При рассеянии волн энергия падающей электромагнитной волны переходит в энергию волн либо с другими частотами, либо с другими направлениями распространения.

Рассмотрим простейший пример рассеяния электромагнитной волны на одном электроны. В поле падающей волны электрон совершает колебания и излучает волны. Энергия, излучаемая электроном в единицу времени в единицу телесного угла, называется *интенсивностью* dI . *Дифференциальным сечением рассеяния* называют отношение dI к плотности потока энергии в падающей волне S

$$d\sigma = \frac{dI}{S}. \quad (1.417)$$

Полное сечение рассеяния в числителе содержит полную интенсивность излучения, проинтегрированную по всем углам $\sigma = I/S$.

Если имеется много рассеивающих электронов, то волны, рассеянные разными из них, могут гасить друг друга. В пределе очень большого числа электронов всегда найдется такой электрон, который погасит излучение данного и рассеяния не будет. Но при этом предполагается, что рассеивающие центры (электроны) распределены в пространстве равномерно. Если же они распределены не вполне равномерно, то какая-то доля излучения не будет погашена и рассеяние возникнет. Неравномерность распределения рассеивающих центров возникает из-за флуктуаций. Поэтому в сплошных средах рассеяние связано с флуктуациями. Для описания рассеяния в сплошной среде удобно вместо сечения рассеяния на всем теле рассматривать сечение, отнесенное к единице объема. Такую величину называют *коэффициентом экстинкции*

$$h = \frac{\sigma}{V}. \quad (1.418)$$

Теория рассеяния электромагнитных волн в сплошной среде (в том числе и в плазме) строится следующим образом. Предполагается, что под действием падающей волны в среде помимо

среднего тока из-за флуктуаций возникают еще флуктуационные токи $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$. Эти токи являются случайными, поскольку возникают из-за флуктуаций, и сторонними. Их не следует путать с регулярным током, возникающим в среде и не связанным с флуктуациями. Будем называть эти токи *токами рассеяния*. Эти токи являются источниками рассеянных полей, которые можно найти из уравнений Максвелла (1.11)

$$\text{rot } \mathbf{B}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, \quad \text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}. \quad (1.419)$$

Умножим первое уравнение на $\mathbf{E}'$, а второе на $\mathbf{B}'$ и вычтем полученные соотношения одно из другого. В результате получим (сравни с §1.7)

$$\text{div } \mathbf{S}' + \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E}' \cdot \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \mathbf{B}' \cdot \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \right) = -\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E}', \quad (1.420)$$

где

$$\mathbf{S}' = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'] \quad (1.421)$$

вектор Умова-Пойнтинга, определяющий плотность потока энергии рассеянной волны. Проинтегрируем полученное соотношение по объему V , усредним по времени и по ансамблю (двойное усреднение обозначено $\langle\langle \dots \rangle\rangle$). В результате получим

$$\left\langle\left\langle \int \mathbf{S}' \cdot d\mathbf{S} \right\rangle\right\rangle + \frac{1}{4\pi} \left\langle\left\langle \int_V d\mathbf{r} \left(\mathbf{E}' \cdot \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \mathbf{B}' \cdot \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \right) \right\rangle\right\rangle = - \int_V d\mathbf{r} \langle\langle \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E}' \rangle\rangle. \quad (1.422)$$

Первое слагаемое определяет энергию, выходящую из единицы объема в виде рассеянных волн. Второе — энергию, поглощаемую в среде (см. §1.8); слагаемое справа определяет энергию, выделяемую токами рассеяния в виде рассеянных волн. Пренебрежем поглощением рассеянных волн. Тогда полная интенсивность выходящего рассеянного излучения равна

$$I = \left\langle\left\langle \int \mathbf{S}' \cdot d\mathbf{S} \right\rangle\right\rangle = - \int_V d\mathbf{r} \langle\langle \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E}' \rangle\rangle. \quad (1.423)$$

Согласно определению (1.418) полный коэффициент экстинкции равен

$$h = -\frac{1}{SV} \int_V d\mathbf{r} \langle\langle \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E}' \rangle\rangle. \quad (1.424)$$

Формула (1.424) не является еще окончательной. В нее входит поле $\mathbf{E}'$, которое следует выразить через ток $\mathbf{j}_0$. Это можно сделать, используя снова уравнения поля. Произведя операцию rot со вторым уравнением в (1.419) (сравни с §1.26, формула (1.341)), получим

$$\text{rot rot } \mathbf{E}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}'}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_0}{\partial t}. \quad (1.425)$$

Если произвести преобразование Фурье в этом уравнении, то, как и в §1.26, получим

$$E'_i(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega} M_{li}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) j_{0i}(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.426)$$

где $M_{li}(\mathbf{k}, \omega)$ — максвелловский тензор (1.344).

Рассмотрим теперь коэффициент экстинкции. Входящий в это выражение интеграл преобразуем, используя Фурье-разложение

$$\frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \langle\langle \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E}' \rangle\rangle = \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \int d\omega d\mathbf{k} \int d\omega' d\mathbf{k}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-i(\omega+\omega')t} \langle\langle \mathbf{E}'(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{j}_0(\mathbf{k}', \omega') \rangle\rangle. \quad (1.427)$$

Используем связь между Фурье-компонентами напряженности поля и плотности тока. В результате в выражении (1.427) возникнут произведения типа $j_{0i}(\mathbf{k}, \omega) j_{0j}(\mathbf{k}', \omega')$. Проведем усреднение, используя известную нам процедуру

$$\langle\langle j_{0i}(\mathbf{k}, \omega) j_{0j}(\mathbf{k}', \omega') \rangle\rangle = (j_{0i} j_{0j})_{\mathbf{k}, \omega} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}). \quad (1.428)$$

После простых преобразований получим

$$\frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \langle \langle \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{E}' \rangle \rangle = - \int d\omega d\mathbf{k} \frac{4\pi i}{\omega} \left(M_{ji}^{-1} \right)^A (j_{0i} j_{0j})_{\mathbf{k}, \omega}, \quad (1.429)$$

где

$$\left(M_{ji}^{-1} \right)^A = \frac{1}{2} \left(M_{ji}^{-1} - M_{ij}^{-1*} \right) \quad (1.430)$$

антиэрмитовская часть обратного максвелловского тензора. Таким образом, коэффициент экстинкции (1.424) выражается через спектральную плотность корреляционной функции токов рассеяния

$$h = \frac{1}{S} \int d\omega d\mathbf{k} \frac{4\pi i}{\omega} \left(M_{ji}^{-1} \right)^A (j_{0i} j_{0j})_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (1.431)$$

Формула (1.431) позволяет рассчитать рассеяние в произвольной материальной среде, если известны характеристики флуктуаций.

1.34 Рассеяние и трансформация волн

В изотропной среде можно выразить обратный максвелловский тензор через продольную и поперечную диэлектрические проницаемости (формула (1.349)). Используя определение антиэрмитовской части обратного максвелловского тензора, получим

$$\left(M_{ij}^{-1} \right)^A = -i \frac{k_i k_j}{k^2} \operatorname{Im} \frac{-1}{\varepsilon_l(k, \omega)} - i \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \operatorname{Im} \frac{-1}{\varepsilon_{tr}(k, \omega) - k^2 c^2 / \omega^2}. \quad (1.432)$$

Коэффициент экстинкции после подстановки полученного выражения будет содержать два слагаемых

$$h = \frac{4\pi}{S} \int \frac{d\omega}{\omega} d\mathbf{k} (j_{0i} j_{0j})_{\mathbf{k}, \omega} \left[\frac{k_i k_j}{k^2} \operatorname{Im} \frac{-1}{\varepsilon_l(k, \omega)} + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \operatorname{Im} \frac{-1}{\varepsilon_{tr}(k, \omega) - k^2 c^2 / \omega^2} \right]. \quad (1.433)$$

Первое слагаемое определяет возникновение в среде индуцированных падающей волной продольных полей, а второе — поперечных. Однако выходить из объема, где возникло рассеяние, могут только те поля, которые оказываются в областях прозрачности. Иными словами, только те компоненты Фурье, для которых затухание мало и они являются собственными волнами среды. Чтобы выделить эти компоненты в общем выражении, нужно перейти к пределу $\varepsilon_l'' \rightarrow 0$ и $\varepsilon_{tr}'' \rightarrow 0$. В результате для коэффициента экстинкции получаем два слагаемых

$$h = h_l + h_{tr} = \frac{4\pi^2}{S} \int \frac{d\omega}{\omega} d\mathbf{k} (j_{0i} j_{0j})_{\mathbf{k}, \omega} \left[\frac{k_i k_j}{k^2} \operatorname{sign}(\varepsilon_l''(k, \omega)) \delta(\varepsilon_l'(k, \omega)) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \operatorname{sign}(\varepsilon_{tr}''(k, \omega)) \delta\left(\varepsilon_{tr}'(k, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) \right]. \quad (1.434)$$

Первое слагаемое определяет образование в результате процесса рассеяния продольных волн, второе — поперечных.

Если на среду падает поперечная волна, то возникнуть могут в результате ее взаимодействия с флуктуациями как поперечные волны (собственно *рассеяние*), так и продольные волны (*трансформация*). В общем случае, если в результате рассеяния тип волны не изменяется, то говорят о рассеянии. Если же он изменяется, то говорят о трансформации. В частности, энергия продольных волн в результате процесса трансформации может выходить из среды в виде поперечных волн, т.е. в виде обычного электромагнитного излучения.

1.35 Ток рассеяния и коэффициент экстинкции в плазме

При построении теории рассеяния в плазме исходят из ряда естественных упрощающих предположений. Прежде всего предполагают, что рассеяние возникает в основном на флуктуациях концентрации более легких электронов δn_e . Помимо этого обычно считают, что эти флуктуации изменяются во времени достаточно медленно (мало изменяются за период изменения поля в падающей волне). Эти предположения позволяют для нахождения $\mathbf{j}_0$ использовать одночастичную модель плазмы. Согласно этой модели все электроны осциллируют в поле падающей волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t) \quad (1.435)$$

со скоростью

$$\mathbf{v} = -\mathbf{v}_E \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t), \quad (1.436)$$

где $\mathbf{v}_E = e\mathbf{E}_0/m\omega_0$. При таких осцилляциях возникает ток. Если не учитывать флуктуаций электронной концентрации ($n_e = n_{e0}$), то он равен $\mathbf{j} = -en_{e0}\mathbf{v}$. Но кроме того возникает дополнительный ток из-за флуктуаций, который нас и интересует (ток рассеяния)

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}_E \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t) \delta n_e(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{v}_E \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t) \rho_e(\mathbf{r}, t). \quad (1.437)$$

Проведем разложение Фурье. В результате получим связь между компонентами Фурье тока и флуктуаций плотности заряда электронов

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\mathbf{v}_E}{2} [\rho_e(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \omega + \omega_0) + \rho_e(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0)]. \quad (1.438)$$

Согласно процедуре усреднения для Фурье компонент отсюда получим связь между плотностями корреляционных функций

$$(\mathbf{j}_0 \mathbf{i} \mathbf{j}_0 \mathbf{j})_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{v_E i v_E j}{4} [(\rho_e^2)_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \omega + \omega_0} + (\rho_e^2)_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0}]. \quad (1.439)$$

При получении формулы (1.439) возникают еще слагаемые, пропорциональные $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' \pm 2\mathbf{k}_0)$ и $\delta(\omega + \omega' \pm 2\omega_0)$. Однако мы их отбрасываем, поскольку они не описывают ток рассеяния с частотой, близкой к частоте падающей волны. Они могут быть существенны лишь в том случае, если частота изменения поля в падающей волне близка к характерной частоте флуктуаций.

Формулу (1.439) можно не использовать для расчета коэффициента экстинкции в плазме и, как оказывается, она справедлива не только для одночастичной модели, но и для других моделей плазмы.

Рассмотрим рассеяние волн в плазме, где частицы имеют максвелловскую функцию распределения (1.297). Подставим эту функцию в выражение для спектральной плотности флуктуаций заряда (1.405)

$$(\delta \rho_\alpha^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{n_\alpha e_\alpha^2}{(2\pi)^{9/2} v_{th, \alpha}^3} \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) e^{-v^2/2v_{th, \alpha}^2}. \quad (1.440)$$

Введем систему координат с осью OZ вдоль волнового вектора $\mathbf{k}$. В результате для спектральной плотности флуктуаций не взаимодействующих зарядов получим

$$(\delta \rho_\alpha^2)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{n_\alpha e_\alpha^2}{(2\pi)^{7/2} k v_{th, \alpha}} e^{-\omega^2/2k^2 v_{th, \alpha}^2}. \quad (1.441)$$

Флуктуации плотности электронного заряда с учетом взаимодействия (1.416) содержат продольную диэлектрическую проницаемость. Для максвелловской плазмы она определяется формулами (1.299) и (1.321).

Рассмотрим наиболее важный с практической точки зрения процесс рассеяния, когда на плазму падает поперечная волна и возникает также поперечная волна. Соответствующее слагаемое в коэффициенте экстинкции (1.434) с учетом формулы (1.439) запишем в виде

$$h_{tr} = \frac{2\pi^2}{S} \int d\mathbf{k} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}_E]^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|\omega|} \delta\left(\varepsilon'_{tr}(k, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) (\rho_e^2)_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0}. \quad (1.442)$$

При получении этого результата в выражении для $(\rho_e^2)_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0, \omega+\omega_0}$ сделана замена $\omega \rightarrow -\omega$, $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$, и учтена, что спектральная плотность корреляционной функции является четной функцией своих аргументов. Здесь величина (ρ_e^2) определяется формулой (1.416).

При рассеянии с малым изменением частоты ($|\Delta\omega| \ll \omega_0$, где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$) рассеянная волна имеет частоту, близкую к частоте падающего излучения. Следовательно и длины волн у них мало отличаются ($k \simeq k_0$). Величина же

$$\Delta k^2 = |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|^2 \quad (1.443)$$

при этом может быть не мала. Она легко выражается через угол θ между векторами $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k}$

$$\Delta k^2 = k^2 + k_0^2 - 2kk_0 \cos \theta \simeq 2k_0^2 (1 - \cos \theta) = 4k_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1.444)$$

Величина (ρ_e^2) в формуле (1.442) зависит от разности частот и разности волновых векторов $\Delta \mathbf{k}$. Поэтому аргументы как в выражении (1.441), так и в диэлектрических проницаемостях можно записать в виде

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k v_{th,\alpha}} = \frac{\Delta\omega}{2k_0 v_{th,\alpha} |\sin \frac{\theta}{2}|}. \quad (1.445)$$

Содержащийся в диэлектрических проницаемостях множитель

$$\frac{1}{(\Delta k \lambda_{D\alpha})^2} = \frac{1}{4k_0^2 \lambda_{D\alpha}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (1.446)$$

мал или велик в зависимости от соотношения между длиной волны (углом рассеяния) и дебаевским радиусом. Если дебаевский радиус большой по сравнению с длиной волны, то можно положить $\varepsilon_l \simeq 1$ и $\delta\varepsilon_\alpha \simeq 0$. В этом случае говорят о рассеянии *коротких волн*. Если же $\Delta k \lambda_{D\alpha} < 1$, то говорят о рассеянии *длинных волн*.

1.36 Рассеяние коротких волн ($\lambda_0 < \lambda_{De}$)

Для рассеяния коротких волн можно считать частицы движущимися как в вакууме ($\varepsilon_l \sim 1$) и пренебречь коллективными эффектами при описании флуктуаций частиц. Тогда формула (1.442) принимает вид

$$h_{tr} = \frac{n_e e^2}{2S (2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \frac{1}{\Delta k v_{th,e}} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}_E]^2}{k^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|\omega|} \delta \left(1 - \frac{\omega_p^2 + k^2 c^2}{\omega^2} \right) \exp \left(-\frac{\Delta\omega^2}{2\Delta k^2 v_{th,e}^2} \right) \quad (1.447)$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\Delta k \simeq 2k_0 |\sin(\theta/2)|$. Здесь, как уже отмечалось выше, учтено рассеяние только на электронах.

Введем сферическую систему координат с осью OZ вдоль вектора $\mathbf{k}_0$ (напомним, что $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{v}_E = 0$). В этой системе $d\mathbf{k} = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi = k^2 dk d\Omega$ и

$$\frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}_E]^2}{k^2} = v_E^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi). \quad (1.448)$$

Чтобы использовать при интегрировании δ -функцию, воспользуемся формулой (1.369). В результате запишем формулу для коэффициента экстинкции в виде

$$h_{tr} = \frac{n_e e^2 v_E^2}{8 (2\pi)^{3/2} k_0 c^3 v_{th,e} S} \int_0^\infty \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \omega d\omega \int_0^\infty \delta \left(k - \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \right) dk \times \int d\Omega \frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{|\sin(\theta/2)|} \left[\exp \left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{8k_0^2 v_{th,e}^2 \sin^2(\theta/2)} \right) + \exp \left(-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{8k_0^2 v_{th,e}^2 \sin^2(\theta/2)} \right) \right]. \quad (1.449)$$

При интегрировании по k вклад дает только одна из δ -функций.

Запишем полученное выражение в форме

$$h_{tr} = \int_0^\infty d\omega \int d\Omega \frac{d^2 h_{tr}}{d\omega d\Omega}, \quad (1.450)$$

где под интегралом стоит дифференциальный коэффициент экстинкции, определяющий рассеяние в элемент телесного угла с частотой ω

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_{tr}}{d\omega d\Omega} &= \frac{n_e e^2 v_E^2}{8 (2\pi)^{3/2} k_0 c^3 v_{th,e} S} \omega \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \\ &\times \frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{|\sin(\theta/2)|} \left[\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{8k_0^2 v_{th,e}^2 \sin^2(\theta/2)}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{8k_0^2 v_{th,e}^2 \sin^2(\theta/2)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.451)$$

Плотность потока энергии S падающего на плазму излучения согласно формуле (1.82) равна $c^2 k_0 E_0^2 / 8\pi\omega_0$. Подставляя это выражение и учитывая, что

$$k_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2} \quad (1.452)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_{tr}}{d\omega d\Omega} &= \frac{n_e r_e^2}{2 (2\pi)^{1/2} k_0 v_{th,e}} \left[\frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega_p^2}} \right] \\ &\times \frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{|\sin(\theta/2)|} \left[\exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{8k_0^2 v_{th,e}^2 \sin^2(\theta/2)}\right) + \exp\left(-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{8k_0^2 v_{th,e}^2 \sin^2(\theta/2)}\right) \right], \end{aligned} \quad (1.453)$$

где $r_e = e^2/mc^2$ -классический радиус электрона. Поскольку частота рассеянного излучения ω близка к ω_0 , то множитель в квадратной скобке близок к 1. Из формулы (1.453) следует, что дифференциальный коэффициент экстинкции зависит от угла наблюдения. Это значит, что как спектр рассеянного излучения, так и его интенсивность также зависят от угла наблюдения. Если рассмотреть спектральное распределение интенсивности при фиксированном угле, то он имеет гауссовскую форму (Рис. 1.21) с шириной на полувысоте $\Delta\omega_s$, равной

$$\Delta\omega_s = (2\sqrt{2\ln 2}) k_0 v_{th,e} |\sin(\theta/2)|. \quad (1.454)$$

Зависимость ширины спектра (*ширина линии рассеяния*) связана с температурой электронов. В разреженной плазме ($\omega_p \ll \omega_0$) эта связь наиболее проста ($\Delta\omega_s \sim \omega_0(v_{th,e}/c)$).

Вернемся к вычислению полного коэффициента экстинкции. Выполним интегрирование по частоте. Для этого введем новую независимую переменную

$$x = \frac{\omega - \omega_0}{2\sqrt{2}k_0 v_{th,e} |\sin(\theta/2)|}, \quad dx = \frac{d\omega}{2\sqrt{2}k_0 v_{th,e} |\sin(\theta/2)|}. \quad (1.455)$$

Получим

$$\int_0^\infty d\omega \frac{d^2 h_{tr}}{d\omega d\Omega} = n_e r_e^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi). \quad (1.456)$$

Теперь произведем интегрирование по углам. В результате получим полный коэффициент экстинкции

$$h_{tr} = \pi n_e r_e^2 \int_0^\pi (2 - \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} n_e r_e^2. \quad (1.457)$$

Обратимся теперь к физической картине рассеяния. Для длин волн падающего излучения намного более коротких, чем Дебаевский радиус, каждый электрон рассеивает независимо от других

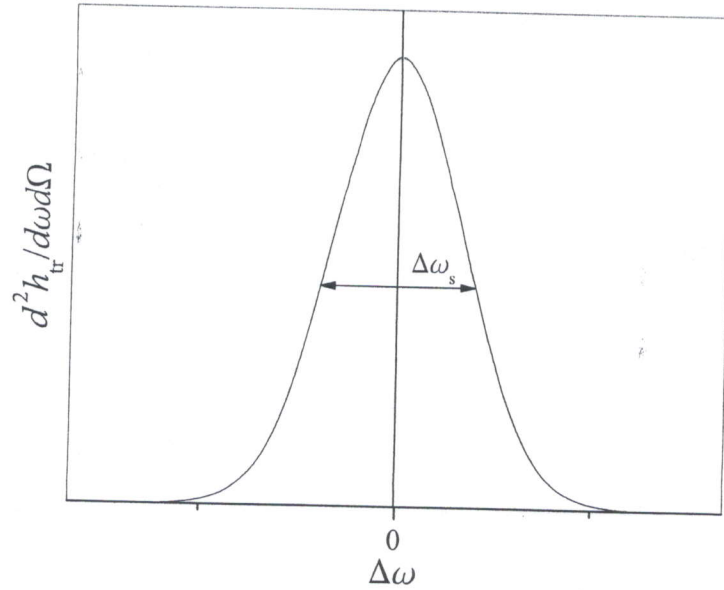


Рис. 1.21: Спектральное распределение интенсивности рассеянного излучения при коротких длин волн и при фиксированном угле.

электронов. Можно сказать, что отдельный электрон является флуктуацией на фоне вакуума. Для определения рассеяния в единице объема надо увеличить рассеяние на одном электроне в n_e раз. Можно записать $h_{tr} = n_e \sigma_T$, где

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (1.458)$$

Формула (1.458) определяет хорошо известное Томсоновское сечение рассеяния на одном электроне. Однако электроны плазмы не являются неподвижными, а имеют скорости. Из-за этого возникает эффект Доплера. Электроны, летящие от наблюдателя, получают меньшие частоты, а летящие к наблюдателю — большие. В результате рассеянное излучение имеет ширину линии, причем $\Delta\omega_s \sim \omega_0 (v_{th,e}/c)$. Измеряя ширину линии определяют температуру плазмы, а измеряя полную интенсивность — концентрацию электронов.

1.37 Рассеяние длинных волн ($\lambda_0 > \lambda_{De}$)

Рассмотрим рассеяние длинных волн, когда входящая в парциальные диэлектрические проницаемости величина $\Delta k \lambda_{D\alpha}$ меньше единицы. Проанализируем дифференциальный коэффициент экстинкции для различных областей частот.

Начнем со случая малых изменений частоты падающего излучения

$$|\Delta\omega| < 2k_0 v_{th,\alpha} |\sin(\theta/2)|. \quad (1.459)$$

В этом пределе функция $J_+ \ll 1$ и

$$\delta\epsilon_\alpha \simeq \frac{1}{(\Delta k \lambda_{D\alpha})^2} > 1. \quad (1.460)$$

Как и в предыдущем параграфе, введем снова сферическую систему координат. В результате

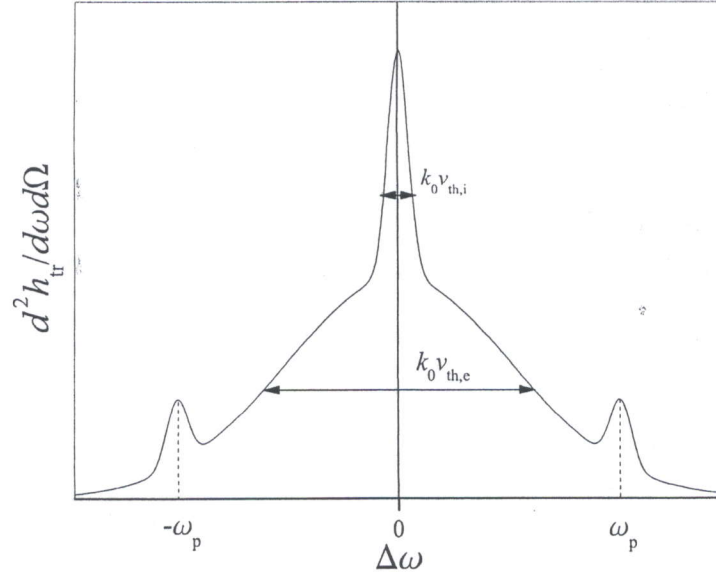


Рис. 1.22: Спектральное распределение интенсивности рассеянного излучения при больших длин волн и при фиксированном угле. Случай изотермической плазмы $T_e \simeq T_i$.

найдем дифференциальный коэффициент экстинкции

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_{tr}}{d\omega d\Omega} = & \frac{n_e r_e^2}{2(2\pi)^{1/2} v_{th,i}} \frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{k_0 |\sin(\theta/2)|} \left(\frac{\Delta k^2 \lambda_D^2}{\Delta k^2 \lambda_D^2 + 1} \right)^2 \\ & \times \left\{ \varsigma \left(1 + \frac{1}{(\Delta k \lambda_{Di})^2} \right)^2 e^{-\Delta\omega_+^2 / 2\Delta k^2 v_{th,e}^2} + \frac{Z}{(\Delta k \lambda_{De})^4} e^{-\Delta\omega_+^2 / 2\Delta k^2 v_{th,i}^2} \right. \\ & \left. + \varsigma \left(1 + \frac{1}{(\Delta k \lambda_{Di})^2} \right)^2 e^{-\Delta\omega_-^2 / 2\Delta k^2 v_{th,e}^2} + \frac{Z}{(\Delta k \lambda_{De})^4} e^{-\Delta\omega_-^2 / 2\Delta k^2 v_{th,i}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (1.461)$$

где $\varsigma = v_{th,i}/v_{th,e} \ll 1$, $\Delta\omega_{\pm} = \omega \pm \omega_0$, $e_i = Ze$, λ_D -Дебаевский радиус плазмы, $\lambda_D^{-2} = \lambda_{De}^{-2} + \lambda_{Di}^{-2}$. Если плазма изотермическая ($T_i = T_e$), то $\lambda_{De} \sim \lambda_{Di}$ и при $|\Delta\omega| < 2k_0 v_{th,i} |\sin(\theta/2)|$ основным является слагаемые пропорциональные Z . Мы видим, что ширина линии рассеянного излучения определяется ионным тепловым движением и часто говорят, что рассеяние происходит на ионах. Это может показаться странным, поскольку мы не учитываем движение ионов в поле падающей волны. В действительности, конечно, рассеяние происходит на электронах. Но флуктуациями электронной концентрации управляют ионы. Электроны, участвующие в экранировке ионных флуктуаций и определяют рассеяние волн с длинами, превышающими дебаевский радиус при малом смещении частоты. При больших смещениях частоты ($\Delta\omega > 2k_0 v_{th,i} |\sin(\theta/2)|$) в рассеяние вносят вклад крупномасштабные флуктуации электронной концентрации. При этом нельзя говорить о рассеянии на отдельных частицах. Речь идет о рассеянии на электронных флуктуациях более крупномасштабных с размерами, превышающими дебаевский радиус, которые возникают и исчезают за счет теплового движения частиц (Рис. 1.22) (т.н. рэлеевское рассеяние).

Перейдем к рассеянию с большим смещением частоты ($\Delta\omega > 2k_0 v_{th,e} |\sin(\theta/2)|$). В этом случае аргумент функции J_+ велик и $\epsilon_l \simeq 1 - \omega_p^2/\Delta\omega^2$. Входящая в формулу (1.416) продольная диэлектрическая проницаемость может обращаться в ноль и при этом коэффициент экстинкции увеличивается. Это имеет место при

$$\Delta\omega = \pm\omega_p. \quad (1.462)$$

Это значит, что в спектре рассеянного излучения возникают отдельные линии, частоты которых отличаются от частоты падающего излучения на ω_p . В этом случае говорят о комбинационном

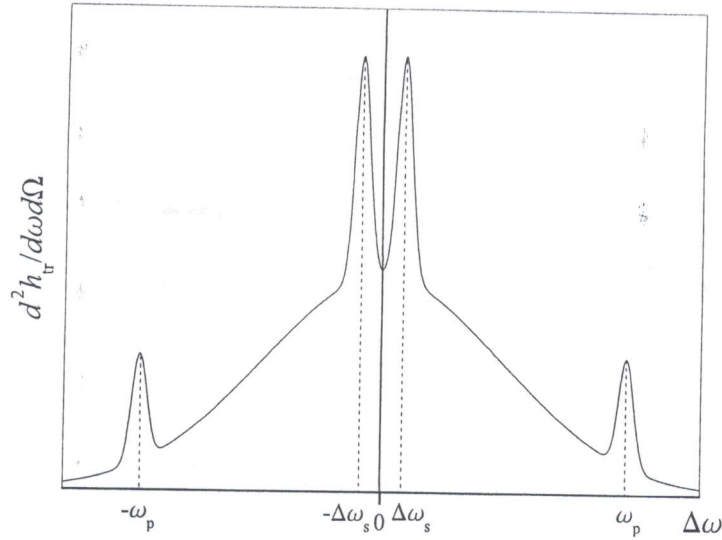


Рис. 1.23: Спектральное распределение интенсивности рассеянного излучения при больших длин волн и при фиксированном угле. Случай неизотермической плазмы $T_e \gg T_i$.

рассеянии. В данном случае оно связано с тем, что в плазме существуют случайные флуктуационные ленгмюровские волны. В этих волнах электроны осциллируют с ленгмюровской частотой на масштабах, превышающих дебаевский радиус. При этом внешняя падающая волна дополнительно вынуждает их осциллировать еще на частоте ω_0 . В результате частота электронных осцилляций равна $\omega_0 \pm \omega_p$, где знаки плюс и минус отвечают ленгмюровским волнам, идущим либо навстречу, либо по направлению распространения падающей волны. Рассеяние на ленгмюровских волнах часто называют *рамановским рассеянием*. Если частота рассеянных волн равна $\omega_0 - \omega_p$, то говорят *стоксово рассеяние*, а если $\omega_0 + \omega_p$ — *антистоксово*.

В неизотермической плазме ($T_i \ll T_e$) имеется еще одна частота, при которой $\epsilon_l = 0$ и сечение рассеяния имеет максимум. Это значение $\Delta\omega$ соответствует закону дисперсии для ионно-звуковых волн (см. §1.19). В пределе длинных волн из него следует следующее выражение для смещения частоты

$$\Delta\omega = \pm\Delta kv_s = \pm 2k_0 v_s \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| = \pm\Delta\omega_s, \quad (1.463)$$

где $v_s = \sqrt{ZT_e/m_i}$. В результате в неизотермической плазме длинноволновые возмущения ионной концентрации распространяются в виде волн звука и на них происходит рассеяние. Вместо одной центральной линии возникают еще две линии (Рис. 1.23), причем смещение этих линий относительно ω_0 зависит от угла наблюдения. Про такой вид рассеяния говорят *рассеяние Мандельштама-Бриллюэна*.

Вычислим полный коэффициент экстинкции. Выполним интегрирование по частоте. Получим

$$\int_0^\infty d\omega \frac{d^2 h_{tr}}{d\omega d\Omega} = n_e r_e^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \frac{(\Delta k^2 \lambda_D^2 + \tau_e)^2 + Z\tau_i^2}{(\Delta k^2 \lambda_D^2 + 1)^2}, \quad (1.464)$$

где

$$\tau_e = \frac{1}{1 + T_i/ZT_e}, \quad \tau_i = \frac{T_i/ZT_e}{1 + T_i/ZT_e}. \quad (1.465)$$

Теперь произведем интегрирование по углам. В результате получим полный коэффициент экс-

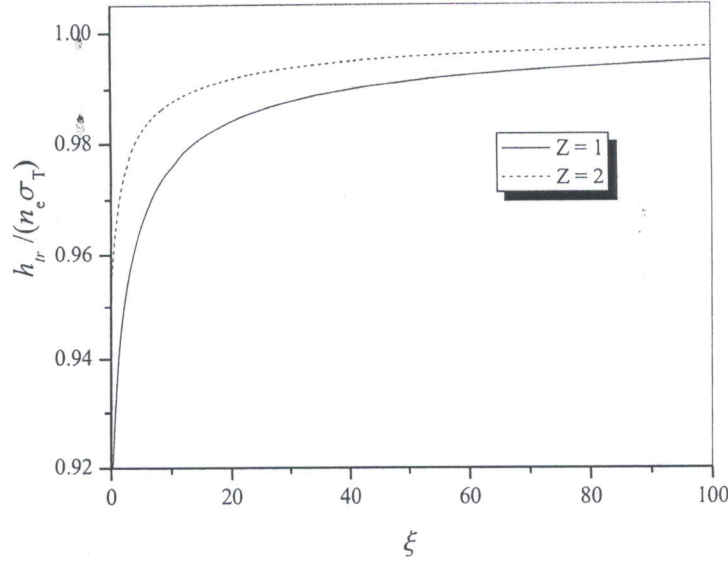


Рис. 1.24: Зависимость $h_{tr}(\xi)$ от ξ при $T_i/T_e = 0.05$ и для двух значениях заряда иона.

ТИНКЦИИ

$$\begin{aligned}
 h_{tr}(\xi) = & \frac{n_e \sigma_T}{\xi^2} \left\{ \frac{1}{2(\xi+1)} \left[24 + 30\xi + 11\xi^2 + 2\xi^3 - 6\tau_e(\xi+2)(\xi^2 + 2\xi) + 3\tau_e^2(\xi+2)^2 \right] \right. \\
 & - \frac{3\tau_i}{\xi} [4 + 3\xi + \xi^2 - \tau_e(\xi+2)] \ln(\xi+1) \\
 & \left. + 3Z\tau_i^2(\xi+2) \left[\frac{\xi+2}{2(\xi+1)} - \frac{1}{\xi} \ln(\xi+1) \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (1.466)$$

Здесь $\xi = 4k_0^2 \lambda_D^2 = (2\lambda_D/\lambda_0)^2$. В пределе длинных ($\xi \ll 1$) и коротких ($\xi \gg 1$) длин волн из (1.466) получим соответственно

$$h_{tr} \simeq n_e \sigma_T (\tau_e^2 + Z\tau_i^2), \quad h_{tr} \simeq n_e \sigma_T. \quad (1.467)$$

Видно, что при рассеянии длинных волн ($\xi \ll 1$) полный коэффициент экстинкции отличается от $n_e \sigma_T$. На Рис. 1.24 показана зависимость $h_{tr}(\xi)$ от ξ при $T_i/T_e = 0.05$ и двух значениях заряда иона.

Рассматривая комбинационное рассеяние, мы по существу сталкиваемся с нелинейным взаимодействием между волнами, когда более не справедлив принцип суперпозиции. Падающая волна, рассеиваясь на собственных волнах плазмы, создает рассеянную волну на суммарной или разностной частоте. В дальнейшем мы рассмотрим более детально основы нелинейной электродинамики плазмы.

Глава 2

ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

2.1 Нелинейное материальное уравнение

В слабых электромагнитных полях можно считать, что реакция среды (индукция или ток) пропорциональна напряженности поля. На этом допущении базируется линейная электродинамика, в рамках которой для распространения волн справедлив принцип суперпозиции.

В более сильных полях линейное приближение нарушается. Это значит, что реакция (отклик) среды уже не пропорциональна напряженности поля, а более сложно от него зависит. Если нелинейность слабая, то можно ее учесть введением более высоких степеней поля в материальное уравнение, определяющее реакцию среды.

Если пренебречь дисперсией (запаздыванием и нелокальностью реакции среды) и считать среду изотропной то такое материальное уравнение имеет наиболее простой вид

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \epsilon^{(3)} E^2 \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

Слагаемое, пропорциональное квадрату поля, в этом случае отсутствует. Это связано с тем, что в квадратичном приближении нельзя образовать вектор индукции с помощью единственного вектора.

В анизотропной среде, где имеются выделенные направления, материальное уравнение содержит и квадратичные по полю слагаемые

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j + \epsilon_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \epsilon_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l. \quad (2.2)$$

Нелинейные тензоры диэлектрической проницаемости должны удовлетворять определенным свойствам симметрии. Простейшие из них вытекают из самого материального уравнения (2.2) при замене индексов у компонент вектора поля

$$\epsilon_{ijk}^{(2)} = \epsilon_{ikj}^{(2)}, \quad \epsilon_{ijkl}^{(3)} = \epsilon_{ijlk}^{(3)} = \epsilon_{ikjl}^{(3)} = \epsilon_{iljk}^{(3)}. \quad (2.3)$$

Помимо этих соотношений в среде без диссипации имеется еще ряд подобных соотношений, выведенных в 1962г. Клейманом. Вывод этих соотношений мы приводить не будем, а лишь укажем их

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kji} = \epsilon_{ikj}. \quad (2.4)$$

Для простоты записи мы опустили верхние индексы и будем называть в дальнейшем тензоры нелинейных диэлектрических проницаемостей по числу входящих в них индексов-трехиндексными, четырехиндексными и т.д.

Чтобы учесть дисперсию (запаздывание по координатам и времени), можно поступить так же, как мы это делали в линейной электродинамике. Будем считать диэлектрические проницаемости

ядрами интегральных соотношений

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \times \int d\mathbf{r}_1 \dots \int d\mathbf{r}_n E_{j_1}(\mathbf{r}_1, t_1) E_{j_2}(\mathbf{r}_2, t_2) \dots E_{j_n}(\mathbf{r}_n, t_n) \times \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2; \dots \mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n, t_{n-1} - t_n). \quad (2.5)$$

Здесь $t_0 = t$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$. По поводу такой формы записи первого слагаемого речь шла в линейной электродинамике. Отмечалось, что интегральная связь учитывает запаздывание действия поля по отношению к индукции по времени и по координатам. Причем это запаздывание зависит лишь от разности времен и координат, а не от данного момента времени или данной координаты. Это связано, как мы уже говорили в главе 1, с однородностью и стационарностью среды. Запись второго слагаемого также можно понять подобным же образом. Значение индукции в момент t в точке $\mathbf{r}$ зависит от действия поля момент времени t' и в точке $\mathbf{r}'$. Но свойства среды в момент времени t' и в точке $\mathbf{r}'$ в свою очередь зависят от действия поля в момент времени t'' и в точке $\mathbf{r}''$.

Из формул (2.5) непосредственно следует выражение для Фурье компоненты индукции

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d\mathbf{k}' \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega') E_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') E_l(\mathbf{k}', \omega') + \sum_{n=3}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{n-1} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_{n-1} \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \dots \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}) \times E_{j_1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \dots E_{j_{n-1}}(\mathbf{k}_{n-2} - \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-2} - \omega_{n-1}) E_{j_n}(\mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}), \quad (2.6)$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ -линейный тензор диэлектрической проницаемости и определяется выражением (1.25), $\varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega')$ -нелинейный трехиндексный тензор и т.д. В общем случае

$$\varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \dots \mathbf{k}_n, \omega_n) = \int_0^{\infty} dt_1 \int d\mathbf{r}_1 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + i\omega_1 t_1} \dots \times \int_0^{\infty} dt_n \int d\mathbf{r}_n e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_n + i\omega_n t_n} \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots \mathbf{r}_n, t_n). \quad (2.7)$$

Из определений (2.6) и (2.7) следует, например, что нелинейные тензоры диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega')$ и $\varepsilon_{ijkl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}'', \omega'')$ удовлетворяют следующим соотношениям симметрии

$$\varepsilon_{ijl}(-\mathbf{k}, -\omega; -\mathbf{k}', -\omega') = \varepsilon_{ijl}^*(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'), \quad \varepsilon_{ijl}^*(\mathbf{k}, \omega; -\mathbf{k}', -\omega') = \varepsilon_{ijl}(-\mathbf{k}, -\omega; \mathbf{k}', \omega') \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega') = \varepsilon_{ilj}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}'', \omega'') &= \varepsilon_{ikjl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k} + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}', \omega + \omega'' - \omega'; \mathbf{k}', \omega'') \\ &= \varepsilon_{ilkj}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k} - \mathbf{k}'', \omega - \omega''; \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \\ &= \varepsilon_{ijlk}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}' - \mathbf{k}'', \omega' - \omega''). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Эти соотношения при отсутствии пространственной и временной дисперсий совпадают с приведенными выше выражениями.

Соотношение (2.6) совместно с уравнением электромагнитного поля (1.32) приводит к следующему нелинейному уравнению для Фурье компонент электрического поля:

$$\begin{aligned} &M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \int d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_{n-1} \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \dots \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}) \\ &\quad \times E_{j_1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \dots E_{j_{n-1}}(\mathbf{k}_{n-2} - \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-2} - \omega_{n-1}) E_{j_n}(\mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Это уравнение может быть положено в основу нелинейной электродинамики, в рамках которой следует рассматривать нелинейное взаимодействие электромагнитных волн в среде. Оно получено разложением напряженностей полей по плоским волнам. Такое разложение эффективно в том случае, когда плоские монохроматические волны являются собственными колебаниями среды. С другой стороны, само понятие о плоских монохроматических волнах точно только в линейной электродинамике. В нашем рассмотрении мы будем считать это представление приближенно правильным, что возможно, конечно, в условиях сравнительной малости нелинейных слагаемых уравнения (2.11), т.е. его правой части.

Представляя материальное уравнение в виде ряда по степеням поля, мы предполагаем, что этот ряд сходится и члены с более высокими степенями меньше, чем члены с низкими степенями. Что же является тем физическим параметром, который определяет справедливость этого разложения? Ответ на этот вопрос, по существу, может быть дан уже при построении линейной электродинамики. Параметром, который считается малым, является отношение рассматриваемых полей к тем полям, которые действуют между частицами среды. Часто этот параметр записывают в виде $E_{\text{out}}/E_{\text{in}}$. Именно внутренние поля и определяют внутреннюю энергию среды. Поэтому приведенное соотношение можно представить в виде отношения плотности энергии поля W к плотности внутренней энергии W_0 . Для плазмы это условие означает $E^2 < n_e T$. В частности, для флуктуационных полей в равновесной плазме отношение $E^2/n_e T$ равно $(n_e \lambda_{De}^3)^{-1} \ll 1$.

Однако, при $T \rightarrow 0$ условие $E^2/n_e T < 1$ нарушается (приближение холодной плазмы), хотя материальное уравнение в виде степенного ряда остается справедливым. Как уже отмечалось, в этом случае параметром разложения является $v_E/v_\phi \ll 1$ или $E \ll m\omega^2/ek$. Приведенные здесь два параметра справедливости степенных материальных разложений для плазмы объединяются в одно $v_E \ll \max[v_\phi, (\omega_p/\omega) v_{\text{th},e}]$.

Часто используют материальное уравнение с точностью до определенной степени поля. Если учитываются только слагаемые, пропорциональные E^2 , то говорят-квадратичное приближение. Если учесть слагаемые с E^3 , то говорят-кубическое приближение.

2.2 Основные нелинейные процессы

Прежде, чем рассматривать уравнения нелинейной электродинамики и их решение, обсудим основные процессы (эффекты), возникающие из-за нелинейности свойств среды.

Начнем с квадратичного приближения, которое имеет место в анизотропной среде без дисперсии. Если в такой среде распространяется одна волна и электрическое поле в ней изменяется по закону

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_{10} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t} + \text{с.с.}], \quad (2.12)$$

то из-за нелинейности материального уравнения в среде возникает индукция, изменяющаяся по другому закону. Согласно формуле (2.2) индукция наряду с линейным слагаемым содержит квадратичное

$$D_i^{(\text{NL})} = \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} [E_{10j} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t} + \text{с.с.}] \frac{1}{2} [E_{10k} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t} + \text{с.с.}]. \quad (2.13)$$

Индукция является источником поля. Поэтому в среде помимо поля исходной волны возникает поле с пространственно-временной зависимостью $e^{2i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)}$. Иными словами, в нелинейной среде при распространении волны всегда имеется ее вторая гармоника. Помимо этого, возникает слагаемое, которое не зависит от координат и времени. Это значит, что в среде появляется постоянное и однородное электрическое поле или ток.

Представим теперь, что на среду падают две волны с различными частотами

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_{10} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t} + \text{с.с.}], \quad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_{20} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega_2 t} + \text{с.с.}]. \quad (2.14)$$

Из-за нелинейности среды в квадратичном приближении эти волны создают поля с другими пространственно-временными масштабами. Ясно, что помимо тех эффектов, которые создает

каждая из волн, возникнут эффекты от их взаимодействия, которые определяются полями обеих волн. В среде появляется индукция на суммарной частоте $\omega_1 + \omega_2$ и с суммарным волновым вектором $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Возникнет также индукция на разностной частоте $\omega_1 - \omega_2$ и с волновым вектором $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$. Индукция или ток являются источником полей. Такие поля называют *комбинационными*. В частности, если одно из полей является электростатическим и однородным, то оно не влияет на частоту и волновой вектор другой волны. Но благодаря этому полю изменяется тензор диэлектрической проницаемости и, следовательно, от него зависит закон дисперсии для волн (эффект Поккельса).

Рассмотрим теперь изотропную среду, где возможна лишь кубическая нелинейность. Если на такую среду падает электромагнитная волна с частотой ω_1 и волновым вектором $\mathbf{k}_1$, то наряду с линейной индукцией возникает нелинейная (см. формулу (2.1)):

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{2} \left[\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t} + \text{c.c.} \right] + \frac{\varepsilon^{(3)}}{2} \left\{ |\mathbf{E}_0|^2 + \text{Re} \left[\mathbf{E}_0^2 e^{2i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} \right] \right\} \times \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega_1 t} + \text{c.c.} \right]. \quad (2.15)$$

Видно, что кубическая нелинейность приводит к возникновению третьих гармоник падающей волны на частоте $3\omega_1$ и с волновым вектором $3\mathbf{k}_1$. Помимо этого изменяется диэлектрическая проницаемость и для самой падающей волны $\mathbf{D} = \varepsilon_{\text{eff}} \mathbf{E}$

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^{(3)} \left[|\mathbf{E}_0|^2 + \text{Re} \left(\mathbf{E}_0^2 e^{2i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - 2i\omega_1 t} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Такое изменение диэлектрической проницаемости, связанное с самой распространяющейся волной, называется *самовоздействием*.

Если на изотропную среду падают две волны с частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, то возникает индукция на комбинационных частотах $2\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_2 \pm \omega_1$ и соответственно с волновыми векторами $2\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$, $2\mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_1$. Помимо этого эффективная диэлектрическая проницаемость для волны на частоте ω_1 оказывается зависящей не только от амплитуды этой волны, но и от амплитуды другой волны. Это явление называется *кросс-модуляцией*.

2.3 Нелинейное укороченное уравнение

Уравнения Максвелла справедливы и в нелинейной среде. Если считать, что нет внешних источников, то эти уравнения сводятся к одному, которое имеет вид

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.17)$$

Однако, в отличие от линейной электродинамики, индукция связана с полем нелинейным образом. Решение нелинейного уравнения второго порядка, представляет значительные математические трудности и поэтому желательно это уравнение упростить. Путь для такого упрощения в линейной электродинамике нами обсуждался в §1.9. Он состоит в предположении, что волны являются квазимонохроматическими и их амплитуды изменяются медленно за период $(1/\omega) (\partial E_0 / \partial t) \ll E_0$ и на длине волны $\partial E_0 / \partial x_i \ll k_i E_0$. В таком приближении медленно изменяющихся амплитуд в §1.9 нами было выведено укороченное уравнение (1.108).

Рассмотрим обобщение этого укороченного уравнения на случай нелинейной среды. При этом, очевидно, мы не можем говорить об одной волне, а должны с самого начала предполагать, что в среде имеется не одна волна, а много волн. Поле этих волн можно представить в виде суммы

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \left[\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}_n, \omega_n) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - i\omega_n t} + \text{c.c.} \right], \quad (2.18)$$

где индекс n нумерует волны. Если набор частот дискретный, то говорят, что спектр волн дискретный (линейчатый). Может быть и так, что спектр волн сплошной и ω изменяется непрерывно.

Тогда поле есть интеграл

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty d\omega \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.19)$$

Эту формулу можно переписать другим способом. Для простоты здесь опущены аргументы $\mathbf{r}$ и t в амплитуде, но они подразумеваются. Вторая форма записи возникает при замене в слагаемом с $\mathbf{E}^*(\mathbf{k}, \omega)$ $\omega \rightarrow -\omega$, $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$. Доопределим амплитуды волн при отрицательных аргументах следующим образом $\mathbf{E}(-\mathbf{k}, -\omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, \omega)$. Таким образом, если в явном виде учитывать действительность полей волн, то нужно либо использовать запись (2.19), либо запись

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^\infty d\omega' \int d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - i\omega' t} \mathbf{E}(\mathbf{k}', \omega') \quad (2.20)$$

но с дополнительным условием $\mathbf{E}(-\mathbf{k}, -\omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, \omega)$. Заметим, что запись (2.20) по форме совпадает с разложением в интеграл Фурье.

Для того, чтобы получить дискретный набор волн из представления (2.20), нужно считать отличными от нуля амплитуды волн только на соответствующих частотах. Так, например, если у нас имеется всего лишь одна волна, то нужно считать, что

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}', \omega') = \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \delta(\omega' - \omega) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^* \delta(\omega' + \omega) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}). \quad (2.21)$$

Подставляя эту формулу в (2.20), получим $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + \text{с.с.}$ В случае почти монохроматического поля величина $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}', \omega')$ как функция от $\mathbf{k}'$ и ω' имеет резкие максимумы вблизи точек $\omega' = \pm\omega$ и $\mathbf{k}' = \pm\mathbf{k}$. Это позволяет представить почти монохроматическое поле в следующем виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}', \omega') \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}, \omega) \delta(\omega' - \omega) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}, \omega) \delta(\omega' + \omega) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}). \quad (2.22)$$

Очевидно, что поле (2.20) при этом имеет вид $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}]$, в полной согласии с представлением поля (1.90) (заметим, что для простоты здесь опущены аргументы $\mathbf{r}$ и t в амплитуде).

Рассмотрим теперь материальное уравнение в нелинейной среде. Рассмотрим анизотропную среду, где имеется квадратичная нелинейность (см. формулы (2.5) и (2.6)). Подставим в формулу (2.5) поле (2.20). В результате получим:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^\infty d\omega \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.23)$$

Это соотношение можно рассматривать как определение амплитуды нелинейной индукции $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)$ на частоте ω и с волновым вектором $\mathbf{k}$. Амплитуда индукции $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)$ в явном виде определяется формулой (1.97), к которому необходимо добавить малая нелинейная добавка $\delta D_i(\mathbf{k}, \omega)$ нелинейной индукции (см. выражение (2.6)). Таким образом

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{k}, \omega) \simeq \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) - i \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{\partial E_j(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \mathbf{r}} \\ + i \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial E_j(\mathbf{k}, \omega)}{\partial t} + \delta D_i(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \delta D_i(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{n=2}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\omega_1 \dots \int_{-\infty}^\infty d\omega_{n-1} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_{n-1} \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \dots \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}) \\ \times E_{j_1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \dots E_{j_{n-1}}(\mathbf{k}_{n-2} - \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-2} - \omega_{n-1}) E_{j_n}(\mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Обратимся к исходным уравнениям для поля и вычислим операцию rot rot , представляя поле в виде (2.20)

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} \{ -[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] + i[\mathbf{k} \times \text{rot } \mathbf{E}] + i \text{rot } [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] + \text{rot rot } \mathbf{E} \}. \quad (2.26)$$

Вторая производная по времени от вектора индукции

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} \left(-\omega^2 \mathbf{D} - 2i\omega \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \right). \quad (2.27)$$

Подставив найденные выражения в исходное уравнение и отбросив вторые производные от медленно изменяющихся амплитуд волн по координатам и времени, получим

$$-[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] + i[\mathbf{k} \times \text{rot } \mathbf{E}] + i \text{rot } [\mathbf{k} \times \mathbf{E}] - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} - \frac{2i\omega}{c^2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0. \quad (2.28)$$

В это уравнение подставим индукцию и разобьем тензоры ϵ_{ij} и M_{ij} на эрмитовскую и антиэрмитовскую части ($\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^H + \epsilon_{ij}^A$, $M_{ij} = M_{ij}^H + M_{ij}^A$) (см. §1.9)

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_{ij}^H) \frac{\partial E_j}{\partial t} + i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial k_s} \frac{\partial E_j}{\partial x_s} - \frac{\omega^2}{c^2} (M_{ij}^H + \epsilon_{ij}^A) E_j \\ & = \frac{\omega^2}{c^2} \delta D_i(\mathbf{k}, \omega) + \frac{2i\omega}{c^2} \left[\frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_{ij}^A) \frac{\partial E_j}{\partial t} + \frac{\partial \delta D_i}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь были использованы соотношения $e_{ijl}e_{lpq} = \delta_{pi}\delta_{qj} - \delta_{pj}\delta_{qi}$ (см. §1.15) и $M_{ij}^A = \epsilon_{ij}^A$.

Как и в §1.9, примем, что в нулевом приближении амплитуда волны неизменна. Тогда для связи частоты и волнового вектора получим дисперсионное уравнение для волны без затухания. Этому приближению соответствует отбрасывание не только диссипации, но и нелинейного взаимодействия волн между собой. Если ввести вектор поляризации волны $\mathbf{e} = \mathbf{E}/\mathcal{E}$, где $\mathcal{E} = |\mathbf{E}|$ (заметим, что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* = |\mathbf{e}|^2 = 1$), то получим дисперсионное уравнение (1.104).

Теперь учтем изменение амплитуды волны. В линейной теории это изменение было связано с переносом волны и диссипацией. В нелинейной теории диссипации добавляется еще нелинейное взаимодействие между волнами. При учете этих эффектов в низшем приближении, отбросив слагаемые типа $\epsilon_{ij}^A (\partial E / \partial t)$, $\epsilon_{ij}^A (\partial E_j / \partial x_s)$ и $(\partial \delta D_i / \partial t)$, получим

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_{ij}^H) \frac{\partial E_j}{\partial t} - \omega \frac{\partial M_{ij}^H}{\partial k_s} \frac{\partial E_j}{\partial x_s} - i\omega \epsilon_{ij}^A E_j = i\omega \delta D_i(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.30)$$

При выводе уравнения (2.30) использовалось очевидное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega M_{ij}(\mathbf{k}, \omega)] = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)] - M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.31)$$

и дисперсионное уравнение $M_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = 0$.

Для того, чтобы это уравнение привести к виду, использовавшемуся в линейной теории (§1.9), нужно умножить его на вектор поляризации $\mathbf{e}_i^*$ и поделить на $\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_{ij}^H) \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j$. В результате получим нелинейное укороченное уравнение, определяющее изменение амплитуды волны с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ при условии что $\mathbf{e} = \text{const}$ (см. §1.9)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \gamma \right) \mathcal{E}(\mathbf{k}, \omega) \\ & = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_{n-1} \int d\mathbf{k}_1 \dots \int d\mathbf{k}_{n-1} a_n(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \dots, \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}) \\ & \quad \times \mathcal{E}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \dots \mathcal{E}(\mathbf{k}_{n-2} - \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-2} - \omega_{n-1}) \mathcal{E}(\mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $\mathbf{v}_g$ и γ -групповая скорость и декремент затухания

$$a_n(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \dots, \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}) = i \frac{e_i^*(\mathbf{k}, \omega) e_{j_1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \dots e_{j_{n-1}}(\mathbf{k}_{n-2} - \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-2} - \omega_{n-1}) e_{j_n}(\mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1})}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] e_i^*(\mathbf{k}, \omega) e_j(\mathbf{k}, \omega)} \times \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \dots, \mathbf{k}_{n-1}, \omega_{n-1}) \quad (2.33)$$

Формулы для групповой скорости и декремента затухания естественно совпадают с выражениями (1.106) и (1.107). Коэффициенты a_n называются *коэффициентами нелинейной связи волн*. В частности, в правой части уравнения (2.32) удерживая только квадратичные и кубические относительно поля члены получим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \gamma \right) \mathcal{E}(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int d\mathbf{k}_1 a_2(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) \mathcal{E}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \mathcal{E}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 a_3(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2) \\ &\times \mathcal{E}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \mathcal{E}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \omega_1 - \omega_2) \mathcal{E}(\mathbf{k}_2, \omega_2), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$a_2(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega') = i \frac{e_i^*(\mathbf{k}, \omega) \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega') e_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') e_l(\mathbf{k}', \omega')}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] e_i^*(\mathbf{k}, \omega) e_j(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} a_3(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2) = i \frac{e_i^*(\mathbf{k}, \omega) e_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) e_k(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \omega_1 - \omega_2) e_l(\mathbf{k}_2, \omega_2)}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] e_i^*(\mathbf{k}, \omega) e_j(\mathbf{k}, \omega)} \\ \times \varepsilon_{ijkl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Смысл полученного укороченного уравнения для амплитуды волны с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ весьма прост. В нем наряду с диссипацией и переносом учтено нелинейное взаимодействие волн. При этом с данной волной взаимодействует любое количество волн таких, что сумма их частот и сумма их волновых векторов равны соответственно частоте и волновому вектору данной волны.

Получим также укороченное уравнение для баланса энергии в нелинейной электродинамике. Для этого умножим уравнение (2.30) на $E_i^*(\mathbf{k}, \omega)$, а уравнение для $E_i^*(\mathbf{k}, \omega)$ умножим на $E_j(\mathbf{k}, \omega)$ и сложим полученные выражения. Используя свойства $\varepsilon_{ji}^{H*}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)$, $\varepsilon_{ji}^{A*}(\mathbf{k}, \omega) = -\varepsilon_{ij}^A(\mathbf{k}, \omega)$ в результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{W}(\mathbf{k}, \omega) + \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \omega) + 2\gamma(\mathbf{k}, \omega) \widetilde{W}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\omega}{2\pi} \text{Im} [E_i^*(\mathbf{k}, \omega) \delta D_i(\mathbf{k}, \omega)], \quad (2.37)$$

где

$$\widetilde{W}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] E_j(\mathbf{k}, \omega) E_i^*(\mathbf{k}, \omega), \quad (2.38)$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} [\omega M_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] E_j(\mathbf{k}, \omega) E_i^*(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.39)$$

Здесь $\widetilde{W}(\mathbf{k}, \omega)$ —спектральная плотность энергии электромагнитного поля (см. выражение (1.113)), $\widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \omega)$ —спектральная плотность потока энергии (вектора Пойнтинга). Вектор $\widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \omega)$ можно представить в виде $\widetilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{v}_g \widetilde{W}(\mathbf{k}, \omega)$ (см. выражение (1.114)), где $\mathbf{v}_g$ —групповая скорость волн

$$\mathbf{v}_g = -\frac{\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} [M_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] E_j(\mathbf{k}, \omega) E_i^*(\mathbf{k}, \omega)}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] E_j(\mathbf{k}, \omega) E_i^*(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (2.40)$$

Третье слагаемое в левой части уравнения (2.37) соответствует затуханию электромагнитных волн с декрементом (инкрементом)

$$\gamma(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{\varepsilon_{ij}^A(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) E_i^*(\mathbf{k}, \omega)}{\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] E_j(\mathbf{k}, \omega) E_i^*(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (2.41)$$

Наконец, правая часть (2.37) возникает из-за нелинейного взаимодействия волн. Если не учитывать это взаимодействие (приближение линейной электродинамики) то уравнение (2.37) полностью совпадает с полученным в §1.10 законом сохранения энергии (1.115).

Уравнение сохранения энергии (2.37) соответствует обычно используемым в нелинейной оптике укороченным уравнениям поля. Использование таких уравнений продуктивно при решении задач нелинейной электродинамики, в которых фазовые соотношения между различными взаимодействующими волнами фиксированы определенным образом. Ниже мы будем рассматривать в некотором смысле противоположный случай, когда фазы волн беспорядочны. Использование этого предположения позволяет сделать следующий шаг, связанный с соответствующим усреднением.

2.4 Взаимодействие трех волн

Будем считать, что в среде имеется только три волны с частотами $\omega_{1,2,3}$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_{1,2,3}$. На этом примере мы разберем своего рода элементарный акт нелинейного взаимодействия волн.

Начнем параграф с вывода уравнений для амплитуд волн. Положим в формуле (2.20), что отличны от нуля только амплитуды трех волн

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = & \mathbf{E}_1 \delta(\omega - \omega_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \mathbf{E}_1^* \delta(\omega + \omega_1) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \\ & + \mathbf{E}_2 \delta(\omega - \omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) + \mathbf{E}_2^* \delta(\omega + \omega_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2) \\ & + \mathbf{E}_3 \delta(\omega - \omega_3) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3) + \mathbf{E}_3^* \delta(\omega + \omega_3) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Подставим такой набор слагаемых в уравнение (2.30). В результате слева и справа получим

$$\begin{aligned} & \left[\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \beta_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \right] [E_{1j} \delta(\omega - \omega_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \dots] \\ = & i\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d\mathbf{k}' \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega') [E_{1j} \delta(\omega - \omega' - \omega_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) + \dots] \\ & \times [E_{1l} \delta(\omega' - \omega_1) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) + \dots], \end{aligned} \quad (2.43)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = & \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon_{ij}^H), \quad \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = -\omega \frac{\partial \mathbf{M}_{ij}^H}{\partial \mathbf{k}}, \\ \beta_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = & -i\omega \varepsilon_{ij}^A(\mathbf{k}, \omega). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Различным слагаемым в правой стороне (их 36 слагаемых) уравнения отвечают разные нелинейные процессы. Так слагаемое $E_{1l} E_{1j} \delta(\omega - 2\omega_1) \delta(\mathbf{k} - 2\mathbf{k}_1)$ описывает генерацию второй гармоники первой волны. Подобные слагаемые возникнут и для других волн. Эти нелинейные процессы не связаны с взаимодействием трех волн и нас интересовать не будут. Процессам трехволнового взаимодействия соответствуют следующие слагаемые $E_{1l} E_{2j} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$, $E_{1l} E_{2j}^* \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2)$, $E_{1l} E_{3j}^* \delta(\omega - \omega_1 + \omega_3)$, $E_{1l}^* E_{2j}^* \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2)$, $E_{1l} E_{3j} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_3)$ и т.д. (всего 18 слагаемых). Однако, не все из этих слагаемых следует учитывать, если предположить, что $\omega_3 > \omega_{1,2}$. Так, например, слагаемое $E_{1l} E_{2j}^* \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2)$ соответствует возбуждению волны с частотой ω_3 на разностной частоте. Но поскольку $\omega_3 > \omega_{1,2}$, то это слагаемое следует отбросить.

Чтобы получить уравнение для амплитуды первой волны, оставим слева только первое слагаемое, пропорциональное $\delta(\omega - \omega_1)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$, а справа только слагаемые, пропорциональные амплитудам второй и третьей волн и содержащие $\delta(\omega - \omega_3 + \omega_2)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2)$. Существуют только два таких слагаемых и именно они описывают процесс взаимодействия трех волн, при котором выполнены условия

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (2.45)$$

В результате для амплитуд трех волн получим

$$\left(\alpha_{ij}^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A}_{ij}^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \beta_{ij}^{(1)} \right) E_{1j} = 2i\omega_1 \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_3, \omega_3) E_{2j}^* E_{3l}, \quad (2.46)$$

$$\left[\alpha_{ij}^{(2)} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A}_{ij}^{(2)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \beta_{ij}^{(2)} \right] E_{2j} = 2i\omega_2 \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}_2, \omega_2; \mathbf{k}_3, \omega_3) E_{1j}^* E_{3l}, \quad (2.47)$$

$$\left[\alpha_{ij}^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{A}_{ij}^{(3)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \beta_{ij}^{(3)} \right] E_{3j} = 2i\omega_3 \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}_3, \omega_3; \mathbf{k}_2, \omega_2) E_{1j} E_{2l}, \quad (2.48)$$

где $\alpha_{ij}^{(n)} = \alpha_{ij}(\mathbf{k}_n, \omega_n)$, $\mathbf{A}_{ij}^{(n)} = \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{k}_n, \omega_n)$, $\beta_{ij}^{(n)} = \beta_{ij}(\mathbf{k}_n, \omega_n)$ ($n = 1, 2, 3$).

Если вектора поляризаций для трех волн постоянны, т.е. $\mathbf{e}_n = \mathbf{E}_n / \mathcal{E}_n = \text{const}$, где $n = 1, 2, 3$ и $\mathcal{E}_n = |\mathbf{E}_n|$, то уравнения (2.46)-(2.48) существенно упрощаются. Так, умножая уравнение (2.46) слева на e_{1i}^* получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \gamma_1 \right) \mathcal{E}_1 = a_{23} \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3, \quad (2.49)$$

где $\mathbf{v}_{g1}$, γ_1 -групповая скорость и декремент для первой волны, коэффициент a_{23} учитывает нелинейное взаимодействие волн 2 и 3 и равен (индексами указаны вектора поляризаций волн)

$$a_{23} = i\omega_1 \frac{2e_{1i}^* \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_3, \omega_3) e_{2j}^* e_{3l}}{\left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^2 e_{1i}^* \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}_1, \omega) e_{1j} \right] \right\}_{\omega=\omega_1}}. \quad (2.50)$$

Аналогично поступим со второй волной. Учтем слева только слагаемое, пропорциональное амплитуде $E_{2j}\delta(\omega - \omega_2)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2)$, а справа слагаемые с $\delta(\omega - \omega_3 + \omega_1)$. В результате получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \gamma_2 \right) \mathcal{E}_2 = a_{13} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3, \quad a_{13} = i\omega_2 \frac{2e_{2i}^* \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}_2, \omega_2; \mathbf{k}_3, \omega_3) e_{1j}^* e_{3l}}{\left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^2 e_{2i}^* \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}_2, \omega) e_{2j} \right] \right\}_{\omega=\omega_2}}. \quad (2.51)$$

Чтобы получить уравнения для третьей волны, удержим слева слагаемое с $E_{3j}\delta(\omega - \omega_3)\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_3)$, а справа с $\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g3} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \gamma_3 \right) \mathcal{E}_3 = a_{12} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2, \quad a_{12} = i\omega_3 \frac{2e_{3i}^* \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}_3, \omega_3; \mathbf{k}_2, \omega_2) e_{1j} e_{2l}}{\left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega^2 e_{3i}^* \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}_3, \omega) e_{3j} \right] \right\}_{\omega=\omega_3}}. \quad (2.52)$$

Система уравнений (2.49)-(2.52) описывает взаимодействие трех волн, при котором наибольшую частоту имеет волна 3 и выполнены условия (2.45). Эти условия называют *распадными*. Название связано с квантово-механической аналогией. Если умножить формулы (2.45) на постоянную Планка, то первое из них будет представлять закон сохранения энергии квантов, а второе-закон сохранения импульса. С этой точки зрения можно процесс взаимодействия трех волн рассматривать как процесс распада кванта 3 на кванты 1 и 2. Очевидно, что возможен и обратный процесс. Он называется *слиянием волн*. В действительности процесс нелинейного взаимодействия не является локальным в пространстве и мгновенным во времени. Для того, чтобы он происходил, нужны определенные области пространства и интервалы времени. При этом соотношения (2.45) имеют смысл условий фазового синхронизма волн во времени и пространстве. Иными словами, две волны взаимодействуют с третьей волной, если они создают нелинейное поле, которое в пространстве и во времени изменяется по тому же закону, что и поле третьей волны.

2.5 Законы сохранения при взаимодействии трех волн

В уравнениях (2.49)-(2.52) изменение амплитуды каждой из трех волн в данной точке пространства со временем связано с двумя причинами-диссипацией (взаимодействием со средой, в которой волна распространяется) и взаимодействием волн друг с другом. Если пренебречь диссипацией, то останется лишь взаимодействие между волнами и, очевидно, что в этом приближении система трех волн является замкнутой. В такой системе имеются определенные законы сохранения.

Рассмотрим сначала простой случай, когда векторы поляризаций волн постоянны ($e_n = \text{const}$, где $n = 1, 2, 3$) и пространственной и временной дисперсией можно пренебречь. Для нахождения этих законов перепишем уравнения (2.49)-(2.52) в виде

$$\begin{aligned} e_{1i}^* \epsilon_{ij}^H e_{1j} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathcal{E}_1 &= i\omega_1 (e_{1i}^* \epsilon_{ijl} e_{2j}^* e_{3l}) \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3, \\ e_{2i}^* e_{2j} \epsilon_{ij}^H \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathcal{E}_2 &= i\omega_2 (e_{2i}^* \epsilon_{ijl} e_{1j}^* e_{3l}) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3, \\ e_{3i}^* e_{3j} \epsilon_{ij}^H \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g3} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathcal{E}_3 &= i\omega_3 (e_{3i}^* \epsilon_{ijl} e_{1j} e_{2l}) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Умножим первое уравнение на $\mathcal{E}_1/8\pi$. В результате получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{1}{8\pi} (e_{1i}^* \epsilon_{ij}^H e_{1j}) \mathcal{E}_1^2 = \frac{i}{8\pi} \omega_1 (e_{1i}^* \epsilon_{ijl} e_{2j}^* e_{3l}) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3. \quad (2.54)$$

Согласно определению (1.113) плотность энергии волны в среде равна

$$W = \langle W \rangle = \frac{1}{16\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 e_i^* e_j \epsilon_{ij}^H) \mathcal{E}^2 = \frac{1}{8\pi} (e_i^* e_j \epsilon_{ij}^H) \mathcal{E}^2. \quad (2.55)$$

Видно, что возникающая в левой стороне уравнения (2.54) величина есть плотность энергии первой волны. В результате получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{W_1}{\omega_1} = \frac{i}{8\pi} (e_{1i}^* \epsilon_{ijl} e_{2j}^* e_{3l}) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3. \quad (2.56)$$

При выводе формулы (2.56) предполагалось, что тензор нелинейной диэлектрической проницаемости действителен. Это справедливо опять же так только в пренебрежении диссипацией. Учитывалось также соотношение $\epsilon(-\mathbf{k}, -\omega) = \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)$ вытекающее из определения вектора поляризации волны.

Аналогичным способом из уравнений (2.51) и (2.52) следует два уравнения для W_2 и W_3

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{W_2}{\omega_2} = \frac{i}{8\pi} (e_{2i}^* \epsilon_{ijl} e_{1j}^* e_{3l}) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3, \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g3} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{W_3}{\omega_3} &= - \frac{i}{8\pi} (e_{3i}^* \epsilon_{ijl} e_{1j} e_{2l}) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 \\ &= \frac{i}{8\pi} (e_{3i} \epsilon_{ijl} e_{1j}^* e_{2l}^*) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Как мы уже отмечали в §2.1 (формула (2.4)), трехиндексные нелинейные тензоры обладают определенными свойствами симметрии. Воспользуемся этими свойствами:

$$e_{1i}^* \epsilon_{ijl} e_{2j}^* e_{3l} = e_{1j}^* \epsilon_{jil} e_{2i}^* e_{3l} = e_{1j}^* \epsilon_{ijl} e_{2i}^* e_{3l} = e_{2i}^* \epsilon_{ijl} e_{1j}^* e_{3l}, \quad (2.59)$$

$$e_{1i}^* \epsilon_{ijl} e_{2j}^* e_{3l} = e_{1l}^* \epsilon_{lji} e_{2j}^* e_{3i} = e_{1j}^* \epsilon_{jli} e_{2i}^* e_{3i} = e_{3i} \epsilon_{ijl} e_{1j}^* e_{2l}^*. \quad (2.60)$$

Таким образом, в правых сторонах формул (2.56)-(2.58) стоят одинаковые множители. Следовательно

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{W_1}{\omega_1} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{W_2}{\omega_2} = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{g3} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{W_3}{\omega_3}. \quad (2.61)$$

Соотношение (2.61) связывает между собой изменение плотности энергии трех волн из-за взаимодействия друг с другом и называется *соотношением Менли-Роу*. Еще раз напомним, что диссипация волн при этом не учитывается.

Если амплитуды волн не зависят от координат, то все изменения происходят только во времени. Согласно (2.61) в этом случае выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{W_1}{\omega_1} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{W_2}{\omega_2} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{W_3}{\omega_3} \right). \quad (2.62)$$

Величину $W_\alpha/\omega_\alpha = \mathcal{N}_\alpha$ часто называют числом квантов. Это название связано с тем, что согласно квантовой механике энергия одного элементарного возбуждения равна $\hbar\omega_\alpha$. Волне соответствует плотность энергии W_α и ей можно сопоставить определенное число квантов. Конечно, такое сопоставление является сугубо формальным. Согласно формуле (2.62) уменьшение в единицу времени числа квантов с частотой ω_3 равно увеличению числа квантов с частотами ω_1 и ω_2 . Это придает еще больший смысл использования представления о нелинейном взаимодействии волн как о распаде квантов. В результате элементарного акта распада сохраняется энергия и импульс квантов (2.45) и равны числа возникающих и исчезающих квантов.

Из формул (2.62) следует также закон сохранения энергии для волн

$$\frac{\partial W_3}{\partial t} = -\frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{\partial W_1}{\partial t} = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} \frac{\partial W_1}{\partial t} = -\frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial W_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (W_1 + W_2), \quad (2.63)$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \text{const.} \quad (2.64)$$

В единице объема полная плотность энергии трех волн сохраняется.

Имеет смысл и другое упрощение формулы (2.61), когда амплитуды волн не изменяются со временем, но изменяются в пространстве. В этом случае из формулы (2.61) следует

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{v}_{g1} W_1}{\omega_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{v}_{g2} W_2}{\omega_2} \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{v}_{g3} W_3}{\omega_3} \right). \quad (2.65)$$

Произведение $W_\alpha \mathbf{v}_{g\alpha}$ есть плотность потока энергии волны α , а величина $W_\alpha \mathbf{v}_{g\alpha}/\omega_\alpha = \mathcal{N}_\alpha \mathbf{v}_{g\alpha}$ определяет плотность потока квантов (число квантов, проходящих за единицу времени через единицу поверхности). Соотношение (2.65) утверждает, что уменьшение потока числа квантов сорта 3 на бесконечно малой толщине равно увеличению потока числа квантов сортов 1 и 2 на этой же толщине.

Из соотношений (2.65) следует закон сохранения плотности потока энергии трех волн:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v}_{g3} W_3) = -\frac{\omega_3}{\omega_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v}_{g1} W_1) = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v}_{g1} W_1) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{v}_{g1} W_1 + \mathbf{v}_{g2} W_2), \quad (2.66)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{v}_{g1} W_1 + \mathbf{v}_{g2} W_2 + \mathbf{v}_{g3} W_3 = \text{const.} \quad (2.67)$$

В общем случае для плотности энергии трех волн имеет место уравнение непрерывности (величины $W_{1,2,3}$ зависят как от координат, так и от времени)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (2.68)$$

В конце этого параграфа рассмотрим также общий случай взаимодействия трех волн с произвольными векторами поляризации и учетом пространственную и временную дисперсии. Уравнения для балансов плотности энергий трех волн можно найти из уравнений (2.46)-(2.48)

$$\frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\partial W_1}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_1 + 2\gamma_1 W_1 \right) = -\frac{1}{4\pi} \text{Im} [\varepsilon_{ijl} (\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_3, \omega_3) E_{1i}^* E_{2j}^* E_{3l}], \quad (2.69)$$

$$\frac{1}{\omega_2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_2 + 2\gamma_2 W_2 \right) = -\frac{1}{4\pi} \text{Im} [\varepsilon_{jil} (\mathbf{k}_2, \omega_2; \mathbf{k}_3, \omega_3) E_{1i}^* E_{2j}^* E_{3l}], \quad (2.70)$$

$$-\frac{1}{\omega_3} \left(\frac{\partial W_3}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_3 + 2\gamma_3 W_3 \right) = -\frac{1}{4\pi} \text{Im} [\varepsilon_{lij}^* (\mathbf{k}_3, \omega_3; \mathbf{k}_2, \omega_2) E_{1i}^* E_{2j}^* E_{3l}], \quad (2.71)$$

где плотность (W_n) и плотность потока энергии (S_n) а также декремент затухания (γ_n) трех волн определяются выражениями

$$W_n = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}_n, \omega)] \right\}_{\omega=\omega_n} E_{ni}^* E_{nj}, \quad (2.72)$$

$$S_n = -\frac{\omega_n}{16\pi} [\partial M_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega_n) / \partial \mathbf{k}]_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_n} E_{ni}^* E_{nj}, \quad (2.73)$$

$$\gamma_n = -i\omega_n \frac{\varepsilon_{ij}^A(\mathbf{k}_n, \omega_n) E_{ni}^* E_{nj}}{\left\{ \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}_n, \omega)] \right\}_{\omega=\omega_n} E_{ni}^* E_{nj}}. \quad (2.74)$$

Система трех волн уже не замкнута и полная энергия волн уменьшается за счет диссипаций а также диссипативного трехволнового взаимодействия. Из (2.69)-(2.71) видно, что

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -Q' - Q'', \quad (2.75)$$

где

$$Q' = 2\gamma_1 W_1 + 2\gamma_2 W_2 + 2\gamma_3 W_3, \quad (2.76)$$

$$Q'' = \frac{1}{4\pi} \text{Im} \{ [\omega_1 \varepsilon_{ijl}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_3, \omega_3) + \omega_2 \varepsilon_{jil}(\mathbf{k}_2, \omega_2; \mathbf{k}_3, \omega_3) - \omega_3 \varepsilon_{lij}^*(\mathbf{k}_3, \omega_3; \mathbf{k}_2, \omega_2)] E_{1i}^* E_{2j}^* E_{3l} \}. \quad (2.77)$$

Q' -диссипативные потери энергии, а Q'' возникает за счет диссипативного трехволнового взаимодействия.

2.6 Приближение заданного поля (начальная задача)

Часто одна из волн, создаваемая внешним источником, имеет амплитуду, намного превышающую амплитуды других волн. Амплитуду этой волны можно считать заданной и неизменной (приближение заданного поля одной волны). Наиболее интересные результаты возникают, когда заданную амплитуду из трех волн имеет волна с наибольшей частотой ω_3 . Такая волна называется *волной накачки*.

Если амплитуда волны $\mathcal{E}_3$ задана, то можно не рассматривать уравнение (2.52). Что касается уравнений (2.49) и (2.51), то в них справа следует считать $\mathcal{E}_3$ постоянной величиной.

Рассмотрим сначала такой случай, когда амплитуда волны накачки и амплитуды других волн не зависят от координат. И пусть при $t = 0$ амплитуды соответственно равны $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{10}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{20}$, (начальная задача). Из системы уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 \right) \mathcal{E}_1 = a_{23} \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3, \quad (2.78)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2 \right) \mathcal{E}_2 = a_{13} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3, \quad (2.79)$$

можно получить уравнение, содержащее только амплитуду $\mathcal{E}_1$ (или амплитуду $\mathcal{E}_2$):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_0^2 \right] \mathcal{E}_{1,2} = 0, \quad (2.80)$$

где $\gamma_0^2 = a_{13} a_{23} \mathcal{E}_3^2$.

Будем решать уравнение (2.80), полагая, что искомая функция зависит от времени по закону $e^{\gamma t}$ ($\mathcal{E}_{1,2} \sim e^{\gamma t}$). Подставляя это выражение в уравнение для амплитуды, найдем характеристическое уравнение для определения величины γ

$$(\gamma + \gamma_1)(\gamma + \gamma_2) - \gamma_0^2 = 0. \quad (2.81)$$

Решение этого уравнения определяет два значения $\gamma = \gamma_{\pm}$

$$\gamma_{\pm} = -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 4\gamma_0^2}. \quad (2.82)$$

Решение для каждой из волн является суммой функций $e^{\gamma-t}$ и $e^{\gamma+t}$ с произвольными коэффициентами, которые определяются из начальных условий. В частности, для первой волны решение

$$\mathcal{E}_1(t) = Ae^{\gamma+t} + Be^{\gamma-t} \quad (2.83)$$

должно удовлетворять условию $\mathcal{E}_1(0) = \mathcal{E}_{10}$, а также еще одному условию, которое следует из первого уравнения

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}_1(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\gamma_1 \mathcal{E}_{10} + a_{23} \mathcal{E}_{20} \mathcal{E}_3. \quad (2.84)$$

Отсюда легко найти величины A и B и записать

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t) = & \frac{1}{\gamma_- - \gamma_+} \{ [(\gamma_1 + \gamma_-) \mathcal{E}_{10} - a_{23} \mathcal{E}_{20} \mathcal{E}_3] e^{\gamma_+ t} \\ & + [-(\gamma_1 + \gamma_+) \mathcal{E}_{10} + a_{23} \mathcal{E}_{20} \mathcal{E}_3] e^{\gamma_- t} \}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Если оба значения γ отрицательны, то с течением времени амплитуда волны $\mathcal{E}$ будет убывать. Аналогично будет вести себя и амплитуда второй волны. Если же хотя бы одно из значений положительно, то амплитуда будет нарастать со временем. Очевидно, что положительные значения возможны только у γ_+ при выполнении неравенства $\gamma_0^2 > \gamma_1 \gamma_2$. Это значит, что амплитуды волн $\mathcal{E}_{1,2}$ нарастают со временем, если амплитуда волны накачки превышает определенное значение

$$\mathcal{E}_{3p}^2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{a_{23} a_{13}}. \quad (2.86)$$

Это значение амплитуды накачки называют *пороговым*. При превышении порога (2.86) амплитуды $\mathcal{E}_{1,2}$ нарастают и имеет место неустойчивость, которую принято называть *распадной*. Физическая причина этой неустойчивости состоит в том, что волна накачки, имеющая наибольшую частоту, передает свою энергию волнам с меньшими частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ (см. (2.45)). Если возникающие в результате распада волны теряют энергии из-за диссипации меньше, чем приобретают ее от волны накачки (для этого нужно, чтобы величина $\mathcal{E}_3^2$ превышала пороговое значение), то их амплитуды нарастают со временем. Условия (2.45) называют *распадными условиями*. Величина γ_+ определяет инкремент неустойчивости

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 4\gamma_0^2} - (\gamma_1 + \gamma_2) \right]. \quad (2.87)$$

Здесь величина $\gamma_0^2 \sim \mathcal{E}_3^2$. На Рис. 2.1 показан график изменения инкремента при изменении γ_0 (т.е. амплитуды волн $\mathcal{E}_3^2$ накачки), которая пропорциональна величине γ_0 . Вблизи порога ($\gamma_0^2 \simeq \gamma_1 \gamma_2$)

$$\gamma \simeq \frac{\gamma_0^2 - \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (2.88)$$

Вдали от порога ($\gamma_0^2 \gtrsim \gamma_1 \gamma_2$) $\gamma \simeq \gamma_0$.

Со временем амплитуды волн с частотами ω_1 и ω_2 становятся достаточно большими и необходимо учитывать их влияние на волну накачки. Если считать, что источник (генератор) для волны с частотой ω_3 отключен и диссипация всех волн мала, то из соотношений Мэнли-Роу следует, что полная энергия всех волн сохраняется. Это значит, что рост амплитуд $\mathcal{E}_{1,2}$ приведет к уменьшению амплитуды волны $\mathcal{E}_3$. И по истечении определенного времени энергия от волн $\mathcal{E}_{1,2}$ начнет переходить к волне $\mathcal{E}_3$. Возникнут периодические изменения амплитуд всех волн со временем. Процесс, при котором две более низкочастотные волны создают высокочастотную, идет также с выполнением соотношений $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ и $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$ и называется *слиянием*.

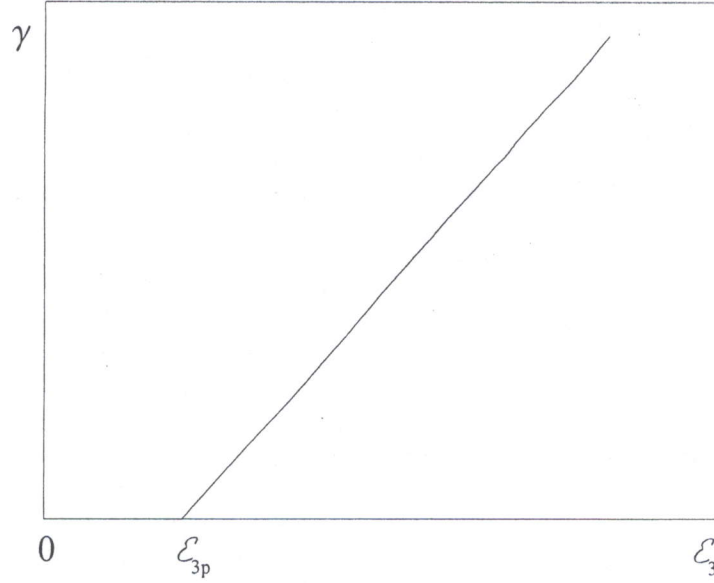


Рис. 2.1: График изменения инкремента нарастания при изменении амплитуды волны накачки ξ_3 .

2.7 Граничная задача в приближении заданного поля

Во многих случаях волна накачки вводится в среду через границу, и более оправданной является граничная задача. Естественно, что вблизи границы, где интенсивность падающего излучения изменилась еще мало, амплитуду волны накачки можно считать постоянной. В этой области можно снова использовать приближение заданного поля, но искать изменение амплитуд волн нужно не во времени, а в пространстве.

Будем считать, что волна накачки падает нормально на среду, занимающую полупространство $x > 0$. Уравнения для амплитуд $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ в данном случае имеют вид

$$\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_1 \right) \mathcal{E}_1 = a_{23} \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3, \quad (2.89)$$

$$\left(v_2 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2 \right) \mathcal{E}_2 = a_{13} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3, \quad (2.90)$$

где v_1 и v_2 — проекции групповых скоростей на ось ОХ.

Для различных трехволновых процессов возможны различные знаки у проекций групповых скоростей. Если $v_1, v_2 > 0$, то говорят о *попутных волнах*, хотя фактически они могут распространяться под углом друг к другу. Если v_1 и v_2 имеют различные знаки, то говорят о *встречных волнах*.

Рассмотрим сначала встречные волны и положим, что $v_1 > 0$, а $v_2 < 0$. Введем обозначения $\Gamma_1 = \gamma_1/v_1$, $\Gamma_2 = \gamma_2/|v_2|$ и запишем уравнения в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_1 \right) \mathcal{E}_1 = \frac{a_{23}}{v_1} \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3, \quad (2.91)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \Gamma_2 \right) \mathcal{E}_2 = -\frac{a_{13}}{|v_2|} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3. \quad (2.92)$$

Как и в случае начальной задачи решение этих уравнений можно искать в виде $\mathcal{E}_{1,2} \sim e^{\Gamma x}$. Для определения Γ найдем

$$(\Gamma + \Gamma_1)(\Gamma_2 - \Gamma) = \frac{a_{23}a_{13}}{v_1|v_2|} \mathcal{E}_3^2 = \frac{\gamma_0^2}{v_1|v_2|} = \Gamma_0^2. \quad (2.93)$$

Отсюда получим два корня

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\Gamma_2 + \Gamma_1)^2 - \Gamma_0^2}. \quad (2.94)$$

Анализ решений для амплитуд проведем в общем случае.

При $\Gamma_0 \leq \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ и $\Gamma_2 > \Gamma_1$ получим $\Gamma_+ > 0$ и $\Gamma_- < 0$ (при $\Gamma_0^2 < \Gamma_1\Gamma_2$), $\Gamma_- > 0$ (при $\Gamma_0^2 > \Gamma_1\Gamma_2$). В этом случае волны с Γ_+ нарастают.

При $\Gamma_0 \leq \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ и $\Gamma_2 < \Gamma_1$ получим $\Gamma_- < 0$ и $\Gamma_+ > 0$ (при $\Gamma_0^2 < \Gamma_1\Gamma_2$), $\Gamma_+ < 0$ (при $\Gamma_0^2 > \Gamma_1\Gamma_2$). В этом случае волны с Γ_- затухают.

При $\Gamma_0 > \frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ получаем:

$$\Gamma_{\pm} = \frac{1}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_1) \pm i\sqrt{\Gamma_0^2 - \frac{1}{4}(\Gamma_2 + \Gamma_1)^2} = \Gamma_{21} \pm \frac{i}{L_0}, \quad (2.95)$$

где $\Gamma_{21} = \frac{1}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_1)$. Это значит, что фундаментальная система функций, из которых строится решение для амплитуд, имеет вид:

$$e^{\Gamma_{\pm}x} = e^{\Gamma_{21}x} e^{\pm ix/L_0} = e^{\Gamma_{21}x} [\cos(x/L_0) \pm i \sin(x/L_0)]. \quad (2.96)$$

Амплитуды волн осциллируют в пространстве с масштабом L_0 , равным

$$L_0 = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_0^2 - \frac{1}{4}(\Gamma_2 + \Gamma_1)^2}} = \frac{1}{\mathcal{E}_3} \sqrt{\frac{v_1|v_2|/a_{23}a_{13}}{1 - (\Gamma_2 + \Gamma_1)^2/4\Gamma_0^2}}. \quad (2.97)$$

Величину L_0 называют *длиной фазового синхронизма волн*. Эта длина тем меньше, чем больше амплитуда накачки. Причина таких осцилляций состоит в следующем. Для того, чтобы две волны при взаимодействии с третьей волной нарастали, нужно не только выполнение условия $k_3 = k_1 + k_2$, но и соответствующий подбор медленно изменяющихся с координатой фаз волн. По мере взаимодействия относительная фаза волн изменяется. Это приводит к тому, что в одной области пространства более низкочастотные волны отбирают энергию у волны накачки, а в другой области-наоборот, возвращают ее.

Если затухание волн достаточно большое ($\Gamma_1 + \Gamma_2 > 2\Gamma_0$), то можно разложить выражение под радикалом и записать

$$\Gamma_+ \simeq \Gamma_2 - \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad \Gamma_- \simeq -\Gamma_1 + \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (2.98)$$

Допустим, что затухание первой волны больше, чем затухание второй ($\Gamma_1 > \Gamma_2$, $\Gamma_1 > 2\Gamma_0$). Тогда

$$\Gamma_- \simeq -\Gamma_1 + \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_1} = \frac{\Gamma_0^2 - \Gamma_1^2}{\Gamma_1} < 0, \quad \Gamma_+ \simeq \Gamma_2 - \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma_1} = \frac{\Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_0^2}{\Gamma_1}. \quad (2.99)$$

При $\Gamma_0^2 > \Gamma_1\Gamma_2$ величина $\Gamma_+ < 0$ и этому значению отвечает нарастающее вдоль оси ОХ решение. Условие такого пространственного нарастания (усиления) волны совпадает с условием неустойчивости во временной задаче и возникает только при превышении порога (2.86). Существенное отличие начальной задачи от временной состоит в том, что нарастать может только одна из волн с наименьшим затуханием, в то время как другая волна не нарастает.

Обратимся теперь к случаю попутных волн ($v_{1,2} > 0$). Исходная система уравнений в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_1\right) \mathcal{E}_1 = \frac{a_{23}}{v_1} \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3, \quad (2.100)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_2\right) \mathcal{E}_2 = \frac{a_{13}}{v_2} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3. \quad (2.101)$$

Как и в случае встречных волн будем искать решение в виде $e^{\Gamma x}$ и для определения величины Γ получим

$$\Gamma_{\pm} = -\frac{1}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + \Gamma_0^2}. \quad (2.102)$$

Решение Γ_+ может быть положительно и ему соответствуют нарастающие в пространстве амплитуды волн. Это имеет место при $\Gamma_0^2 > \Gamma_1\Gamma_2$ и, следовательно, только при превышении порогового поля (2.86). При этом величину Γ_+ называют *коэффициентом усиления*.

При значительном превышении порогового поля этот коэффициент усиления имеет наиболее простой вид

$$\Gamma_+ = \Gamma_0 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{v_1 v_2}}. \quad (2.103)$$

Часто в этом случае говорят об усилении волн (или о конвективной неустойчивости).

Рассмотренная нами картина взаимодействия волн справедлива только в той области пространства, где амплитуда падающей волны изменяется незначительно. Если же это ограничение не выполняется, то необходимо учитывать и изменение амплитуды $\mathcal{E}_3$. В случае попутных волн это приводит к осцилляциям амплитуд в пространстве.

2.8 Параметрические неустойчивости

В среде, находящейся во внешнем электромагнитном поле, возникает периодическая во времени и пространстве поляризация или ток. Это значит, что характеристики среды изменяются периодически во времени и пространстве. Часто среды с таким периодическим изменением своих свойств оказываются неустойчивыми и эти неустойчивости называют *параметрическими*.

Чтобы лучше понять, когда и почему такие неустойчивости возникают, рассмотрим сначала параметрический резонанс в механике. Представим себе маятник (осциллятор), собственная частота которого не постоянна, а периодически изменяется со временем. Уравнение движения для такого осциллятора хорошо известно

$$\ddot{x} + \omega_1^2 [1 + h \cos(\omega_0 t)] x = 0. \quad (2.104)$$

Это уравнение называется уравнением Матье. Будем искать решение уравнения в виде интеграла Фурье

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} x(\omega). \quad (2.105)$$

После подстановки в уравнение получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} x(\omega) (\omega_1^2 - \omega^2) + \frac{h\omega_1^2}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega' t} x(\omega') = 0. \quad (2.106)$$

Сделаем замену переменной интегрирования в последнем слагаемом ($\omega' - \omega_0 = \omega$ в первом члене и $\omega' + \omega_0 = \omega$ во втором члене). В результате получим для определения Фурье-компоненты уравнение в конечных разностях

$$(\omega_1^2 - \omega^2) x(\omega) + \frac{h\omega_1^2}{2} [x(\omega + \omega_0) + x(\omega - \omega_0)] = 0. \quad (2.107)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, проведем замену $\omega \rightarrow \omega + \omega_0$ и $\omega \rightarrow \omega - \omega_0$. Тогда для определения компонент $x(\omega \pm \omega_0)$ получим

$$[\omega_1^2 - (\omega + \omega_0)^2] x(\omega + \omega_0) + \frac{h\omega_1^2}{2} [x(\omega + 2\omega_0) + x(\omega)] = 0, \quad (2.108)$$

$$[\omega_1^2 - (\omega - \omega_0)^2] x(\omega - \omega_0) + \frac{h\omega_1^2}{2} [x(\omega) + x(\omega - 2\omega_0)] = 0. \quad (2.109)$$

Мы видим, что компоненты $x(\omega \pm \omega_0)$ выражаются не только через компоненту $x(\omega)$, но и через компоненты $x(\omega \pm 2\omega_0)$. Для их определения можно написать подобные уравнения. В них войдут не только компоненты $x(\omega \pm \omega_0)$, но и $x(\omega \pm 3\omega_0)$ и т.д. Существенно, что связь низших компонент с высшими всегда пропорциональна параметру h (амплитуда осцилляций длины маятника). Если этот параметр мал ($h \ll 1$), то можно оборвать цепочку уравнений. Ограничимся учетом членов, пропорциональных h^2 . Это значит, что в уравнении для $x(\omega \pm \omega_0)$ можно отбросить $x(\omega \pm 2\omega_0)$. Тогда из исходного уравнения получим

$$\omega_1^2 - \omega^2 - \left(\frac{h\omega_1^2}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{\omega_1^2 - (\omega + \omega_0)^2} + \frac{1}{\omega_1^2 - (\omega - \omega_0)^2} \right] = 0. \quad (2.110)$$

Полученное уравнение определяет собственную частоту колебаний маятника. Если $h = 0$, то $\omega = \pm\omega_1$. Это значит, что маятник колеблется без затухания на частоте ω_1 . Если учесть h^2 и привести выражение к общему знаменателю, то найдем

$$\omega_1^2 - \omega^2 - \left(\frac{h\omega_1^2}{2}\right)^2 \frac{2(\omega_1^2 - \omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_1^2 - \omega^2 - \omega_0^2)^2 - 4\omega^2\omega_0^2} = 0. \quad (2.111)$$

Из-за того, что h мало, решение для ω должно мало отличаться от ω_1 . Будем искать его по теории возмущений в виде $\omega = \omega_1 + \delta\omega$. В результате подстановки и отбрасывания малых ($\sim \delta\omega^2$) слагаемых, найдем

$$\delta\omega \left[\omega_1 (\omega_0^2 - 4\omega_1^2) + \frac{1}{2} (\omega_0^2 - 12\omega_1^2) \delta\omega \right] = \left(\frac{h\omega_1^2}{2}\right)^2. \quad (2.112)$$

Если ω_0^2 существенно отличается от $4\omega_1^2$ (т.е. ω_0 от $2\omega_1$), то в квадратной скобке можно отбросить малое слагаемое и для $\delta\omega$ найдем

$$\delta\omega \simeq \left(\frac{h\omega_1^2}{2}\right)^2 \frac{1}{\omega_1 (\omega_0^2 - 4\omega_1^2)}. \quad (2.113)$$

Если же $\omega_0^2 = 4\omega_1^2$, то

$$\delta\omega \simeq \pm i \frac{h}{4} \omega_1. \quad (2.114)$$

Таким образом, при $\omega_0 = 2\omega_1$ добавка к частоте является мнимой и соответствующая компоненте $x(\omega)$ зависимость от времени имеет вид $\exp[-i\omega_1 t \pm (h/4)\omega_1 t]$. Для знака плюс решение нарастает. Это и есть т.н. *параметрический резонанс* или, другими словами, параметрическая неустойчивость. Она возникает не только при $\omega_0 \simeq 2\omega_1$, но и при $\omega_0 \simeq n\omega_1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), но соответствующие инкременты зависят от величины h в более высокой степени и меньше, чем при $\omega_0 = 2\omega_1$.

Подобного рода параметрические неустойчивости возникают и в нелинейной среде, через которую проходит электромагнитная волна. Рассмотрим закон дисперсии для малых возмущений в среде, через которую распространяется волна накачки заданной амплитуды

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega_0 t} + \mathbf{E}_0^* e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + i\omega_0 t} \right). \quad (2.115)$$

Нелинейное материальное уравнение в анизотропной среде без дисперсии в квадратичном приближении имеет вид (см. выражение (2.2)) $D_i = \varepsilon_{ij} E_j + \varepsilon_{ijl} E_j E_l$. Будем считать, что помимо поля накачки в среде имеется еще волна с малой амплитудой $\delta\mathbf{E}$. Тогда в линейном приближении для этой волны получим

$$\delta D_i = \varepsilon_{ij} \delta E_j + \varepsilon_{ijl} \left(E_j^{(0)} \delta E_l + E_l^{(0)} \delta E_j \right). \quad (2.116)$$

Сделав замену индексов в последнем члене и введя тензор $S_{ijl} = \varepsilon_{ijl} + \varepsilon_{ilj}$, получим

$$\delta D_i = \varepsilon_{ij} \delta E_j + S_{ijl} E_l^{(0)} \delta E_j. \quad (2.117)$$

Уже из этого соотношения видно, что волна распространяется в среде, свойства которой изменяются из-за волны накачки во времени и пространстве по периодическому закону. Если подставить в это материальное уравнение поле волны накачки и сделать Фурье-преобразование, то найдем

$$\delta D_i(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_{ij} \delta E_j(\mathbf{k}, \omega) + \frac{1}{2} S_{ijl} [E_{0l} \delta E_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0) + E_{0l}^* \delta E_j(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \omega + \omega_0)]. \quad (2.118)$$

Уравнение для поля $\delta \mathbf{E}$ имеет обычный вид

$$\text{rot rot } \delta \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.119)$$

Если провести разложение Фурье и использовать принятые нами обозначения, то для компонент поля получим соотношение

$$M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \delta E_j(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{2} S_{ijl} [E_{0l} \delta E_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0) + E_{0l}^* \delta E_j(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \omega + \omega_0)], \quad (2.120)$$

где $M_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ -максвелловский тензор (см. выражение (1.344)). По структуре это также уравнение в конечных разностях, но из-за периодичности в пространстве волны накачки помимо зависимости от частоты имеется еще зависимость от волновых векторов $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$. Как и в случае маятника, если считать связь компонент с разными частотами и волновыми векторами слабой (волна накачки имеет малую амплитуду), то можно выразить компоненты $\delta E_j(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0, \omega \pm \omega_0)$ через компоненту $\delta E_j(\mathbf{k}, \omega)$ и записать уравнение

$$M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \delta E_j(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (2.121)$$

где

$$M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{4} S_{ipl} S_{\alpha js} E_{0l} E_{0s}^* M_{p\alpha}^{-1}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0) - \frac{1}{4} S_{ipl} S_{\alpha js} E_{0s} E_{0l}^* M_{p\alpha}^{-1}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \omega + \omega_0). \quad (2.122)$$

Условие разрешимости этой системы линейных алгебраических уравнений является равенство нулю определителя системы

$$\det \|M_{ij}(\mathbf{k}, \omega)\| = 0. \quad (2.123)$$

Введем единичный вектор поляризации волны накачки $\mathbf{e} = \mathbf{E}_0/\mathcal{E}_0$ и рассмотрим изотропную среду. Уравнение (2.123) с учетом выражения (1.349) принимает вид, где

$$\det \left\| \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_l(k, \omega) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left(\varepsilon_{tr}(k, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) - \frac{1}{4} \mathcal{E}_0^2 \left[\frac{S_{ipl} S_{\alpha js} e_l e_s^* k_{-p} k_{-\alpha}}{k_-^2 \varepsilon_l(k_-, \omega_-)} + \frac{S_{ipl} S_{\alpha js} e_l e_s^* (\delta_{p\alpha} - k_{-p} k_{-\alpha} / k_-^2)}{\varepsilon_{tr}(k_-, \omega_-) - k_-^2 c^2 / \omega_-^2} + \frac{S_{ipl} S_{\alpha js} e_l e_s^* k_{+p} k_{+\alpha}}{k_+^2 \varepsilon_l(k_+, \omega_+)} + \frac{S_{ipl} S_{\alpha js} e_l e_s^* (\delta_{p\alpha} - k_{+p} k_{+\alpha} / k_+^2)}{\varepsilon_{tr}(k_+, \omega_+) - k_+^2 c^2 / \omega_+^2} \right] \right\| = 0. \quad (2.124)$$

Здесь $\mathbf{k}_\pm = \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$, $\omega_\pm = \omega \pm \omega_0$. Во многих случаях нужно учитывать волну накачки также и в знаменателях обратных тензоров $M^{-1}(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0, \omega \pm \omega_0)$.

Если волны накачки нет, то дисперсионное уравнение определяет обычные ветви (типы) волн в изотропной плазме. Волна накачки изменяет эти законы дисперсии. Ее влияние особенно существенно тогда, когда малы знаменатели, содержащие законы дисперсии волн на комбинационных частотах. Эта малость знаменателей налагает условие на частоты и волновые векторы волны накачки, подобные тем, которые были в случае маятника ($\omega_0 = 2\omega_1$). В этих случаях в среде также возникает параметрический резонанс и волны нарастают (параметрическая неустойчивость).

Частным случаем параметрических неустойчивостей являются распадные неустойчивости, которые мы рассмотрели в §2.6. Им соответствует решение дисперсионного уравнения по теории возмущений, когда в нулевом приближении выполнены законы дисперсии для взаимодействующих волн, а влияние накачки приводит лишь к малому изменению частот. Именно такие допущения были использованы при выводе укороченных уравнений поля.

2.9 Нелинейное взаимодействие волн со случайными фазами

Часто и особенно в плазме возбуждается много волн с разными частотами и длинами, начальные фазы которых никак не связаны между собой и случайны. Суммарное поле этих волн является случайной функцией координат и времени. Наиболее простой и достаточно полной характеристикой такой случайной функции является *корреляционная функция*, которую можно найти, если известны ее Фурье-компонента или, иными словами, *спектральная плотность корреляционной функции* $(E_i E_j)_{\mathbf{k}, \omega}$ (см. Приложение В). Для полей, возникающих в плазме из-за излучения и поглощения их частицами, величина $(E_i E_j)_{\mathbf{k}, \omega} = P_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ выражается через функцию распределения частиц (см. §1.29). При этом предполагается, что время установления равновесия между волнами и частицами очень мало. В действительности, это может быть и не так. Может оказаться, что более быстрым и поэтому более важным является процесс обмена энергией между различными волнами, а не между волнами и частицами. Возникает задача, найти уравнение, которое учитывало бы изменение спектральной плотности корреляционной функции за счет взаимодействия волн с различными частотами и длинами.

Следует отметить, что состояние плазмы, в котором возбуждены случайные электромагнитные поля, часто называют *турбулентным*. Поэтому задача состоит в том, чтобы построить уравнения, которые описывают эволюцию этого турбулентного состояния из-за нелинейного взаимодействия волн.

Уравнение (2.30) описывает изменение амплитуды одной из волн с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$ за счет взаимодействия с другими волнами. Амплитуда $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t; \mathbf{k}, \omega)$ является комплексной и поэтому уравнение определяет изменение не только действительной амплитуды, но и начальной фазы. Фазы волн, образующие случайное поле, не определены. Мы уже говорили, что в этом случае обычно используют предположение о хаотических, случайных фазах и проводят по ним усреднение (см. Приложение В). При этом усреднении спектральная плотность корреляционной функции возникает как результат усреднения Фурье-компонент или комплексных амплитуд волн

$$\begin{aligned} \langle E_j(\mathbf{k}, \omega) E_i^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= P_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta(\omega' - \omega), \\ \langle E_j(\mathbf{k}, \omega) E_i(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= P_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \delta(\omega' + \omega), \end{aligned} \quad (2.125)$$

которое справедливо в случае стационарных и пространственно-однородных состояний. Подчеркнем, что соотношение (2.125) используется при предположении, что средние значения напряженностей электрических полей отсутствуют в среде, именно:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \rangle = 0. \quad (2.126)$$

Всюду ниже мы также будем считать выполненным условие (2.126).

Мы ограничимся изучением процессов, для которых достаточно удерживать в уравнении (2.37) члены вплоть до четвертой степени поля. Для того, чтобы получить уравнение для $(E_i E_j)_{\mathbf{k}, \omega} = P_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, умножим уравнение (2.30) на $E_i^*(\mathbf{k}', \omega')$, а уравнение для $E_i^*(\mathbf{k}', \omega')$ умножим на $E_j(\mathbf{k}, \omega)$, сложим полученные выражения и проведем статистическое усреднение (предполагается, что из-

менение спектральных характеристик полей происходит медленно)

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{k}, \omega) + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega) + 2\gamma(\mathbf{k}, \omega) W(\mathbf{k}, \omega) \right] \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta(\omega' - \omega) \\
& = \frac{i\omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int d\mathbf{k}_1 \{ \epsilon_{ijl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) \langle E_i^*(\mathbf{k}', \omega') E_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) E_l(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rangle \\
& \quad - \epsilon_{ijl}^*(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}_1, \omega_1) \langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_j^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1, \omega' - \omega_1) E_l^*(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rangle \} \\
& \quad + \frac{i\omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int d\mathbf{k}_1 \int d\mathbf{k}_2 \{ \epsilon_{ijkl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2) \\
& \quad \times \langle E_i^*(\mathbf{k}', \omega') E_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) E_k(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \omega_1 - \omega_2) E_l(\mathbf{k}_2, \omega_2) \rangle \\
& \quad - \epsilon_{ijkl}^*(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2) \langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_j^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1, \omega' - \omega_1) E_k^*(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \omega_1 - \omega_2) E_l^*(\mathbf{k}_2, \omega_2) \rangle \},
\end{aligned} \tag{2.127}$$

где спектральная плотность энергии электромагнитного поля $W(\mathbf{k}, \omega)$, спектральная плотность потока энергии (вектора Пойнтинга) $\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega)$ и декремент затухания $\gamma(\mathbf{k}, \omega)$ определяются выражениями (см. формулы (2.38), (2.39) и (2.41))

$$W(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \epsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] P_{ji}(\mathbf{k}, \omega), \tag{2.128}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \omega \frac{\partial M_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \mathbf{k}} P_{ji}(\mathbf{k}, \omega), \tag{2.129}$$

$$\gamma(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{i\omega}{4\pi W(\mathbf{k}, \omega)} \epsilon_{ij}^A(\mathbf{k}, \omega) P_{ji}(\mathbf{k}, \omega). \tag{2.130}$$

Согласно формуле (2.20) и уравнению (2.127) амплитуды почти монохроматических полей, входящие в уравнение (2.37), медленно меняются в пространстве и времени. В этом смысле состояние электромагнитного поля в среде не является в точности стационарным и однородным, как это предполагается при записи соотношения (2.125), а квазистационарным во времени и квазиоднородным в пространстве. Поэтому именно благодаря медленности изменения амплитуд полей, связанной, как мы видели выше, с малостью линейного затухания и нелинейных эффектов, можно считать теперь уже приближенно выполненным равенство (2.125).

Заметим далее, что операция статистического усреднения подразумевает наличие определенной функции распределения напряженностей электрических полей в среде. Отыскание такой функции распределения представляло бы собой полное решение задачи статистической электродинамики. Однако, для наших целей подобное решение не является необходимым, так как мы ставим перед собой более ограниченную задачу: получить уравнения, описывающие эволюцию спектральных функций поля $P_{ji}(\mathbf{k}, \omega)$. На языке теории вероятностей этому соответствует отыскание нескольких первых моментов случайных величин, а не их функции распределения, знание которой позволяет в принципе вычислять моменты любого порядка.

В линейной электродинамике, которой соответствует отбрасывание в правой части (2.127) всех нелинейных слагаемых, уравнение для спектральных функций поля имеет вид совпадающий с уравнением (1.115), где $\langle W \rangle$ и $\mathbf{v}_g \langle W \rangle$ надо заменить на $W(\mathbf{k}, \omega)$ и $\mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega)$, соответственно. Из этого уравнения сохранения энергии вытекает очевидное свойство спектральных функций в рамках линейной электродинамики. Именно, такие функции для разных $\mathbf{k}$ и ω не коррелированы. Поэтому благодаря (2.126) и отсутствию корреляций волн с разными $\mathbf{k}$ и ω получаем следующее соотношение для корреляционной функции трех амплитуд электрических полей линейной электродинамики:

$$\langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}', \omega') E_s(\mathbf{k}'', \omega'') \rangle = 0. \tag{2.131}$$

Корреляционную функцию четырех амплитуд линейной электродинамики можно записать в

виде

$$\begin{aligned}
\langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}_1, \omega_1) E_l(\mathbf{k}_2, \omega_2) E_s(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle &= \langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rangle \langle E_l(\mathbf{k}_2, \omega_2) E_s(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle \\
+ \langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_l(\mathbf{k}_2, \omega_2) \rangle \langle E_j(\mathbf{k}_1, \omega_1) E_s(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle &+ \langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_s(\mathbf{k}_3, \omega_3) \rangle \langle E_j(\mathbf{k}_1, \omega_1) E_l(\mathbf{k}_2, \omega_2) \rangle \\
&= P_{ij}(\mathbf{k}, \omega) P_{ls}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega + \omega_1) \delta(\omega_2 + \omega_3) \\
&+ P_{il}(\mathbf{k}, \omega) P_{js}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega + \omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_3) \\
&+ P_{is}(\mathbf{k}, \omega) P_{jl}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\omega + \omega_3) \delta(\omega_1 + \omega_2).
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Для того, чтобы пояснить возможность такого представления, рассмотрим случайную функцию времени. Возьмем произведение четырех значений функции для четырех различных моментов времени и усредним по статистическому ансамблю (см. Приложение В). Отличный от нуля результат получится в двух случаях. Во-первых, если аргументы двух произвольных пар функций окажутся настолько близко друг к другу, что их произведение всегда будет положительно. Во-вторых, если все четыре функции во всех реализациях будут иметь одинаковый знак. Последнее возможно только в том случае, когда все четыре момента времени близки друг к другу. Естественно предположить, то второй вариант менее вероятен, чем первый, и его не учитывать. Тогда среднее от произведения четырех случайных значений функции можно представить как произведение усредненных парных произведений.

В нелинейной электродинамике формулы (2.131) и (2.132), строго говоря, не имеют места, поскольку по самому смыслу нелинейного взаимодействия различных волн их амплитуды оказываются коррелированными. Однако в случае слабой нелинейности, которая здесь только и рассматривается, когда в правой части соотношений (2.6), (2.11) и (2.127) можно ограничиться лишь несколькими членами ряда по степеням поля, такое отличие, во-первых, будет сравнительно невелико, а, во-вторых, учитывая именно отличие соответствующих формул нелинейной электродинамики от (2.131) и (2.132), вместо них можно написать более точные. Для нашего последующего вывода уравнения, описывающего эволюцию спектральных функций поля, следует получить формулу для корреляционной функции трех амплитуд, уточняющую (2.131) на случай, когда в нелинейном уравнении поля (2.11) учитывается первое нелинейное слагаемое, квадратичное по амплитудам электрического поля:

$$M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int d\mathbf{k}_1 \varepsilon_{ijs}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) E_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) E_s(\mathbf{k}_1, \omega_1). \tag{2.133}$$

Правая часть уравнения (2.133) соответствует эффектам нелинейного взаимодействия волн. Именно, если бы правая часть этого уравнения равнялась нулю, то его решения соответствовали бы невзаимодействующим волнам $E_i(\mathbf{k}, \omega) = E_i^0(\mathbf{k}, \omega)$, где знаком "0" отмечена амплитуда E_i^0 , являющаяся решением уравнения (1.35) линейной электродинамики. В связи с этим перепишем (2.133) в несколько ином виде:

$$\begin{aligned}
E_i(\mathbf{k}, \omega) &= E_i^0(\mathbf{k}, \omega) - M_{ia}(\mathbf{k}, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int d\mathbf{k}_1 \varepsilon_{ajs}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) \\
&\times E_j^0(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) E_s^0(\mathbf{k}_1, \omega_1),
\end{aligned} \tag{2.134}$$

где $M_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ -тензор, обратный максвелловскому: $M_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = M_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega)$.

Уравнение поля в форме (2.134) (или более общее, учитывающее не только квадратичные, но и более старшие слагаемые по степеням поля) удобно для решения (2.11) по теории возмущений, в которой в качестве нулевого приближения можно взять поле $E^0(\mathbf{k}, \omega)$. Для наших целей достаточно первого приближения, чему соответствует подстановка во второе (нелинейное) слагаемое правой части (2.134) полей нулевого приближения E^0 . Такая процедура может быть использована для написания искомого соотношения, обобщающего (2.131) с точностью до членов четвертой

степени по амплитудам электрического поля:

$$\begin{aligned} \langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}', \omega') E_s(\mathbf{k}'', \omega'') \rangle &= \langle E_i^0(\mathbf{k}, \omega) E_j^0(\mathbf{k}', \omega') E_s^0(\mathbf{k}'', \omega'') \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int d\mathbf{k}_1 \\ &\times \{ \mathcal{M}_{ia}(\mathbf{k}, \omega) \varepsilon_{abc}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) \langle E_j^0(\mathbf{k}', \omega') E_s^0(\mathbf{k}'', \omega'') E_b^0(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) E_c^0(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rangle \\ &+ \mathcal{M}_{ja}(\mathbf{k}', \omega') \varepsilon_{abc}(\mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}_1, \omega_1) \langle E_i^0(\mathbf{k}, \omega) E_s^0(\mathbf{k}'', \omega'') E_b^0(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1, \omega' - \omega_1) E_c^0(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rangle \\ &+ \mathcal{M}_{sa}(\mathbf{k}'', \omega'') \varepsilon_{abc}(\mathbf{k}'', \omega''; \mathbf{k}_1, \omega_1) \langle E_i^0(\mathbf{k}, \omega) E_j^0(\mathbf{k}', \omega') E_b^0(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}_1, \omega'' - \omega_1) E_c^0(\mathbf{k}_1, \omega_1) \rangle \}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

В (2.135) первое слагаемое справа равно нулю согласно (2.131), поскольку векторы $\mathbf{E}^0$ представляют собой амплитуды некоррелированных волн. Остальные слагаемые правой части (2.135) содержат, как и (2.132), произведение четырех амплитуд электрических полей нулевого приближения. Следовательно, при плучении уравнения для эволюции спектральных функций поля слагаемые, содержащие третью и четвертую степени поля в уравнении (2.127) (второе и третье слагаемые в правой части (2.127)), приводят к эффектам, вообще говоря, одинакового порядка величины.

Ограничиваясь в искомом нами уравнении точностью четвертой степени поля, можно не уточнять формулу (2.132) для корреляционной функции четырех амплитуд. Более того, при такой точности в билинейных комбинациях спектральных функций поля можно не делать различия между амплитудами электрических полей $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\mathbf{E}^0(\mathbf{k}, \omega)$. В результате подстановки (2.132) и (2.135) вместо корреляционных функций четырех и трех амплитуд в уравнение (2.127) возникнут 24 слагаемых. Из них часть будет содержать ту же δ -функцию, что стоит в левой стороне уравнения (2.127). Именно они будут соответствовать учету изменения спектральной плотности именно на частоте ω и с волновым вектором $\mathbf{k}$. Кроме того, полученное выражение содержит обратные максвелловские тензоры с нулевыми значениями аргументов $\mathcal{M}_{ij}(0, 0)$ и поэтому для интересующих нас задач нелинейного взаимодействия электромагнитных волн эти слагаемые несущественны, ибо для волн $\mathbf{k}$ и ω одновременно не равны нулю. Учитывая все сказанное окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{k}, \omega) + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{k}, \omega) + 2\gamma(\mathbf{k}, \omega) W(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int d\mathbf{k}_1 \\ &\times \{ \mathcal{M}_{ia}^*(\mathbf{k}, \omega) S_{ijs}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) S_{abc}^*(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) P_{sc}(\mathbf{k}_1, \omega_1) P_{jb}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \\ &+ 2\mathcal{M}_{jb}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) S_{ijs}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) S_{bca}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1; \mathbf{k}, \omega) P_{ai}(\mathbf{k}, \omega) P_{sc}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \\ &- 3V_{isac}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) P_{ai}(\mathbf{k}, \omega) P_{cs}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Здесь учтены свойства корреляционных функций $P_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = P_{ji}^*(\mathbf{k}, \omega) = P_{ji}(-\mathbf{k}, -\omega)$ и приняты обозначения

$$S_{ijs}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) = \varepsilon_{ijs}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) + \varepsilon_{isj}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) = 2\varepsilon_{ijs}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1), \quad (2.137)$$

$$\begin{aligned} V_{ijsl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) &= \varepsilon_{ijsl}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}, \omega_1 + \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) + \varepsilon_{ijls}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}, \omega_1 + \omega; \mathbf{k}, \omega) \\ &= 2\varepsilon_{ijls}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}, \omega_1 + \omega; \mathbf{k}, \omega) = 2\varepsilon_{isjl}(\mathbf{k}, \omega; 0, 0; \mathbf{k}_1, \omega_1). \end{aligned} \quad (2.138)$$

Эти равенства обусловлены свойствами симметрии нелинейных тензоров (2.9) и (2.10).

Обычно интересуются такими случайными полями, которые образованы слабо затухающими волнами в среде. Для этих волн частота и волновой вектор не являются независимыми, а связаны между собой дисперсионным соотношением $\mathcal{D}^H(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) = e_i^* M_{ij}^H e_j = 0$. В этом случае вместо спектральной плотности корреляционной функции используют плотность энергии $W(\mathbf{k})$ волны с волновым вектором $\mathbf{k}$. Эта величина выражается через $P_{ji}(\mathbf{k}, \omega)$ следующим образом (см. §2.5)

$$W(\mathbf{k}) = \int_0^\infty d\omega \frac{1}{4\pi\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 \varepsilon_{ij}^H(\mathbf{k}, \omega)] P_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathcal{D}^H(\mathbf{k}, \omega)). \quad (2.139)$$

Для величины $\mathcal{N}(\mathbf{k}) = W(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k})$ получается уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + 2\gamma \right) \mathcal{N}(\mathbf{k}) &= \int d\mathbf{k}' Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \\ &\times \delta[\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}')] [\mathcal{N}(\mathbf{k}') \mathcal{N}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \mathcal{N}(\mathbf{k}) \mathcal{N}(\mathbf{k}') - \mathcal{N}(\mathbf{k}) \mathcal{N}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')]. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Уравнение (2.140) можно рассматривать как кинетическое уравнение для слабой турбулентности при учете одних лишь трехволновых процессов. Оно определяет взаимодействие волн с различными длинами (волновыми векторами) в приближении хаотических фаз. Как отмечалось раньше, величину $\mathcal{N}(\mathbf{k})$ называют числом квантов и в этой связи уравнение (2.140) называют *кинетическим уравнением для квантов*. Стоящее справа выражение имеет смысл интеграла столкновений между квантами. Уравнение (2.140) описывает перенос энергии по спектру, т.е. в пространстве волновых чисел.

Заметим, что в состоянии равновесия нелинейное взаимодействие между волнами не должно изменять плотности их энергии. Это значит, что стоящее справа в (2.138) слагаемое должно обращаться в ноль, если распределение энергии по волновым векторам равновесное и $W(\mathbf{k}) = T$ (T -температура) (см. §1.29). Убедимся в этом, подставив в уравнение $\mathcal{N}(\mathbf{k}) = T/\omega(\mathbf{k})$ (распределение Рэлея-Джинса $\mathcal{N}(\mathbf{k}) = \text{const}/\omega(\mathbf{k})$)

$$\begin{aligned} & \frac{T}{\omega(\mathbf{k}')}\frac{T}{\omega(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} - \frac{T}{\omega(\mathbf{k})}\frac{T}{\omega(\mathbf{k}')} - \frac{T}{\omega(\mathbf{k})}\frac{T}{\omega(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \\ &= \frac{T^2}{\omega(\mathbf{k})\omega(\mathbf{k}')\omega(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} [\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k}-\mathbf{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Однако такое решение при наличии областей затухания не может установиться во всей области $\mathbf{k}$. Сток энергии в область затухания может приводить к тому, что слабая турбулентность будет обладать свойствами, сходными с сильной турбулентностью. Как было показано Захаровым [3], во многих случаях вероятности переходов $Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ в (2.140) обладают тем свойством, что для переходов с сильным изменением волнового числа они оказываются заметно меньше, чем для переходов с изменением k на величину порядка k . Вследствие этого при слабой турбулентности также может иметь место процесс эстафетной передачи энергии по спектру, предложенный впервые для обычной турбулентности Колмогоровым и Обуховым. С учетом условия квадратичности по $\mathcal{N}$ члена взаимодействия условие передачи энергии по спектру позволяет определить спектр колебаний $W(\mathbf{k})$ без детального решения кинетического уравнения для волн.

В общем случае неравновесной плазмы уравнение (2.140) описывает электромагнитную турбулентность и его удастся решить в определенных случаях.

2.10 Одночастичная модель плазмы в нелинейной электродинамике

Наиболее простой моделью для описания плазмы является одночастичная модель "холодной" плазмы. Ранее в §1.13 эта модель использовалась для расчета линейной диэлектрической проницаемости. В этом параграфе мы применим ее для рассмотрения нелинейных свойств плазмы.

В одночастичной модели предполагается, что в электромагнитном поле двигаются только наиболее легкие частицы-электроны. Уравнение движения электрона (1.150) определяет его траекторию $\mathbf{r}(t)$ и не может быть решено в общем виде. Поэтому решение $\mathbf{r}(t)$ ищут в виде ряда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots$, где $\mathbf{r}_0$ -координата электрона в отсутствии электромагнитного поля, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ -слагаемые, пропорциональные первой, второй, и т.д. степеням поля. Из уравнения (1.150) подставив $\mathbf{r}(t)$ в виде ряда и приравняв слева и справа члены одного и того же порядка, получим для определения $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ цепочку уравнений. Ограничиваясь квадратичным приближением, запишем

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t), \quad (2.142)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -e(\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_0)\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t)]. \quad (2.143)$$

Рассмотрим движение электрона в поле монохроматической волны, имеющей частоту ω , волновой вектор $\mathbf{k}$ и амплитуду $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \right). \quad (2.144)$$

Магнитная индукция в волне изменяется во времени и пространстве по такому же закону и ее амплитуда согласно уравнению $\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c)(\partial \mathbf{B}/\partial t)$ равна $\mathbf{B}_0 = (c/\omega) [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]$. Из уравнения (2.142) находим скорость и координату электрона в линейном приближении

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{e}{2m\omega^2} \left(\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \right), \\ \dot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{ie}{2m\omega} \left(\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} - \mathbf{E}_0^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t} \right). \end{aligned} \quad (2.145)$$

Индекс ноль у величины $\mathbf{r}$ в этих и последующих формулах опущен.

Подставим эти выражения в правую сторону уравнения (2.143). В результате найдем силу, действующую на электрон в квадратичном приближении

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{ie^2}{4m\omega^2} \left\{ e^{2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2i\omega t} [\mathbf{k}E_0^2 - 2\mathbf{E}_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)] \right. \\ &\quad \left. - e^{-2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + 2i\omega t} [\mathbf{k}E_0^{*2} - 2\mathbf{E}_0^*(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0^*)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.146)$$

В результате получаем для $\mathbf{r}_2$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ при нулевой начальной фазе

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{e^2}{4m^2\omega^3} [\mathbf{k}E_0^2 - 2\mathbf{E}_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)] \cos(2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\omega t), \quad (2.147)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{e^2}{8m^2\omega^4} [\mathbf{k}E_0^2 - 2\mathbf{E}_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)] \sin(2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\omega t). \quad (2.148)$$

Таким образом, в поле монохроматической волны наряду с линейным током $\mathbf{j}_1 = -en_e\dot{\mathbf{r}}_1$, изменяющимся на той же частоте, что и поле в волне, возникает квадратичный нелинейный ток $\mathbf{j}_2 = -en_e\dot{\mathbf{r}}_2$, изменяющийся с частотой 2ω и волновым вектором $2\mathbf{k}$:

$$\mathbf{j}_2 = \frac{n_e e^3}{4m^2\omega^3} [\mathbf{k}E_0^2 - 2\mathbf{E}_0(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0)] \cos(2\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - 2\omega t). \quad (2.149)$$

Ток (2.149) является источником для возбуждения второй гармоники электромагнитной волны. Величина поля во второй гармонике зависит от того, выполняется или нет закон дисперсии, связывающий между собой величины 2ω и $2\mathbf{k}$. Если закон дисперсии выполняется, то возбуждение поля на удвоенной частоте происходит наиболее эффективно. Если же величины 2ω и $2\mathbf{k}$ не удовлетворяют дисперсионному соотношению, то поле второй гармоники мало. В частности для поперечной волны в однородной изотропной плазме, когда справедлива формула (1.165) $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$, удовлетворить также соотношение $(2\omega)^2 = (2k)^2 c^2 + \omega_{pe}^2$ нельзя, и эффективность генерации второй гармоники низка.

Остановимся на физических причинах возникновения тока (2.149). Начнем со случая поперечной волны, когда $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$. Представим, что волна распространяется вдоль оси ОХ, а электрическое поле направлено вдоль оси ОУ (Рис. 2.2). В линейном приближении электрон осциллирует с частотой ω вдоль оси ОУ

$$x_1 = 0, \quad y_1 = a_E \cos(kx - \omega t), \quad (2.150)$$

где $a_E = eE_0/m\omega^2$ — амплитуда осцилляций электрона. В квадратичном приближении электрон осциллирует на удвоенной частоте вдоль оси ОХ

$$x_2 = \frac{ka_E^2}{8} \sin(2kx - 2\omega t), \quad y_2 = 0. \quad (2.151)$$

Причиной этих осцилляций является действие силы Лоренца (второе слагаемое справа в уравнении (2.143)). Полная траектория электрона имеет вид восьмерки, вытянутой вдоль оси ОУ (см. Рис. 2.2). Отношение амплитуд осцилляций по оси ОХ и по оси ОУ по порядку величины равно $ka_E = eE_0 k/m\omega^2 = v_E/v_\phi$. Это отношение предполагается малым (см. формулу (1.154)) и по его степеням строится ряд в материальном уравнении.

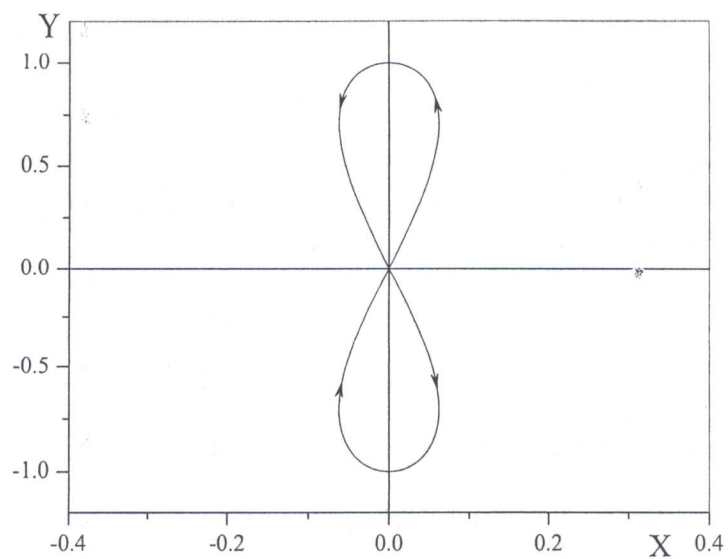


Рис. 2.2: Траектория движения электрона в плоской монохроматической электромагнитной волне при $ka_E = 0.5$. Координаты нормированы согласно y_1/a_E и x_2/a_E .

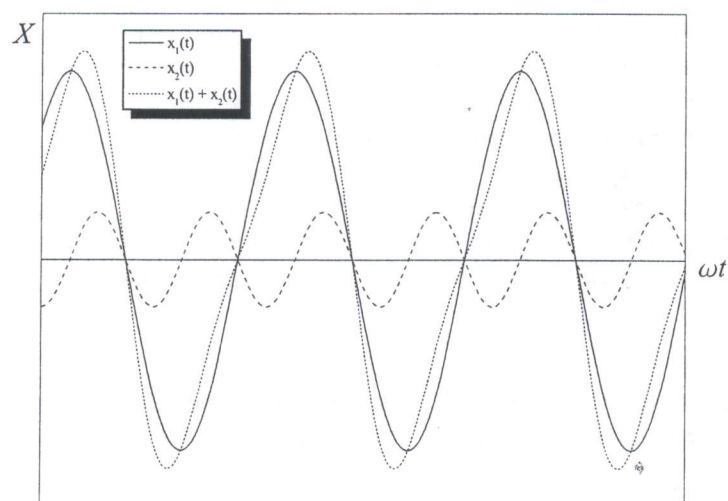


Рис. 2.3: Схематическое изображение координаты электрона движущегося в продольной волне.

Рассмотрим теперь продольную волну, электрическое поле в которой направлено вдоль оси ОХ. На линейные осцилляции электрона

$$x_1 = a_E \cos(kx - \omega t), \quad y_1 = 0 \quad (2.152)$$

накладываются квадратичные осцилляции

$$x_2 = -\frac{ka_E^2}{8} \sin(2kx - 2\omega t), \quad y_2 = 0. \quad (2.153)$$

На Рис. 2.3 показано смещение электрона в зависимости от времени. Поскольку магнитное поле в продольной волне равно нулю, то нелинейность в движении электрона связана с первым слагаемым в правой стороне формулы (2.143). Осциллируя в поле волны, электрон движется либо по направлению ее распространения, либо против него. Из-за этого поле волны действует на электрон разное время и осцилляции его не симметричны. Двигаясь навстречу волне, электрон находится под действием поля волны более короткое время. Двигаясь по направлению распространения волны-более длительное время.

2.11 Ток увлечения

Распространяясь в плазме, высокочастотная волна может создавать постоянный ток, величина которого пропорциональна квадрату амплитуды волны. Такой ток принято называть *током увлечения*.

Ток увлечения можно найти, если в линейном приближении использовать уравнение движения электрона с учетом трения (1.160). В поле монохроматической волны из этого уравнения получим для скорости электрона выражение (E_0 действительная амплитуда)

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{eE_0}{m(\omega^2 + \nu^2)} [\omega \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - \nu \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (2.154)$$

В квадратичном приближении уравнение (2.143) также должно быть дополнено слагаемым, учитывающим силу трения

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -m\nu\dot{\mathbf{r}}_2 - e(\mathbf{r}_1 \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t)]. \quad (2.155)$$

Рассмотрим поперечную волну, для которой нелинейная сила определяется последним слагаемым в правой стороне уравнения (2.155). Магнитное поле волны равно

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0] \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (2.156)$$

Подставляя $\mathbf{B}$ и $\dot{\mathbf{r}}_1$ в выражение для силы, найдем, что наряду со слагаемыми, изменяющимися на удвоенной частоте, возникает не зависящее от времени слагаемое, пропорциональное частоте столкновений ν :

$$\frac{e^2 \nu \mathbf{k} E_0^2}{2m\omega(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (2.157)$$

Стационарному току соответствует постоянная скорость дрейфа электронов и $\ddot{\mathbf{r}}_2 = 0$. Приравняв силу трения постоянной нелинейной силе, найдем плотность тока увлечения

$$\mathbf{j} = -en_e \dot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{n_e e^3 \mathbf{k} E_0^2}{2m^2 \omega (\omega^2 + \nu^2)}. \quad (2.158)$$

Из выражения (2.158) следует, что в пределе малой частоты столкновений ($\nu \ll \omega$) ток увлечения от нее не зависит и равен

$$\mathbf{j} = -\frac{e}{m} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\mathbf{k} E_0^2}{8\pi}. \quad (2.159)$$

Выражение (2.159) можно получить с помощью простых физических рассуждений, позволяющих понять механизм возникновения тока увлечения. При распространении в плазме волна затухает, теряет свою энергию и передает ее электронам плазмы. В единицу времени в единице объема согласно формуле (1.115) теряется энергия $2\gamma \langle W \rangle$, где декремент затухания согласно формуле (1.169) равен $(\nu/2) (\omega_{pe}^2/\omega^2)$, а средняя плотность энергии (1.113) в данном случае имеет вид $E_0^2/8\pi$. Вместе с энергией электронам плазмы передается и импульс волны. Связь между плотностью энергии и плотностью импульса в волне наиболее просто установить пользуясь квантово-механическими представлениями. Если сопоставить волне набор квантов с плотностью $\mathcal{N}_0$, то $\langle W \rangle = \hbar\omega\mathcal{N}_0$. Соответственно плотность импульса равна $\mathbf{P} = \hbar\mathbf{k}\mathcal{N}_0$. Отсюда находим $\mathbf{P} = (\mathbf{k}/\omega) (E_0^2/8\pi)$. Увеличение плотности импульса электронов в единицу времени равно действующей на них плотности силы

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 2\gamma\mathbf{P} = 2\gamma \frac{\mathbf{k}}{\omega} \frac{E_0^2}{8\pi}. \quad (2.160)$$

Постоянный ток электронов устанавливается тогда, когда действующая со стороны волны сила $\mathbf{F}$ равна силе трения $m n_e \nu \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — скорость дрейфа электронов. Приравнявая эти силы, найдем величину $\mathbf{v}$ и затем плотность тока увлечения. Полученное выражение совпадает с формулой (2.159). Таким образом, ток увлечения возникает за счет передачи импульса волны электронам плазмы.

2.12 Нелинейная диэлектрическая проницаемость для плазмы

Принцип суперпозиции, справедливый в линейной электродинамике, является следствием предположения о том, что движение частиц линейно зависит от поля. Как мы видим, при более точном рассмотрении движение электрона зависит и от квадрата поля и, вообще говоря, от более высоких степеней поля. Поэтому принцип суперпозиции в нелинейной электродинамике не справедлив. В частности, две волны в плазме вызывают ток не только на своих частотах, но и на комбинационных частотах. Именно этот ток и определяет взаимодействие между волнами.

Рассмотрим две волны в плазме с частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Электрическое и магнитное поля в этих волнах равны соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,2}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{1,2} \cos(\mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r} - \omega_{1,2}t), \\ \mathbf{B}_{1,2}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{\omega_{1,2}} [\mathbf{k}_{1,2} \times \mathbf{E}_{1,2}] \cos(\mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r} - \omega_{1,2}t). \end{aligned} \quad (2.161)$$

Уравнение движения электрона в поле волн имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) - \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)]. \quad (2.162)$$

Как и в §2.10, будем искать решение в виде ряда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots$. В результате в линейном относительно полей приближении получим

$$\mathbf{r}_1 = \frac{e}{m} \left[\frac{\mathbf{E}_1}{\omega_1^2} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_1 t) + \frac{\mathbf{E}_2}{\omega_2^2} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_2 t) \right], \quad (2.163)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{e}{m} \left[\frac{\mathbf{E}_1}{\omega_1} \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_1 t) + \frac{\mathbf{E}_2}{\omega_2} \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_2 t) \right]. \quad (2.164)$$

В квадратичном приближении уравнение для траектории имеет вид $m\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{f}_2$, где (см §2.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 = & -e(\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_0)(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) - e \left[\dot{\mathbf{r}}_1 \times \left[\frac{1}{\omega_1} [\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1] + \frac{1}{\omega_2} [\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2] \right] \right] \\ = & \frac{e^2}{m} \left\{ \left[\frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_1)}{\omega_1^2} \cos \psi_1 + \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\omega_2^2} \cos \psi_2 \right] \sin \psi_1 \right. \\ & + \left[\frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_1)}{\omega_1^2} \cos \psi_1 + \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_2)}{\omega_2^2} \cos \psi_2 \right] \sin \psi_2 \\ & - \left[\frac{[\mathbf{E}_1 \times [\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1]]}{\omega_1^2} \sin \psi_1 + \frac{[\mathbf{E}_2 \times [\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1]]}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi_2 \right] \cos \psi_1 \\ & \left. - \left[\frac{[\mathbf{E}_1 \times [\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2]]}{\omega_1 \omega_2} \sin \psi_1 + \frac{[\mathbf{E}_2 \times [\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2]]}{\omega_2^2} \sin \psi_2 \right] \cos \psi_2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.165)$$

где $\psi_{1,2} = \mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_{1,2}t$. В приведенном выражении для силы имеются слагаемые с различной пространственно-временной зависимостью. Так, например, имеются слагаемые, пропорциональные $\sin(2\psi_{1,2})$. Они определяют осцилляции электронов на удвоенных частотах и с ними связана обсуждавшаяся выше генерация гармоник. Нас будет интересовать только взаимодействие между волнами. За него ответственны слагаемые следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2^{(in)} = & \frac{e^2}{m} \left\{ \left[\frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_1)}{\omega_1^2} - \frac{[\mathbf{E}_2 \times [\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1]]}{\omega_1 \omega_2} \right] \sin \psi_2 \cos \psi_1 \right. \\ & \left. + \left[\frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\omega_2^2} - \frac{[\mathbf{E}_1 \times [\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2]]}{\omega_1 \omega_2} \right] \sin \psi_1 \cos \psi_2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Используя известные формулы для произведений гармонических функций, перепишем эту силу в виде:

$$\mathbf{f}_2^{(in)} = -\frac{e^2}{2m} [\mathbf{A}_+ \sin(\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_+ t) + \mathbf{A}_- \sin(\mathbf{k}_- \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_- t)], \quad (2.167)$$

где $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$, $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ -комбинационные частоты и волновые векторы,

$$\mathbf{A}_{\pm} = \frac{[\mathbf{E}_1 \times [\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2]]}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\omega_2^2} \pm \left[\frac{[\mathbf{E}_2 \times [\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1]]}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_1)}{\omega_1^2} \right]. \quad (2.168)$$

Сила на комбинационных частотах возникает, в частности, из-за действия магнитного поля волны на одной частоте на электрон, движущийся в электрическом поле волны, имеющей другую частоту.

Выражение для величин $\mathbf{A}_{\pm}$ преобразуем к более симметричному виду

$$\mathbf{A}_{\pm} = \pm \frac{\mathbf{k}_{\pm}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\omega_1 \omega_2^2} \omega_{\pm} - \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_1)}{\omega_2 \omega_1^2} \omega_{\pm}. \quad (2.169)$$

В частности, если частоты волн близки ($\omega_1 \simeq \omega_2$), то возникает медленно изменяющаяся со временем сила, действующая на электрон $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$, приближенно равная

$$\mathbf{f}_2^{(in)} \simeq \frac{e^2}{2m} \frac{\mathbf{k}_- (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\omega_1^2} \sin(\mathbf{k}_- \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_- t). \quad (2.170)$$

Используя полученное выражение для силы, найдем скорость движения электрона

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{e^2}{2m^2} \left[\frac{\mathbf{A}_+}{\omega_+} \cos(\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_+ t) + \frac{\mathbf{A}_-}{\omega_-} \cos(\mathbf{k}_- \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_- t) \right]. \quad (2.171)$$

Этой скорости движения электрона соответствует плотность тока $\mathbf{j} = -en_e \dot{\mathbf{r}}_2$, которую удобно записать в виде $\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-$, где

$$j_i^{(\pm)} = \sigma_{ijl}^{(\pm)} E_{1j} E_{2l} \cos(\mathbf{k}_{\pm} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega_{\pm} t), \quad (2.172)$$

$$\sigma_{ijl}^{(\pm)} = \frac{ne^3}{2m^2 \omega_1 \omega_2} \left(\pm \frac{k_{\pm i}}{\omega_{\pm}} \delta_{jl} - \frac{k_{1l}}{\omega_2} \delta_{ij} - \frac{k_{2j}}{\omega_1} \delta_{il} \right). \quad (2.173)$$

Общая связь между вектором индукции $\mathbf{D}$ и плотностью тока рассмотрена в Главе 1. Из нее следует формула (1.30), позволяющая находить тензор диэлектрической проницаемости с помощью выражения для тензора электропроводности. Если ток квадратичный и индукция тоже квадратичная, то между ними имеется соотношение

$$\epsilon_{ijl} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ijl}. \quad (2.174)$$

В результате для тензора нелинейной диэлектрической проницаемости с помощью формул (2.173) и (2.174) находим

$$\epsilon_{ijl}^{(\pm)} = \frac{i e \omega_{pe}^2}{2 m \omega_1 \omega_2 \omega_{\pm}} \left(\pm \frac{k_{\pm i}}{\omega_{\pm}} \delta_{jl} - \frac{k_{1l}}{\omega_2} \delta_{ij} - \frac{k_{2j}}{\omega_1} \delta_{il} \right). \quad (2.175)$$

Формула (2.175) определяет нелинейный тензор диэлектрической проницаемости на комбинационных частотах. Видно, что даже в изотропной плазме, где нет никаких выделенных направлений, этот тензор отличен от нуля, хотя ранее полагали, что в изотропной среде нет квадратичной по полю диэлектрической проницаемости. Предыдущее наше рассуждение было справедливо в пренебрежении пространственной дисперсией. Предполагалось, что в изотропной среде имеется единственный вектор-вектор напряженности электрического поля и из него нельзя построить в квадратичном приближении вектор. В этом рассуждении не было учтено, что при учете пространственной дисперсии имеются еще другие векторы, не связанные со средой, но связанные с волной-волновые векторы. Как показал конкретный расчет, наличие двух векторов ($\mathbf{E}$ и $\mathbf{k}$) позволяет строить векторные величины в квадратичном приближении по $\mathbf{E}$. Например, $E^2 \mathbf{k}$, $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}$. Именно такие слагаемые и входят в выражение для индукции.

2.13 Процессы трехволнового взаимодействия в плазме

В предыдущем параграфе был рассмотрен ток на комбинационных частотах, создаваемый двумя электромагнитными волнами в плазме. Этот ток служит источником для поля с частотами $\omega_1 \pm \omega_2$. Величина поля на комбинационных частотах зависит от того, выполняется или нет дисперсионное соотношение, связывающее между собой $\omega_1 \pm \omega_2$ и волновые векторы $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Если дисперсионное соотношение не выполняется, то поле на комбинационных частотах мало. Если же величины $\omega_1 \pm \omega_2$ и $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ связаны между собой дисперсионным соотношением, то в плазме возбуждается собственная волна. В этом случае можно говорить о взаимодействии трех волн в плазме, каждая из которых является собственной волной плазмы и удовлетворяет дисперсионному соотношению. Процесс, при котором две волны с частотами ω_1 и ω_2 возбуждают волну с суммарной частотой $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, называют *процессом слияния*, а обратный процесс-распадом. В частности, возникновению волны с более низкой частотой $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ отвечает процесс распада $\omega_1 = \omega_3 + \omega_2$ (см. также §2.4).

Одновременное выполнение дисперсионных соотношений для трех волн, частоты и волновые векторы которых связаны между собой распадными условиями $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$, возможно отнюдь не всегда. В этом параграфе мы рассмотрим трехволновые процессы, возможные в изотропной плазме.

Сначала коротко напомним, какие волны существуют в изотропной плазме. На Рис. 2.4 представлены дисперсионные кривые для этих волн и указаны соответствующие обозначения. Взаимодействие между волнами возможно, если частоты ω_1 и ω_2 лежат на дисперсионных кривых, а также и частота $\omega_1 + \omega_2$ (или $\omega_1 - \omega_2$) лежит на дисперсионной кривой в точке с волновыми векторами $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ (или $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$).

Проиллюстрируем это на примере взаимодействия ионно-звуковой волны с ленгмюровской волной. На Рис. 2.5 показана дисперсионная кривая для ионно-звуковых волн, начинающаяся в некоторой точке, лежащей на дисперсионной кривой для ленгмюровской волны. Взаимодействие возможно для волн, которым отвечает пересечение этой кривой с какой-либо другой дисперсионной ветвью. Из рисунка видно, что в результате взаимодействия может возникнуть либо снова

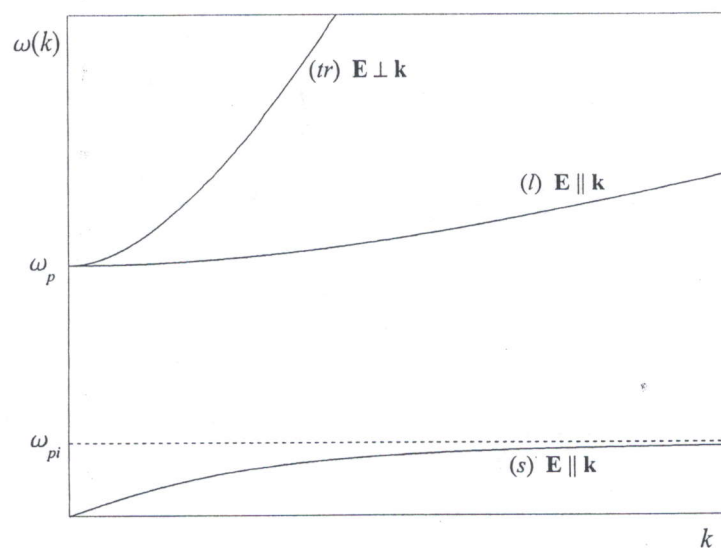


Рис. 2.4: Дисперсионные кривые для поперечных (tr), продольных (l) и ионно-звуковых (s) волн в изотропной плазме.

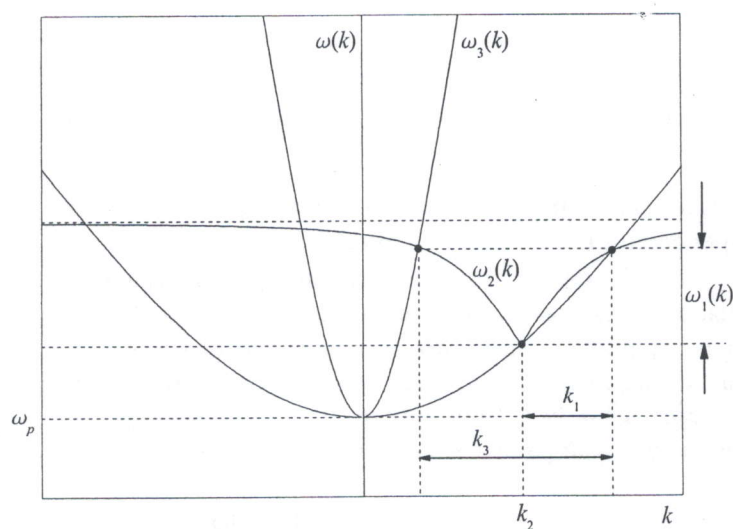


Рис. 2.5:

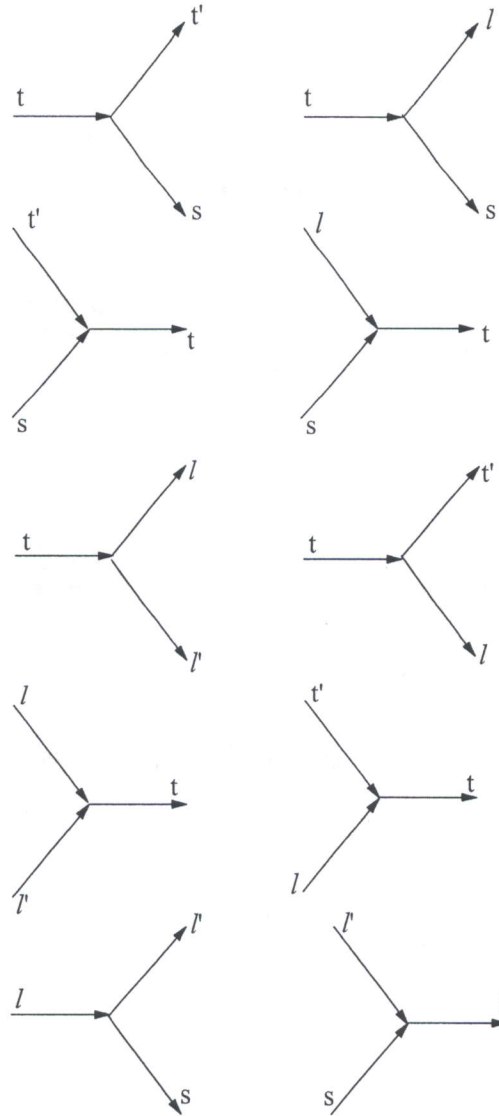


Рис. 2.6: Возможные трехволновые процессы в изотропной плазме.

ленгмюровская волна, либо поперечная электромагнитная волна. На Рис. 2.6 показаны возможные трехволновые процессы в изотропной плазме.

Волновые векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ определяют направления распространения волн с частотами ω_1 и ω_2 . Необходимость выполнения закона дисперсии для волны с комбинационной частотой $\omega_1 \pm \omega_2$ налагает определенные ограничения на направления ее распространения. Продемонстрируем это на примере процесса распада $t \rightarrow t' + s$. Запишем законы дисперсии для всех трех волн $\omega_1^2 = \omega_{pe}^2 + k_1^2 c^2$, $\omega_3^2 = \omega_{pe}^2 + k_3^2 c^2$, $\omega_2^2 = k_2^2 v_s^2$ (для простоты рассматриваются звуковые волны с длиной волны, превышающей дебаевский радиус электронов, см. §1.19). Перепишем закон дисперсии для первой волны

$$(\omega_3 - \omega_2)^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 (\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2)^2. \quad (2.176)$$

Используя закон дисперсии для третьей волны и учитывая, что частота звуковой волны ω_2 намного меньше, чем частота поперечной волны ω_3 , отсюда получим:

$$k_2^2 - 2\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 + 2k_2 v_s \frac{\omega_3}{c^2} = 0. \quad (2.177)$$

Последнее слагаемое мало и его можно отбросить. Если выбрать ось OZ вдоль вектора $\mathbf{k}_3$, то

получим, что концы вектора $\mathbf{k}_2$ лежат на окружности с радиусом k_3

$$k_{2x}^2 + (k_{2z} - k_3)^2 = k_3^2. \quad (2.178)$$

Из условия $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ следует, что и концы волновых векторов $\mathbf{k}_1$ также лежат на окружности, но с центром в начале координат.

В качестве другого примера рассмотрим процесс $t \rightarrow l + s$. Частота звуковой волны мала по сравнению с частотой ленгмюровской волны. Поэтому частота поперечной волны близка к ленгмюровской электронной частоте и, согласно закону дисперсии, волновой вектор $\mathbf{k}_3$ мал. В распадном условии $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ им можно пренебречь и считать, что $\mathbf{k}_2 \simeq -\mathbf{k}_1$. Таким образом, ленгмюровские и звуковые волны, взаимодействующие с поперечной волной, распространяются всегда навстречу друг другу.

В главе 1 (см. §1.12) мы познакомились с распространением волн в неоднородной среде. Как было показано в приближении геометрической оптики ($\lambda \ll L$), из-за неоднородности среды длина волны зависит от координат. Причем эту зависимость можно найти из обычного дисперсионного уравнения. Так, для поперечных волн получим

$$k^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} [\omega^2 - \omega_{pe}^2(\mathbf{r})]. \quad (2.179)$$

Аналогично для ленгмюровских волн

$$k^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{3v_{th}^2(\mathbf{r})} [\omega^2 - \omega_{pe}^2(\mathbf{r})]. \quad (2.180)$$

Такое изменение длины волны в неоднородной среде влияет и на процессы их нелинейного взаимодействия. Для трех волн, частоты которых связаны соотношением $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, условие $\mathbf{k}_3(\mathbf{r}, \omega_3) = \mathbf{k}_1(\mathbf{r}, \omega_1) + \mathbf{k}_2(\mathbf{r}, \omega_2)$ выполняется только в некоторой точке пространства, где длины волн имели подходящие величины. Иными словами, из-за неоднородности плазмы резонансное условие по волновым векторам выполняется лишь в точке и взаимодействие волн локализуется в пространстве. Вне области резонансного взаимодействия волны распространяются независимо, без взаимодействия.

Рассмотрим, как происходит нелинейное взаимодействие волн в условиях лазерной плазмы. При облучении мишени вблизи ее поверхности возникает *плазменная корона*, и электромагнитная волна проникает в плазму только до *критической концентрации*. Эта концентрация находится из условия

$$k_0^2(x) = \frac{1}{c^2} [\omega_0^2 - \omega_{pe}^2(x)] = 0 \quad (2.181)$$

и равна

$$n_c = \frac{m\omega_0^2}{4\pi e^2}. \quad (2.182)$$

Процесс распада $t \rightarrow l + s$ (здесь можно говорить о приближении заданного поля и рассматривать только процессы распада) возникает только при $n \leq n_c$. Благодаря этому процессу в плазме возникают продольные волны и фактически энергии переходят в коллективные движения частиц плазмы (Рис. 2.7).

Процесс $t \rightarrow l + l'$ происходит при условии, что $\omega_0 \simeq 2\omega_{pe}$. Это значит, что в окрестности той точки, где плотность плазмы близка к четверти критической плотности, возникают ленгмюровские волны с частотами $\sim \omega_0/2$.

Процесс $t \rightarrow t' + s$ сопровождается возникновением поперечной волны с частотой $\omega' \simeq \omega_0$. Его называют процессом вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна (ВРМБ) и энергия греющего излучения в основном теряется. Он происходит во всей короне при $0 < n < n_c$.

Процесс $t \rightarrow t' + l$, называемый вынужденным комбинационным рассеянием, также вреден с точки зрения нагрева плазмы. Большая часть энергии выходит из плазмы в виде рассеянного излучения и теряется. Однако этот процесс происходит лишь при $0 < n < n_c/4$. Это видно из того, что минимальная частота волны t' равна ω_{pe} и при этом должно выполняться требование $\omega_0 \geq 2\omega_{pe}$.

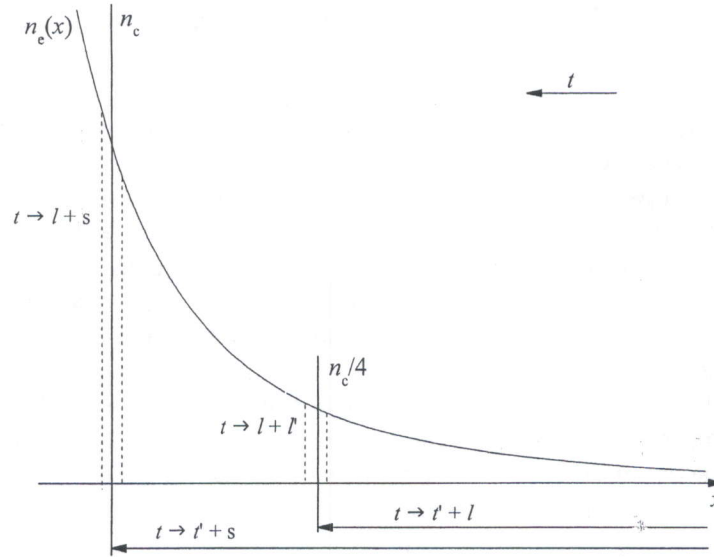


Рис. 2.7: Схематическое изображение возникновения различных нелинейных процессов в зависимости от глубины x . Показано также направление падающего поперечного излучения.

2.14 Пондеромоторные (стрикционные) силы в плазме

До сих пор мы рассматривали движение частиц в полях плоских волн с постоянными амплитудами. Зачастую в плазме структура полей является более сложной. В частности, часто приходится иметь дело со стоячими волнами (удержание, ускорение плазмы, воздействие лазерного излучения и т.д.). В этом случае на частицы плазмы действуют особые силы, которые равны нулю в случае плоской волны.

Рассмотрим электрическое поле в плазме следующего вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t}]. \quad (2.183)$$

Это поле является монохроматическим. Если $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, то формула (2.183) определяет поле бегущей волны. Если $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, то (2.183)-поле бегущей волны. В этом смысле, формула (2.183) является обобщением известных ранее выражений, которые использовались.

Из формулы (2.183) и уравнения Максвелла легко найти соответствующее магнитное поле

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{ic}{2\omega} [e^{-i\omega t} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) - e^{i\omega t} \text{rot } \mathbf{E}^*(\mathbf{r})]. \quad (2.184)$$

Рассмотрим движение электрона в электромагнитном поле

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.185)$$

Как и раньше, будем искать решение уравнения движения по теории возмущений, полагая, что электрон сначала покоился в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Тогда в первом приближении найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{e}{2m\omega^2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0)e^{i\omega t}], \\ \dot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{ie}{2m\omega} [\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)e^{-i\omega t} - \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0)e^{i\omega t}]. \end{aligned} \quad (2.186)$$

Во втором приближении на электрон действует сила

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{f}_2 &= -e(\mathbf{r}_1 \cdot \nabla_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) - \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t)] \\ &= \frac{e^2}{4m\omega^2} \{ e^{2i\omega t} [[\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0) \times \text{rot } \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0)] - (\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_0) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0)] \\ &\quad + e^{-2i\omega t} [[\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \times \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)] - (\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)] \\ &\quad - (\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_0) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0) - (\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \\ &\quad - [\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \times \text{rot } \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0)] - [\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0) \times \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)] \}. \end{aligned} \quad (2.187)$$

В выражение для силы входят слагаемые, которые не зависят от времени. Именно эти слагаемые и будут нас интересовать. Выпишем их отдельно, обозначив соответствующую часть силы индексом ноль

$$\mathbf{f}_0 = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \{ (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}^* + (\mathbf{E}^* \cdot \nabla) \mathbf{E} + [\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}^*] + [\mathbf{E}^* \times \text{rot } \mathbf{E}] \}. \quad (2.188)$$

Используя соотношение

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}^* + (\mathbf{A}^* \cdot \nabla) \mathbf{A} + [\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A}^*] + [\mathbf{A}^* \times \text{rot } \mathbf{A}] = \nabla |\mathbf{A}|^2, \quad (2.189)$$

получим значительное упрощение этой формулы

$$\mathbf{f}_0 = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \nabla |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2. \quad (2.190)$$

Совершенно ясно, что в случае плоской волны $|\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 = \text{const}$ и сила $\mathbf{f}_0$ равна нулю. Силу (2.190) называют *пондеромоторной* или *стрикционной*, а также часто называют *силой Миллера*. В чем же причина возникновения такой силы? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, вспомним (см. §2.10), что заряженная частица в электромагнитном поле движется по восьмерке. Если поле неоднородное, то восьмерка имеет разную кривизну в разных участках траектории. Это приводит к тому, что частица через период изменения поля не возвращается в исходную точку и дрейфует в сторону более слабого поля. Такому дрейфу отвечает сила, которая всегда стремится вытолкнуть частицу из области более сильного электромагнитного поля в область более слабого поля. Сила не зависит от знака заряда, но зависит от массы частицы. На электроны эта сила действует в m_i/mZ^2 раз сильнее (Z -зарядовое число ионов), чем на ионы.

Выражение для силы (2.190) легко получить и из других соображений. Помещенный в высокочастотное поле электрон имеет среднюю (на период изменения поля) энергию

$$\langle W \rangle = \frac{m}{2} \langle \mathbf{v}_1^2 \rangle = \frac{e^2 |\mathbf{E}|^2}{4m\omega^2}. \quad (2.191)$$

Если поле $\mathbf{E}$ зависит от координат, то такая средняя энергия зависит от положения электрона. Естественно думать, что действующая на электрон сила, стремится перевести его в состояние с наименьшей энергией. Так, если электрон помещен в статическое электрическое поле с потенциалом φ и его энергия $-e\varphi$, то на него действует сила $\mathbf{f} = e\nabla\varphi$. Аналогично все происходит и в высокочастотном поле, но роль потенциала играет средняя энергия $\langle W \rangle$. Сила же равна $\mathbf{f}_0 = -\nabla \langle W \rangle$. Поэтому величину $\langle W \rangle$ часто называют *высокочастотным потенциалом*.

На единицу объема плазмы действует сила $\mathbf{F} = n_e \mathbf{f}_0$ (фактически только на электроны) или

$$\mathbf{F} = -\frac{n_e e^2}{4m\omega^2} \nabla |\mathbf{E}|^2 = -\frac{\omega_{pe}^2}{16\pi\omega^2} \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (2.192)$$

Если вспомнить, что в холодной плазме

$$\varepsilon_l(\omega) = \varepsilon_{tr}(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (2.193)$$

то это выражение для силы можно переписать в виде

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{16\pi} \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (2.194)$$

Эту силу часто называют также силой *высокочастотного давления*.

2.15 Гидродинамика плазмы в высокочастотном электромагнитном поле

Введение пондеромоторной силы, действующей на электроны плазмы в высокочастотном поле и стремящейся вытолкнуть их из области сильного поля в область более слабого поля, позволяет рассмотреть многие вопросы динамики плазмы. Дело в том, что концентрацию электронов нельзя сделать существенно отличной от концентрации ионов на расстояниях, превышающих дебаевский радиус. Этому препятствует поле разделения зарядов и оно передает действие пондеромоторной силы на ионы. Поэтому, если интересоваться масштабами, превышающими дебаевский радиус, то можно считать, что пондеромоторные силы действуют непосредственно на ионы. Эти силы тогда можно включить в уравнения гидродинамики плазмы, которую рассматривают как одну квазинейтральную жидкость.

В пренебрежении изменением температуры плазмы уравнения гидродинамики содержат уравнение непрерывности и уравнение движения (см. §1.18)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{F}, \quad (2.195)$$

где $\rho = m n_e + m_i n_i \simeq m_i n_i$ — плотность плазмы, $\mathbf{v}$ — скорость медленных движений плазмы, $p = n_e T_e + n_i T_i$ — давление, $\mathbf{F}$ — пондеромоторная сила, определяемая формулой (2.194). В квазинейтральной плазме $n_i = n_e/Z$ (Z — зарядовое число ионов) и $\rho \simeq (m_i/Z) n_e$, $p = n_e (T_e + T_i/Z)$. Эти соотношения позволяют записать уравнения гидродинамики для концентрации электронов и скорости движения плазмы ($T = Z T_e + T_i$)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{T}{m_i} \nabla \ln n_e - \frac{Z e^2}{4 \pi m_i \omega^2} \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (2.196)$$

Входящая в формулу (2.196) напряженность электрического поля определяется уравнениями Максвелла и сама зависит от гидродинамических характеристик плазмы. Из уравнений Максвелла (1.1) после исключения вектора магнитной индукции следует

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (2.197)$$

где плотность тока связана с высокочастотным движением электронов $\mathbf{j} = -en_e \tilde{\mathbf{v}}$ и $(\partial \tilde{\mathbf{v}} / \partial t) = -(e/m) \mathbf{E}$. Отсюда находим при условии медленного изменения концентрации электронов

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \simeq \frac{n_e e^2}{m} \mathbf{E}. \quad (2.198)$$

Используя выражение для высокочастотного поля (2.183)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}], \quad (2.199)$$

где амплитуда $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ зависит от времени и подставляя его в приведенное выше уравнение, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega \right)^2 \mathbf{E}_0 + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = -\frac{4\pi n_e e^2}{m} \mathbf{E}_0. \quad (2.200)$$

В частности, для поперечного высокочастотного поля ($\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0$) уравнение (2.200) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega \right)^2 \mathbf{E}_0 - c^2 \nabla^2 \mathbf{E}_0 = -\frac{4\pi n_e e^2}{m} \mathbf{E}_0. \quad (2.201)$$

Для продольных высокочастотных полей ($\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0$) следует учитывать тепловое движение электронов. Из условия соответствия с результатами кинетической модели (см. §1.23) запишем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega \right)^2 \mathbf{E}_0 - 3v_{th,e}^2 \nabla^2 \mathbf{E}_0 = -\frac{4\pi n_e e^2}{m} \mathbf{E}_0. \quad (2.202)$$

В пренебрежении медленным изменением величины $\mathbf{E}_0$ со временем и при условии постоянства концентрации электронов из формул (2.201) и (2.202) вытекают законы дисперсии соответственно для поперечных и ленгмюровских волн, рассмотренные нами раньше. Однако в уравнениях (2.200)-(2.202) концентрация может быть не постоянна. В результате эти уравнения совместно с уравнениями (2.196) образуют систему уравнений гидродинамики плазмы, описывающей самосогласованно как высокочастотные движения электронов, так и медленные движения плазмы как целого, связанные с перемещением ионов.

Часто высокочастотными волнами в плазме являются ленгмюровские волны, частота которых близка к плазменной частоте. Для этих волн даже малые отклонения концентрации электронов от резонансного значения, определяемого равенством $n_c = m\omega^2/4\pi e^2$, приводят к большим изменениям поля. Это позволяет в уравнениях (2.196) использовать линейное приближение, положив $n_e = n_c + \delta n_e$. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \delta n_e = \frac{Ze^2 n_c}{4m m_i \omega^2} \nabla^2 |\mathbf{E}_0|^2, \quad (2.203)$$

где $v_s = \sqrt{T/m_i}$ - скорость ионного звука. Уравнение (2.202) после отбрасывания малой второй производной по времени от поля принимает вид:

$$2i\omega \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + 3v_{th,e}^2 \nabla^2 \mathbf{E}_0 = \frac{4\pi e^2}{m} \delta n_e \mathbf{E}_0. \quad (2.204)$$

Система уравнений (2.203) и (2.204) составляет основу многих исследований нелинейной динамики ленгмюровских волн.

2.16 Дисперсионное уравнение для плазмы, находящейся в электромагнитном поле

Ранее мы обсудили вопрос о параметрических неустойчивостях, возникающих в нелинейной среде, через которую проходит электромагнитная волна (см. §2.8). Однако, для использования общих соотношений нужно знать нелинейные диэлектрические проницаемости. Вместо этого вопрос о параметрических неустойчивостях в плазме можно рассмотреть, используя для этого систему уравнений (2.196) и (2.200).

Будем считать, что в основном состоянии в однородной плазме ($n_e = \text{const}$) нет течения ($\mathbf{v} = 0$) и распространяется электромагнитная волна с частотой ω_0 , волновым вектором $\mathbf{k}_0$ и постоянной амплитудой $\mathbf{E}_0$ (волна накачки)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t). \quad (2.205)$$

Из сравнения этого выражения с формулой (2.183) следует, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$ и ponderomotorная сила (2.190) равна нулю, поскольку $|\mathbf{E}|^2$ не зависит от координат. Из уравнений (2.201) и (2.202) получим законы дисперсии для волны накачки: $\omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + k_0^2 v_{th,e}^2$ (для поперечной волны) и $\omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + 3k_0^2 v_{th,e}^2$ (для продольной волны).

Рассмотрим малое возмущение концентрации плазмы $\delta n_e(\mathbf{r}, t)$. В поле волны накачки из-за этого низкочастотного возмущения возникает дополнительный высокочастотный ток, который является источником рассеянного поля $\delta \mathbf{E}$ (см. §1.35). Изменение величины $\delta n_e(\mathbf{r}, t)$ связано с движением ионов и проходит медленно. Поэтому частота рассеянного поля близка к частоте волны накачки и можно записать

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{E}_- e^{-i\omega_0 t} + \delta \mathbf{E}_+ e^{i\omega_0 t}). \quad (2.206)$$

В пренебрежении тепловым движением электронов уравнение для $\delta \mathbf{E}_\pm$ следует из формулы (2.200) и имеет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm i\omega_0 \right)^2 \delta \mathbf{E}_\pm + c^2 \text{rot rot } \delta \mathbf{E}_\pm + \frac{4\pi n_e e^2}{m} \delta \mathbf{E}_\pm = -\frac{4\pi e^2}{m} \delta n_e \mathbf{E}_0 e^{\mp i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.207)$$

Стоящее в правой стороне формулы (2.207) выражение определяет источник рассеянных полей и возникает из-за того, что в плазме имеется как возмущение концентрации, так и волна накачки.

В рассматривавшейся раньше теории рассеяния (см. §1.35) считалось, что падающая волна не влияет на возмущение концентрации, и те определяются какими-то другими источниками (например, возникают за счет теплового движения частиц). Если падающая волна достаточно сильная и, следовательно, рассеянные волны тоже достаточно интенсивные, то они могут оказывать существенное влияние на возмущения плотности (концентрации). Это влияние учитывается с помощью пондеромоторной силы в уравнениях (2.196), которая определяется величиной $|\mathbf{E}|^2$. В линейном приближении получим

$$|\mathbf{E}|^2 = (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + \delta \mathbf{E}_-) (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + \delta \mathbf{E}_+) \simeq E_0^2 + \mathbf{E}_0 \cdot (\delta \mathbf{E}_- e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + \delta \mathbf{E}_+ e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}). \quad (2.208)$$

Как уже говорилось, величина E_0^2 от координат не зависит и поэтому пондеромоторная сила отлична от нуля только из-за рассеянного поля. Также в линейном приближении из уравнения (2.203) найдем

$$\frac{\partial^2 \delta n_e}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \delta n_e = \frac{Ze^2 n_e}{4\pi m_i \omega_0^2} \nabla^2 [(\mathbf{E}_0 \cdot \delta \mathbf{E}_-) e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + (\mathbf{E}_0 \cdot \delta \mathbf{E}_+) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}]. \quad (2.209)$$

Система уравнений (2.207) и (2.209) определяет совместное изменение во времени и пространстве возмущений плотности плазмы и рассеянных полей.

Для получения дисперсионного уравнения рассмотрим возмущение концентрации в виде плоской монохроматической волны $\delta n_e(\mathbf{r}, t) = \delta n_e(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$. Подставив это выражение в формулы (2.207), (2.209) и приняв, что величины $\delta \mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ пропорциональны соответственно $\delta \mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) e^{\mp i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$ найдем выражения для рассеянного поля и возмущения плотности электронов

$$\delta \mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi e^2}{m\omega_{\mp}^2 \mathcal{D}_{\mp}^{tr}} \delta n_e(\mathbf{k}, \omega) \left[\mathbf{E}_0 - \frac{c^2}{\omega_{\mp}^2 \mathcal{D}_{\mp}^l} \mathbf{k}_{\mp} (\mathbf{k}_{\mp} \cdot \mathbf{E}_0) \right], \quad (2.210)$$

$$(\omega^2 - k^2 v_s^2) \delta n_e(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k^2 \omega_{pi}^2}{16\pi m \omega_0^2} [\mathbf{E}_0 \cdot \delta \mathbf{E}_-(\mathbf{k}, \omega) + \mathbf{E}_0 \cdot \delta \mathbf{E}_+(\mathbf{k}, \omega)]. \quad (2.211)$$

В результате из уравнений (2.210) и (2.211) получим дисперсионное уравнение для связанных через волну накачки возмущений плотности плазмы и рассеянных электромагнитных волн

$$\omega^2 - k^2 v_s^2 = \frac{k^2 \omega_{pi}^2 v_E^2}{4} \left\{ \frac{[\mathbf{k}_+ \times \mathbf{e}_0]^2}{\omega_+^2 k_+^2 \mathcal{D}_+^{tr}} + \frac{[\mathbf{k}_- \times \mathbf{e}_0]^2}{\omega_-^2 k_-^2 \mathcal{D}_-^{tr}} + \frac{(\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{e}_0)^2}{\omega_+^2 k_+^2 \mathcal{D}_+^l} + \frac{(\mathbf{k}_- \cdot \mathbf{e}_0)^2}{\omega_-^2 k_-^2 \mathcal{D}_-^l} \right\}, \quad (2.212)$$

где $\omega_{pi}^2 = (4\pi n_e Z e^2 / m_i)^{1/2}$ - ленгмюровская частота ионов, $v_E = eE_0 / m\omega_0$ - амплитуда скорости осцилляций электронов в волне накачки, $\mathbf{e}_0$ - вектор поляризации волны накачки, $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$, $\omega_{\pm} = \omega \pm \omega_0$,

$$\mathcal{D}_{\pm}^{tr} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + k_{\pm}^2 c^2}{\omega_{\pm}^2}, \quad \mathcal{D}_{\pm}^l = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + 3k_{\pm}^2 v_{th,e}^2}{\omega_{\pm}^2} \quad (2.213)$$

-функции, равенство нулю которых определяет закон дисперсии для поперечных и продольных волн на комбинационных частотах. Малое слагаемое в $\mathcal{D}_{\pm}^l$, учитывающее тепловое движение электронов, добавлено как и в формуле (2.202).

В отсутствии волны накачки ($v_E = 0$) из дисперсионного уравнения следует закон дисперсии для ионного звука с длиной волны, превышающей дебаевский радиус электронов. Из-за волны накачки возникают рассеянные на возмущениях плотности высокочастотные поля, влияние которых на закон дисперсии звуковых волн учитывается правой стороной уравнения (2.212) и связано с действием пондеромоторной силы.

Как видно из сравнения уравнения (2.212) с общими формулами §2.8, из-за волны накачки возникает параметрическая связь между низкочастотными возмущениями плотности и высокочастотными рассеянными полями.

2.17 Модуляционная неустойчивость

Дисперсионное уравнение (2.212) определяет основные характеристики малых возмущений в плазме, через которую распространяется электромагнитная волна (волна накачки) с постоянной амплитудой. Решения этого уравнения зачастую соответствуют нарастающим возмущениям и в этом случае принято говорить о параметрических неустойчивостях плазмы. Среди всего разнообразия таких неустойчивостей имеется ряд наиболее распространенных и часто обсуждаемых. В этом и последующем параграфах рассмотрим эти неустойчивости и постараемся дать им физическую интерпретацию.

Рассмотрим в качестве волны накачки ленгмюровскую волну, частота которой $\omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + 3k_0^2 v_{th,e}^2$ велика по сравнению с $|\omega|$. В этих условиях могут быть малы только выражения $\mathcal{D}_{\pm}^l$ и соответствующие слагаемые в уравнении (2.212) будем учитывать. Ограничимся рассмотрением возмущений с волновыми векторами $\mathbf{k}$, параллельными $\mathbf{k}_0$. Тогда

$$\omega_{\pm}^2 \mathcal{D}_{\pm}^l = \omega_0^2 \pm 2\omega\omega_0 + \omega^2 - \omega_{pe}^2 - 3v_{th,e}^2 (k_0^2 \pm 2kk_0 + k^2) = \omega^2 \pm 2\omega\omega_0 - 3v_{th,e}^2 (k^2 \pm 2kk_0). \quad (2.214)$$

Используя эти выражения, запишем уравнение (2.212) в виде

$$\omega^2 - k^2 v_s^2 = \frac{k^2 \omega_{pi}^2 v_E^2}{2} \frac{\omega^2 - 3k^2 v_{th,e}^2}{(\omega^2 - 3k^2 v_{th,e}^2)^2 - 4\omega_0^2 (\omega - kv_g)^2}, \quad (2.215)$$

где $v_g = 3v_{th,e}^2 k_0 / \omega_0$ — групповая скорость волны накачки. Рассмотрим возмущения, фазовая скорость которых ω/k близка к групповой скорости волны накачки $\omega = kv_g + \omega_1$. Здесь ω_1 — поправка, малая по сравнению с kv_g . Учтем, что

$$\omega^2 - 3k^2 v_{th,e}^2 \simeq k^2 (v_g^2 - 3v_{th,e}^2) = 3k^2 v_{th,e}^2 \left(\frac{3k_0^2 v_{th,e}^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \simeq -3k^2 v_{th,e}^2 \quad (2.216)$$

и запишем уравнение для определения величины ω_1 :

$$k^2 (v_g^2 - v_s^2) + 2\omega_1 kv_g = \frac{1}{2} \frac{3k^4 \omega_{pi}^2 v_E^2 v_{th,e}^2}{4\omega_1^2 \omega_0^2 - 9k^4 v_{th,e}^4}. \quad (2.217)$$

Решение этого уравнения рассмотрим сначала в нерезонансном случае, когда групповая скорость ленгмюровской волны не совпадает с звуковой скоростью. Вторым слагаемым в левой стороне можно пренебречь и найти ω_1

$$\omega_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} k \lambda_{De} \sqrt{3k^2 v_{th,e}^2 + \frac{\omega_{pi}^2 v_E^2}{2(v_g^2 - v_s^2)}}. \quad (2.218)$$

При $v_g < v_s$ поправка к частоте является мнимой для волновых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$k \lambda_{De} < \frac{v_E / v_{th,e}}{\sqrt{6(1 - v_g^2 / v_s^2)}}, \quad (2.219)$$

и имеет место неустойчивость. На Рис. 2.8 показан инкремент неустойчивости. Для возмущений с волновым числом

$$k_{\max} \lambda_{De} = \frac{v_E / v_{th,e}}{2\sqrt{3(1 - v_g^2 / v_s^2)}} \quad (2.220)$$

он достигает максимума и равен

$$\gamma_{\max} = \frac{\omega_{pe} (v_E / v_{th,e})^2}{8(1 - v_g^2 / v_s^2)}. \quad (2.221)$$

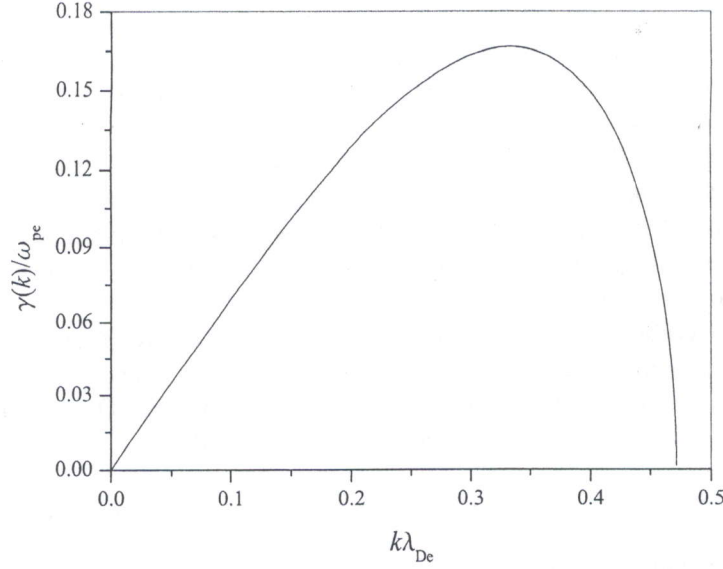


Рис. 2.8: Инкремент неустойчивости при $v_E/v_{th,e} = 1$, $v_g/v_s = 0.5$.

Из условия $v_g < v_s$ следует ограничение на волновые числа ленгмюровских волн: $k_0\lambda_{De} < (1/3)\sqrt{Zm/m_i}$, для которых такая неустойчивость имеет место.

При приближении групповой скорости ленгмюровской волны v_g к скорости ионного звука v_s , что соответствует приближению к резонансному волновому числу $k_0 \simeq (1/3\lambda_{De})v_s/v_{th,e} = (1/3\lambda_{De})\sqrt{Zm/m_i}$, инкремент (2.221) становится особенно велик. При этом однако нарушается предположение о малости второго слагаемого в левой стороне исходного уравнения. Поэтому резонансную модуляционную неустойчивость ($v_g = v_s$) рассмотрим отдельно. Из уравнения (2.217) следует, что возмущения неустойчивы только в области волновых чисел

$$k\lambda_{De} < k_c\lambda_{De} \equiv \frac{1}{48^{1/6}} \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \left(\frac{v_E^2}{v_s v_{th,e}} \right)^{1/3}. \quad (2.222)$$

В области волновых чисел $k\lambda_{De} \ll (2\omega_0\omega_1/3\omega_{pe}^2)^{1/2}$ (или $k \ll k_c$) инкремент растет линейно с увеличением волнового числа

$$\gamma \simeq \frac{3^{5/6}}{4} \omega_{pe} (k\lambda_{De}) \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \left(\frac{v_E^2}{2v_s v_{th,e}} \right)^{1/3}, \quad (2.223)$$

при $k = k_{\max}$ проходит через максимум и обращается в ноль при $k = k_c$. По порядку величины максимальное значение инкремента можно найти, подставив в формулу (2.223) волновое число, для которого еще не нарушается приведенное выше неравенство ($k \sim k_c$). В результате получим

$$\gamma_{\max} \simeq \frac{3^{2/3}}{8} \omega_{pe} \left(\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_E^2}{v_s v_{th,e}} \right)^{2/3}. \quad (2.224)$$

Сравнив между собой волновые числа возмущений $k_{\max} \sim k_c$ и волны накачки k_0 , убедимся, что $k_0/k_c \sim (v_s/v_E)^{2/3}$. С другой стороны фазовая скорость волны накачки $v_\varphi = \omega_0/k_0 \simeq 3v_{th,e}^2/v_s$ и с учетом ограничения (1.154) получим $v_E/v_s \ll (v_{th,e}/v_s)^2$. Итак, при $v_E < v_s$ длина волны накачки меньше, чем длина волны возмущения, а при $v_s < v_E \lesssim v_s (v_{th,e}/v_s)^2$ — больше.

Точное выражение для инкремента можно получить из формулы (2.217). При $0 \leq (k\lambda_{De}) \leq \tau$ получим:

$$\frac{\gamma}{\omega_{pe}} = \frac{3}{2} (k\lambda_{De}) \frac{S(k\lambda_{De})}{(k\lambda_{De})^2 + (\tau^3 + S(k\lambda_{De}))^{2/3} + (\tau^3 - S(k\lambda_{De}))^{2/3}}, \quad (2.225)$$

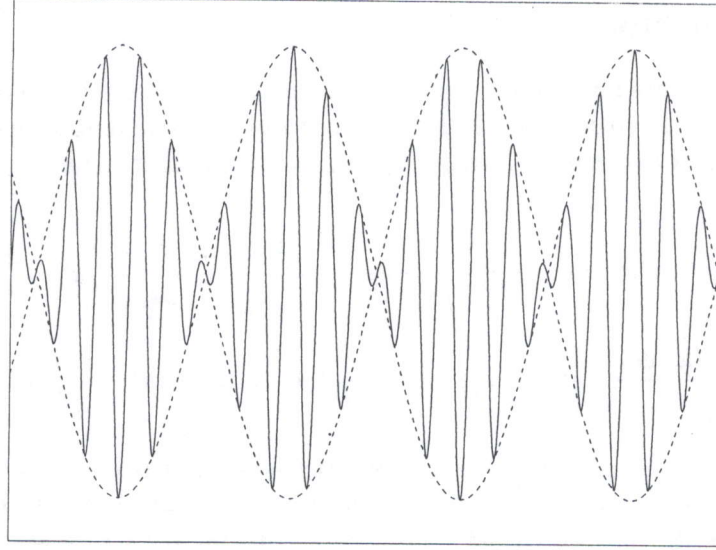


Рис. 2.9: Схематическое изображение амплитудно-модулированной волны. Пунктиром показана огибающая волны.

где $S(\xi) = \sqrt{\tau^6 - \xi^6}$,

$$\tau = \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_E^2}{v_{s,th,e}} \right)^{1/3}. \quad (2.226)$$

Чтобы понять физическую причину возникновения модуляционных неустойчивостей, рассмотрим две ленгмюровские волны: волну с амплитудой E_1 , частотой ω_1 и волновым числом k_1 , распространяющуюся параллельно волне накачки. Суммарное поле этих волн запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(k_0 x - \omega_0 t) + \mathbf{E}_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ &= (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_0) \cos(k_1 x - \omega_1 t) + 2\mathbf{E}_0 \cos(\Delta k x - \Delta \omega t) \cos(\bar{k} x - \bar{\omega} t). \end{aligned} \quad (2.227)$$

Первое слагаемое определяет бегущую волну с постоянной амплитудой, которая не создает усредненной ponderomotorной силы. Второе слагаемое также соответствует бегущей волне с частотой $\bar{\omega} = (\omega_0 + \omega_1)/2$ и волновым вектором $\bar{k} = (k_0 + k_1)/2$, но с амплитудой, которая зависит от координат и времени ($\Delta k = (k_0 - k_1)/2$, $\Delta \omega = (\omega_0 - \omega_1)/2$). Если частоты волн близки ($\omega_1 \sim \omega_0$, $k_1 \sim k_0$), то амплитуда изменяется медленно (Рис. 2.9) во времени и пространстве. В этом случае принято говорить об *амплитудной модуляции*. Линия, проведенная через точки, в которых поле в данный момент максимально, называется *огибающей*. Она перемещается в пространстве со скоростью $\Delta \omega / \Delta k = (\omega_0 - \omega_1) / (k_0 - k_1)$ и при $\omega_0 \sim \omega_1$ и $k_0 \sim k_1$ эта скорость близка к групповой скорости волны накачки ($d\omega_0/dk_0 = v_g$).

Промодулированная по амплитуде волна создает ponderomotorную силу, стремящуюся вытолкнуть плазму из области, где амплитуда больше, в область меньшей амплитуды. Поэтому такая волна возбуждает в плазме волну плотности. Амплитуда волны плотности максимальна в условиях резонанса, когда скорость распространения волны огибающей совпадает со звуковой скоростью и в плазме возбуждается собственная звуковая волна. В свою очередь возмущения плотности увеличивают амплитуду пробной ленгмюровской волны. Происходит это благодаря процессу рассеяния волны накачки на возмущениях плотности. Процесс взаимного нарастания возмущений плотности и амплитуды пробной ленгмюровской волны приобретает лавинообразный характер и в плазме возникает модуляционная неустойчивость. Первоначально имевшая постоянную амплитуду ленгмюровская волна оказывается промодулированной по амплитуде, а плотность плазмы становится неоднородной.

2.18 Филаментация

Рассмотрим теперь поперечную волну накачки с частотой ω_0 , распространяющейся в разреженной плазме ($\omega_0 > \omega_p$). В уравнении (2.212) малыми могут быть только выражения $D_{\pm}^{tr}$ и при учете соответствующих слагаемых, а также закона дисперсии для волны накачки $\omega_0^2 = \omega_p^2 + k_0^2 c^2$ получим:

$$\omega^2 - k^2 v_s^2 = -\omega_{pi}^2 \frac{v_E^2}{2c^2} \frac{k^2}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 - 4\left(\alpha k k_0 - \frac{\omega \omega_0}{c^2}\right)^2} \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_0)^2}{(k^2 - k_0^2)^2} \left[(k^2 + k_0^2) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) + 4\alpha k k_0 \left(\alpha k k_0 - \frac{\omega \omega_0}{c^2}\right) \right] \right\}, \quad (2.228)$$

где $\alpha = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0) / k k_0$, $\mathbf{e}_0$ -вектор поляризации волны накачки. Ограничимся возмущениями, распространяющимися поперек направления распространения волны накачки ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0 = 0$) и поперек вектора поляризации ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_0 = 0$). Кроме этого будем считать, что $k^2 c^2 > \omega^2, 2\omega_0 |\omega|$. В результате из уравнения (2.228) найдем

$$\omega^2 \simeq k^2 v_s^2 - \omega_{pi}^2 \frac{v_E^2}{2c^2}. \quad (2.229)$$

Отсюда следует, что возмущения с волновыми числами, для которых выполняется неравенство $k \lambda_{De} < 2^{-1/2} v_E / c$, нарастают экспоненциально со временем. Это значит, что в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны накачки, происходит перераспределение плотности плазмы и электромагнитного поля. Возникают области с пониженной плотностью, но с повышенной интенсивностью электромагнитного излучения, чередующиеся с областями, где повышена плотность плазмы, но понижена интенсивность излучения. Такое разбиение электромагнитной волны на узкие "шнуры" с повышенной интенсивностью получило название *филаментации*.

Чтобы понять физическую причину филаментации, рассмотрим волну накачки, распространяющуюся в плазме, концентрация которой в направлении, перпендикулярном $\mathbf{k}_0$, промодулирована. Пусть все электроны плазмы осциллируют в поле волны одинаково и их скорость при фиксированном значении координаты x изменяется по закону $v_y = v_E \cos(\omega_0 t)$. Из-за вариаций плотности плазмы δn возникают вариации плотности высокочастотного тока $\delta j_y = -e v_E \delta n \cos(\omega_0 t)$, которые служат источником направленного вдоль оси OZ магнитного поля

$$\frac{\partial \delta H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} e v_E \delta n(x, t) \cos(\omega_0 t). \quad (2.230)$$

Это зависящее от координаты x магнитное поле действует на основной, не зависящий от координаты x высокочастотный ток $j_0 = -en_e v$ электронов с силой $f = (j_0/c) \delta H$, направленной вдоль оси OX и стремящейся увеличить начальные вариации плотности. Поэтому начальные возмущения плотности нарастают со временем и возникает неустойчивость.

Для филаментации более естественной является постановка граничной задачи. Волна накачки входит в плазму через границу и от этой границы идет нарастание возмущений в пространстве вдоль направления распространения волны. Чтобы рассмотреть граничную стационарную задачу, используем уравнение (2.228), в котором положим $\omega = 0$, а компоненту вектора $\mathbf{k}$, параллельную границе и перпендикулярную $\mathbf{k}_0$, обозначим $k_{\perp}$, а компоненту, параллельную $\mathbf{k}_0$, обозначим $k_{\parallel}$ (т.е. $\alpha = k_{\parallel}/k$ в формуле (2.228)). Как и ранее, рассмотрим плоскость, перпендикулярную вектору поляризации ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_0 = 0$) и достаточно длинноволновые возмущения ($k_0^* > k_{\perp} > |k_{\parallel}|$). В результате для $k_{\parallel}$ получим

$$k_{\parallel} = \frac{k_{\perp}}{2k_0} \sqrt{k_{\perp}^2 - \kappa^2}. \quad (2.231)$$

Для возмущений с поперечной компонентой волнового вектора, удовлетворяющей неравенству $k_{\perp} < \kappa = 2^{-1/2} (\omega_{pi}/c) (v_E/v_s)$, имеет место усиление граничных возмущений. Наиболее быстро

нарастают возмущения с $k_{\perp, \max} = 2^{-1/2} \kappa = (\omega_{pi}/c) (v_E/2v_s)$ и для них коэффициент усиления равен

$$\chi_{\max} = \frac{\kappa^2}{4k_0} = \frac{v_E^2 \omega_{pe}^2}{8k_0 c^2 v_{th,e}^2}. \quad (2.232)$$

Заметим, что наше рассмотрение, как это следует из условия $k_0 > |k_{\parallel}|$, предполагает, что $k_0 \lambda_{De} \gg v_E/c$.

2.19 Вынужденное рассеяние

Рассматривая в §1.33 основы теории рассеяния, мы предполагали, что флуктуации не зависят от интенсивности падающего излучения. При этом интенсивность рассеянного излучения оказывалась пропорциональной интенсивности падающего излучения, между этими величинами была *линейная связь*. Часто применительно к такого рода рассеянию используют термин “спонтанное рассеяние”.

В отличие от этого при вынужденном рассеянии флуктуации зависят от падающего излучения и связь между интенсивностями рассеянного и падающего излучения является *нелинейной*. Естественно, что изменение уровня и спектра флуктуаций при падении излучения на плазму не может произойти мгновенно. Для этого требуется некоторое время. На этом начальном этапе можно говорить о развитии в среде параметрической неустойчивости, в результате которой нарастают как флуктуации, так и интенсивность рассеянного излучения.

В этом параграфе мы обсудим эти неустойчивости и установим их связь с известными результатами теории нелинейного взаимодействия волн.

Рассмотрим снова в качестве примера поперечную волну накачки с частотой ω_0 , распространяющуюся в разреженной плазме, когда в выражении (2.212) можно ограничиться учетом только знаменателей $\mathcal{D}_{\pm}^{tr}$. Дисперсионное уравнение для возмущений, волновые векторы которых перпендикулярны вектору поляризации волны накачки $\mathbf{e}_0$, имеет вид

$$\omega^2 - k^2 v_s^2 = \frac{\omega_{pi}^2 k^2 v_E^2}{4} \left(\frac{1}{\omega_+^2 - \omega_{pe}^2 - k_+^2 c^2} + \frac{1}{\omega_-^2 - \omega_{pe}^2 - k_-^2 c^2} \right). \quad (2.233)$$

Начнем анализ уравнения (2.233) со случая достаточно малой амплитуды волны накачки, когда можно воспользоваться теорией возмущений относительно величины v_E^2 . В нулевом приближении ($\omega = \omega^{(0)}$) положим $v_E^2 = 0$ и получим закон дисперсии для низкочастотных ионно-звуковых волн (см. §1.19) $\omega^{(0)} = \pm k v_s$.

Наиболее существенно влияние волны накачки на ионно-звуковые волны, для которых в нулевом приближении обращаются в ноль стоящие в правой стороне формулы (2.233) знаменатели. Обращение в ноль этих знаменателей означает выполнение законов дисперсии для стоксовых (ω_-) и антистоксовых (ω_+) рассеянных волн.

Таким образом, решение дисперсионного уравнения по теории возмущений относительно амплитуды волны накачки (так называемое, приближение *слабой связи волн*) предполагает выполнение законов дисперсии для падающей, рассеянных и низкочастотных звуковых волн. Эти же условия предполагались выполненными и при рассеянии Мандельштама-Бриллюэна (см. §1.37). Поэтому рассматриваемое нами вынужденное рассеяние называется *вынужденным рассеянием Мандельштама-Бриллюэна* или сокращенно ВРМБ.

Теперь установим связь ВРМБ с процессами трехволнового взаимодействия, рассматривавшимися в §2.4. При получении укороченных уравнений для медленно изменяющихся амплитуд предполагалось, что законы дисперсии для всех взаимодействующих волн выполнены.

В приближении заданной волны накачки задача о взаимодействии волн сводилась к системе линейных однородных уравнений, нетривиальное решение которых было возможно только при равенстве нулю соответствующего определителя (см. §2.6). Уравнение (2.233) при решении его по теории возмущений относительно v_E^2 непосредственно приводит к этому же определителю и позволяет сразу ответить на вопрос о *распадной неустойчивости*.

И так, решая уравнение (2.233) относительно ω , будем считать, что $\omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)}$. Здесь $\omega^{(0)} = \pm kv_s$ и $(\omega^{(0)} \pm \omega_0)^2 = \omega_{pe}^2 + c^2(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2$. Рассмотрим сначала случай, когда выполнен закон дисперсии для стоксовой рассеянной волны. Следующие из этого ограничения на волновые векторы звуковых волн обсуждались в §2.3. Для поправки $\omega^{(1)}$ из (2.233) найдем

$$[\omega^{(1)}]^2 = -\frac{\omega_{pi}^2 k^2 v_E^2}{16\omega_0 \omega^{(0)}}. \quad (2.234)$$

Поправка является мнимой и определяет инкремент распадной неустойчивости ВРМБ

$$\gamma = \frac{\omega_{pi} v_E}{4} \sqrt{\frac{k}{\omega_0 v_s}}. \quad (2.235)$$

Если предположить, что выполнен закон дисперсии для антистоксовой рассеянной волны, то поправка к частоте $\omega^{(1)}$ будет действительной и неустойчивости не будет. Этот вывод согласуется с общим утверждением о том, что в результате распадной неустойчивости нарастают волны только с частотами меньше частоты волны накачки.

Приближение слабой связи волн пригодно до тех пор, пока выполнено неравенство $|\omega^{(1)}| \ll kv_s$. Если же это неравенство не выполнено, что имеет место при больших амплитудах волны накачки, то связь волн не является слабой и уравнение (2.233) нельзя решать по теории возмущений. Будем считать, что соответствующий закону дисперсии для стоксовой волны знаменатель по-прежнему мал и выполнено соотношение $k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_0 = 0$ ($0 \leq k \leq 2k_0$). Тогда из уравнения (2.233) получим при $\omega_0 \gg |\omega|$

$$\omega (\omega^2 - k^2 v_s^2) + \frac{\omega_{pi}^2 k^2 v_E^2}{8\omega_0} = 0. \quad (2.236)$$

Наиболее просто результат получить для $|\omega|^2 \gg k^2 v_s^2$. В этом пределе имеет место неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\omega_{pi}^2 k^2 v_E^2}{\omega_0} \right)^{1/3} \simeq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{v_E}{c} \frac{k}{k_0} \right)^{2/3} (\omega_0 \omega_{pi}^2)^{1/3}. \quad (2.237)$$

В общем случае неустойчивость возникает при условии

$$k < k_c \equiv \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{\omega_{pi}^2 v_E^2}{\omega_0 v_s^3}, \quad (2.238)$$

а инкремент нарастания определяется формулой:

$$\gamma(k) = \frac{k_c v_s}{\sqrt{3}} \left(\frac{k}{k_c} \right)^{2/3} \left\{ \left[1 + \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_c^2}} \right]^{1/3} - \left[1 - \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_c^2}} \right]^{1/3} \right\}. \quad (2.239)$$

Неустойчивость, полученную в пределе сильной связи волн, когда для низкочастотных звуковых волн не выполняется обычный закон дисперсии, часто называют *модифицированной распадной неустойчивостью*.

Чтобы вскрыть физическую причину ВРМБ, рассмотрим две волны, распространяющиеся навстречу друг другу. Суммарное поле этих волн запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \mathbf{E}_2 \cos(k_2 x + \omega_2 t) = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \\ + 2\mathbf{E}_2 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right). \end{aligned} \quad (2.240)$$

В пределе $k_1 \rightarrow k_2$ и $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ последнее слагаемое описывает стоячую волну, в которой, как известно из §2.14, действуют пондеромоторные силы. Если частоты и волновые векторы волн не совпадают, но отличаются мало, то стоячая волна не стоит на месте, а движется со скоростью $(\omega_1 - \omega_2)/(k_1 + k_2)$. Движущаяся периодическая в пространстве пондеромоторная сила создает

возмущения плотности плазмы, особенно значительные в условиях резонанса, когда скорость ее движения совпадает со звуковой скоростью. Звуковая волна, нарастая под действием пондеромоторной силы, увеличивает амплитуду рассеянной волны и тем самым делает пондеромоторную силу еще больше. В результате и возникает рассмотренная выше неустойчивость.

Помимо процесса ВРМБ, где нарастают квазинейтральные возмущения плотности плазмы, часто обсуждается процесс ВКР (вынужденное комбинационное рассеяние), где нарастают возмущения только электронной плотности-ленгмюровские волны.

2.20 Параметрические неустойчивости (Продолжение)

При распространении электромагнитной волны в неоднородной плазме (см. §1.12) вблизи точки, где концентрация равна критической $n_c = m\omega^2/4\pi e^2$, поле волны особенно велико. Поэтому именно в этой области параметрические неустойчивости могут проявиться прежде всего. Рассмотрим эти неустойчивости.

Распадной неустойчивости, в результате развития которой нарастают ионно-звуковые и ленгмюровские волны (см. §2.13), соответствует учет только последнего слагаемого в правой стороне дисперсионного уравнения (2.212) и решение его по теории возмущений (см. §2.19). После преобразований, подобных приведенным выше, получим для поправки к частоте $\omega^{(1)}$

$$2kv_s\omega^{(1)} = \frac{k^2\omega_{pi}^2 v_E^2}{4} \frac{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{e}_0]^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 (k_0^2 c^2 - 2\omega_0 \omega^{(1)})}. \quad (2.241)$$

Из закона дисперсии для поперечной волны $\omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + k_0^2 c^2$ следует, что при $\omega_0 \sim \omega_{pe}$ можно считать k_0 весьма малым. Тогда при условии $k_0^2 c^2 \ll 2\omega_0 |\omega^{(1)}|$ и $k_0 \ll k$ найдем инкремент распадной неустойчивости

$$\gamma = \frac{kv_E \omega_{pi}}{4\sqrt{\omega_{Le} k v_s}} |\cos \theta|, \quad (2.242)$$

где $\cos^2 \theta = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_0)^2 / k^2$.

С увеличением напряженности поля, когда нарушается неравенство $|\omega^{(1)}| < kv_s$, возникает модифицированная распадная неустойчивость, подобная рассмотренной в §2.19.

При еще больших полях волны накачки становится необходимым учитывать два последних слагаемых в правой стороне уравнения (2.212). В результате при $k_0 \ll k$ получим

$$\omega^2 - k^2 v_s^2 = \frac{\omega_{pi}^2 v_E^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_0)^2}{4} \frac{2(\omega^2 + \omega_0^2 - \omega_{pe}^2)}{(\omega^2 + \omega_0^2 - \omega_{pe}^2)^2 - 4\omega^2 \omega_0^2}. \quad (2.243)$$

Если величина $\omega_0^2 - \omega_{pe}^2 = k_0^2 c^2$, которую часто называют расстройкой, мала и выполняется неравенство $k_0 c \ll |\omega|$, то дисперсионное уравнение при $|\omega| > kv_s$ дает мнимое решение. Инкремент в этом случае равен

$$\gamma = \frac{\frac{\omega_{pi}}{\sqrt{2}} |\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_E|}{\sqrt{\sqrt{4\omega_{pe}^4 + \frac{\omega_{pi}^2}{2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_E)^2} + 2\omega_{pe}^2}} \simeq \frac{\omega_{pi}}{2\sqrt{2}\omega_{pe}} |\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_E|. \quad (2.244)$$

По своему виду инкремент (2.244) очень похож на инкремент нерезонансной токовой неустойчивости, которую мы рассматривали в §1.19. Поэтому часто эту неустойчивость называют *осциллирующей двухпотоковой неустойчивостью*.

На Рис. 2.10 показан инкремент $\gamma(k)$ для трех величин: амплитуды волны накачки, соответствующих распадной неустойчивости, модифицированной распадной неустойчивости и осциллирующей двухпотоковой неустойчивости.

Остановимся на физической причине возникновения параметрической двухпотоковой неустойчивости. Пусть в плазме, помещенной в однородное, высокочастотное поле, имеется возмущение

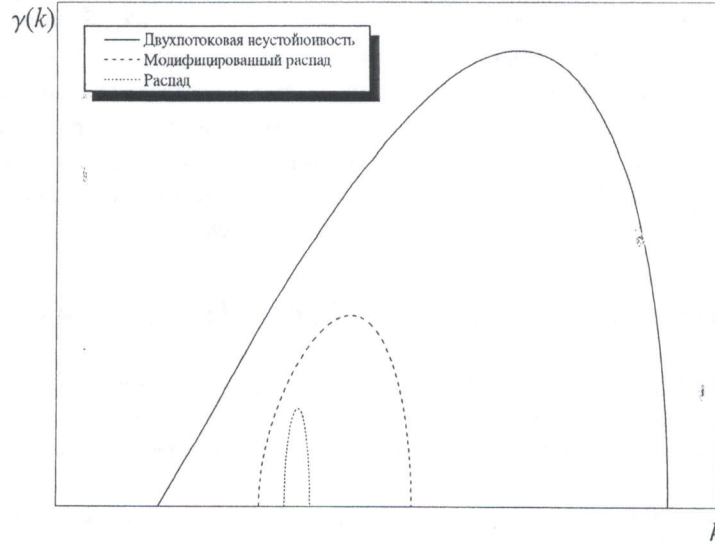


Рис. 2.10: Схематически показаны инкременты $\gamma(k)$ для двухпотоковой неустойчивости, модифицированного распада и обычного распада.

плотности. Под действием поля дополнительные электроны плазмы, находящиеся в возмущении, осциллируют и периодически смещаются относительно возмущения ионов. В результате возникает быстропеременное поле разделения зарядов $\delta \mathbf{E}$, которое можно найти из уравнения $\text{div } \mathbf{D} = 0$

$$\delta \mathbf{E} = -\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \mathbf{E}_{0\parallel} = \frac{4\pi e^2 \delta n_e}{m\omega_0^2 \varepsilon(\omega_0)} \mathbf{E}_{0\parallel}, \quad (2.245)$$

где $\mathbf{E}_{0\parallel}$ -проекция поля волны накачки на градиент неоднородности, $\delta n_e(x)$ -возмущение концентрации электронов, $\varepsilon(\omega)$ -высокочастотная диэлектрическая проницаемость (1.157). Если $\omega_0 > \omega_{pe}$ и $\varepsilon(\omega_0) > 0$, то поле разделения зарядов в области $\delta n_e > 0$ направлено в ту же сторону, что и высокочастотное поле. Поэтому полное поле в области возмущения концентрации больше, чем вне ее. Силы высокочастотного давления, пропорциональные $\partial(\mathbf{E}_{0\parallel} \cdot \delta \mathbf{E})/\partial x$, стремятся уменьшить начальное возмущение плотности. Если же $\omega_0 < \omega_{pe}$, то $\varepsilon(\omega_0) < 0$ и поле $\delta \mathbf{E}$ направлено в области $\delta n_e > 0$ противоположно $\mathbf{E}_{0\parallel}$. Полное поле меньше там, где выше плотность плазмы и силы высокочастотного давления стремятся увеличить начальные возмущения плотности. При этом возникает неустойчивость.

2.21 Плазменная турбулентность

Если плазма неустойчива, то в ней обычно нарастает не одна волна, а целый набор волн с различными частотами и направлениями распространения. Суммарное поле этих волн является случайной функцией координат и времени и, как говорят, плазма переходит в *турбулентное состояние*. Для характеристики такого случайного поля обычно используют спектральную плотность корреляционной функции или связанную с ней величину $\mathcal{N}(\mathbf{k})$, которую называют числом квантов (см. §2.9). Уравнение для $\mathcal{N}(\mathbf{k})$ имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{k})}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{r}} + 2\gamma \mathcal{N}(\mathbf{k}) = \mathfrak{F}, \quad (2.246)$$

где стоящая в правой стороне величина учитывает взаимодействие между квантами (связь различных Фурье-компонент спектральной плотности корреляционной функции).

Рассмотрим стационарную и однородную турбулентность, когда поле есть стационарная и однородная случайная функция. Уравнение для $\mathcal{N}(\mathbf{k})$ в этом случае упрощается и имеет вид

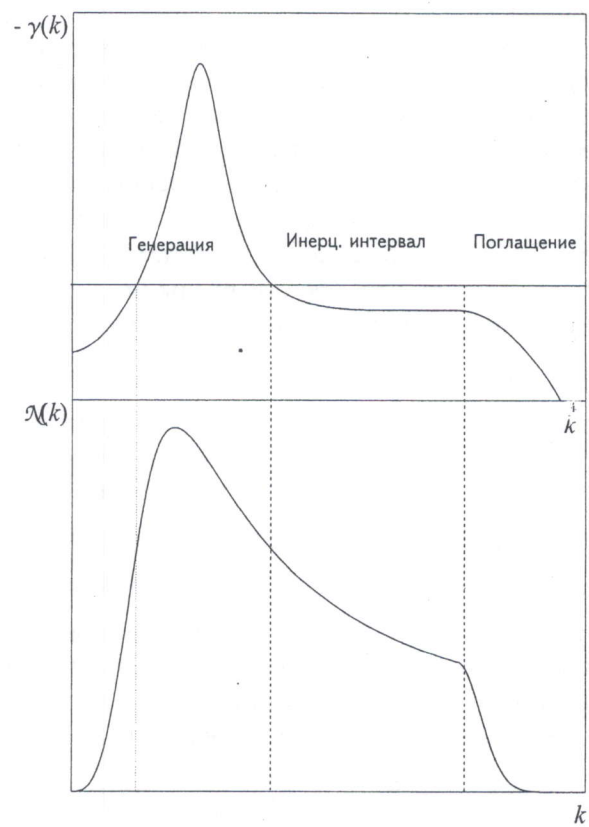


Рис. 2.11: Схематическое изображение зон генерации, инерции и поглощения (верхний график), а также зависимость $\mathcal{N}(k)$ от k (нижний график).

$2\gamma\mathcal{N}(\mathbf{k}) = \Im$. В состоянии равновесия $\mathcal{N}(\mathbf{k}) = T/\omega(\mathbf{k})$ и $\Im = 0$, $\gamma = 0$. Если же плазма неустойчива, то $\gamma(\mathbf{k}) < 0$ в некоторой области значений волновых векторов $\mathbf{k}$ (Рис. 2.11). Эта область называется *зоной генерации*. Если бы между квантами не было взаимодействия, то в этой зоне происходило бы нарастание их числа со временем. За счет нелинейного взаимодействия (столкновений) энергия волн из зоны генерации переходит к другим волнам до тех пор, пока не попадет в *зону поглощения*, где $\gamma > 0$. Между зонами генерации и поглощения находится так называемый *инерционный интервал*. В этом интервале выполняется закон сохранения потока энергии в пространстве волновых векторов.

Таким образом, для установления стационарной турбулентности нужно, чтобы была зона поглощения и нелинейное взаимодействие волн переводило энергию из зоны генерации в зону поглощения. Именно так все и происходило при развитии турбулентности в жидкости. Звуковые волны, возникавшие из-за течения жидкости, генерировали свои гармоники, длины волн уменьшались и вязкость становилась сильнее.

В плазме одним из наиболее характерных следствий развития неустойчивости является нарастание ленгмюровских волн. К этому приводят пучковые неустойчивости, параметрические неустойчивости и многие другие. Трехволновое взаимодействие между ленгмюровскими волнами невозможно. Запрет связан с тем, что суммарная частота двух волн близка к $2\omega_{pe}$ и не может удовлетворять закону дисперсии. Однако возможен иной процесс взаимодействия ленгмюровских волн — *индуцированное рассеяние волн на частицах*. Остановимся на этом процессе более детально.

Пусть в плазме распространяются две волны с частотами ω_1 и ω_2 и с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Для простоты будем считать, что обе эти волны продольные и в них магнитное поле отсутствует. Уравнение движения для частицы тогда имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e[\mathbf{E}_1 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t) + \mathbf{E}_2 \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)]. \quad (2.247)$$

Траектории частицы будем искать по теории возмущений $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots$. При этом в нулевом приближении положим, что частица движется с постоянной скоростью ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}t$). Тогда поправки к этой траектории могут быть найдены из следующих уравнений

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = -e[\mathbf{E}_1 \cos(\Omega_1 t) + \mathbf{E}_2 \cos(\Omega_2 t)], \quad (2.248)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -e(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1) \mathbf{E}_1 \sin(\Omega_1 t) - e(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \mathbf{E}_2 \sin(\Omega_2 t). \quad (2.249)$$

Здесь $\Omega_{1,2} = \omega_{1,2} - \mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{v}$. Совершенно очевидно, что при выполнении условия $\omega_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}$ или $\omega_2 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}$ сила, действующая на частицу, является постоянной. Она не зависит от времени и может сильно влиять на траекторию частицы. Иными словами, для резонансных частиц возможно большое изменение траектории в поле волны. Это же видно из выражения для $\mathbf{r}_1$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{e}{m} \left[\frac{\mathbf{E}_1}{\Omega_1^2} \cos(\Omega_1 t) + \frac{\mathbf{E}_2}{\Omega_2^2} \cos(\Omega_2 t) \right]. \quad (2.250)$$

Используя это выражение (и предполагая, что линейного резонанса для частицы нет), найдем силу, действующую на частицу во втором приближении

$$m\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{e^2}{2m} \left\{ \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_1)}{\Omega_1^2} \sin(2\Omega_1 t) + \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_2)}{\Omega_2^2} \sin(2\Omega_2 t) + \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_1)}{\Omega_1^2} 2 \sin(\Omega_2 t) \cos(\Omega_1 t) + \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\Omega_2^2} 2 \sin(\Omega_1 t) \cos(\Omega_2 t) \right\}. \quad (2.251)$$

Стоящая справа сила определяет различные процессы. Так, имеются слагаемые, пропорциональные $\sin(2\Omega_{1,2} t)$. Ясно, что эти слагаемые приводят к постоянной силе при тех же условиях, что и в обычном линейном резонансе. Однако, имеются еще перекрестные слагаемые с частотами $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_{\pm} = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$

$$-\frac{e^2}{2m} \left\{ \sin(\Omega_+ t) \left[\frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_1)}{\Omega_1^2} + \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\Omega_2^2} \right] + \sin(\Omega_- t) \left[\frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{E}_2)}{\Omega_2^2} - \frac{\mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{E}_1)}{\Omega_1^2} \right] \right\}. \quad (2.252)$$

Здесь $\Omega_{\pm} = \omega_{\pm} - \mathbf{k}_{\pm} \cdot \mathbf{v}$. Если выполнено одно из двух резонансных условий

$$\omega_1 \pm \omega_2 = (\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}, \quad (2.253)$$

то на частицу действует постоянная сила. В этом случае говорят *снога* о резонансных частицах. Но этот резонанс является *нелинейным*, а скорость частицы совпадает со скоростью распространения нелинейного поля на комбинационных частотах.

Основной интерес представляет нелинейный резонанс волн с частицами, когда выполнено условие $\omega_1 - \omega_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}$. Связано это с тем, что для волн, фазовые скорости которых велики, условие линейного резонанса $\omega_{1,2} = \mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{v}$ выполняется лишь для малого числа частиц, в то время как условие нелинейного резонанса выполняется для частиц с малыми скоростями, число которых велико.

Рассмотрим две ленгмюровские волны в плазме с максвелловским распределением частиц по скоростям. Известно, что в этом случае энергия от волн передается частицам (затухание Ландау, см. §1.24). Аналогично и для нелинейного резонанса энергия от волн переходит частицам и $W_1 + W_2 < W_{10} + W_{20}$, где $W_{1,2}$ — плотность энергии волн в момент времени t ; W_{10} , W_{20} — плотность энергии в начальный момент. При таком взаимодействии имеет место еще закон сохранения числа квантов. Чтобы пояснить это, рассмотрим квантовую аналогию. Частица поглощает квант $\hbar\omega_1$ и излучает квант $\hbar\omega_2$. Закон сохранения энергии $\hbar\omega_1 + E_1 = \hbar\omega_2 + E_2$ и закон сохранения импульса $\hbar\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1 = \hbar\mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2$ приводят к условию резонансного взаимодействия $\omega_1 - \omega_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{v}$. Условие сохранения числа квантов имеет вид

$$\frac{W_1}{\omega_1} + \frac{W_2}{\omega_2} = \text{const} \quad (2.254)$$

или

$$\frac{W_1}{\omega_1} + \frac{W_2}{\omega_2} = \frac{W_{10}}{\omega_1} + \frac{W_{20}}{\omega_2}. \quad (2.255)$$

Отсюда получим:

$$\frac{W_1 + W_2}{\omega_1} + W_2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2} = \frac{W_{10} + W_{20}}{\omega_1} + W_{20} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2} \quad (2.256)$$

или при $\omega_1 > \omega_2$, $W_2 > W_{20}$. Это значит, что при таком нелинейном процессе взаимодействия волн через частицы энергия от высокочастотных волн переходит как к частицам плазмы, так и к более низкочастотным волнам. Процесс этот называется *процессом индуцированного рассеяния волн на частицах*.

Итак, в системе ленгмюровских волн энергия переходит из-за их нелинейного взаимодействия в более низкочастотные волны. При этом длина волны увеличивается и затухание Ландау уменьшается. Из-за нелинейного взаимодействия ленгмюровских волн энергия не переходит в область поглощения, а скапливается (конденсируется) в области длинных волн. Справедливая для жидкости модель установления стационарной турбулентности оказывается не пригодной для ленгмюровской турбулентности.

Выход был найден в том, что в возникающем состоянии с большой энергией в длинных ленгмюровских волнах развивается так называемая модуляционная неустойчивость. При этом нарушается однородность ионного фона и плазма становится неоднородной. Образуются области с пониженной плотностью и повышенным продольным полем (кавитоны). Со временем эти ямки углубляются и сжимаются (т.н. коллапс ленгмюровских волн). При этом происходит уменьшение длин ленгмюровских волн и переход их энергии в частицы плазмы.

2.22 Захваченные частицы

До сих пор использовалась теория возмущений относительно величины электрического поля. Это предполагало, что электрическое поле мало изменяет траектории движения частицы или $v_{E\alpha} \ll \max(v_{th,\alpha}; v_{\phi})$. Ясно, что это условие выполняется особенно плохо для резонансных частиц,

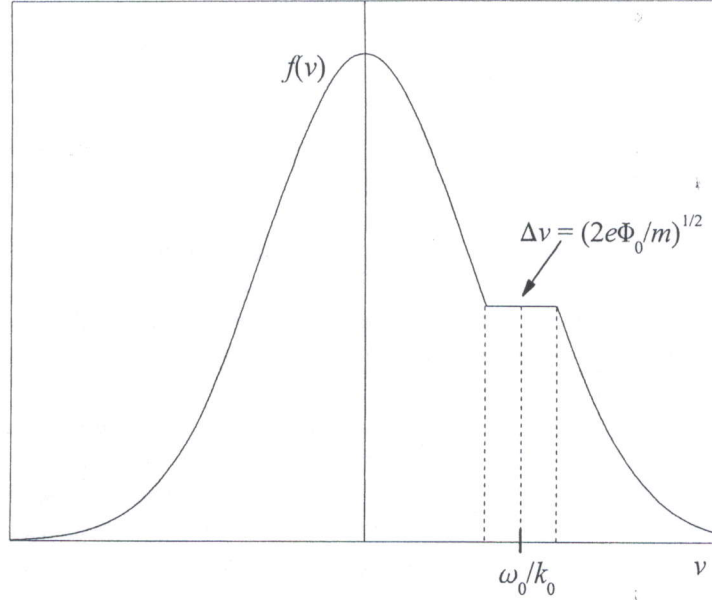


Рис. 2.12: Образование плато на функции распределения.

скорость движения которых совпадает с фазовой скоростью волны. Поэтому эти частицы требуют рассмотрения без использования теории возмущений.

Рассмотрим продольную волну, распространяющуюся вдоль оси ОХ. Поле этой волны имеет вид $E = E_0 \sin(k_0 x - \omega_0 t)$. Перейдем в систему координат, связанную с волной $\xi = k_0 x' = k_0 x - \omega_0 t$. В этой системе координат поле является периодической функцией координаты $E = E_0 \sin(\xi)$. Поскольку волна является потенциальной, то можно ввести потенциал $E = -\Phi'(\xi)$, где $\Phi(\xi) = E_0 \cos(\xi)$. Рассмотрим движение частицы в электрическом поле при условии, что начальная скорость частицы близка к фазовой скорости волны. Уравнение движения частицы имеет вид:

$$m\ddot{x}' = -eE_0 \sin(k_0 x'). \quad (2.257)$$

Найдем первый интеграл этого уравнения который выражает закон сохранения энергии

$$\frac{\dot{\xi}^2}{2} = \Omega^2 (\cos \xi - \cos \xi_0). \quad (2.258)$$

Здесь $\Omega = \sqrt{eE_0 k_0 / m}$, ξ_0 — некоторое начальное значение величины ξ . Видно, что безразмерная координата ξ меняется в интервале $-\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0$. Отсюда следует, что частица, двигаясь вместе с волной, осциллирует относительно точки $\xi = 0$ с периодом осцилляций

$$\tau = \frac{4}{\Omega} K \left(\sin \frac{\xi_0}{2} \right), \quad (2.259)$$

где $K(z)$ — полный эллиптический интеграл. При малых колебаниях, когда $\xi_0 \ll 1$, имеем $K \left(\sin \frac{\xi_0}{2} \right) \simeq K(\xi_0/2) \simeq \pi/2$ и $\tau = 2\pi/\Omega$.

Амплитуда осцилляций частицы зависит от разности между скоростью частицы и фазовой скоростью волны. Если эта разность мала, то мала и амплитуда осцилляций. В этом случае говорят, что частица захвачена волной. Если же разность велика, то частица может выйти из данного минимума потенциала и начать двигаться вдоль волны. Это будет при $mv'^2/2 > 2eE_0/k_0$, где $v' = v - \omega_0/k_0$. Линия на фазовой плоскости, разделяющая захваченные частицы от незахваченных (или, пролетных), называется сепаратрисой.

Если волна включается (возникает) в плазме достаточно быстро (за время меньше, чем τ), то можно считать, что резонансные частицы не успевают сдвинуться относительно волны. При

этом их число задано той функцией распределения, которая была в плазме до включения волны. На начальном этапе часть частиц начнет тормозиться (этих частиц меньше), а часть-ускоряться-этих частиц больше. В целом энергия частиц будет возрастать, а энергия волны уменьшаться. Именно в это время только и можно говорить о затухании Ландау ($t \ll \tau$). Если же $t \sim \tau$, то те частицы, которые тормозились, начнут ускоряться и наоборот. Энергия от частиц начнет переходить в энергию волны. Будут наблюдаться осцилляции амплитуды волны с периодом τ . Однако период осцилляций частиц, имевших относительно волны различные начальные положения и скорости, не совпадает. Частицы, осциллирующие с большой амплитудой, движутся медленнее и имеют больший период. Частицы с меньшей амплитудой имеют период меньше. В результате синхронность осцилляций частиц нарушается или, как говорят, частицы расходятся по фазам осцилляций, возникает фазовое перемешивание. Частицы уже не могут сфазироваться и восстановить поле волны. Устанавливается стационарное состояние, в котором энергия волны неизменна, а разные частицы имеют различные произвольные фазы осцилляций. При этом в каждой точке пространства одновременно имеются частицы с различными скоростями в интервале $m\Delta v^2/2 = e\Phi_0$. На функции распределения образуется плато (Рис. 2.12) и обмен энергией между частицами и волной прекращается.

2.23 Нелинейные волны. Солитоны

Другим важным физическим понятием, которое возникает в сильно нелинейном режиме, является понятие об уединенных волнах (солитонах). Чтобы можно было лучше понять, что это такое, рассмотрим один пример-так называемые, нелинейные ионно-звуковые волны.

В §1.19 мы рассматривали уравнения двухжидкостной гидродинамики. При этом предполагалось, что плазма представляет смесь двух жидкостей-электронной и ионной. Уравнения движения этих жидкостей (см. уравнения (1.220), (1.223) и (1.239)) и уравнения непрерывности имеют вид:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_\alpha v_\alpha) = 0, \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} = -v_{th,\alpha}^2 \frac{\partial \ln n_\alpha}{\partial x} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.260)$$

где $\alpha = e, i$ и принято, что движение происходит только вдоль оси ОХ. Потенциал разделения зарядов φ , благодаря которому две жидкости связаны между собой, определяется уравнением $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi(n_e e - n_i e_i). \quad (2.261)$$

Будем рассматривать медленные движения в плазме, связанные с ионами. При таких медленных движениях $v_{th,e}^2 \gg v_e^2$ и электроны успевают так перераспределиться в пространстве, что в каждой точке сила теплового давления уравнивается силой, действующей со стороны электрического поля

$$n_e = n_{e0} e^{e\varphi/T_e}. \quad (2.262)$$

Наоборот ионы будем считать почти холодными ($v_{th,i}^2 \ll v_i^2$) и пренебрежем их тепловым давлением.

Будем искать решение уравнений, предполагая, что все величины зависят от координат и времени только через комбинацию $\xi = x - ut$. Такие решения соответствуют *стационарным нелинейным волнам* и в частном случае гармонической зависимости от переменной ξ переходят в обычные линейные волны. Упрощенные уравнения гидродинамики преобразуются к виду

$$\frac{d}{d\xi} [n_i (v_i - u)] = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} (v_i - u)^2 = -\frac{e_i}{m_i} \frac{d\varphi}{d\xi}. \quad (2.263)$$

Отсюда следуют первые интегралы комбинации величин, которые не изменяются при изменении ξ . Из первого уравнения получаем закон сохранения потока ионов

$$n_i (v_i - u) = C. \quad (2.264)$$

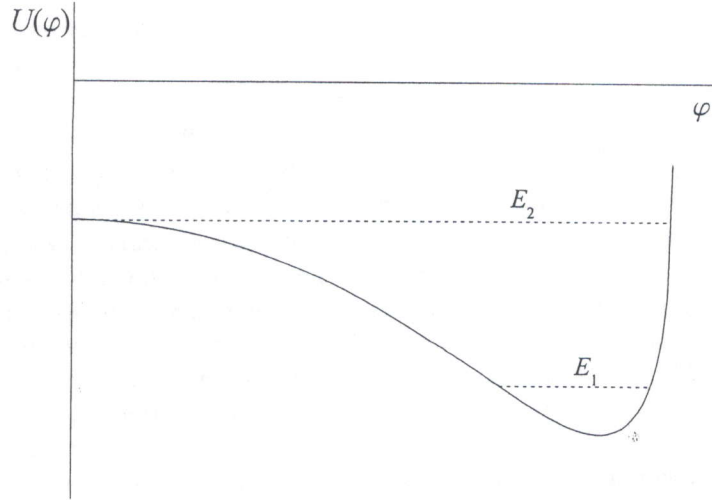


Рис. 2.13: Схематическое изображение потенциала $U(\varphi)$.

Если при $n_i = n_{i0}$, $v_i = 0$, то отсюда найдем $n_i(v_i - u) = -n_{i0}u$. Из второго уравнения следует закон сохранения энергии ионов

$$\frac{1}{2}(v_i - u)^2 + \frac{e_i}{m_i}\varphi = C_1. \quad (2.265)$$

Если при $v_i = 0$, $\varphi = 0$, то $C_1 = u^2/2$ и

$$n_i = \frac{n_{i0}}{\sqrt{1 - 2e_i\varphi/m_i u^2}}. \quad (2.266)$$

Теперь, зная выражение для концентрации ионов через потенциал, можно записать уравнение для самого потенциала. Если при этом принять, что в точке, где $\varphi = 0$, плазма нейтральна $e_i n_{i0} - e n_{e0} = 0$, то оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 4\pi n_{e0}e \left(e^{e\varphi/T_e} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2e_i\varphi/m_i u^2}} \right). \quad (2.267)$$

Это существенно нелинейное уравнение, которое определяет изменение в пространстве потенциала нелинейной ионно-звуковой волны.

Уравнение не имеет аналитических решений, но есть хороший способ для качественного исследования такого рода уравнений. Для этого следует уравнение помножить на $d\varphi/d\xi$ и записать его в форме

$$\frac{1}{2}[\varphi'(\xi)]^2 + U(\varphi) = E, \quad (2.268)$$

где “потенциал” $U(\varphi)$ имеет вид

$$U(\varphi) = -4\pi n_{e0}T_e \left(e^{e\varphi/T_e} + \frac{m_i u^2}{ZT_e} \sqrt{1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i u^2}} \right). \quad (2.269)$$

Полученное соотношение имеет вид закона сохранения энергии при движении материальной точки единичной массы в потенциальном рельефе. При этом ξ имеет смысл времени, φ -смысл координаты, $U(\varphi)$ -смысл потенциала, E -полная энергия частицы. Из выражения (2.269) видно, что потенциал может принимать только значения $-\infty < \varphi \leq \varphi_{\max} = m_i u^2 / 2Ze$.

График для потенциального рельефа $U(\varphi)$ приведен на Рис. 2.13. При $a = m_i u^2 / ZT_e = u^2/v_s^2 > 1$ функция $U(\varphi)$ имеет минимум и в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_{\max}$ принимает значения:

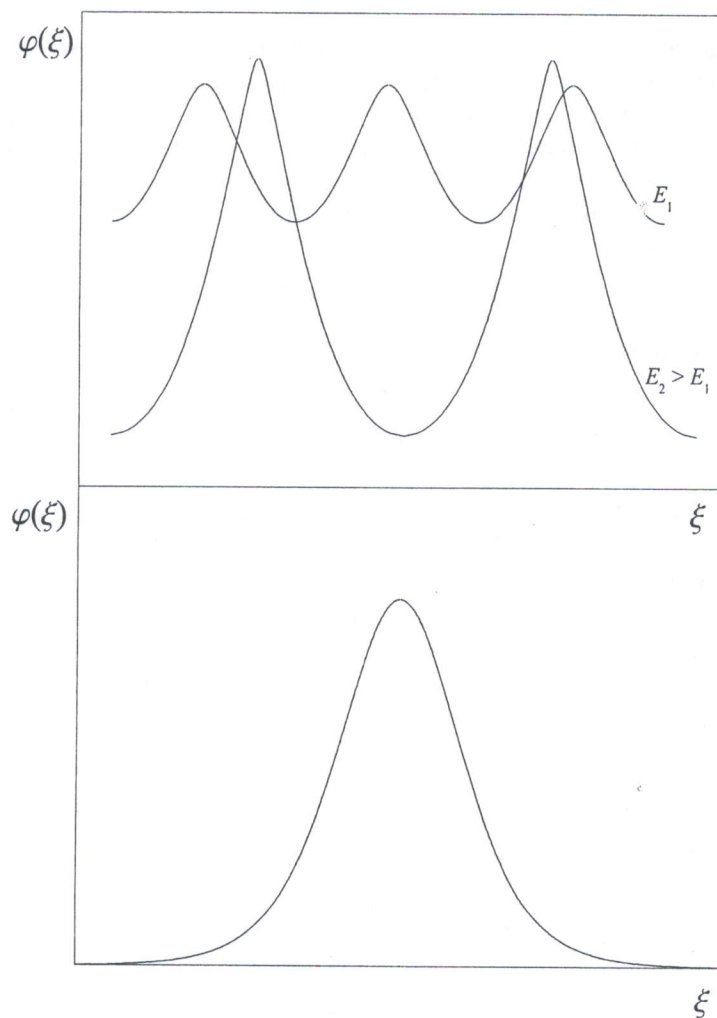


Рис. 2.14: Верхний график—схематическое изображение кноидальных волн. Нижний график—образование солитона при $E = E_2$.

$U(0) = -4\pi n_{e0} T_e (1 + a)$ и $U(\varphi_{\max}) = -4\pi n_{e0} T_e e^{a/2}$, соответственно. Если энергия частицы E мала ($E = E_1$), то она осциллирует и потенциал (смещение частицы) изменяется с координатой (время) таким образом, как это показано на Рис. 2.14. Такие периодические решения называются *кноидальными волнами*. Их структура существенно отличается от гармонических волн. По мере увеличения постоянной E период кноидальных волн возрастает. Если $E = E_2$, то частица бесконечно долго поднимается к точке, где $\varphi = 0$ и структура поля показана на Рис. 2.14. Это и есть *солитон* или уединенная волна.

2.24 Равновесие плазмы в высокочастотном поле

Как мы установили ранее, в неоднородном высокочастотном электромагнитном поле действуют постоянные, не зависящие от времени силы. Эти силы всегда стремятся вытолкнуть частицы плазмы (электроны) из области сильного поля в область более слабого поля. Наоборот, силы теплового давления стремятся выровнять концентрации электронов и распределить их в пространстве однородно. В результате в отсутствии движения плазмы ($\mathbf{v} = 0$) плотность электронов определяется из условия равенства этих сил (см. (2.196))

$$\nabla \ln n_e = -\frac{Ze^2}{4mT\omega^2} \nabla |\mathbf{E}|^2 \quad (2.270)$$

и определяется выражением

$$n_e = n_{e0} \exp \left[-\frac{Ze^2 |\mathbf{E}|^2}{4mT\omega^2} \right] = n_{e0} \exp \left(-\frac{\Phi_h}{T} \right), \quad (2.271)$$

где $T = ZT_e + T_i$, n_{e0} -концентрация электронов в той области плазмы, где отсутствует высокочастотное поле.

В высокочастотном поле линейная диэлектрическая проницаемость имеет известный вид (1.157). Нелинейная диэлектрическая проницаемость учитывает изменение концентрации электронов из-за поля. Величина n_e зависит от напряженности поля. Следовательно

$$\epsilon_{NL}(\omega) = 1 - \frac{4\pi n_{e0} e^2}{m\omega^2} \exp \left[-\frac{Ze^2 |\mathbf{E}|^2}{4mT\omega^2} \right]. \quad (2.272)$$

Подставив выражение (2.271) в уравнение (2.200) и, считая, что имеется только быстропеременная зависимость высокочастотного поля от времени, найдем

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \frac{4\pi n_{e0} e^2}{mc^2} \mathbf{E} \exp \left[-\frac{Ze^2 |\mathbf{E}|^2}{4mT\omega^2} \right]. \quad (2.273)$$

Задача состоит в том, чтобы исследовать решения нелинейного уравнения (2.273) без предположения о том, что показатель экспоненты Φ_h/T мал. Рассмотрим одномерное состояние. Будем считать, что $\mathbf{E} = (0, E(x), 0)$.

$$E''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} E(x) = \frac{4\pi n_{e0} e^2}{mc^2} E(x) \exp \left[-\frac{Ze^2 |E(x)|^2}{4mT\omega^2} \right]. \quad (2.274)$$

Введя новую переменную $\xi = \omega x/c$ и безразмерную напряженность поля $\mathcal{E}(\xi) = (e/2\omega) \sqrt{Z/mT} E(x)$, запишем уравнение в виде

$$\mathcal{E}''(\xi) + \mathcal{E}(\xi) = C \mathcal{E}(\xi) e^{-|\mathcal{E}(\xi)|^2}, \quad (2.275)$$

где $C = \omega_{pe}^2/\omega^2$. Комплексную функцию $\mathcal{E}(\xi)$ запишем в форме $Ae^{i\varphi}$, где A и φ -действительные функции. После дифференцирования и приравнивания действительных и мнимых частей, получим

$$A\varphi'' + 2A'\varphi' = 0, \quad A'' + A - A\varphi'^2 = CAe^{-A^2}. \quad (2.276)$$

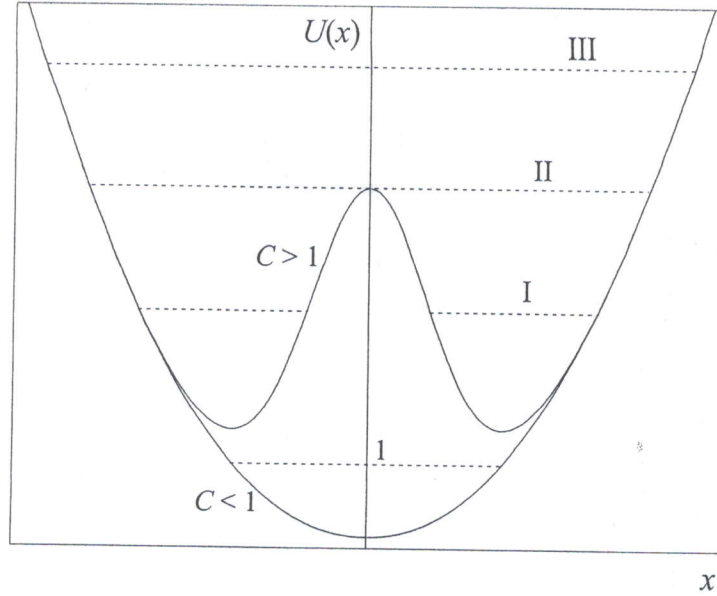


Рис. 2.15: Вид потенциала $U(x)$ при $C < 1$ и $C > 1$.

Из первого уравнения следует, что

$$A^2 \varphi' = \text{const} = B. \quad (2.277)$$

Если имеется точка, в которой либо A , либо φ' равны нулю, то $B = 0$, и задача сводится к одному уравнению

$$A'' + A = CAe^{-A^2}. \quad (2.278)$$

Аналитически уравнение решить можно только для $A < 1$, если использовать разложение $e^{-A^2} \simeq 1 - A^2$. Это будет соответствовать кубическому приближению в теории слабой нелинейности. Однако возможные виды решений можно изучить, не зная их явного вида, как мы это делали в §2.23.

Умножим уравнение на A' и запишем первый интеграл

$$A'^2 + A^2 + Ce^{-A^2} = \text{const} = D. \quad (2.279)$$

Этот интеграл соответствует постоянству давления в состоянии равновесия. Первое слагаемое — давление магнитного поля, второе — электрического, последнее — давление частиц. Плотность электронов при принятых обозначениях имеет вид $n_e(\xi) = n_{e0}e^{-A^2(\xi)}$.

Как и в предыдущем параграфе, характер решений можно исследовать с помощью механической аналогии. Если частице с единичной массой $m = 1$ сопоставить координату $x \rightarrow A$ и время $t \rightarrow \xi$, то первый интеграл есть не что иное, как закон сохранения энергии E_0

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E_0. \quad (2.280)$$

Характер движения частицы зависит от вида потенциала $U(x) = x^2 + Ce^{-x^2}$, где $C = \omega_{pe}^2/\omega^2$. Если $C < 1$, то частота поля выше критической и функция $U(x)$ имеет один минимум (см. Рис. 2.15). Если $C > 1$, то частота поля ниже критической и имеются три экстремума — один максимум и два минимума.

При $C < 1$ потенциал близок к квадратичному $U(x) \simeq x^2$, движение частицы финитное и периодическое. Имеется стоячая волна, которая слабо модулирует плотность плазмы.

Если $C > 1$ и $E_0 < U_{\min} = 1 + \ln C$, то уравнение не имеет решений.

Если $C > 1$ и $E_0 > U_{\min}$, то имеются два решения — одно при $x > 0$ и одно при $x < 0$ (область I на Рис. 2.15). Для $x > 0$ ($A(\xi) > 0$) решение показано на Рис. 2.16 в соответствии с принятой

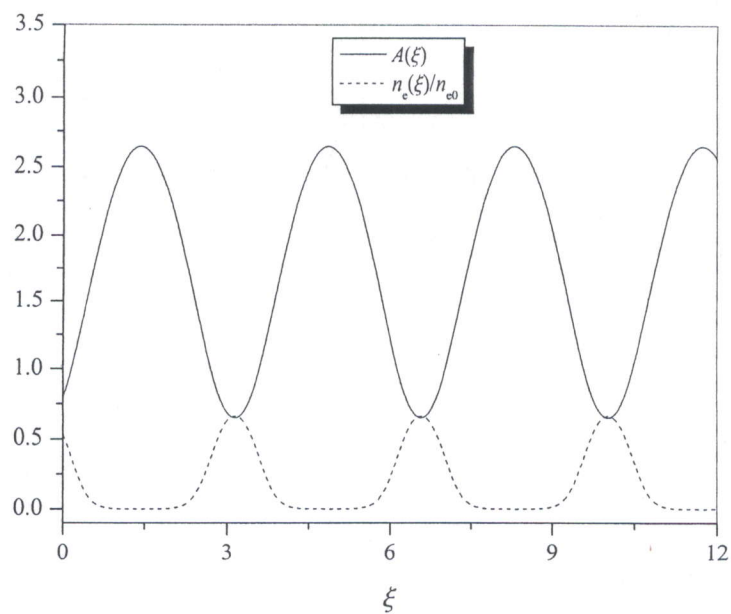


Рис. 2.16: Электрическое поле $A(\xi)$ и плотность электронов $n_e(\xi)/n_{e0}$ при $C = 10$, $E_0 = 7$ ($U_{\min} \simeq 3.3$).

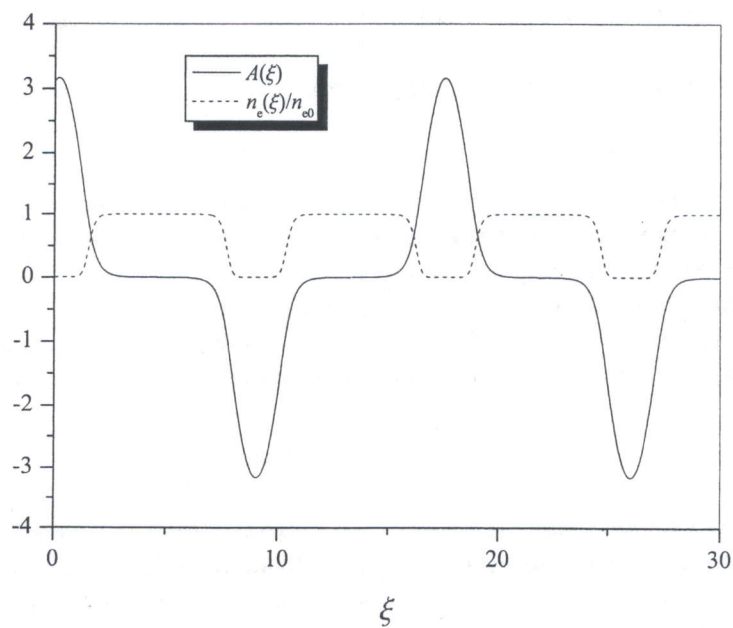


Рис. 2.17: Электрическое поле $A(\xi)$ и плотность электронов $n_e(\xi)/n_{e0}$ при $E_0 = C = 10$.

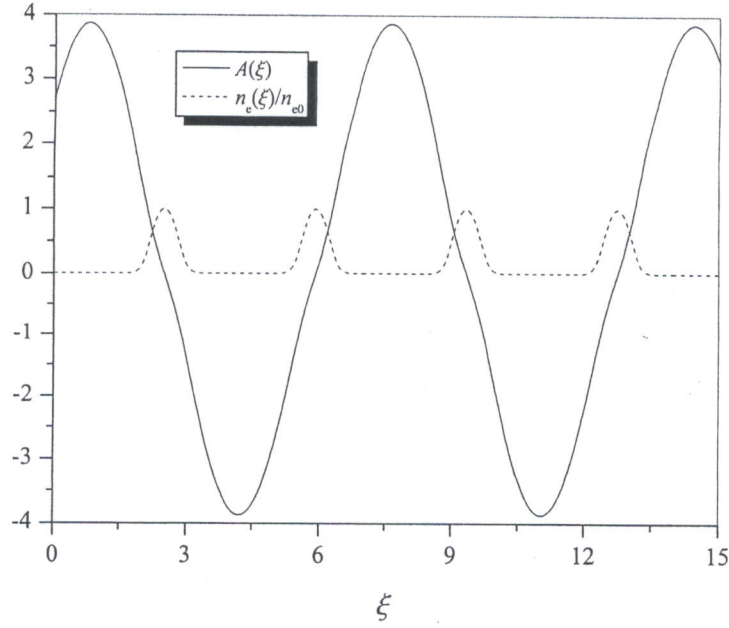


Рис. 2.18: Электрическое поле $A(\xi)$ и плотность электронов $n_e(\xi)/n_{e0}$ при $C = 10$, $E_0 = 15$.

заменой $x \rightarrow A$ и $t \rightarrow \xi$. Для $x < 0$ ($A(\xi) < 0$) поле сдвинуто во времени на половину периода по отношению к случаю $x > 0$.

Если $C > 1$ и $E_0 = U_{\max} = C$, то в пространстве имеется локализованная область, в которой амплитуда поля максимальна, а плотность плазмы минимальная (область II на Рис. 2.15). Условие $E_0 = C$ соответствует равенству давления поля в максимуме $E_0^2/4\pi$ давлению частиц на бесконечности $n_\infty T$ (Рис. 2.17).

Если $C > 1$ и $E_0 > C$ (область III на Рис. 2.15), то поле в пространстве изменяется по периодическому закону и есть точки, в которых оно обращается в ноль (Рис. 2.18). Плазма разбивается на слои, между которыми имеется поле.

Равновесие плазмы в высокочастотном поле экспериментально исследовалось в лазерной плазме. Падающая из вакуума волна в окрестности точки отражения ($C = 1$) отжимала плазму и создавала резкий скачок концентрации.

2.25 Самофокусировка электромагнитных волн

Рассмотрим распространение в плазме электромагнитного пучка, у которого интенсивность излучения в центре максимальна и убывает к краям. Действующие в поперечном по отношению к распространению пучка направлении пондеромоторные силы вытесняют плазму. Образуется канал с пониженной плотностью. В этом канале сам пучок изменяет свою форму и возможно явление сужения пучка, называемое *самофокусировкой*.

Для простоты будем считать, что $\Phi_h < T$ и в формуле (2.272) можно разложить экспоненту

$$\epsilon_{NL}(\omega) = 1 - \frac{4\pi n_{e0} e^2}{m\omega^2} \left(1 - \frac{Ze^2 E^2}{4mT\omega^2} \right) = \epsilon_L(\omega) + \frac{1}{2} \epsilon^{(3)}(\omega) E^2 \quad (2.281)$$

где

$$\epsilon_L(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \epsilon^{(3)}(\omega) = \frac{Ze^2 \omega_{pe}^2}{2mT\omega^4}, \quad (2.282)$$

поле E принято действительным.

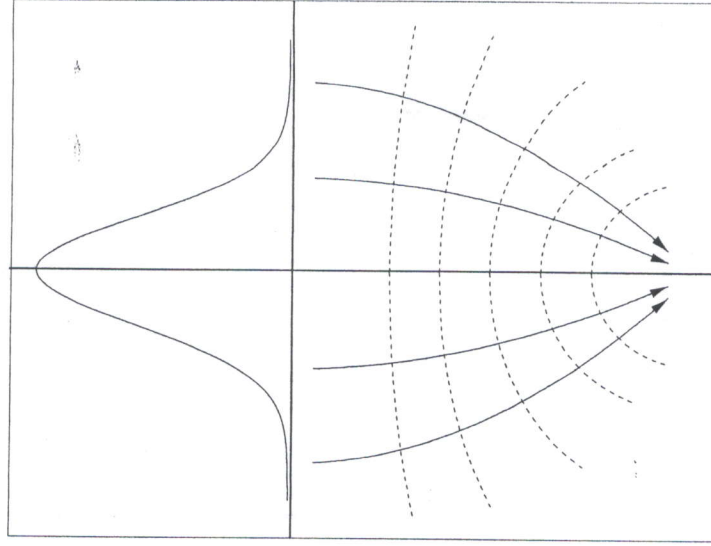


Рис. 2.19: Схематическое изображение самофокусировки волны.

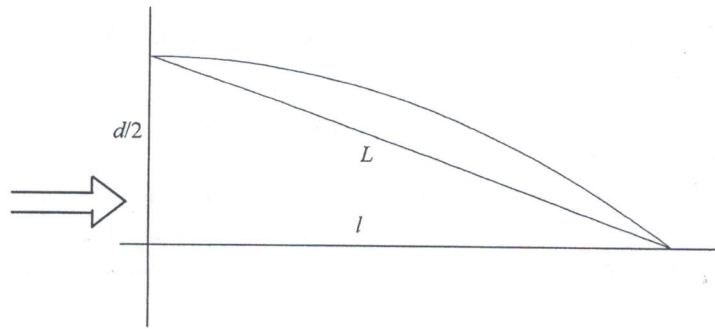


Рис. 2.20: Схематическое изображение образования фокуса.

Используем это выражение для нелинейной диэлектрической проницаемости в дисперсионном уравнении для поперечных волн (1.44) и запишем фазовую скорость

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{NL}(\omega)}} \simeq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_L(\omega)}} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{\epsilon^{(3)}(\omega)}{\epsilon_L(\omega)} E^2 \right]. \quad (2.283)$$

Видно, что фазовая скорость волны тем меньше, чем больше амплитуда волны. Если представить пучок как совокупность волн с различными амплитудами, то ясно, что первоначально плоский фронт по мере распространения начнет выгибаться. Центральный участок пучка будет отставать от краевых участков. При этом лучи, перпендикулярные к волновому фронту, начнут сходиться и пучок будет фокусироваться (Рис. 2.19).

Легко оценить расстояние, на котором лучи сойдутся в точку и образуется фокус (Рис. 2.20). Рассмотрим два луча—один в центре и один на краю пучка. Лучу в центре соответствует длина волны λ_1 и фазовая скорость v_1 , а лучу на краю—соответственно λ_0 и v_0 . Если заменить для оценки изогнутую линию на прямую (Рис. 2.20), то найдем $L = \sqrt{l^2 + (d/2)^2}$, где l —расстояние от входа пучка в плазму до фокуса, d —диаметр пучка. Чтобы лучи пришли в фокус одновременно, нужно, чтобы их длины были пропорциональны скоростям

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 + \frac{d^2}{4}} = \frac{v_0}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{(3)}(\omega)}{\epsilon_L(\omega)} E^2}. \quad (2.284)$$

Отсюда найдем длину самофокусировки

$$l_{\text{sf}} = d \sqrt{\frac{\varepsilon_L(\omega)}{2\varepsilon^{(3)}(\omega)E^2}}. \quad (2.285)$$

Самофокусировке пучка препятствует дифракция-расходимость пучка, связанная с его поперечным размером. Длина, на которой пучок уширится в два раза $l_2 \simeq d^2/\lambda$. Если $l_2 \simeq l_{\text{sf}}$, то пучок, распространяясь в плазме, не изменяет своего поперечного размера. Условием самофокусировки является неравенство $l_{\text{sf}} < l_2$ или

$$l_{\text{sf}} \simeq \frac{d^2}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{P(\omega)/P_c(\omega) - 1}}, \quad (2.286)$$

где

$$P(\omega) = \frac{E^2}{8\pi} \frac{\pi d^2}{4} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_L(\omega)}}, \quad P_c(\omega) = \frac{c\sqrt{\varepsilon_L(\omega)}\lambda^2}{64\varepsilon^{(3)}(\omega)}. \quad (2.287)$$

Здесь $P(\omega)$ —полный поток энергии в пучке (мощность), $P_c(\omega)$ —критическая мощность, которую надо превзойти для того, чтобы возникла самофокусировка.

Приложение А

Тензоры

Тензор второго ранга называется симметричным, если $T_{ij} = T_{ji}$; антисимметричным, если $T_{ij} = -T_{ji}$. Тензор называется эрмитовским (самосопряженным), если $T_{ij} = T_{ji}^*$, антиэрмитовским-если $T_{ij} = -T_{ji}^*$.

Каждый тензор можно разбить на симметричную и антисимметричную части

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) = S_{ij} + A_{ij}. \quad (\text{A.1})$$

Каждый тензор можно разбить на эрмитовскую и антиэрмитовскую части

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}^*) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}^*) = T_{ij}^H + T_{ij}^A. \quad (\text{A.2})$$

Величина $\text{Tr}T = T_{ii}$ называется следом (или шпуром) тензора.

Обратным по отношению к тензору T_{ij} называется такой тензор T_{li}^{-1} , который будучи свернут с исходным тензором дает единичный тензор

$$T_{li}^{-1} T_{ij} = \delta_{lj}. \quad (\text{A.3})$$

Пусть тензор имеет вид:

$$T_{ij} = a\delta_{ij} + b \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (\text{A.4})$$

Найдем обратный ему тензор. Обратный тензор содержит те же тензорные комбинации, что и исходный

$$T_{li}^{-1} = A\delta_{li} + B \frac{k_l k_i}{k^2}. \quad (\text{A.5})$$

Нужно выразить величины A и B через a и b . Проведем свертку тензоров и используем определение (A.3)

$$\begin{aligned} T_{li}^{-1} T_{ij} &= Aa\delta_{li}\delta_{ij} + Ab\delta_{li} \frac{k_i k_j}{k^2} + aB\delta_{ij} \frac{k_l k_i}{k^2} + Bb \frac{k_i k_j k_l k_i}{k^4} \\ &= Aa\delta_{lj} + [Ab + B(a+b)] \frac{k_l k_j}{k^2} \equiv \delta_{lj}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = -\frac{b}{a(a+b)}, \quad T_{li}^{-1} = \frac{1}{a} \left(\delta_{li} - \frac{b}{a+b} \frac{k_l k_i}{k^2} \right). \quad (\text{A.7})$$

Иногда используют другую форму записи

$$T_{li}^{-1} = \frac{1}{a} \left(\delta_{li} - \frac{k_l k_i}{k^2} \right) + \frac{1}{a+b} \frac{k_l k_i}{k^2}. \quad (\text{A.8})$$

Приложение В

Случайные функции

Теория случайных функций имеет дело с функциями, изменение которых не подчиняется точным математическим выражениям, а происходит случайным образом. Основным понятием в теории случайных функций является понятие *реализации* (см. Рис. В.1). Предполагается, что есть возможность иметь множество реализаций (*ансамбль реализаций*). Поскольку в каждой реализации функции различаются, то говорить о точном задании функции при данном значении аргумента нельзя, но можно говорить об усредненных значениях. Простейшая процедура нахождения средних значений — усреднение по ансамблю реализаций. Если аргументом является время, то среднее значение функции $\varphi(t)$ в данный момент есть (см. Рис. В.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_n \varphi^{(n)}(t) = \bar{\varphi}(t) = \langle \varphi(t) \rangle. \quad (\text{В.1})$$

Среднее значение не достаточно для полной характеристики этой функции. На Рис. В.2 показаны две случайные функции, имеющие одинаковое среднее значение, но существенно отличающиеся друг от друга. Наиболее просто различать такие функции с помощью *автокорреляционной* (или просто *корреляционной*) функции $\Phi(t_1, t_2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_n [\varphi^{(n)}(t_1) - \bar{\varphi}(t_1)] [\varphi^{(n)}(t_2) - \bar{\varphi}(t_2)] = \Phi(t_1, t_2), \quad (\text{В.2})$$

где $\varphi^{(n)}(t) - \bar{\varphi}(t) = \delta\varphi^{(n)}(t)$ — отклонение функции от среднего значения в n -ой реализации. При $t_1 = t_2$ корреляционная функция определяет *средне-квадратичное* отклонение. В общем случае корреляционная функция характеризует скорость, с которой изменяется значение случайной функции.

Если $\bar{\varphi}(t) = \text{const}$, $\langle \delta\varphi^2 \rangle = \text{const}$ и другие средние характеристики случайной функции не зависят от времени, то функцию называют *стационарной*. Для стационарной случайной функции усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по времени

$$\bar{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt. \quad (\text{В.3})$$

Это утверждение можно понять с помощью Рис. В.3. Беря значения функций в разные моменты времени, наберем тот же набор значений, что и для данного момента времени, но в разных реализациях. Для стационарной случайной функции корреляционная функция зависит только от разности времен t_1 и t_2

$$\Phi(t_1, t_2) \equiv \Phi(t_1 - t_2) = \Phi(\tau). \quad (\text{В.4})$$

Это связано с тем, что ни один момент времени не выделен по отношению к другому моменту и поэтому Φ не может зависеть от t_1 и t_2 отдельно. Очевидно, что $\Phi(-\tau) = \Phi(\tau)$. Действительно:

$$\langle \varphi(t)\varphi(t+\tau) \rangle = \Phi(-\tau) = \langle \varphi(t+\tau)\varphi(t) \rangle = \Phi(\tau). \quad (\text{В.5})$$

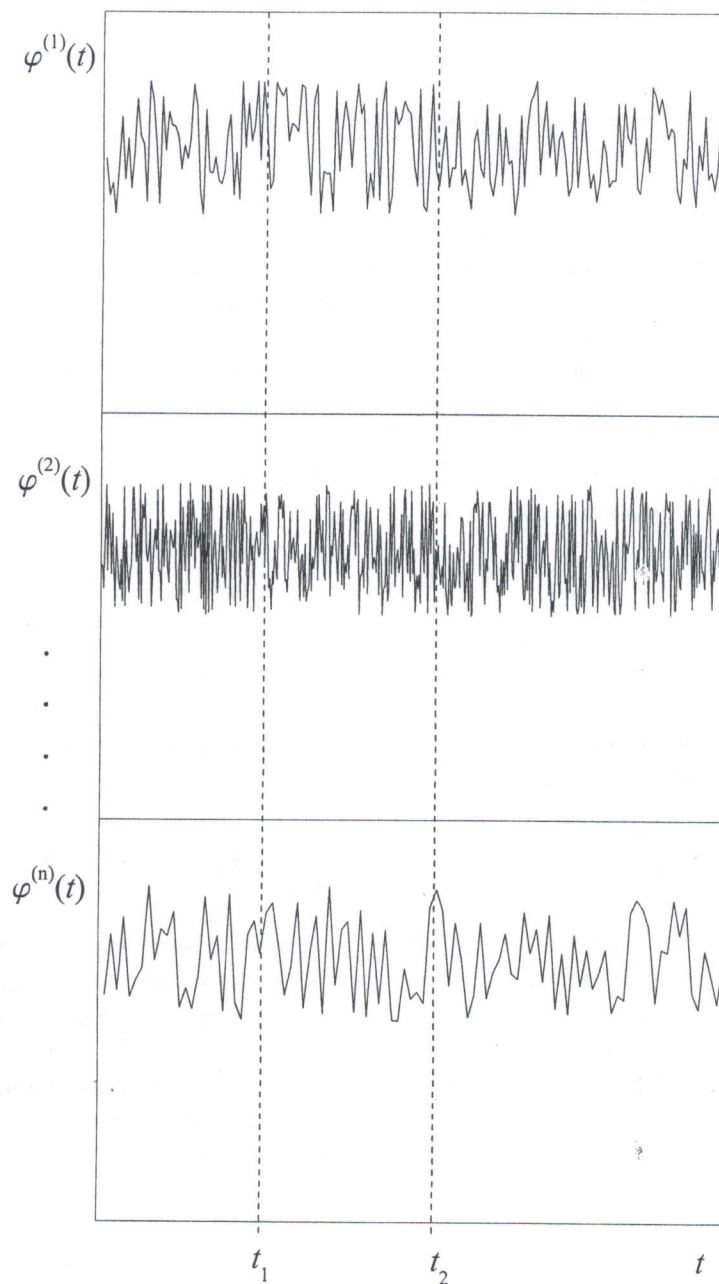


Рис. В.1: Случайная функция $\varphi(t)$ в различных реализациях.

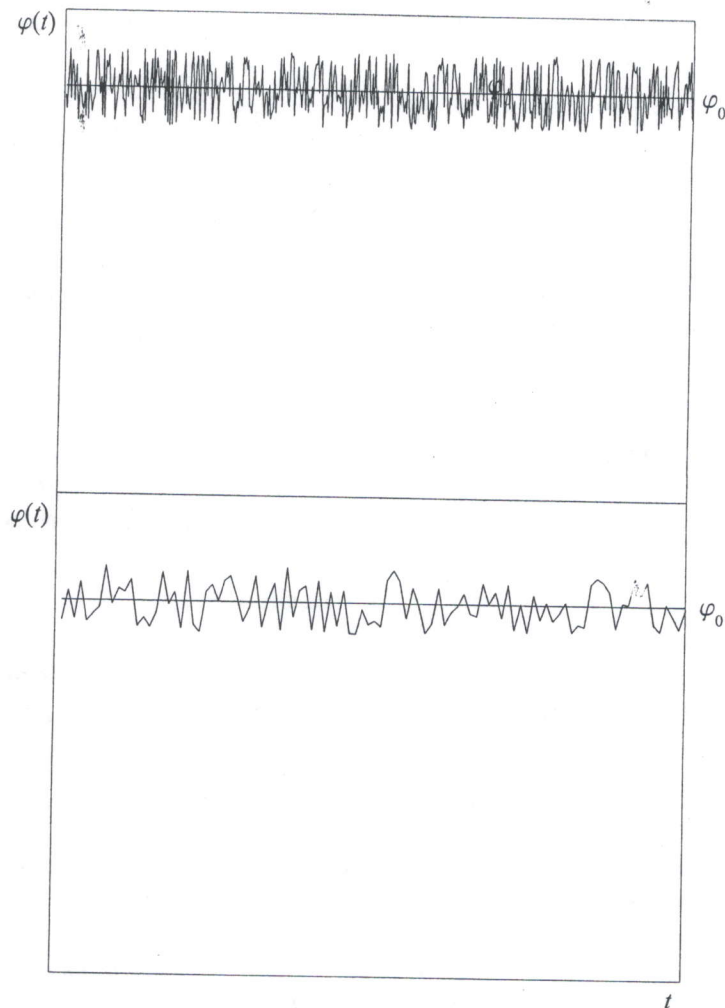


Рис. В.2: Две случайные функции имеющие одинаковое среднее значение.

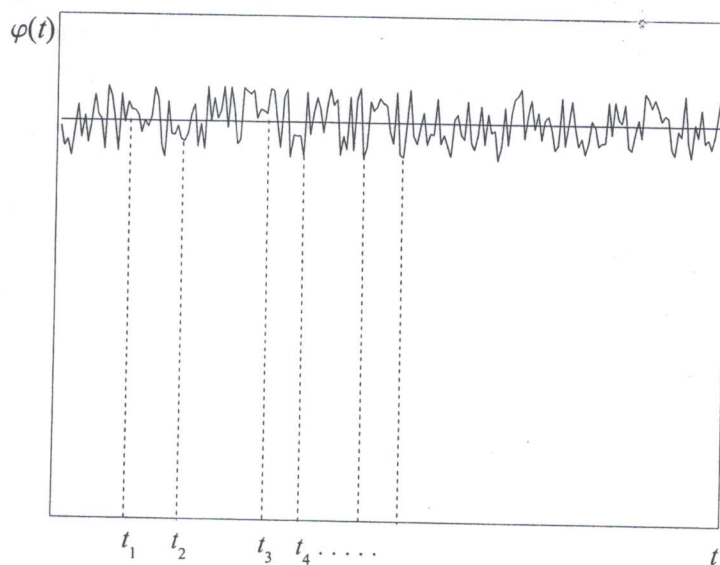


Рис. В.3:

Для стационарных случайных функций имеется важное соотношение для усреднения Фурье-компонент. Согласно определению

$$\begin{aligned}\langle \delta\varphi(t)\delta\varphi(t+\tau) \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \delta\varphi(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega'(t+\tau)} \delta\varphi(\omega') \right\rangle \\ &= \Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i\omega'\tau} \Phi(\omega').\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Для того, чтобы это равенство имело место, нужно выбрать в качестве среднего от Фурье-компонент случайной функции соотношение

$$\langle \delta\varphi(\omega)\delta\varphi(\omega') \rangle = \Phi(\omega')\delta(\omega' + \omega). \quad (\text{B.7})$$

Для спектральной плотности корреляционной функции $\Phi(\omega)$ часто используют обозначение $\langle \delta\varphi^2 \rangle_{\omega}$. Из условия $\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$ следует, что $\Phi(-\omega) = \Phi(\omega)$. Согласно определению средне-квадратичное значение $\langle \delta\varphi^2 \rangle$ выражается через $\Phi(\omega)$ с помощью простого соотношения

$$\langle \delta\varphi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Phi(\omega). \quad (\text{B.8})$$

Для стационарных случайных функций часто говорят еще про усреднение по случайным фазам. Подразумевается под этим следующее. Случайная функция для n -ой реализации разлагается в интеграл Фурье

$$\varphi^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \varphi^{(n)}(\omega). \quad (\text{B.9})$$

Здесь $\varphi^{(n)}(\omega) = a^{(n)}(\omega)e^{i\psi_n(\omega)}$ — комплексная амплитуда, $a^{(n)}(\omega)$ — действительная положительная величина, $\psi_n(\omega)$ — начальная фаза. Для каждой реализации при разложении возникает свой набор значений $a^{(n)}(\omega)$ и $\psi_n(\omega)$. Но значения $a^{(n)}(\omega)$ мало изменяются от реализации к реализации и величина $\langle a(\omega) \rangle$ называется спектром случайной функции. Что касается фазы $\psi_n(\omega)$, то предполагается, что эти значения могут иметь произвольные равновероятные значения в интервале от 0 до 2π (*гипотеза о хаотических фазах*). Поэтому реализации отличаются друг от друга набором начальных фаз (начальных условий) и усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по случайным фазам.

Если средние характеристики случайной функции от координат не зависят от положения точки, где они вычислены, то функция называется *однородной*. Для нее имеет место соотношение, подобное (B.7).

$$\langle \delta\varphi(\mathbf{k})\delta\varphi(\mathbf{k}') \rangle = \langle \delta\varphi^2 \rangle_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (\text{B.10})$$

Литература

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*, 10th edn. (Dover, New York 1972).
- [2] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, P. S. Pershan, *Phys. Rev.* **127**, 1918 (1962).
- [3] В. Е. Захаров, *ПМТФ* 4, 25 (1965).