АСТРОФИЗИКА

ТОМ 23 ДЕКАБРЬ, 1985 ВЫПУСК 3

УДК: 52:537.84

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ ПОСТ-НЬЮТОНОВСКОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКЕ

Н. П. БОНДАРЕНКО

Поступила 21 января 1985
Принята к печати 2 августа 1985

Магнитогидродинамика включена в параметризованный пост-ньютоновский формализм. Получены уравнения движения, законы сохранения и условия равновесия идеальной вращающейся жидкости.

1. *Введение.* Рассмотрение фигур равновесия идеальной вращающейся жидкости в рамках параметризованного пост-ньютоновского (ППН) формализма с учетом электрических и магнитных сил представляет интерес в связи с тем, что эффекты, обусловленные этими силами, сравнимы с эффектами пост-ньютоновского приближения (ПНП). ПН гидродинамика наиболее детально была разработана и применена к исследованию фигур равновесия Чандрасекаром [1—5]. Гринберг [6] получил ПН магнитогидродинамику (МГД). Уилл [7—9] построил ППН формализм, зависящий от 10 параметров и охватывающий все метрические теории в данном приближении. В консервативных теориях количество параметров уменьшается до трех: β, γ, ξ. В общей теории относительности (ОТО) $\beta=\gamma=1$, а в скалярной теории Бранса—Дикке [10] $\gamma=(1+\omega)/(2+\omega)$, $\beta=1$, $\xi=0$.

Целью настоящей работы является включение магнитогидродинамики в ППН формализм и получение в этой теории условий равновесия идеальной вращающейся жидкости.

2. *Основные соотношения.* Из работ [6—8] следует, что метрика ППН формализма в консервативных теориях гравитации и при $\xi=0$ с учетом магнитного поля должна иметь вид

$$g_{00}=1-\frac{2U}{c^2}+\frac{1}{c^4}(2\beta U^2-4\Phi),$$

$$g_{0\alpha} = \frac{1}{c^3}\left[\frac{1}{2}(4\gamma+3)V_\alpha + \frac{1}{2}W_\alpha\right] \equiv \frac{1}{c^3}\overset{*}{P}_\alpha, \tag{1}$$

$$g_{\alpha\beta} = -\left(1+\frac{2\gamma U}{c^2}\right)\delta_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$$

и

$$g^{00} = 1 + \frac{2U}{c^2} + \frac{1}{c^4}(2\beta U^2 + 4\Phi),$$

$$g^{0\alpha} = \frac{1}{c^3}\overset{*}{P}_\alpha, \tag{2}$$

$$g^{\alpha\beta} = -\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\delta_{\alpha\beta},$$

где

$$U = G\int\limits_T \frac{\rho(x',t)}{|x-x'|}\,d\tau',$$

$$V_\alpha = G\int\limits_T \frac{\rho(x',t)\,v_\alpha(x')}{|x-x'|}\,d\tau',$$

$$W_\alpha = G\int\limits_T \frac{\rho(x',t)\,v_\beta(x')(x_\beta - x'_\beta)(x_\alpha - x'_\alpha)}{|x-x'|^3}\,d\tau', \tag{3}$$

$$\Phi = G\int\limits_T \frac{\rho(x',t)\,\varnothing(x',t)}{|x-x'|}\,d\tau',$$

$$\varnothing = \frac{1}{2}(\gamma+1)v^2 + \frac{1}{2}(3\gamma - 2\beta + 1)U + \frac{1}{2}\Pi + \frac{3}{2}\gamma\frac{P}{\rho} + \frac{H^2}{8\pi\rho}.$$

Здесь ρ — плотность жидкости, $v_\alpha = dx_\alpha/dt$ — трехскорость жидкости, P — изотропное давление, Π — внутренняя энергия, $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля.

Компоненты четырехскорости $u^i = dx^i/ds$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$, определяемые метрикой (1, 2), имеют вид

$$\begin{aligned} u^0 &= 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right), \\ u^\alpha &= \frac{v_\alpha}{c} + \frac{v_\alpha}{c^3}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3U\right), \end{aligned} \tag{4}$$

и

$$u_0 = 1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 - U\right),$$

$$u_\alpha = -\frac{v_\alpha}{c} + \frac{1}{c^3}\left[P^{*}_\alpha - (2\gamma+1)\,Uv_\alpha - \frac{1}{2}v^2 v_\alpha\right]. \qquad (5)$$

Тензор энергии—импульса идеальной жидкости с учетом электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей определяется по формуле

$$T_{i\nu} = (\rho c^2 + \rho\Pi + P)\,u_i u_\nu - Pg_{i\nu} - \frac{1}{4\pi}\left(F^k_i F_{k\nu} - \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{i\nu}\right), \qquad (6)$$

где $F_{i\nu}$ — тензор электромагнитного поля, для пост-ньютоновского приближения:

$$F_{\alpha 0} = \frac{1}{c}E_\alpha, \qquad F^{\alpha 0} = -\frac{1}{c}E_\alpha - \frac{1}{c^3}P^{*}_\beta H_{\alpha\beta},$$

$$F_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}, \qquad F^{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{4U}{c^2}\right)H_{\alpha\beta}, \qquad (7)$$

$$H_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta}H_\gamma,$$

где $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ — символ Леви-Чивитта.

Компоненты тензора энергии—импульса имеют вид:

$$T_{00} = \rho c^2 + \rho\,(v^2 + 2U + \Pi) + \frac{H^2}{8\pi},$$

$$T_{0\alpha} = -\rho v_\alpha c - \frac{\rho v_\alpha}{c}\left(\Pi + \frac{P}{\rho} + v^2 + 2\gamma U\right) + \frac{\rho}{c}P^{*}_\alpha - \frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{H})_\alpha,$$

$$T_{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + P\left(1 + \frac{2\gamma U}{c^2}\right)\delta_{\alpha\beta} + \frac{\rho v_\alpha v_\beta}{c^2}\left[\Pi + \frac{P}{\rho} + 2(2\gamma+1)\,U + v^2\right] -$$

$$- \frac{\rho}{c^2}(v_\alpha P^{*}_\beta + v_\beta P^{*}_\alpha) - \frac{1}{4\pi c^2}E^{*}_{\alpha\beta} - \frac{1}{4\pi}\left[1 - \frac{(6\gamma - 4)U}{c^2}\right]H^{*}_{\alpha\beta}, \qquad (8)$$

и

$$T^{00} = \rho c^2 + \rho\,(\Pi + v^2 + 2U) + \frac{H^2}{8\pi},$$

$$T^{0\alpha} = \rho v_\alpha c + \frac{\rho v_\alpha}{c^2}\left(\Pi + \frac{P}{\rho} + v^2 + 2\gamma U\right) + \frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\times\vec{H})_\alpha,$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(v^2 + 2U + \Pi + \frac{P}{\rho}\right)\right] +$$

$$+ P\left(1 - \frac{2\gamma U}{c^2}\right)\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4\pi c^2} E^{\bullet}_{\alpha\beta} - \frac{1}{4\pi}\left[1 - \frac{(10\gamma - 4)U}{c^2}\right] H^{\bullet}_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

Здесь использованы сокращения

$$E^{\bullet}_{\alpha\beta} = E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

$$H^{\bullet}_{\alpha\beta} = H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} H^2 \delta_{\alpha\beta}. \tag{11}$$

Символы Кристоффеля

$$\Gamma^k_{iy} = \frac{1}{2} g^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^y} + \frac{\partial g_{ym}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{iy}}{\partial x^m}\right), \tag{12}$$

вычисленные с необходимой точностью, имеют вид:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^3}\frac{\partial U}{\partial t},$$

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c^4}\left[2(\gamma + \beta) U \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - 2\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial P^{\bullet}_\alpha}{\partial t}\right],$$

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2c^3}\left[\frac{\partial P^{\bullet}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial P^{\bullet}_\beta}{\partial x_\alpha} - 2\gamma\frac{\partial U}{\partial t}\delta_{\alpha\beta}\right],$$

$$\Gamma^0_{\alpha 0} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha},$$

$$\Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{1}{c^3}\left[\gamma\frac{\partial U}{\partial t}\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}(4\gamma + 3)(V_{\alpha,\beta} - V_{\beta,\alpha})\right],$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\sigma} = \frac{\gamma}{c^2}\left[\frac{\partial U}{\partial x^\sigma}\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial U}{\partial x_\beta}\delta_{\alpha\sigma} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\delta_{\beta\sigma}\right]. \tag{13}$$

3. *Уравнения движения* получаем из закона сохранения тензора энергии-импульса

$$T^y_{i;y} = 0. \tag{14}$$

При $i=0$ из (14) следует условие неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho + \frac{\rho}{c^2}(\Pi + v^2 + 2U) + \frac{1}{c^2}\frac{H^2}{8\pi}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\rho v_\alpha\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\Pi+\frac{P}{\rho}+v^2+2U\right)+\frac{1}{4\pi c^2}(\vec{E}\times\vec{H})_\alpha\right\}+\right.$$

$$+\frac{1}{c^2}\left[(3\gamma-2)\rho\frac{\partial U}{\partial t}\right]+\frac{1}{c^2}\left[3(\gamma-1)\rho v_\alpha\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right]=0. \qquad (15)$$

Положиз $i=\alpha$ ($\alpha=1, 2, 3$), получим из (14) уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sigma v_\alpha+\frac{1}{4\pi c^2}(\vec{E}\times\vec{H})_\alpha\right]+\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\sigma v_\alpha v_\beta)-\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial E^*_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-$$

$$-\rho\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{c^2}\rho\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\left[(\gamma+1)v^2+(3\gamma-2\beta+1)U+\Pi+3\gamma\frac{P}{\rho}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[P\left(1+\frac{3\gamma-1}{c^2}U\right)\right]+\frac{1}{c^2}(5\gamma-1)\rho v_\alpha v_\beta\frac{\partial U}{\partial x_\beta}-$$

$$-\frac{\rho}{c^2}\left(2\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial P^*_\alpha}{\partial t}\right)+\frac{2\rho v_\beta}{c^2}\left[\gamma\frac{\partial U}{\partial t}\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}(2\gamma+1)(V_{\alpha,\beta}-V_{\beta,\alpha})\right]+$$

$$+\frac{1}{c^2}(3\gamma-1)\rho v_\alpha\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\left[1-\frac{(10\gamma-4)U}{c^2}\right]\frac{\partial H^*_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+$$

$$+\frac{\gamma+1}{4\pi c^2}\left(H_\alpha H_\beta\frac{\partial U}{\partial x_\beta}-H^2\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)=0, \qquad (16)$$

где

$$\sigma=\rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(v^2+2U+\Pi+\frac{P}{\rho}\right)\right]. \qquad (17)$$

Уравнение неразрывности (15) и уравнения движения (16) в отсутствие электрического и магнитного полей переходят в уравнения ППН формализма Уилла [7], при $\beta=\gamma=1$ переходят в уравнения МГД ПНП ОТО Гринберга [6], а при $\beta=\gamma=1$ и $\vec{E}=\vec{H}=0$ переходят в уравнения ПНП ОТО Чандрасекара [1].

4. *Законы сохранения.* Интегрируя уравнения (15) и (16) и используя результаты работ [1, 6, 8, 11, 16], после продолжительных вычислений получим следующие, необходимые нам в дальнейшем, сохраняющиеся величины:

1. Массу:

$$M=\int_T\rho^* d\tau,$$

где

$$\rho^* = \rho\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3\gamma U\right)\right]. \tag{18}$$

2. Импульс:

$$P_\alpha = \int\limits_T \pi_\alpha d\tau,$$

где

$$\pi_\alpha = \rho\left\{\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left[v^2 + (5\gamma + 1)U + \Pi + \frac{P}{\rho}\right]\right\}v_\alpha - P_\alpha^{\cdot}\right\} + \frac{1}{4\pi c^2}(\vec{E}\times\vec{H})_\alpha. \tag{19}$$

3. Угловой момент:

$$L_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\int\limits_T \pi_\alpha x_\beta d\tau. \tag{20}$$

4. Общую энергию:

$$\Xi = \int\limits_T \mathrm{E} d\tau,$$

где

$$\mathrm{E} = \rho\left\{\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}U + \Pi + \frac{1}{8\pi\rho}H^2 + \right.$$
$$+ \frac{1}{c^2}\left[\frac{5}{8}v^4 + \frac{5}{2}\gamma v^2 U - \frac{3\gamma + 2}{2}U^2 + (3\gamma - 1)U\Pi + \right.$$
$$\left. + v^2\left(\Pi + \frac{P}{\rho}\right) - \frac{1}{2}v_\alpha P_\alpha^{\cdot}\right\} + \frac{1}{8\pi c^2}[E^2 - (\gamma + 1)UH^2]. \tag{21}$$

5. $$I_1 = \int\limits_T \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{A}d\tau, \quad \vec{H} = \nabla\times\vec{A}. \tag{22}$$

6. $$I_2 = \int\limits_T \vec{H}\cdot\vec{v}^* d\tau,$$

где

$$\overset{*}{v}_\alpha = v_\alpha + \frac{v_\alpha}{c^2}\left[\frac{v^2}{2} + (2\gamma+1)U + \Pi + \frac{P}{\rho}\right] - \frac{P_\alpha^*}{c^2}. \quad (23)$$

5. *Условия равновесия*. Используя законы сохранения (18)—(23), составим функционал

$$T = \Xi + \vec{\Omega}\cdot\vec{L} + \lambda M + \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2, \quad (24)$$

где $\vec{\Omega}$, λ, α_1, α_2 — постоянные множители Лагранжа.

Варьирование производим по ρ, $\vec{v}$ и $\vec{A}$. При этом учитываем следующие соотношения:

$$\int_T \rho\delta U d\tau = \int_T U\delta\rho d\tau, \quad (25)$$

$$\int_T \rho\vec{v}\cdot\delta\vec{P}^* d\tau = \int_T \vec{v}\cdot\vec{P}^*\delta\rho d\tau + \int_T \rho\vec{P}^*\delta\vec{v} d\tau, \quad (26)$$

$$\int_T \rho\varnothing\delta U d\tau = \int_T \Phi\delta\rho d\tau, \quad (27)$$

$$\rho\delta\Pi = \frac{P}{\rho}\delta\rho, \quad (28)$$

а также условия равновесия классической магнитогидродинамики [12] в членах при $1/c^2$:

$$\frac{1}{2}v^2 - U + \Pi + \frac{P}{\rho} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\cdot\vec{v} + \lambda = 0, \quad (29)$$

$$\vec{v} + \vec{\Omega}\times\vec{r} + \frac{\alpha_2}{\rho}\vec{H} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{1}{4\pi}\nabla\times\vec{H} + 2\alpha_1\vec{H} + \alpha_2\nabla\times\vec{v} = 0 \quad (31)$$

и $\vec{E} = -\vec{v}\times\vec{H}$.

В силу независимости вариации $\delta\rho$, $\delta\vec{v}$, $\delta\vec{A}$, мы найдем, после продолжительных вычислений,

$$-\lambda = \frac{1}{2}v^2 - U + \Pi + \frac{P}{\rho} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\cdot\vec{v} +$$

$$+\frac{1}{c^2}\left\{\left[-\frac{1}{8}v^4 - \frac{2\gamma+1}{2}Uv^2 + \frac{9\gamma-4\beta-4}{2}U^2 - \right.\right.$$

$$-\left(\frac{1}{2}v^2+U\right)\left(\Pi+\frac{P}{\rho}\right)-2\Phi+\vec{v}\cdot\vec{P}^*-$$

$$-\frac{\alpha_2}{\rho}\vec{H}\cdot\left[\vec{v}\left(\Pi+\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+(2\gamma+1)U\right)-\vec{P}^*\right]\Big\}, \tag{32}$$

$$\vec{v}+\vec{\Omega}\times\vec{r}+\frac{\alpha_2}{\rho^*}\vec{H}=0, \tag{33}$$

$$\nabla\times\vec{H}+8\pi\alpha_1\vec{H}+4\pi\alpha_2\nabla\times\vec{v}^*+$$

$$+\frac{1}{c^2}\nabla\times\{[\vec{H}(\vec{\Omega}\times\vec{r}\cdot\vec{v})-(\vec{H}\cdot\vec{\Omega}\times\vec{r})\vec{v}]-(\gamma+1)U\vec{H}\}=0. \tag{34}$$

Соотношения (32)—(34) являются системой МГД условий равновесия идеальной вращающейся жидкости в ППН формализме и обобщают аналогичные условия равновесия в ППН формализме [11], в ПНП ОТО [13—15] и в МГД ПНП ОТО [16].

Киевский политехнический
институт

THE EQUATION OF MOTION AND THE EQUILIBRIUM CONDITIONS FOR IDEAL ROTATING LIQUID IN PARAMETRIZED POST-NEWTONIAN MAGNETOHYDRODYNAMICS

N. P. BONDARENKO

Magnetohydrodynamics is involved in the parametrized post-Newtonian formalism. The equations of motion are obtained as well as the conservation laws and the equilibrium condition of ideal rotating liquid.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 142, 1488, 1965.
2. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 147, 334, 1967.
3. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 148, 621, 1967.
4. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 167, 447, 1971.
5. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 167, 455, 1971.
6. *P. J. Greenberg*, Ap. J., 164, 589, 1971.
7. *C. M. Will*, Ap. J., 163, 611, 1971.
8. *C. M. Will*, Ap. J., 169, 125, 1971.

9. *К. М. Уилл*, В сб. «Общая теория относительности», ред. С. Хокинг, В. Израэль, Мир, М., 1983.
10. *C. Brans, R. H. Dicke*, Phys. Rev., 124, 925, 1961.
11. *Н. П. Бондаренко*, Астрофизика, 23, 409, 1985.
12. *J. Woltjer*, Proc. U. S. Nat. Sci., 44, 833, 1958.
13. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 164, 589, 1967.
14. *E. Krefetz*, Ap. J., 143, 1004, 1966.
15. *K. A. Pyragas*, N. P. *Bondarenko, O. V. Kravtsov*, Astrophys. Space Sci., 27, 437, 1974.
16. *N. P. Bondarenko, O. V. Kravtsov*, Astrophys. Space Sci., 32, 379, 1975.