А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 23 ДЕКАБРЬ, 1985 ВЫПУСК 3

УДК: 523—64

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ В ЗАДАЧАХ О ПЕРЕНОСЕ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛИНЕЙНО РАСШИРЯЮЩИХСЯ СРЕДАХ. II. РЕШЕНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СРЕД

С. И. ГРАЧЕВ

Поступила 5 февраля 1985
Принята к печати 2 июня 1985

Рассматривается перенос резонансного излучения в бесконечных и полубесконечных средах, расширяющихся изотропно или плоскопараллельно с постоянным по глубине безразмерным градиентом скорости γ. Предполагается полное перераспределение по частоте при рассеянии в сопутствующей системе координат. Показано, что при малых γ функция источников и интенсивность излучения выражаются через функции на 1 меньшего числа аргументов, являющихся комбинациями прежних аргументов (в число которых включаются и параметры γ и альбедо однократного рассеяния λ). Для нескольких основных задач эти функции найдены в явном виде для случаев доплеровского и степенного профилей коэффициента поглощения. При доплеровском коэффициенте поглощения в одномерной среде с $\lambda=1$ они выражаются через элементарные или известные специальные функции. Показано, что расширение среды может приводить к образованию узких (с шириной, меньшей тепловой) интенсивных компонентов профилей спектральных линий.

1. *Введение.* В первой части настоящей работы [1] были получены автомодельные представления основных функций, характеризующих элементарный перенос возбуждения в средах, расширяющихся изотропно или плоскопараллельно с постоянным по глубине безразмерным градиентом скорости γ. Используя эти результаты, мы найдем в настоящей части работы автомодельные представления решений основных задач о переносе в бесконечных и полубесконечных расширяющихся средах. Именно: будет показано, что в пределе малых γ функция источников, зависящая от трех аргументов — оптической глубины τ, альбедо однократного рассеяния λ и градиента скорости γ, выражается через функцию двух аргументов:

$$S(\tau, \lambda, \gamma) \doteq C(\lambda, \gamma)\, s(t, \sigma), \tag{1}$$

где

$$\sigma = (1-\lambda)/\pi A\lambda\gamma, \quad t = \tau/\tau_c(\gamma), \tag{2}$$

A — нормировочная постоянная профиля коэффициента поглощения. Здесь и далее мы используем те же обозначения, что и в части I. Для интенсивности излучения, зависящей еще от угла $\arccos\mu$ с осью τ и частоты x, получается аналогичное представление:

$$I(\mu, \tau, x, \lambda, \gamma) \doteq C(\lambda, \gamma)\, i(\mu, T, z, \sigma), \tag{3}$$

где

$$T = \tau/\tau_c(\gamma\chi(\mu)), \quad z = \frac{x \pm x_0(\gamma\chi(\mu))}{\gamma\chi(\mu)\tau_c(\gamma\chi(\mu))}. \tag{4}$$

Здесь $\gamma\chi(\mu)$ — градиент скорости в заданном направлении:

$$\chi(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{изотропное расширение,} \\ \mu^2, & \text{плоскопараллельное расширение.} \end{cases} \tag{5}$$

Зависимость характерного масштаба τ_c и характерной частоты x_0 от γ определяется видом профиля коэффициента поглощения $\alpha(x)$:

$$\tau_c(\gamma) = \begin{cases} 1/2\gamma\sqrt{\ln\tau_c(\gamma)}, \\ \left(\dfrac{\alpha_0}{x-1}\right)^{1/(x-1)} \gamma^{-x/(x-1)}, \end{cases} \quad x_0(\gamma) = \begin{cases} \sqrt{\ln\tau_c(\gamma)}, & D \\ 0, & C \end{cases} \tag{6}$$

где D и C соответствуют доплеровскому $(\alpha(x) = e^{-x^2})$ и степенному $(\alpha(x) \sim \alpha_0|x|^{-x})$ профилям.

Согласно (1) и (3) имеет место подобие решений, которое тем точнее, чем меньше γ. Знак равенства в (1) и (3) означает, что функции $s(t, \sigma)$ и $i(\mu, T, z, \sigma)$ являются предельными при $\gamma \to 0$ и фиксированных t, T, z и σ. Мы называем эти функции автомодельными функцией источников и интенсивностью излучения, а переменные t, T, z и σ — автомодельными переменными. Ранее, рассматривая случай $\lambda = 1$, мы фактически нашли асимптотики некоторых автомодельных функций источников при $t \gg 1$ [2—4]. Ниже будут найдены полные автомодельные решения ряда задач (в том числе и при $\lambda \neq 1$). При $t \ll 1$ они переходят в автомодельные решения для неподвижной среды ($\gamma = 0$), приведенные в книге В. В. Иванова [5].

2. *Основные соотношения.* В этом разделе мы не выписываем все аргументы функции источников и интенсивности излучения, а именно: опускаем зависимость от параметров λ и γ. При ссылках на формулы первой части [1] перед номером формулы будем ставить цифру I. Основное интегральное уравнение для функции источников имеет вид (см. часть I)

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int\limits_{a}^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \gamma)\, S(\tau')\, d\tau', \tag{7}$$

где $a = -\infty$ и 0 для бесконечных и полубесконечных сред соответственно. Для интенсивности излучения имеем

$$I(\mu, \tau, x) = \int\limits_{a^{\pm}}^{\tau} S(\tau')\, P(x - \gamma\chi(\mu)\tau'/\mu,\ x - \gamma\chi(\mu)\tau/\mu,\ \gamma\chi(\mu))\, d\tau'/\mu, \tag{8}$$

где $P(x_l', x_l, \gamma\chi(\mu))/|\mu|$ — монохроматическая вероятность выхода (см. (I.9)), $a^- = +\infty$ берется при $\mu < 0$ и $a^+ = a$ берется при $\mu > 0$. Введем следующие обозначения:

$$I(\mu, +\infty, x) = I(\mu, x), \quad I(-\mu, 0, x) = J(\mu, x), \ \mu > 0. \tag{9}$$

Далее мы выпишем решения нескольких основных задач для бесконечных и полубесконечных сред.

а) Бесконечные среды ($a = -\infty$). Здесь мы ищем интенсивность излучения только при $\mu > 0$, поскольку при $S_0(\tau) = S_0(-\tau)$ имеем (по симметрии) $I(\mu, \tau, x) = I(-\mu, -\tau, x)$.

В лапласовских образах решение уравнения (7) при $a = -\infty$ и интенсивность излучения (9) имеют вид

$$\bar{\bar{S}}(p) = \frac{\bar{\bar{S}}_0(p)}{1 - \lambda U(p, \gamma)}, \quad \bar{I}(\mu, p) = \bar{\bar{S}}(p\gamma\chi(\mu)/\mu)\, W(p, \gamma\chi(\mu)), \tag{10}$$

где $2U(p, \gamma)$ и $W(p, \gamma)$ — двусторонние преобразования Лапласа ядра и монохроматической вероятности ухода на бесконечность (см. часть I). В дальнейшем две черты и одна черта над знаком функции означают соответственно двустороннее и одностороннее преобразования Лапласа, p — параметр преобразования.

Пусть на уровне $\tau = 0$ расположен изотропный источник излучения в частотах линии. Обозначим функцию источников в этой задаче через $G_\infty(\tau)$, а интенсивность излучения — через $I_\infty(\mu, \tau, x)$. Они определяются решением уравнения (7) при $S_0(\tau) = \delta(\tau)$. Из (10) при $p =$ для них вытекает следующая нормировка:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\infty(\tau)\, d\tau = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}}, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_\infty(\mu, x)\, dx = \frac{1}{A\mu}\frac{\beta^1(\gamma\chi(\mu))}{1 - \tilde{\lambda}}, \tag{11}$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda[1 - \beta(\gamma)]$,

$$\beta^1(\gamma) = A\gamma\,(1 - e^{-1/A\gamma}), \qquad \beta(\gamma) = \int\limits_0^1 \beta^1(\gamma\chi(\mu))\,d\mu. \tag{12}$$

Функция $G_\infty(\tau - \tau')$ есть, очевидно, функция Грина уравнения (7) для бесконечной среды.

Пусть теперь на уровне $\tau = 0$ расположен изотропный источник излучения в континууме. Учтя первое рассеяние, получаем в этой задаче $S_0(\tau) = \lambda L(\tau, \gamma)/2$, и функцию источников можно представить в виде

$$S(\tau) = \frac{\lambda\beta(\gamma)}{2(1-\tilde{\lambda})} + S_c(\tau), \tag{13}$$

причем

$$\overline{S}_c(p) = \frac{\lambda}{2p}[\overline{K}(-p, \gamma) - \overline{K}(p, \gamma)]. \tag{14}$$

б) Полубесконечные среды $(a = 0)$. Вместо интенсивности $J(\mu, x)$ излучения, выходящего через границу $\tau = 0$, удобно ввести

$$M^\pm(\mu, x) = J(\mu, x)\exp\left[\pm\frac{1}{\gamma\chi(\mu)}\int\limits_{\pm x}^{\infty} \alpha(x')\,dx'\right]. \tag{15}$$

Из (8) получаем, что

$$\overline{\overline{I}}(\mu, p) = \frac{1}{\mu}\overline{S}(p\gamma\chi(\mu)/\mu)\,W(p, \gamma\chi(\mu)), \tag{16}$$

$$\overline{\overline{M}}{}^\pm(\mu, p) = \frac{1}{\mu}\overline{S}(-p\gamma\chi(\mu)/\mu)\,W(\mp p, \mp\gamma\chi(\mu)), \tag{17}$$

где $\mu > 0$, причем в (15) и (17), а также далее в (31) и (32) берутся либо все верхние, либо все нижние знаки.

Далее мы рассмотрим две задачи. Первая—об изотропном источнике излучения в частотах линии, расположенном на границе $\tau = 0$. В этой задаче $S_0(\tau) = \delta(\tau)$, и для функции источников $G(\tau)$ методом Винера—Хопфа получаем (как и в случае неподвижной среды)

$$\overline{G}(p) = H(1/p) = \frac{1}{H(-1/p)[1 - \lambda U(p, \gamma)]}, \tag{18}$$

где

$$\ln H(1/p) = -\frac{p}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln[1-\lambda V(u,\gamma)]}{u^2+p^2}\,du, \qquad \operatorname{Re} p > 0. \tag{19}$$

Здесь $V(u, \gamma) = U(iu, \gamma)$ — косинус-преобразование ядра. Из (18) и (19) при $p = 0$ следует нормировка:

$$\int\limits_0^\infty G(\tau)\,d\tau = H(\infty) = 1/\sqrt{1-\tilde{\lambda}}. \tag{20}$$

Известно [6], что функция Грина $G(\tau, \tau')$ уравнения (7) (при $a=0$) целиком определяется через свое граничное значение $G(\tau) = G(\tau, 0) = G(0, \tau)$. Заметим также, что интенсивности выходящего излучения в рассматриваемой задаче являются аналогами φ- и ψ- функций Амбарцумяна: $\varphi(\mu, x) = AJ(\mu, x)$, $\psi(\mu, x) = AI(\mu, x)$. При этом следует иметь в виду, что расширяющаяся полубесконечная среда имеет конечную реальную оптическую толщину, равную $1/2A\gamma$ вдоль оси τ.

Во второй задаче источники в линии считаются равномерно распределенными по глубине: $S_0(\tau) = \sqrt{1-\tilde{\lambda}}$. Обозначим функцию источников в этой задаче через $S_*(\tau)$. Известно [7], что $S_*(0) = 1$. Аналогично случаю неподвижной среды имеем

$$S_*(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}} - \int\limits_\tau^\infty G(\tau')\,d\tau', \quad \tau > 0. \tag{21}$$

3. *Автомодельные представления основных соотношений.* Переход в (8) к автомодельным функциям и переменным согласно (1)—(4) дает

$$i(\mu, T, z, \sigma) = \frac{1}{\mu}\int\limits_{a^\pm}^{T} s(y\rho(\mu), \sigma)\, p(z - y/\mu, z - T/\mu)\,dy, \tag{22}$$

$$\rho(\mu) = \tau_c(\gamma\chi(\mu))/\tau_c(\gamma), \tag{23}$$

где функция $p(y', y)$ определена в части I (формулы (22)—(23)). Введем следующие обозначения:

$$i(\mu, +\infty, z, \sigma) = i(\mu, z, \sigma), \quad j(-\mu, 0, z, \sigma) = j(\mu, z, \sigma), \quad \mu > 0$$

для автомодельных интенсивностей излучения, выходящего из полупространства через «границы» $\tau = +\infty$ и $\tau = 0$ соответственно.

а) Бесконечные среды. Применяя к обеим частям (22) двустороннее преобразование Лапласа по z с параметром q, получаем (при $T = +\infty$, $a = -\infty$)

$$\bar{\bar{i}}(\mu, q, \sigma) = \bar{\bar{s}}(q/\mu\varphi(\mu))\, w(q)/\mu\varphi(\mu) \tag{24}$$

(определение $w(q)$ см. в части I, формулы (24)—(28)). Далее, подстановка в (10) автомодельного представления $U(p, \gamma)$ (см. (I.30)) дает для автомодельной функции Грина $g_\infty(t, \sigma)$:

$$\bar{\bar{g}}_\infty(q, \sigma) = 1/[\sigma + u(q) + u(-q)]. \tag{25}$$

При этом для масштабного множителя в (1) получаем

$$C(\lambda, \gamma) = 1/\pi A\lambda\gamma\tau_c(\gamma), \tag{26}$$

а нормировки (11) переходят в следующие:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_\infty(t, \sigma)\, dt = \mu\varphi(\mu) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i_\infty(\mu, z, \sigma)\, dz = \frac{\pi m}{1 + \pi m\sigma}, \tag{27}$$

где $m = 1$ и 3 при изотропном и плоскопараллельном расширениях соответственно.

В задаче об источнике излучения в континууме (на уровне $\tau = 0$) для интенсивности излучения можно получить согласно (14) и (I.30) следующее автомодельное представление:

$$I(\mu, \tau, x, \lambda, \gamma) \doteq \frac{1}{\mu} e^{-l(z,\, z-T/\mu)} + \frac{1}{2(1+\pi m\sigma)}[1 - e^{-l(T/\mu - z)}] +$$
$$+ nx_0^2(\gamma)\, i_\infty(\mu, T, z, \sigma) + i_c(\mu, T, z, \sigma), \tag{28}$$

где первое слагаемое описывает прямое излучение источника, $n = 2$ и 4 для трехмерных и одномерных сред соответственно, $l(y', y)$ дается в части I (формула (23)), $l(y) = l(y, -\infty)$. Последнее слагаемое в (28) соответствует функции источников $s_c(t, \sigma)$, для которой

$$\bar{\bar{s}}_c(q, \sigma) = \frac{1}{q} - \frac{1}{q}\frac{\sigma + 2u(-q)}{\sigma + u(q) + u(-q)}. \tag{29}$$

б) Полубесконечные среды. Автомодельные аналоги формул (15)—(17) выглядят следующим образом:

$$\bar{\bar{i}}(\mu, q, \sigma) = \bar{s}(q/\mu\varphi(\mu))\, w(q)/\mu\varphi(\mu), \tag{30}$$

$$\overline{m}^{\pm}(\mu, q, \sigma) = \overline{s}(-q/\mu\rho(\mu))\, w^{\pm}(q)/\mu\rho(\mu), \tag{31}$$

$$j^{\pm}(\mu, z, \sigma) = m^{\pm}(\mu, z, \sigma) \exp \mp \begin{cases} \exp(\mp z), & D \\ |z|^{1-\varkappa}, & C. \end{cases} \tag{32}$$

Здесь верхние (нижние) знаки для случая D соответствуют нижнему (верхнему) знаку в z в (4), а для случая $C - z > 0$ $(z < 0)$. Функции $w^{\pm}(q)$ даны в части I (формулы (25)—(28)).

Подстановка в (19) автомодельного представления $V(u, \gamma)$ (см. (I.31)) дает для H-функции

$$H(1/p, \lambda, \gamma) \doteq h(q, \sigma)/\sqrt{\pi A \lambda \gamma}, \tag{33}$$

где $q = p\tau_c(\gamma)$

$$\ln h(q, \sigma) = -\frac{q}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\ln[\sigma + v(y)]}{y^2 + q^2}\, dy, \quad \operatorname{Re} q > 0. \tag{34}$$

Функция $h(q, \sigma)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} q > 0$ и не обращается там в нуль. Функции $v(y)$ в (34) для различных случаев найдены в части I. Заметим, что при $|q| \gg 1$ из (33) и (34) в качестве частного случая вытекает автомодельное представление H-функции для неподвижной среды, полученное в [8, 9].

С учетом (33) и (34) автомодельный аналог соотношения (18) записывается в виде

$$\overline{g}(q, \sigma) = h(q, \sigma) = \frac{1}{h(-q, \sigma)[\sigma + u(q) + u(-q)]}, \tag{35}$$

причем в (1) множитель

$$C(\lambda, \gamma) = 1/\tau_c(\gamma)\sqrt{\pi A \lambda \gamma}. \tag{36}$$

Нормировка (20) переходит в следующую:

$$\int_0^{\infty} g(t, \sigma)\, dt = h(0, \sigma) = \sqrt{\pi m/(1 + \pi m \sigma)}, \tag{37}$$

и для интенсивностей выходящего излучения, которые соответствуют функции источников $g(t, \sigma)$, из (30) и (31) при $q = 0$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(\mu, z, \sigma)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} m^{-}(\mu, z, \sigma)\, dz = \frac{1}{\mu\rho(\mu)}\sqrt{\frac{\pi m}{1 + \pi m \sigma}}. \tag{38}$$

Далее, в автомодельных переменных соотношение (21) принимает вид

$$s_*(t, \sigma) = \sqrt{\frac{\pi m}{1+\pi m\sigma}} - \int_t^\infty g(t', \sigma)\,dt', \tag{39}$$

причем в (1) масштабный множитель

$$C(\lambda, \gamma) = 1/\sqrt{\pi A\lambda\gamma}. \tag{40}$$

Согласно (39) $\bar{s}_*(q, \sigma) = \bar{g}(q, \sigma)/q$. Подстановка этого соотношения в (30) и (31) и последующее обращение позволяет выразить интенсивности выходящего излучения при равномерном распределении источников в полубесконечной среде через соответствующие интенсивности в задаче об источнике на границе $\tau = 0$:

$$i_*(\mu, z, \sigma) = \mu\varphi(\mu)\int_{-\infty}^{z} i(\mu, z', \sigma)\,dz' =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi m}{1+\pi m\sigma}} - \mu\varphi(\mu)\int_z^\infty i(\mu, z', \sigma)\,dz', \tag{41}$$

$$m_*^-(\mu, z, \sigma) = \mu\varphi(\mu)\int_z^\infty m^-(\mu, z', \sigma)\,dz' =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi m}{1+\pi m\sigma}} - \mu\varphi(\mu)\int_{-\infty}^{z} m^-(\mu, z', \sigma)\,dz', \tag{42}$$

$$m_*^+(\mu, z, \sigma) = \mu\varphi(\mu)\int_z^\infty m^+(\mu, z', \sigma)\,dz'. \tag{43}$$

4. *Автомодельные решения.* Из рассмотренных выше задач две являются фундаментальными, а именно: задачи о плоском источнике излучения в частотах линии, так как через их решения можно выразить решения всех других задач. Автомодельные представления преобразований Лапласа функций источников в фундаментальных задачах даются формулами (25) и (35) для бесконечных и полубесконечных сред соответственно, а соответствующие интенсивности выходящего излучения определяются из (24) и (30), (31). Обращение этих преобразований производится с после-

дующей деформацией контура интегрирования к особенностям правых частей (как это было предложено в [10] для неподвижных сред). Особенностью функций $u(q)$ и $w(q)$, входящих в указанные выражения, может быть линия ветвления:

$$u(-y \pm i0) = a(y) \pm ib(y), \quad w(y \pm i0) = -c(y) \pm id(y), \quad y > 0 \tag{44}$$

(см. часть I). Функция $w(q) = \Gamma(1-q)$ (гамма-функция) при доплеровском коэффициенте поглощения имеет полюсы $q = n = 1, 2, \ldots$ Кроме того, правые части (25) и (35) могут иметь полюсы, определяемые из уравнения

$$u(y) + u(-y) = -\sigma \tag{45}$$

(см. ниже). Поскольку все эти особенности лежат на вещественной оси, то в результате получаются выражения в виде суперпозиции экспонент:

$$\{g_{\infty}(t, \sigma),\ g(t, \sigma)\} = \frac{1}{\pi} \underset{y}{S} R(y, \sigma)\{1,\ 1/h(y, \sigma)\}\, e^{-ty}, \quad t > 0, \tag{46}$$

$$i_{\infty}(\mu, z, \sigma) = \frac{1}{\pi\mu\varphi(\mu)} \underset{y}{S} R\left(\frac{y}{\mu\varphi(\mu)}, \sigma\right) Q^{\mp}(y)\, e^{\pm zy}, \tag{47}$$

$$\left\{\begin{matrix} i(\mu, z, \sigma) \\ m^-(\mu, z, \sigma) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi\mu\varphi(\mu)} \underset{y}{S} \frac{R(y/\mu\varphi(\mu), \sigma)}{h(y/\mu\varphi(\mu), \sigma)} \left\{\begin{matrix} e^{-zy} Q^+(y) \\ e^{zy} Q^-(y) \end{matrix}\right\}, \tag{48}$$

где $\underset{y}{S}$ означает суммирование по дискретным значениям y и интегрирование по непрерывным; при степенном профиле коэффициента поглощения знак «плюс» при zy в показателе экспоненты берется при $z < 0$ и «минус» — при $z > 0$. Кроме этого можно еще получить, что при доплеровском коэффициенте поглощения

$$\left\{\begin{matrix} i(\mu, z, \sigma) \\ m^+(\mu, z, \sigma) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\mu\varphi(\mu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n/\mu\varphi(\mu), \sigma)}{(n-1)!} \left\{\begin{matrix} (-1)^{n-1} e^{nz} \\ e^{-nz} \end{matrix}\right\}, \tag{49}$$

а при степенном

$$i(\mu, z, \sigma) = \frac{1}{\pi\mu\varphi(\mu)} \int_0^{\infty} h\left(\frac{y}{\mu\varphi(\mu)}, \sigma\right) d(y) e^{zy} dy, \quad z < 0. \tag{50}$$

В формулах (46)—(48) $y > 0$ и

$$Q^{\pm}(y) = \Gamma(1 \pm y), \qquad D \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} Q^+(y) &\doteq w(-y) \\ Q^-(y) &= -c(y) + d(y)[\sigma + u(y) + a(y)]/b(y) \end{aligned}\right\} C. \tag{52}$$

Что же касается функции $R(y, \sigma)$, то для одномерных сред при доплеровском коэффициенте поглощения

$$R(y, \sigma) = \frac{\pi y}{\sigma + \pi\sigma^2 + \pi y^2}, \qquad y = y_k(\sigma), \tag{53}$$

где $y_k(\sigma)$ дается ниже (формула 56)), а во всех остальных случаях

$$R(y, \sigma) = \frac{b(y)}{[\sigma + u(y) + a(y)]^2 + b^2(y)}. \tag{54}$$

Функции, входящие в правые части (52) и (54), даны в части I.

Кроме двух фундаментальных задач, автомодельные решения которых приведены выше, в предыдущих разделах рассматривались еще две задачи: о плоском источнике излучения в континууме в бесконечных средах и о равномерном распределении источников в линии в полубесконечных средах. Функция источников в первой из этих задач получается обращением (29) аналогично тому, как было найдено (46):

$$s_c(t, \sigma) = \frac{1}{\pi} \underset{y}{S} R(y, \sigma)[\sigma + 2u(y)]\, e^{-ty}/y, \quad t > 0, \tag{55}$$

а решение второй задачи легко находится подстановкой (46), (48)—(50) в (39), (41)—(43), причем интегралы по z' в (39), (41)—(43) легко берутся.

Теперь следует конкретизировать вид суперпозиции экспонент в (46)—(48). Как уже говорилось выше, он определяется характером особенностей правой части (25). При степенном убывании коэффициента поглощения в крыле это — линии ветвления $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ функций $u(q)$ и $u(-q)$ (см. часть I), так что под $\underset{y}{S}$ понимается интегрирование по y от 0 до $+\infty$. При доплеровском профиле коэффициента поглощения характер особенностей зависит от геометрии расширения и размерности пространства. Ниже мы приводим результаты.

а) Одномерная среда ($\mu = 1$, $\rho(\mu) = 1$). В этом случае особенности правой части (25) — полюсы — корни $y = \pm y_k(\sigma)$ уравнения (45), которое имеет вид (см. (I.35)) $y \operatorname{ctg}(\pi y) = -\sigma$. Его положительные решения можно записать в виде

$$y_k(\sigma) = k + \frac{1}{2} + \mu_k, \quad 0 < \mu_k < \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_k(0) = k + \frac{1}{2}. \tag{56}$$

Таким образом, в (46)—(48) под $\underset{y}{S}$ понимается суммирование по всем y_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, причем $R(y, \sigma)$ определяется вычетами правой части (25) в полюсах $q = -y_k$ и дается формулой (53). Заметим, что из (51) следует

$$Q^-(y_k) = \pi(-1)^k \sqrt{y_k^2 + \sigma^2}/\Gamma(1 + y_k), \tag{57}$$

а в (47) и (48) ряды, содержащие $Q^+(y) = \Gamma(1 + y)$, являются асимптотическими разложениями.

При $\sigma = 0$ имеем $y_k = k + 1/2$, и суммы рядов в (46) и (47) выражаются через элементарные или известные специальные функции:

$$g_\infty(t) = (1/\pi) \ln \operatorname{cth}(|t|/4), \tag{58}$$

$$i_\infty(z) = (2/\sqrt{\pi}) F(e^{z/2}), \tag{59}$$

где

$$F(y) = e^{-y^2} \int_0^y e^{x^2} dx \tag{60}$$

— функция Доусона. Кроме того, при $\sigma = 0$ из (34) и (I.36) следует, что

$$h(q) = \Gamma(q + 1/2)/\Gamma(1 + q), \tag{61}$$

и в результате автомодельные решения для полубесконечной среды (формулы (46)—(50) и (41)—(43)) также выражаются через элементарные или известные специальные функции. Так, в задаче об источнике на границе функция источников

$$g(t) = 1/\sqrt{\pi(e^t - 1)}, \tag{62}$$

интенсивность на бесконечности

$$i(z) = \sqrt{\pi}\, u e^{-u} [I_0(u) - I_1(u)], \quad u = e^z/2, \tag{63}$$

интенсивность на границе $t = 0$

$$j^-(z) = e^{z/2}, \quad j^+(z) = \sqrt{\pi}\, v e^{-v} [I_0(v) + I_1(v)], \quad v = e^{-z}/2, \tag{64}$$

а при равномерном распределении источников

$$s_*(t) = 1 - (2/\pi) \arcsin e^{-t/2}, \tag{65}$$

$$i_*(z) = 1 - e^{-u} I_0(u), \quad u = e^z/2, \tag{66}$$

$$j_*^-(z) = e^{2u} [1 - \Phi(u)], \quad j_*^+(z) = e^{-v} [I_0(v) - e^{-v}], \quad v = e^{-z}/2. \tag{67}$$

Здесь $I_n(v)$ — функция Бесселя чисто мнимого аргумента, $\Phi(u)$ — интеграл ошибок ($\Phi(\infty) = 1$). Заметим, что в (65)—(67) использована нормировка $s_*(\infty)=1$. Результаты расчетов по этим формулам и их сравнение с численным решением уравнения переноса приведены на рис. 1. Качественно (из физических соображений) профили линий, возникающих в одномерной расширяющейся среде, описаны в [4].

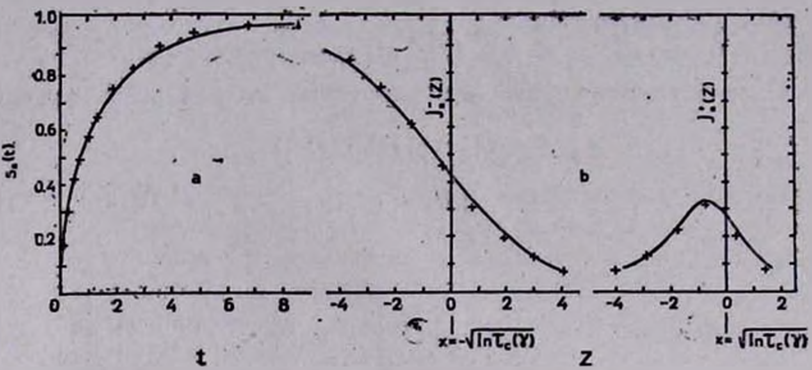

Рис. 1. Автомодельные функция источников (a) и профиль линии выходящего излучения (b) при равномерном распределении первичных источников в полубесконечной одномерной среде. Линия — расчет по формулам (65) и (67), крестики — численное решение задачи при $\gamma=10^{-4}$.

б) Трехмерное изотропное расширение $(\chi(\mu)=1,\ \rho(\mu)=1)$. При доплеровском коэффициенте поглощения уравнение (45), записываемое в виде (см. [2], а также часть I)

$$\int_0^y x \operatorname{ctg}(\pi x)\,dx = -\sigma, \tag{68}$$

имеет корни $y=\pm y_0=\pm y_0(\sigma)$, причем $y_0(0)\approx 0.791 \leqslant y_0(\sigma)<1=y_0(\infty)$. Кроме того, функция $u(q)$ в правой части (25) имеет линию ветвления $(-\infty, -1)$ (см. часть I), так что в (46)—(48)

$$\underset{y}{S}R\left(\frac{y}{B},\sigma\right)e^{\ldots y}\ldots=\frac{B^2}{y}\operatorname{tg}\left(\pi\frac{y}{B}\right)e^{\ldots y}\ldots\Big|_{y=y_0B}+\int_B^\infty R\left(\frac{y}{B},\sigma\right)e^{\ldots y}\ldots\,dy, \tag{69}$$

причем поскольку на линию ветвления функции $u(\pm q)$ попадают полюсы функции $w^{\pm}(q)=\Gamma(1\pm q)$, то интегралы в (47) и (48), содержащие $Q^-(y)=\Gamma(1-y)$, понимаются в смысле главного значения, и к ним нужно еще добавить слагаемое

$$\frac{1}{\mu\rho(\mu)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}e^{n\sigma}}{(n-1)!}R\left(\frac{n}{\mu\rho(\mu)},\ \sigma\right)\times$$

$$\times\frac{\sigma+u(n/\mu\rho(\mu))+a(n/\mu\rho(\mu))}{b(n/\mu\rho(\mu))}\left\{\begin{matrix}1\\ 1/h(n/\mu\rho(\mu),\ \sigma)\end{matrix}\right\}, \tag{70}$$

представляющее собой вклад псевдополюсов. При $\mu=1$ этот вклад равен нулю.

Асимптотика $G_\infty(\tau)$ и $S_p(\tau)$, являющихся функциями источников в бесконечной однородной среде с плоским и точечным источниками соответственно, получена в [2] для $\lambda=1$. При $\tau\gg\tau_c(\gamma)$ она дается первым слагаемым в правой части (69). Заметим, что согласно соотношению между $G_\infty(\tau)$ и $S_p(\tau)$ [2] автомодельная функция источников $s_p(t,\ \sigma)$ в задаче о точечном источнике выражается через $g_\infty(t,\ \sigma)$:

$$s_p(t,\ \sigma)=-\frac{1}{2\pi t}\frac{dg_\infty(t,\ \sigma)}{dt}, \tag{71}$$

причем

$$S_p(\tau,\ \lambda,\ \gamma)\doteq s_p(t,\ \sigma)/\pi A\lambda\gamma\tau_c^3(\gamma). \tag{72}$$

в) Трехмерное плоскопараллельное расширение. При доплеровском коэффициенте поглощения, как и при степенном, правая часть (25) имеет в качестве особенности линии ветвления $(0,\ \pm\infty)$ функции $u(\mp q)$, поэтому в (46)—(48) под $\underset{y}{S}$ понимается интегрирование по y от 0 до $+\infty$, причем интегралы в (47) и (48), содержащие $Q^-(y)=\Gamma(1-y)$, понимаются в смысле главного значения, и к ним еще добавляется слагаемое вида (70) (см. предыдущий подраздел). Далее, функция $R(y,\ \sigma)$ дается формулой (54), содержащей величины, приведенные в части I (формулы (71) и (72)), и, кроме того, согласно (23) и (6)

$$\rho(\mu)=\begin{cases}\mu^{-2}\sqrt{\dfrac{\ln\tau_c(\gamma)}{\ln\tau_c(\gamma\mu^2)}}\sim\mu^{-2}, & D\\ \mu^{-2\alpha/(\alpha-1)}, & C.\end{cases} \tag{73}$$

Выпишем для примера автомодельную функцию источников в задаче о равномерном распределении первичных источников в полубесконечной среде:

$$s_*(t,\ \sigma)=\sqrt{\frac{3\pi}{1+3\pi\sigma}}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{R(y,\ \sigma)}{h(y,\ \sigma)}e^{-ty}\,dy/y. \tag{74}$$

Численно (путем численного решения уравнения переноса) эта функция при доплеровском коэффициенте поглощения была построена В. М. Сербиным [11].

Следует отметить, что в случае доплеровского коэффициента поглощения автомодельные представления (46) при плоскопараллельном расширении дают при $\tau \gg \tau_c(\gamma)(t \gg 1)$ для функций $G_\infty(\tau)$ и $G(\tau)$ асимптотики, отличающиеся от точных (полученных в [3]), на медленно меняющийся множитель. От этого недостатка свободны полуавтомодельные представления, которые даются теми же формулами, что и автомодельные (46)—(50), но с заменой в (34) и (54) функций $v(y)$, $a(y)$, $b(y)$ и $u(y)$ соответственно на функции $v(y, \gamma)$, $a(y, \gamma)$, $b(y, \gamma)$ и $u(y, \gamma)$, приведенные в части I (формулы (65), (66) и (70)). Из полуавтомодельных представлений следует в частности, что при $\tau \gg$ $\gg \tau_c(\gamma)$

$$\begin{Bmatrix} G_\infty(\tau) \\ G(\tau) \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{1-\tilde{\lambda}} \end{Bmatrix} \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(1-\tilde{\lambda})^2} \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \zeta(3) (\gamma\tau^2)^{-2} [\ln(4\gamma\tau^2)]^{-3/2}, \qquad (75)$$

что совпадает с асимптотиками, найденными в [3] при $\lambda = 1$. Здесь $\tilde{\lambda} = \lambda(1 - \gamma/3\sqrt{\pi})$. Выделив в (75) асимптотику ядерной функции, можно эту формулу переписать в виде

$$\{G_\infty(\tau),\ G(\tau)\} \sim \left\{1,\ \sqrt{1-\tilde{\lambda}}\right\} \frac{\lambda}{2} \frac{K(\tau, \gamma)}{(1-\tilde{\lambda})^2}, \quad \tau \gg \tau_c(\gamma), \qquad (76)$$

аналогичном предложенному В. В. Ивановым [5] для неподвижных сред.

Выше были найдены автомодельные функции источников и интенсивности выходящего излучения для нескольких задач. Чтобы получить интенсивность $i(\mu, T, z, \sigma)$ на произвольном расстоянии t от источника или границы, нужно подставить функцию источников $s(t, \sigma)$ (вида (46), (55) или (74)) в (22). При этом входящая в (22) функция $p(y', y)$ (см. часть I, формула (22)) в случае доплеровского коэффициента поглощения имеет два различных представления, которые соответствуют двум различным автомодельным частотам z в (4). Поэтому автомодельная интенсивность $i(\mu, T, z, \sigma)$ распадается соответственно на две ветви $i^\pm(\mu, T, z, \sigma)$, описывающие реальную интенсивность в окрестностях точек $x = \pm\sqrt{\ln \tau_c(\gamma\chi(\mu))}$. При этом оказывается, что $i^-(\mu, T, +\infty, \sigma) = i^+(\mu, T, -\infty, \sigma) = s(t, \sigma)$, т. е. эти две ветви допускают сшивку. В случае степенного коэффициента поглощения можно показать, что профиль линии $i(\mu, T, z, \sigma)$ имеет (как функция z) локальный минимум при $z = T$, причем $i(\mu, T, T, \sigma) = s(t, \sigma)$. Результаты расчетов автомодельной интенсивности излучения для бесконечной одномерной ($\mu = 1$, $\varphi(\mu) = 1$) среды с источником в линии приведены на рис. 2 и 3. Максимумы профилей приходятся на частоты, на которых реальное оптическое расстояние до источчика — порядка 1.

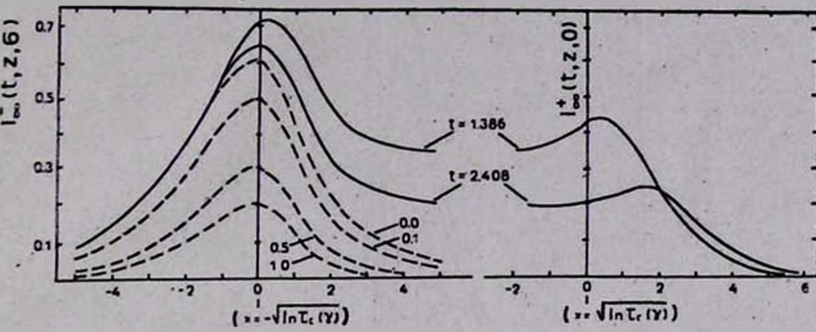

Рис. 2. Автомодельные профили спектральной линии в бесконечной одномерной среде с точечным источником в линии при доплеровском коэффициенте поглощения. Сплошные кривые — $\sigma = 0$, штриховые — $t = +\infty$ (числа у кривых — значения σ).

На рис. 4 также для бесконечной одномерной среды изображены профили $i(z, \sigma)$ на бесконечном удалении от источника излучения в континууме (см. формулу 28)).

5. *Заключение.* Найденные выше автомодельные представления дают при $t \ll 1$ ($\tau \ll \tau_c(\gamma)$) известные единые асимптотики резольвентных функций для неподвижной среды (они приведены в [5]), причем в случае доплеровского коэффициента поглощения — с точностью до замены τ на $\tau_c(\gamma)$ под знаком логарифма. В другом предельном случае ($\tau \gg \tau_c(\gamma)$) они дают асимптотики, совпадающие с найденными нами ранее в [2]—[4] при $\lambda = 1$. Таким образом, автомодельные представления дают единые асимптотики резольвентных функций (функций Грина) для линейно расширяющихся сред, справедливые при всех $\tau \gg 1$. Некоторое исключение составляет случай плоскопараллельного расширения при доплеровском коэффициенте поглощения. В этом случае, как указывалось в предыдущем разделе, для правильного описания функций Грина при $\tau \gg \tau_c(\gamma)$ нужно использовать полуавтомодельные представления.

Каждое из полученных выше автомодельных решений дает в соответствии с (1)—(4) семейство обычных решений. При этом согласно (4)—(6) при переходе от z к x в случае доплеровского коэффициента поглощения происходит сужение компонентов профиля линии вблизи максимумов

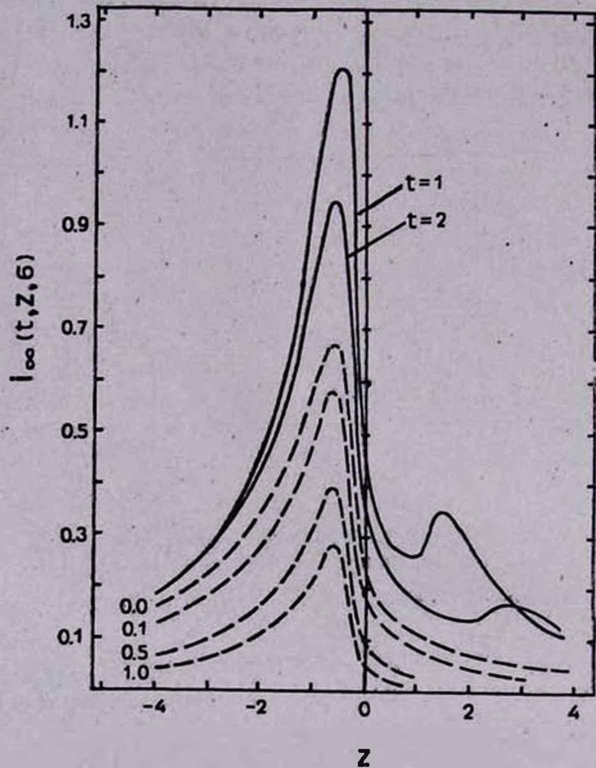

Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но при коэффициенте поглощения с лоренцевскими крыльями.

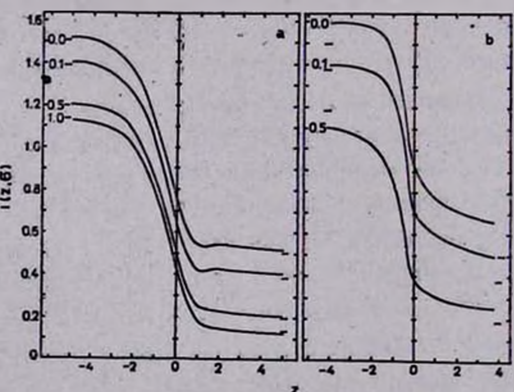

Рис. 4. Автомодельные профили линии при $t = +\infty$ в бесконечной одномерной среде с точечным источником в континууме при доплеровском (a) и лоренцевском (в крыле) (b) профилях коэффициента поглощения (правая часть (28) без предпоследнего слагаемого). Числа у кривых — значения σ. Метки справа и слева указывают пределы при $z=\pm\infty$ (сверху вниз—в порядке возрастания σ).

интенсивности, а в случае степенного — расширение. Для излучения, «выходящего» из бесконечной среды (на $\tau = +\infty$) с источником в линии на уровне $\tau = 0$, профиль — однокомпонентный (см. рис. 2 и 3), и поэтому с уменьшением γ происходит сужение или расширение всего профиля. При этом в случае доплеровского коэффициента поглощения одновременно со сжатием профиля происходит сдвиг максимума в длинноволновую сторону и рост этого максимума. В целом, как легко проверить, при $\lambda = 1$ интеграл от профиля по всем частотам сохраняется. Вывод о возможном сужении линий, возникающих в расширяющихся средах, был ранее сделан в [4], где дано также и его физическое объяснение.

Благодарю А. Б. Шнейвайса за помощь в вычислениях для рис. 2—4 и В. М. Сербина за предоставление численного решения, приведенного на рис. 1.

Ленинградский государственный
университет

ASYMPTOTIC SCALING IN THE PROBLEMS OF RESONANCE RADIATION TRANSFER IN LINEARLY EXPANDING MEDIA. II. SOLUTIONS FOR INFINITE AND SEMI-INFINITE MEDIA

S. I. GRACHEV

Resonance radiation transfer is considered for infinite and semi-infinite media expanding isotropically or plane-parallelly with depth independent dimensionless velocity gradient γ. Complete frequency redistribution is assumed for a scattering in a comoving frame of reference. The source function and radiation intensity are shown in the limit of small γ to be expressed through the functions of one less number of arguments which are the combinations of old arguments (including parameters γ and single scattering albedo λ among them). For several main problems these functions are found explicitly for the cases of Doppler and power profiles of the absorption coefficient. They are expressed in terms of elementary or known special functions in the case of Doppler absorption coefficient in a one-dimensional medium with $\lambda = 1$. It is shown that the expansion of a medium can lead to the formation of narrow (with a width less than a thermal one) intense features in spectral line profiles.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. И. Грачев*, Астрофизика, 23, 323, 1985.
2. *С. И. Грачев*, Астрофизика, 14, 111, 1978.
3. *С. И. Грачев*, Депонировано в ВИНИТИ № 1007—78, 1978.
4. *С. И. Грачев*, Вестн. ЛГУ, № 1, 77 и № 7, 85, 1982.
5. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
6. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1967.
7. *U. Frish, H. Frish*, M. N. RAS, 173, 167, 1975.
8. *В. В. Иванов, Д. И. Нагирнер*, Астрофизика, 1, 143, 1965.
9. *Д. И. Нагирнер*, Труды АО ЛГУ, 25, 3, 1968.
10. *Д. И. Нагирнер*, Астрон. ж., 41, 669, 1964.
11. *В. М. Сербин*, Астрофизика, 22, 387, 1985.