АСТРОФИЗИКА

ТОМ 23 ДЕКАБРЬ, 1985 ВЫПУСК 3

УДК: 52:517.537.6

О БЕЗВИХРЕВЫХ И О «БЕЗМОМЕНТНЫХ» ЭЛЛИПСОИДАХ В ПРОБЛЕМЕ ДИРИХЛЕ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

Поступила 22 ноября 1984
Принята к печати 20 мая 1985

Найдены два класса новых точных решений в проблеме Дирихле о колебаниях самогравитирующей жидкой эллипсоидальной массы с линейным полем скоростей. Этими решениями описываются безвихревые эллипсоиды и эллипсоиды с нулевым моментом вращения, сопряженные друг другу в смысле теоремы Дедекинда. Для эллипсоидов со стационарной граничной поверхностью установлено, что безвихревые и «безмоментные» фигуры существуют не только при вращении эллипсоидов вокруг средней оси симметрии (этот частный случай рассматривал Чандрасекар), но и при наклонном положении оси вращения.

1. *Введение*. Одной из самых плодотворных в классической теории фигур равновесия является проблема, открытая в середине прошлого века математиком Дирихле [1]. В ней изучается движение однородного жидкого гравитирующего эллипсоида. В общем случае это движение представляет суперпозицию твердотельного вращения эллипсоида с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$ с внутренними циркуляционными течениями с равномерной завихренностью $\vec{\xi}(t)$, причем полуоси конфигурации также зависят от времени. После Дирихле основной вклад в разработку проблемы внесли Дедекинд и особенно Риман [2]. В наше время интерес к проблеме Дирихле возрожден работами Чандрасекара с сотрудниками [3].

Проблема Дирихле охватывает широкий круг задач. Прежде всего здесь мы имеем дело с нелинейными эллипсоидальными колебаниями жидкой массы, совершающей сложное вращение вокруг центра инерции и имеющей внутренние течения. Далее такие нестационарные конфигурации будем называть *эллипсоидами Дирихле*. Кроме того, в рамках проблемы исследуются и стационарные фигуры равновесия. Эти эллипсоиды Римана (по терминологии Чандрасекара) классифицируются по характеру вращения. Фигуры с вращением вокруг одной из возможных главных осей названы S-эллипсоидами Римана. Среди них наиболее интересны четыре

однопараметрические последовательности; это давно известные эллипсоиды Якоби и Дедекинда, а также открытая Чандрасекаром безвихревая последовательность с сопряженной ей последовательностью фигур с нулевым моментом вращения. Более слабо исследованы принципиально отличающиеся от S-эллипсоидов фигуры, у которых ось вращения и вектор завихренности лежат в одной из главных плоскостей эллипсоида. Такие эллипсоиды Римана с наклонным вращением в зависимости от соотношения осей подразделяются на I, II и III типы.

Но хотя в проблеме Дирихле многое сделано (с современным ее состоянием можно познакомиться по книге [3]), некоторые аспекты проблемы не исследованы вовсе. Так, ни в одной из известных нам работ не содержится даже указаний на возможность существования эллипсоидов Дирихле с равной нулю завихренностью или с равным нулю моментом вращения. Этот пробел мы обнаруживаем и в теории стационарных эллипсоидов Римана с наклонным вращением. На мысль о существовании конфигураций с такими ярко выраженными свойствами наводит, между прочим, следующий частный результат: исследование эллипсоидов Римана I типа показало, что среди них существуют фигуры как с положительной, так и с отрицательной* завихренностью (моментом вращения). Учитывая, что характеристики фигур равновесия обладают в известном смысле свойством непрерывности, можно предположить (и доказать!) существование *переходных* безвихревых и «безмоментных» эллипсоидов.

В данной статье доказано существование безвихревых и «безмоментных» фигур как среди эллипсоидов Дирихле, так и среди эллипсоидов Римана I типа. В разделе 2, носящем прикладной характер, сформулирована проблема Дирихле. Здесь более простым, чем в [2] или [3] методом выведены девять уравнений движения эллипсоидов Дирихле. Там же записаны интегралы движения и сформулирована теорема Дедекинда. В разделе 3 доказывается существование безвихревых и сопряженных им «безмоментных» эллипсоидов Дирихле, получены и записаны уравнения движения этих конфигураций. В разделе 4 эти уравнения записаны в стационарном случае. Здесь исследуются соответствующие эллипсоиды Римана с наклонным вращением.

2. *Уравнения движения эллипсоида Дирихле.* Рассмотрим жидкий гравитирующий эллипсоид плотности ρ. В системе отсчета $Ox_1x_2x_3$, связанной с главными осями эллипсоида, его уравнение

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1, \tag{1}$$

а потенциал внутри фигуры

* Положительным считается направление, задаваемое твердотельным вращением.

$$\varphi = J - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2 - A_3 x_3^2, \tag{2}$$

где

$$A_i = \pi G \rho a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s)\,\Delta(s)}; \qquad J = \pi G \rho a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(s)};$$

$$\Delta^2(s) = (a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s). \tag{3}$$

Пусть эллипсоид вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$ и внутри него существуют течения с однородной завихренностью $\vec{\xi}(t)$. Эти течения должны сохранять границу (1). В инерциальной системе отсчета, оси которой совпадают в данный момент с осями $Ox_1x_2x_3$, поле скоростей можно записать в виде

$$\vec{u}^{(0)} = \begin{pmatrix} \dot{a}_1 & a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3 & -a_1\lambda_2 + a_3\Omega_2 \\ -a_2\lambda_3 + a_1\Omega_3 & \dot{a}_2 & a_2\lambda_1 - a_3\Omega_1 \\ a_3\lambda_2 - a_1\Omega_2 & -a_3\lambda_1 + a_2\Omega_1 & \dot{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1/a_1 \\ x_2/a_2 \\ x_3/a_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причем компоненты векторов $\vec{\lambda}(t)$ и $\vec{\rho}(t)$ связаны соотношениями [3]

$$\xi_i = -\left(\frac{a_j}{a_k} + \frac{a_k}{a_j}\right)\lambda_i, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Положив в (4) $\Omega_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), получим поле скоростей $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ внутренних течений.

Динамику эллипсоида будем изучать во вращающейся системе отсчета $Ox_1x_2x_3$. Обозначая давление через $p(\vec{x}, t)$, запишем три гидродинамических уравнения Эйлера в векторной форме

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}} + [\vec{x}\dot{\vec{\Omega}}] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{x}}[\vec{\Omega}\vec{x}]^2 + 2[\vec{u}\vec{\Omega}]. \tag{6}$$

Перенесем члены этого уравнения, представляющие собой градиент от соответствующих функций, влево; (6) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\left(\frac{p}{\rho} - \varphi - \frac{1}{2}[\vec{\Omega}\vec{x}]^2\right) = 2[\vec{u}\vec{\Omega}] + [\vec{x}\dot{\vec{\Omega}}] - \frac{d\vec{u}}{dt}. \tag{7}$$

Ниже правую часть (7) будем обозначать через $\vec{B}(B_1, B_2, B_3)$, а левую часть — через $\vec{N}(N_1, N_2, N_3)$.

Векторную функцию $\vec{B}$ с учетом (4) можно записать произведением невырожденной матрицы $\|r_{ik}\|$ на матрицу-столбец

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} r_{11} r_{12} r_{13} \\ r_{21} r_{22} r_{23} \\ r_{31} r_{32} r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1/a_1 \\ x_2/a_2 \\ x_3/a_3 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$r_{11} = a_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) - \ddot{a}_1 - 2a_2\lambda_3\Omega_3 - 2a_3\lambda_2\Omega_2, \tag{9}$$

$$r_{12} = 2\frac{d}{dt}(a_2\Omega_3 - a_1\lambda_3) + a_1\dot{\lambda}_3 - a_2\dot{\Omega}_3 - a_1\lambda_1\lambda_2 + 2a_3\lambda_1\Omega_2, \tag{10}$$

$$r_{13} = 2\frac{d}{dt}(a_1\lambda_2 - a_3\Omega_2) - a_1\dot{\lambda}_2 + a_3\dot{\Omega}_2 - a_1\lambda_1\lambda_3 + 2a_3\lambda_1\Omega_3. \tag{11}$$

Все остальные члены матрицы $\|r_{ik}\|$ получаются из (9)—(11) круговой перестановкой индексов.

Для сохранения эллипсоидальной границы давление на поверхности должно равняться нулю и, как известно [3],

$$p = p_0\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2}\right). \tag{12}$$

Тогда, с учетом еще (2) и потенциала центробежной силы, запишем левую часть уравнения (7) в виде

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1/a_1 \\ x_2/a_2 \\ x_3/a_3 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$l_{11} = -\frac{2p_0}{\rho a_1} + 2A_1a_1 + a_1(\Omega_2^2 + \Omega_3^2), \tag{14}$$

$$l_{12} = a_2\Omega_1\Omega_2; \quad l_{13} = a_3\Omega_1\Omega_3. \tag{15}$$

Остальные члены матрицы $\|l_{ik}\|$ получаются из (14)—(15) круговой перестановкой индексов.

Уравнение (7) с учетом (8) и (13) записывается в компактной форме

$$\begin{pmatrix} l_{11} - r_{11} & l_{12} - r_{12} & l_{13} - r_{13} \\ l_{21} - r_{21} & l_{22} - r_{22} & l_{23} - r_{23} \\ l_{31} - r_{31} & l_{32} - r_{32} & l_{33} - r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1/a_1 \\ x_2/a_2 \\ x_3/a_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{16}$$

Отсюда следует, что матрица

$$\|c_{ik}\| = \|l_{ik} - r_{ik}\| \tag{17}$$

должна быть нулевой. Все члены нулевой матрицы равны нулю, и это условие дает девять искомых уравнений.

Три члена главной диагонали матрицы $\|c_{ik}\|$ дают

$$c_{11} = \ddot{a}_1 - a_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) + 2(a_3\lambda_2\Omega_2 + a_2\lambda_3\Omega_3) - \\ - 2p_0/(\rho a_1) + 2A_1a_1 = 0. \tag{18}$$

$$c_{22} = \ddot{a}_2 - a_2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \Omega_1^2 + \Omega_3^2) + 2(a_1\lambda_3\Omega_3 + a_3\lambda_1\Omega_1) - \\ - 2p_0/(\rho a_2) + 2A_2a_2 = 0. \tag{19}$$

$$c_{33} = \ddot{a}_3 - a_3(\lambda_2^2 + \lambda_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_1^2) + 2(a_2\lambda_1\Omega_1 + a_1\lambda_2\Omega_2) - \\ - 2p_0/(\rho a_3) + 2A_3a_3 = 0. \tag{20}$$

Оставшиеся шесть уравнений разобьем на две группы:

$$c_{12} = 2\frac{d}{dt}(a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3) - a_1\dot{\lambda}_3 + a_2\dot{\Omega}_3 + a_1\lambda_1\lambda_2 + a_2\Omega_1\Omega_2 - 2a_3\lambda_1\Omega_2 = 0. \tag{21}$$

$$c_{23} = 2\frac{d}{dt}(a_2\lambda_1 - a_3\Omega_1) - a_2\dot{\lambda}_1 + a_3\dot{\Omega}_1 + a_2\lambda_2\lambda_3 + a_3\Omega_2\Omega_3 - 2a_1\lambda_2\Omega_3 = 0. \tag{22}$$

$$c_{31} = 2\frac{d}{dt}(a_3\lambda_2 - a_1\Omega_2) - a_3\dot{\lambda}_2 + a_1\dot{\Omega}_2 + a_3\lambda_3\lambda_1 + a_1\Omega_3\Omega_1 - 2a_2\lambda_3\Omega_1 = 0. \tag{23}$$

$$c_{13} = 2\frac{d}{dt}(a_3\Omega_2 - a_1\lambda_2) - a_3\dot{\Omega}_2 + a_1\dot{\lambda}_2 + a_1\lambda_1\lambda_3 + a_3\Omega_1\Omega_3 - 2a_2\lambda_1\Omega_3 = 0. \tag{24}$$

$$c_{21} = 2\frac{d}{dt}(a_1\Omega_3 - a_2\lambda_3) - a_1\dot{\Omega}_3 + a_2\dot{\lambda}_3 + a_2\lambda_2\lambda_1 + a_1\Omega_2\Omega_1 - 2a_3\lambda_2\Omega_1 = 0. \tag{25}$$

$$c_{32} = 2\frac{d}{dt}(a_2\Omega_1 - a_3\lambda_1) - a_2\dot{\Omega}_1 + a_3\dot{\lambda}_1 + a_3\lambda_3\lambda_2 + a_2\Omega_3\Omega_2 - 2a_1\lambda_3\Omega_2 = 0. \tag{26}$$

В каждой из групп (18)—(20), (21)—(23) и (24)—(26) уравнения связаны круговой перестановкой индексов*. К (18)—(26) необходимо добавить уравнение неразрывности, которое с учетом поля скоростей (4) можно записать в форме

---

* Впервые уравнения (18)—(26) получены Риманом с помощью метода Лагранжа. Позже вывод этих уравнений производился многими авторами (см. [3]), однако у самого Чандрасекара метод матричного формализма довольно тяжеловесен. Наш метод, основанный на уравнениях Эйлера, близок к применявшемуся в статье [4].

$$\dot{\rho} + \rho\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3}\right) = 0. \tag{27}$$

В рамках поставленной задачи можно рассматривать движение как несжимаемого, так и сжимаемого эллипсоидов. Несжимаемый эллипсоид описывается десятью переменными: это три полуоси (a_1, a_2, a_3), шесть компонентов (Ω_1, Ω_2, Ω_3), (λ_1, λ_2, λ_3) (вместо последней тройки допустимо брать ξ_1, ξ_2, ξ_3) и p_0. Плотность от времени не зависит, так что (27) сводится к условию сохранения объема

$$\dot{a}_1/a_1 + \dot{a}_2/a_2 + \dot{a}_3/a_3 = 0. \tag{27a}$$

Таким образом, для несжимаемого эллипсоида система уравнений (18)—(26) и (27а) является полной. Но в астрофизических приложениях жидкость часто следует считать сжимаемой. Тогда можно рассматривать два случая: а) Положить $p_0 = 0$ в (18)—(20). Эллипсоид без давления описывается полной системой уравнений (18)—(27); б) Считать жидкость термодинамически неоднородной и задать подходящее уравнение состояния $p = p(\rho, T)$, где T-температура. Так, для адиабатических колебаний можно задать [5]

$$p(\vec{x}, t) = \mathrm{const}\,\rho(t)\,T(\vec{x}, t);\quad T(\vec{x}, t) = T_0(t)\left[1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2}\right],$$

$$\frac{dT_0}{dt} + \frac{2}{3}T_0\frac{d}{dt}\ln(a_1a_2a_3) = 0. \tag{28}$$

Легко видеть, что и в этом случае система уравнений (18)—(27) с учетом (28) будет полной.

Для стационарных эллипсоидов Римана условие (27) тождественно выполняется, поэтому их равновесие совсем не зависит от того, сжимаемая или несжимаемая жидкость. Задача получения замкнутой системы уравнений для них приводит к важной теореме Римана [3].

В уравнениях (18)—(26) существует определенная симметрия относительно величин λ_i и Ω_i. Для выявления этой симметрии переменим в каждом из уравнений Ω_i и λ_i местами. Эту перемену местами Чандрасекар назвал сопряжением. Важно теперь отметить, что эта операция сопряжения переводит матрицу уравнений $\|c_{ik}\|$ в транспонированную. Легко видеть, что при сопряжении транспонируется и матрица коэффициентов поля скоростей (4). Последнее обстоятельство находит отражение в теореме Дедекинда: если существует эллипсоид Дирихле с полем скоростей (4), то существует и другой, сопряженный ему эллипсоид, движение которого опи-

сывается матрицей коэффициентов поля скоростей, транспонированной к исходной*.

Операция сопряжения не изменяет уравнения (18)—(26) относительно a_1, a_2, a_3 и p_0; следовательно, сопряженные эллипсоиды в любой момент времени имеют конгруэнтные геометрические фигуры и одинаковые тепловые энергии. Более того, из (31) следует, что сопряженные эллипсоиды имеют одинаковые полные энергии**.

Как известно [3], из уравнений движения (18)—(26) можно получить четыре интеграла движения, представляющих сохранение в инерциальной системе отсчета трех компонентов вектора момента вращения $\vec{L}$

$$l_i = 5L_i/M = (a_j^2 + a_k^2)\Omega_i - 2a_j a_k \lambda_i \tag{29}$$

и модуля вектора циркуляции $|\vec{C}| = (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)^{1/2}$, где C_i есть циркуляция по одному из главных сечений эллипсоида

$$c_i = \frac{1}{\pi} C_i = 2a_j a_k \Omega_i - (a_j^2 + a_k^2)\lambda_i. \tag{30}$$

Здесь $i \neq j \neq k$ и M—масса эллипсоида. Для консервативной системы существует и пятый интеграл — интеграл энергии. Для несжимаемой жидкой массы последний имеет вид

$$E = \frac{1}{2}(\dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2 + \dot{a}_3^2) + \sum_{1,2,3}\left[\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)(\lambda_3^2 + \Omega_3^2) - 2a_1 a_2 \lambda_3 \Omega_3\right] - 2J. \tag{31}$$

Отметим еще одно свойство сопряженных эллипсоидов: если какой-то эллипсоид Дирихле характеризуется моментом вращения $\vec{l}$ и вектором циркуляции $\vec{c}$, то сопряженный ему эллипсоид, согласно формулам (29) и (30), имеет

$$l_i^+ = -c_i; \qquad c_i^+ = -l_i. \tag{32}$$

Символом (+) здесь и ниже отмечены величины для сопряженного эллипсоида. Это свойство назовем *принципом обмена*.

3. *Безвихревые и «безмоментные» эллипсоиды Дирихле.* В общем случае несжимаемые (сжимаемые) эллипсоиды Дирихле определяются деся-

* И движение сопряженного эллипсоида, как установлено выше, описывается транспонированной матрицей уравнений.

** Это важное свойство сопряженных эллипсоидов в известных нам статьях четко не сформулировано.

тью (одиннадцатью) нелинейными дифференциальными уравнениями. Однако, как нашли Чандрасекар и Лебовиц, существуют *самосопряженные* эллипсоиды, для которых число уравнений сокращается на три. Такие конфигурации выделяются особыми свойствами. Постараемся теперь доказать, что существуют еще два класса эллипсоидов с яркими физическими свойствами, движение которых описывается тем же числом уравнений, что и у самосопряженных эллипсоидов.

а) Прежде всего докажем существование эллипсоидов, у которых завихренность в инерциальной системе отсчета равна нулю

$$\vec{\xi}^{(0)} = \vec{\xi} + 2\vec{\Omega} = 0. \tag{33}$$

Очевидно, условие (33) означает и отсутствие циркуляции, так что (см. (30))

$$\lambda_i = 2\frac{a_j a_k}{a_j^2 + a_k^2}\,\Omega_i, \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{34}$$

Равенства (34) можно рассматривать как три дополнительных интеграла движения уравнений (18)—(26); если последние существуют, то число независимых неизвестных для описания эллипсоида уменьшается на три. Требуется доказать, что в этом случае и число независимых уравнений движения уменьшится на три.

В случае (34) число диагональных уравнений (18)—(20), очевидно, остается прежним, и требуется рассмотреть уравнения (21)—(26). В отношении последних справедливым будет то, что из шести уравнений независимыми являются только три, так как выполняются равенства

$$c_{12} = c_{21};\ c_{13} = c_{31};\ c_{23} = c_{32}. \tag{35}$$

Докажем, например, первое из этих равенств. Возьмем уравнения (21) и (25) и поделим: первое на a_2, а второе на a_1. После подстановки λ_i из (34) в три последних члена без производных, они в обоих уравнениях приводятся к выражению

$$\Omega_1\Omega_2\left[1 - \frac{4a_3^4}{(a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2)}\right]. \tag{36}$$

Остается доказать, что

$$\frac{2}{a_2}\frac{d}{dt}(a_1\lambda_3 - a_2\Omega_3) - \frac{a_1}{a_2}\dot{\lambda}_3 + \dot{\Omega}_3 = \frac{2}{a_1}\frac{d}{dt}(a_1\Omega_3 - a_2\lambda_3) - \dot{\Omega}_3 + \frac{a_2}{a_1}\dot{\lambda}_3.$$

Раскрывая скобки и делая преобразования, получим

$$2\dot{\Omega}_3 + 2\Omega_3\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2}\right) = \dot{\lambda}_3\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + 2\lambda_3\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2}\right).$$

Это выражение с учетом условия (34) приводится к тождеству

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)\equiv\left(\frac{\dot a_1}{a_1}-\frac{\dot a_2}{a_2}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}\right),$$

что и доказывает эквивалентность уравнений c_{12} и c_{21}. Аналогично в (35) доказываются и два других равенства.

Таким образом, для описания движения безвихревых несжимаемых и сжимаемых эллипсоидов Дирихле действительно имеется замкнутая система дифференциальных уравнений. Представляет интерес записать уравнения движения для них в таком виде:

$$\ddot a_1-a_1\left\{\Omega_2^2\left[1-\left(\frac{2a_3^2}{a_1^2+a_3^2}\right)^2\right]+\Omega_3^2\left[1-\left(\frac{2a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)^2\right]\right\}-\frac{2p_0}{\rho a_1}+2A_1a_1=0, \tag{37}$$

$$\ddot a_2-a_2\left\{\Omega_3^2\left[1-\left(\frac{2a_1^2}{a_2^2+a_1^2}\right)^2\right]+\Omega_1^2\left[1-\left(\frac{2a_3^2}{a_2^2+a_3^2}\right)^2\right]\right\}-\frac{2p_0}{\rho a_2}+2A_2a_2=0, \tag{38}$$

$$\ddot a_3-a_3\left\{\Omega_1^2\left[1-\left(\frac{2a_2^2}{a_3^2+a_2^2}\right)^2\right]+\Omega_2^2\left[1-\left(\frac{2a_1^2}{a_3^2+a_1^2}\right)^2\right]\right\}-\frac{2p_0}{\rho a_3}+2A_3a_3=0, \tag{39}$$

$$\dot\Omega_1=\left(\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2^2-a_3^2}\right)\left\{2\Omega_1\left[\frac{\dot a_3}{a_3}-\frac{a_2\dot a_2}{a_2^2+a_3^2}-\frac{1}{a_3}\frac{d}{dt}\left(\frac{a_2^2a_3}{a_2^2+a_3^2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\Omega_2\Omega_3\left[\frac{4a_1^4}{(a_2^2+a_1^2)(a_3^2+a_1^2)}-1\right]\right\}, \tag{40}$$

$$\dot\Omega_2=\left(\frac{a_3^2+a_1^2}{a_3^2-a_1^2}\right)\left\{2\Omega_2\left[\frac{\dot a_1}{a_1}-\frac{a_3\dot a_3}{a_3^2+a_1^2}-\frac{1}{a_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{a_3^2a_1}{a_3^2+a_1^2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\Omega_3\Omega_1\left[\frac{4a_2^4}{(a_3^2+a_2^2)(a_1^2+a_2^2)}-1\right]\right\}, \tag{41}$$

$$\dot\Omega_3=\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2-a_2^2}\right)\left\{2\Omega_3\left[\frac{\dot a_2}{a_2}-\frac{a_1\dot a_1}{a_1^2+a_2^2}-\frac{1}{a_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{a_1^2a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\Omega_1\Omega_2\left[\frac{4a_3^4}{(a_1^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2)}-1\right]\right\}. \tag{42}$$

Кроме того, для несжимаемой массы можно получить еще уравнение для давления, используя (37)—(39) и (27а)

$$\frac{2p_0}{\rho} = \left[\sum_1^3 a_i^{-2}\right]^{-1}\left\{4 + \sum_1^3\left(\frac{\dot a_i}{a_i}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left[\Omega_1^2\frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2} + \Omega_2^2\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2 + a_3^2} + \Omega_3^2\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}\right]\right\}. \tag{43}$$

Зная $a_i(t)$ и $\Omega_i(t)$, с помощью (34) находим и $\lambda_i(t)$.

Интегралы момента и энергии принимают вид

$$l_1 = \Omega_1\frac{(a_2^2 - a_3^2)^2}{a_2^2 + a_3^2};\quad l_2 = \Omega_2\frac{(a_1^2 - a_3^2)^2}{a_1^2 + a_2^2};\quad l_3 = \Omega_3\frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{a_1^2 + a_2^2}, \tag{44}$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_1^3 \dot a_i^2 + \frac{1}{2}(\vec\Omega\vec l) - 2J \text{ (для несжимаемой массы).} \tag{45}$$

Движение безвихревых эллипсоидов происходит таким образом, что в любой момент времени векторы $\vec\Omega$ и $\vec\xi$ образуют развернутый угол (рис. 1). Существует также потенциал скоростей φ* ($\vec u^{(0)} = \operatorname{grad}\varphi$)

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_1^3 x_i^2\frac{\dot a_i}{a_i} + \Omega_1\frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2 + a_3^2}x_2x_3 + \Omega_2\frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2 + a_1^2}x_1x_3 + \Omega_3\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}x_1x_2. \tag{46}$$

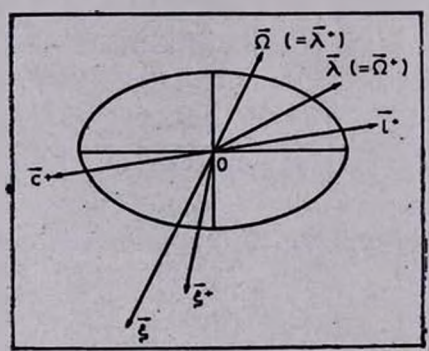

Рис. 1. Схема взаимной ориентации векторов в безвихревом и безмоментном (+) эллипсоидах Дирихле. Между векторами $\vec\Omega$ ($=\vec\lambda^+$) и $\vec\xi$, $\vec l$ и $\vec c$ углы в 180°.

б). Рассмотрим теперь эллипсоиды, сопряженные безвихревым. Основным свойством таких эллипсоидов является то, что все они имеют равный нулю момент вращения. В самом деле: если у безвихревых фигур рав-

* Не путать это φ с гравитационным потенциалом (2).

ны нулю компоненты c_i, то согласно *принципу обмена* (32), у сопряженных им фигур равны нулю все компоненты момента вращения l_i^+.

«Безмоментные» и безвихревые эллипсоиды описываются одинаковым числом переменных. Чтобы получить для первых полную систему уравнений, следует заменить Ω_i на λ_i^+ в (37)—(43) (для сжимаемых в (37)—(42)). Кроме того, вместо равенств (34) в данном случае следует опираться на

$$\Omega_i^+ = 2\frac{a_j a_k}{a_j^2 + a_k^2}\lambda_i^+. \tag{47}$$

Взаимное расположение векторов $\vec{\Omega}^+$, $\vec{\xi}^+$ и $\vec{\lambda}^+$ у фигур с нулевым моментом показано на рис. 1.

Любой эллипсоид из класса безвихревых или «безмоментных» всегда будет принадлежать только своему классу; действительно, вектор $\vec{l}$ и величина $|\vec{c}|$ являются интегралами движения.

Безвихревые и «безмоментные» эллипсоиды Дирихле существуют только тогда, когда либо все компоненты векторов $\vec{\Omega}(t)$ и $\vec{\lambda}(t)$ отличны, вообще говоря, от нуля и поэтому оба эти вектора не могут оставаться с течением времени ни в одной из главных плоскостей эллипсоида, либо когда отличны от нуля лишь по одному компоненту у этих векторов, т. е. $\vec{\Omega}(t)$ и $\vec{\lambda}(t)$ всегда совпадают с одной из осей симметрии. Дело в том, что только для этих двух случаев существует замкнутая система уравнений движения.

4. *Безвихревые и «безмоментные» эллипсоиды Римана с наклонным положением оси вращения.* Будем теперь считать в уравнениях (37)—(42) все величины независимыми от времени. В этом случае последние три уравнения приводятся к виду

$$\Omega_2\Omega_3\left[\frac{4a_1^4}{(a_2^2+a_1^2)(a_3^2+a_1^2)} - 1\right] = \Omega_1\Omega_3\left[\frac{4a_2^4}{(a_3^2+a_2^2)(a_1^2+a_2^2)} - 1\right] =$$

$$= \Omega_1\Omega_2\left[\frac{4a_3^4}{(a_1^2+a_3^2)(a_2^2+a_3^2)} - 1\right] = 0. \tag{48}$$

Из этих уравнений видно, что отличие от нуля всех трех выражений в квадратных скобках привело бы к противоречию, так как тогда для двух отношений полуосей имелось бы три уравнения. Отсюда следует, что из трех компонентов Ω_i не более чем два могут быть отличными от нуля. При-

нимая во внимание (34), заключаем: из трех пар (Ω_1, λ_1), (Ω_2, λ_2), (Ω_3, λ_3) не более чем две могут быть отличными от нуля*. Случай, когда только одна пара (Ω_i, λ_i) отлична от нуля, исследован (Введение), поэтому будем рассматривать эллипсоиды, для которых

$$\Omega_1 = \lambda_1 = 0; \quad (\Omega_2, \lambda_2) \neq 0; \quad (\Omega_3, \lambda_3) \neq 0. \tag{49}$$

Если условие (49) выполняется, то уравнения (41), (42) тождественно удовлетворяются, а (40) дает соотношение

$$(1 + n^2)\left(1 + \frac{a_3^2}{a_1^2}\right) = 4, \tag{50}$$

где обозначено

$$n = \frac{a_2}{a_1}, \text{ причем } 1 \leqslant n^2 \leqslant 3. \tag{51}$$

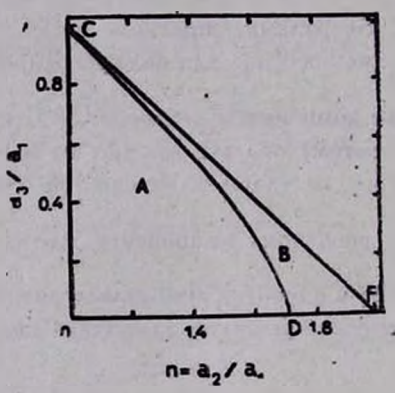

Рис. 2. Кривая CD на плоскости $(a_2/a_1, a_3/a_1)$ представляет геометрическое место точек, на котором находятся безвихревые эллипсоиды и сопряженные им фигуры с нулевым моментом вращения. Область OCF занята эллипсоидами Римана I типа (по Чандрасекару). A и B — это области, в каждой из которых завихренности и моменты вращения не изменяют своего знака. При переходе через кривую CD обе величины изменяют свой знак. Для любого эллипсоида вне границы CD завихренность и момент полярны по знаку.

(50) налагает геометрическое ограничение на эллипсоид, определяя единственное соотношение между a_3/a_1 и n. Последовательность безвихревых фигур является однопараметрической и на плоскости $(a_3/a_1, n)$ находится на кривой, показанной на рис. 2.

* Это частный случай известной [3] теоремы Римана, утверждающей то же самое для любых стационарных эллипсоидов.

Уравнения (37)—(39) приводятся к виду

$$\frac{2p_0}{\rho} = 2A_1a_1^2 - a_1^2\left\{\Omega_2^2\left[1-\left(\frac{2a_3^2}{a_1^2+a_3^2}\right)^2\right] + \Omega_3^2\left[1-\left(\frac{2a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\right)^2\right]\right\} =$$

$$= 2A_2a_2^2 - a_2^2\Omega_3^2\left[1-\left(\frac{2a_1^2}{a_2^2+a_1^2}\right)^2\right] = 2A_3a_3^2 - a_3^2\Omega_2^2\left[1-\left(\frac{2a_1^2}{a_3^2+a_1^2}\right)^2\right]. \tag{52}$$

Этих уравнений достаточно для определения p_0, Ω_2^2 и Ω_3^2 как неизвестных функций от отношений полуосей эллипсоида. Так, из них находим I ... I — определитель

$$\Omega_2^2 = 2\begin{vmatrix} B_{23}\alpha_3 \\ B_{13}\beta_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 \\ \beta_2\beta_3 \end{vmatrix}; \qquad \Omega_3^2 = 2\begin{vmatrix} \alpha_2 B_{23} \\ \beta_2 B_{13} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} \alpha_2\alpha_3 \\ \beta_2\beta_3 \end{vmatrix}, \tag{53}$$

где

$$B_{13} = \frac{A_1a_1^2 - A_3a_3^2}{a_1^2 - a_3^2}; \qquad B_{23} = \frac{A_2a_2^2 - A_3a_3^2}{a_2^2 - a_3^2};$$

$$\alpha_2 = (3-n^2)/4; \quad \alpha_3 = n^3/(1+n^3); \tag{54}$$

$$\beta_2 = 1 + \frac{3-n^3}{4(1+n^3)}; \quad \beta_3 = -\frac{1+3n^2}{2(1+n^2)}.$$

Графики величин Ω_2^2, Ω_3^2 и $|\vec{\Omega}|^2$ показаны на рис. 3.

При $n=1$ получается безвихревая сфера. В инерциальной системе эта сфера, естественно, покоится, но как первый член безвихревой последовательности ее следует наблюдать из системы, вращающейся с угловой скоростью $|\vec{\Omega}| = 4/\sqrt{15}$. Ось вращения сферы направлена под углом 45° к оси Ox_2 собственной системы отсчета (рис. 4). Увеличивая параметр n, мы деформируем сферу в трехосный эллипсоид. При этом, как видно из рисунков, изменится величина вектора $\vec{\Omega}$ и его ориентация. Отличительным свойством безвихревых фигур является чрезвычайно большая чувствительность их формы к изменению модуля $\vec{\Omega}$ (этим свойством выделяются и безвихревые S-эллипсоиды [3]). Как видно из рис. 3, величина Ω^2 почти не изменяется от сферы до сильно сплюснутого эллипсоида с $a_3/a_1 \approx 0.27$. Сходным образом зависит от n и величина $|\vec{\xi}|$, поэтому фигура очень чувствительна и к интенсивности внутренних течений.

При $n^2 \to 3$ получается безвихревой диск, ось вращения которого имеет наклон $\approx 30°$.

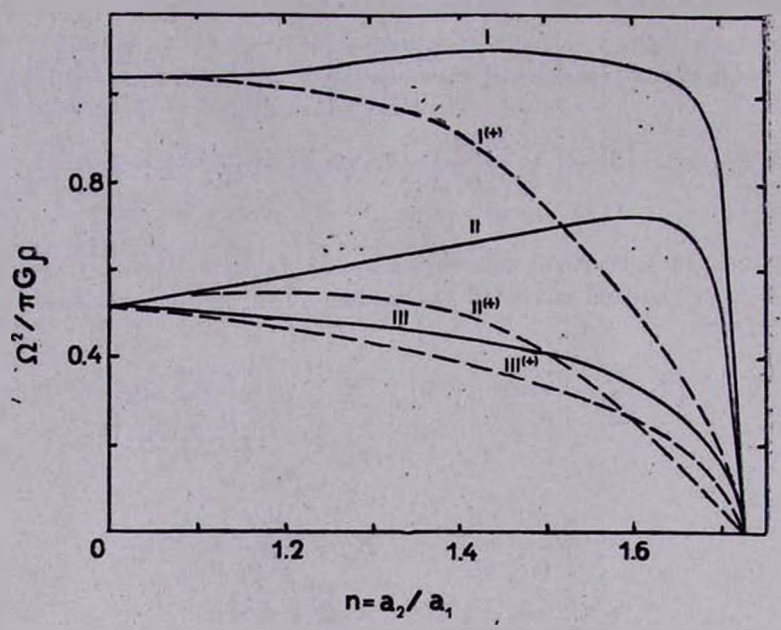

Рис. 3. Квадраты угловой скорости и ее компонент вдоль безвихревой (сплошная линия) и «безмоментной» (штрихи) последовательности. Цифрами I, II и III отмечены графики величин Ω^2, Ω_2^2 и Ω_3^2 соответственно.

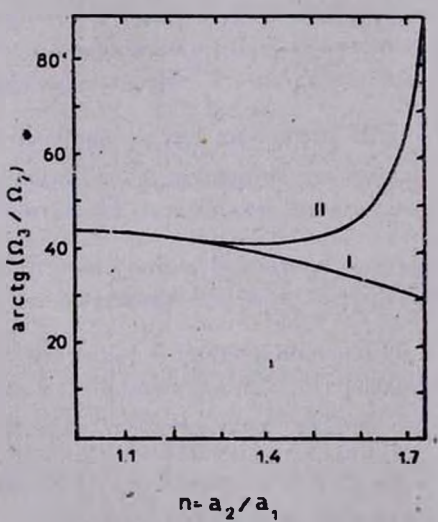

Рис. 4. Угол наклона оси вращения в собственной системе отсчета эллипсоидов вдоль безвихревой (кривая I) и «безмоментной» (кривая II) последовательностей.

Возвращаясь к уравнениям (48) и (52) и делая операцию сопряжения, переходим от безвихревых эллипсоидов к «безмоментным». Последние также образуют однопараметрическую последовательность (рис. 2), и все их характеристики можно выразить через уже найденные характеристики безвихревых фигур.

$$\xi_1^{(0)+}=0;\ \xi_2^{(0)+}=-\Omega_2\frac{(n^2-1)^2}{2\sqrt{(3-n^2)(1+n^2)}};\ \xi_3^{(0)+}=-\Omega_3\frac{(n^2-1)^2}{n(1+n^2)},\quad (55)$$

$$\Omega_1^+=0;\ \Omega_2^+=\frac{\Omega_2}{2}\sqrt{(3-n^2)(1+n^2)};\quad \Omega_3^+=\Omega_3\frac{2n}{1+n^2},\quad (56)$$

причем Ω_2 и Ω_3 даны в (53). Графики величин из (56) см. на рис. 3.

5. *Заключение.* Безвихревые эллипсоиды выделяются двумя свойствами: потенциальностью (отсутствием циркуляции) течений с точки зрения наблюдателя в инерциальной системе отсчета и очень малой чувствительностью величины угловой скорости от формы фигуры в широком диапазоне сплюснутостей. Последнее свойство находит отражение в особой зависимости от сплюснутости и величины момента вращения. Имеется надежда объяснить этими свойствами безвихревых фигур особенности динамики некоторых из эллиптических галактик.

Автор признателен рецензенту за замечания по содержанию статьи.

Астрофизический институт
АН Каз.ССР

ON THE IRROTATIONAL AND THE ZERO ANGULAR MOMENTUM ELLIPSOIDS IN THE DIRICHLET PROBLEM

B. P. KONDRAT'YEV

Two new exact solutions have been found in the Dirichlet problem on the oscillations of self-gravitating incompressible (compressible) homogeneous ellipsoidal configurations. These solutions describe the ellipsoids with zero vorticity and the ellipsoids with zero angular momentum (which are adjoint in the sense of a theorem due to Dedekind). Eight (seven) integrals for the motions exist. It has been shown that for the case of the ellipsoidal figures of equilibrium (the Riemann ellipsoids) with oblique rotation these two types of ellipsoids also exist.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. L. Dirichlet, J. Reine*, Angew. Math., 58, 181, 1860.
2. *Б. Риман*, Сочинения, Гостехтеориздат, М.—Л., 1948, стр. 339.
3. *С. Чандрасекар*, Эллипсоидальные фигуры равновесия, Мир, М., 1973.
4. *L. F. Rossner*, Ap. J., 148, 825, 1967.
5. *M. Fujimoto*, Ap. J., 152, 523, 1968.