

АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С САМОВОЗДЕЙСТВИЕМ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

О.В. БАГДАСАРЯН¹, В.А. ВАРДАНИЯН², А.В. ДАРЬЯН^{3*}

¹Национальный политехнический университет Армении, Ереван, Армения

²Российско–Армянский университет, Ереван, Армения

³Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

*e-mail: daryan.ara@gmail.com

(Поступила в редакцию 26 февраля 2020 г.)

В данной статье описывается применение метода фазовой плоскости для анализа поведения стационарных плоских гармонических электромагнитных волн. Метод фазовой плоскости позволяет качественно описать все возможные решения нелинейного дифференциального уравнения Гельмгольца без проведения численного интегрирования. Представлены все типы фазовых портретов для волн в средах с самодействием и обсуждается их физическая интерпретация. Рассмотрение проводится на модели кубической нелинейности без уточнения физического механизма нелинейности. Обсуждаются особенности нелинейного случая. Описано явление самоограничения мощности передаваемой волны в среде с отрицательной нелинейностью.

1. Введение

Метод фазовой плоскости – это графический метод, позволяющий качественно анализировать поведение систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка [1,2]. Под фазовой плоскостью понимается плоскость, каждая точка которой однозначно определяет состояние (фазу) системы.

Основным преимуществом метода фазовой плоскости является его применимость к анализу как линейных, так и нелинейных систем. Некоторые важные свойства нелинейных систем, которые невозможно или трудно исследовать аналитически, поддаются качественному исследованию и интерпретации путём графического анализа на фазовой плоскости.

Метод фазовой плоскости в теории распространения электромагнитных волн был разработан в рамках метода единого выражения (МЕВ) [3,4]. Метод единого выражения разработан для решения стационарной краевой задачи в электродинамике. Поле в МЕВ представляется в виде единого выражения,

которое полностью описывает результирующую амплитуду и фазу электромагнитной волны и, следовательно, не требует выполнения принципа суперпозиции, в отличие от обычного подхода в виде суперпозиции встречных волн. Таким образом, метод пригоден для анализа волновых процессов в средах с самовоздействием [3,4], включая анализ методом фазовой плоскости [4–6].

Хотя метод фазовой плоскости для колебательных систем хорошо развит, его применение к волновым системам требует собственного подхода. Причина в том, что в случае колебательных систем анализируется временное поведение амплитуды, а фазовые координаты представляют собой амплитуду колебания и его производную по времени, тогда как в случае волновых систем анализируется пространственное поведение амплитуды и, соответственно, фазовые координаты являются амплитудой колебаний и их производной по пространственной координате. Поэтому аналогия с теорией колебаний не помогает выявить связь фазовых портретов с физическими условиями протекания волновых процессов и объяснить их особенности. В данной статье описан метод построения и анализа фазовых портретов стационарных плоских гармонических электромагнитных волн в средах с самовоздействием. Представлены все типы фазовых портретов для волн в средах с кубической нелинейностью и обсуждена их физическая интерпретация.

2. Метод фазовой плоскости в МЭВ

Распространение плоской гармонической волны в среде с диэлектрической проницаемостью ε описывается уравнением Гельмгольца, которое в одномерном случае имеет вид:

$$\frac{d^2 \dot{E}_x(z)}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon \dot{E}_x(z) = 0, \quad (1)$$

где $k_0 = \omega/c$ – волновое число в свободном пространстве, комплексная функция $\dot{E}_x(z)$ – линейно поляризованная вдоль оси x составляющая электрического поля, распространяющегося вдоль оси z . Временная зависимость вида $e^{i\omega t}$ подразумевается, но не участвует в дальнейшем анализе. Диэлектрическая проницаемость среды ε является действительной величиной для сред без усиления и без потерь. В случае сред с самовоздействием диэлектрическая проницаемость зависит от интенсивности волны.

Решение волнового уравнения в МЭВ представляется в виде [3,4]:

$$\dot{E}(z) = U(z) \cdot \exp(-iS(z)), \quad (2)$$

где $U(z)$ и $S(z)$ – реальные величины, описывающие пространственные распределения амплитуды и фазы, соответственно. Подставив (2) в уравнение Гельмгольца (1), получим систему дифференциальных уравнений для $U(z)$ и $S(z)$:

$$\frac{dU}{dk_0 z} = Y, \quad (3)$$

$$\frac{dY}{dk_0 z} = \frac{R^2 - \varepsilon(U^2)U^4}{U^3}, \quad (4)$$

где

$$P = U(z)^2 \frac{dS(z)}{dk_0 z} \quad (5)$$

постоянная, пропорциональная плотности потока энергии в среде [3–6].

Система уравнений (3,4) даёт возможность проведения качественного анализа методом фазовой плоскости [4–6]. Чтобы получить фазовые траектории $Y(U)$ системы, необходимо исключить координату z . Это можно сделать, разделив уравнение (4) на (3) после чего получаем:

$$\frac{dY}{dU} = \frac{P^2 - \varepsilon(U^2) \cdot U^4}{U^3 \cdot Y}. \quad (6)$$

Интегрируя (6), получаем уравнение фазовых траекторий:

$$Y^2 + \frac{P^2}{U^2} + 2 \int \varepsilon(U^2) U \cdot dU = C, \quad (7)$$

где C – постоянная интегрирования, которая определяет конкретную траекторию в фазовом портрете.

Координаты особых точек (U_s, Y_s) , то есть точек, в которых направление касательной к фазовой траектории не определено [1,2], в нашем случае даются соотношением:

$$\begin{cases} P^2 = \varepsilon(U_s^2) \cdot U_s^4, \\ Y_s = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Фазовый портрет представляет собой семейство фазовых траекторий, описываемых уравнением (7) для фиксированного P и различных значений параметра C , включая особые точки (8).

Интегрирование (3) вдоль фазовой траектории дает неявную зависимость U от z :

$$(z - z_0)k_0 = \int_{U_0}^U \frac{dU}{Y(U)}, \quad (9)$$

где функция $Y(U)$ определяется формулой (7).

Физическая интерпретация фазовых портретов волн в самодействующих средах не всегда очевидна. Поэтому сначала рассмотрим фазовые портреты волн в линейных однородных средах. Физическая интерпретация в этом случае довольно проста, поскольку все решения волнового уравнения в линейных

однородных средах хорошо известны. Это рассмотрение послужит основой для анализа фазовых портретов в случае самовоздействия электромагнитных волн.

3. Фазовые портреты систем, описывающих волны в линейных однородных средах

3.1. Случай нулевого потока энергии ($P = 0$)

Если $P = 0$, то из (5) следует, что на участках, где $U(z) \neq 0$ наблюдаются синхронные колебания в среде. В точках, где $U(z) = 0$ и $Y(z) \neq 0$, фаза меняется на π . Уравнение фазовых траекторий (7) в случае $P = 0$ и $\varepsilon = \text{const}$ принимает форму

$$Y^2 + \varepsilon U^2 = C, \quad (10)$$

и координаты (8) особой точки:

$$U_s = 0, Y_s = 0. \quad (11)$$

Форма фазовых траекторий (10) зависит от знака диэлектрической проницаемости. Это эллипсы (если $\varepsilon > 0$) или гиперболы (если $\varepsilon < 0$). Поэтому мы обсудим эти случаи по-отдельности.

Случай $P = 0$, $\varepsilon > 0$. Фазовый портрет в среде с положительной диэлектрической проницаемостью состоит из эллипсов с особой точкой типа «центр» в нулевой точке, как показано на рисунке 1. Эллипсам соответствуют стоячие волны, образованные суперпозицией двух встречных волн с равными амплитудами. Каждый эллипс соответствует определенной амплитуде волны в соответствии с величиной константы C . Один виток вдоль фазовой траектории соответствует длине волны λ . Длина волны в линейном случае не зависит от амплитуды волны. Это свойство аналогично изохронизму маятника [1]. Волны в нелинейной среде не обладают этим свойством. Изменение знака U при пересечении оси Y означает изменение фазы на π в узлах электрического поля. Особая точка типа «центр» соответствует отсутствию поля.

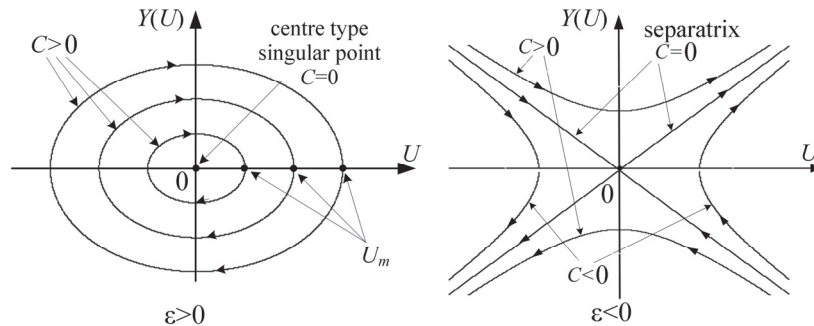


Рис.1. Фазовый портрет системы (3,4) для линейной однородной среды без потерь или усиления в случае $P = 0$.

Случай $P = 0$, $\varepsilon < 0$. Фазовый портрет в однородных средах с отрицательной диэлектрической проницаемостью состоит из двух пар гипербол (рис.1). Сепаратрисы – это прямые, проходящие через особую точку типа «седло» (0.0). Поскольку амплитуда U и ее производная Y не ограничены на фазовых траекториях, фазовые траектории имеют физический смысл только в ограниченной области фазового пространства.

В случае $C \neq 0$ ограниченная область фазового пространства означает ограниченный сегмент в физическом пространстве, то есть на оси z . Таким образом, фазовые траектории волн с $C \neq 0$ имеют место только в слоях конечной толщины. Физически эти траектории реализуются путем падения волн с одинаковыми амплитудами с обеих сторон слоя. При этом поле в среде является суперпозицией экспоненциально убывающих полей. Выбор режима осуществляется путем установления граничных условий на соответствующей фазовой траектории [4–6].

В случае $C = 0$ любой отрезок фазовой траектории (сепаратрисы), содержащий особую точку, соответствует неограниченному отрезку на оси z , поскольку интеграл (9) расходится. Таким образом, сепаратриса может быть реализована как в ограниченном слое, так и в полупространстве. Последнее соответствует полному отражению от полупространства с отрицательной диэлектрической проницаемостью, где поле экспоненциально уменьшается до нуля при $z \rightarrow \infty$.

3.2. Случай ненулевого потока энергии ($P \neq 0$)

Для линейной среды ($\varepsilon = \text{const}$) из (7) имеем следующее выражение для фазовых траекторий:

$$Y^2 + \frac{P^2}{U^2} + \varepsilon U^2 = C. \quad (12)$$

Координаты особых точек для этого случая получаются из (8):

$$U_s = \pm \sqrt[4]{P^2 / \varepsilon}, \quad Y_s = 0. \quad (13)$$

Случай $P \neq 0$, $\varepsilon > 0$. Фазовый портрет в среде с положительной диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon > 0$) состоит из пар замкнутых кривых и двух особых точек типа «центр», как показано на рис.2 (показана правая ветвь). Левая и правая ветви каждой фазовой траектории описывают волны с противоположными знаками (сдвиг фазы на π).

Замкнутые траектории соответствуют суперпозиции встречных волн с разными амплитудами. Здесь, в отличие от случая стоячих волн ($P = 0$), один оборот вдоль фазовой траектории соответствует расстоянию, равному половине длины волны. Особая точка соответствует волне с постоянной амплитудой U_s , из чего следует, что в этом случае мы имеем бегущую волну. Действительно, из

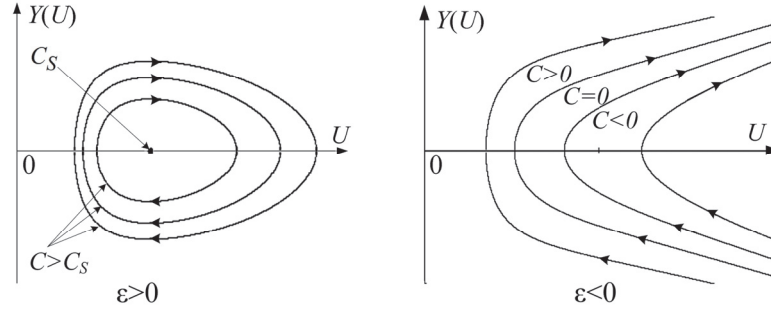


Рис.2. Фазовый портрет системы (3,4) для линейной однородной среды без потерь или усиления в случае $P \neq 0$.

(5), учитывая (4), получаем фазовое распределение: $S(z) = -k_0 \sqrt{\varepsilon} \cdot z$ (или $S(z) = k_0 \sqrt{\varepsilon} \cdot z$).

Случай $P \neq 0$, $\varepsilon < 0$. Как видно из (13), в случае отрицательной диэлектрической проницаемости особой точки нет, т.е. нет бегущей волны. Фазовый портрет состоит из пар разомкнутых кривых (Рис.2, показана правая ветвь). Поскольку значения U и Y на фазовых траекториях не ограничены, фазовые траектории имеют физический смысл только в ограниченной области фазового пространства. Любой конечный отрезок фазовой траектории соответствует ограниченному интервалу z . Это указывает на то, что в средах с отрицательной диэлектрической проницаемостью случай $P \neq 0$ возможен только в слоях конечной толщины.

4. Фазовые портреты систем, описывающих волны в изначально однородных средах с кубической нелинейностью

Зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности поля в случае кубической нелинейности имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 U^2, \quad (14)$$

где ε_0 – начальная диэлектрическая проницаемость среды (при $U = 0$), а ε_2 – параметр нелинейности среды.

Уравнение фазовых траекторий и координат особых точек U_s , Y_s получим из (7) и (8) с учетом (14):

$$Y^2 + \frac{P^2}{U^2} + \varepsilon_0 U^2 + \varepsilon_2 \frac{U^4}{2} = C, \quad (15)$$

$$P^2 - \varepsilon_0 U_s^4 - \varepsilon_2 U_s^6 = 0, \quad (16)$$

$$Y_s = 0. \quad (17)$$

Положение особых точек и тип фазового портрета в случае среды с кубической нелинейностью зависят от значения P и знаков ε_0 и ε_2 . Все возможные случаи даны в таблице 1, которая содержит координаты, число и типы особых

Табл.1.

Sign of $\varepsilon, \varepsilon_0$	Picture number	Flow	Singular points			$\varepsilon(U_S)$
			Coordinates	number	type	
$\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_2 > 0$	Fig.1, $P = 0$	$P = 0$	$U_S = 0, Y_S = 0$	1	center	$\varepsilon = \varepsilon_0$
	Fig.2, $P \neq 0$	$P \neq 0$	$U_S = \pm a, Y_S = 0$	2	center	$\varepsilon > 0$
$\varepsilon_0 < 0, \varepsilon_2 < 0$	Fig.1, $P = 0$	$P = 0$	$U_S = 0, Y_S = 0$	1	saddle	$\varepsilon = \varepsilon_0$
	Fig.2, $P \neq 0$	$P \neq 0$	-----	0	-----	-----
$\varepsilon_0 < 0, \varepsilon_2 > 0$	Fig.3	$P = 0$	$U_{S0} = 0, Y_S = 0$ $U_S = \pm \phi, Y_S = 0$	1 2	saddle center	$\varepsilon = \varepsilon_0$ $\varepsilon = 0$
		$P \neq 0$	$U_S = \pm a, Y_S = 0$	2	center	
$\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_2 < 0$	Fig.4	$P = 0$	$U_{S0} = 0, Y_S = 0$ $U_S = \pm \phi, Y_S = 0$	1 2	center saddle	$\varepsilon = \varepsilon_0$ $\varepsilon = 0$
		$P < \gamma$	$U_{S0} = \pm a, Y_S = 0$ $U_S = \pm b, Y_S = 0$	2 2	center saddle	$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$
			$U_S = \pm \phi, Y_S = 0$	2	saddle	
		Fig.5, $P = \gamma$	$U_S = \pm \phi, Y_S = 0$	2	cusp	$\varepsilon = \varepsilon_0/3$
		$P > \gamma$	-----	0	-----	-----

точек, а также значение диэлектрической проницаемости в особой точке.

В таблице приняты следующие обозначения: $\phi = \sqrt{-\varepsilon_0 / \varepsilon_2}$, $\varphi = \sqrt{-2\varepsilon_0 / 3\varepsilon_2}$, $\gamma = \sqrt{\varepsilon_0^3 / 3\varepsilon_2^2}$, a и b являются положительными решениями уравнения (16). Каждому случаю, указанному в таблице 1 соответствует конкретный тип фазового портрета. Для всех портретов с $P \neq 0$ на рисунках показана только правая ветвь, соответствующая $U > 0$.

4.1. Случай сред с $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_0 < 0, \varepsilon_2 < 0$

Фазовые портреты в этих случаях топологически сходны с соответствующим портретом в линейной среде (рис.1,2). Это связано с соотношением знаков ε_0 и ε_2 , при котором увеличение амплитуды не может изменить знак диэлектрической проницаемости, что изменило бы тип фазового портрета. Все разъяснения, касающиеся физического смысла траекторий в линейном случае, действительны и в этом случае. Распределение амплитуд в нелинейных средах в этих случаях описывается эллиптическими функциями Якоби [4].

4.2. Случай среды с $\varepsilon_0 < 0, \varepsilon_2 > 0$

При $P = 0$ фазовые траектории стоячих волн при малых U (рис.3) напоминают фазовые портреты для линейных сред с $\varepsilon < 0$ (рис.1). При достаточно большом U диэлектрическая проницаемость становится положительной, и поведение поля такое же, как в линейной среде с $\varepsilon > 0$ (рис.1). Все фазовые траектории

локализованы в ограниченной области фазового пространства.

Каждая фазовая траектория, за исключением сепаратрисы и особых точек, описывает периодические стоячие волны в z , которые могут быть реализованы как в ограниченной, так и в неограниченной области физического пространства. Стоячие волны в ограниченной области физического пространства реализуются в результате падения волн с обеих сторон среды. Особая точка типа «центр» описывает синхронные колебания с постоянной амплитудой во всей среде.

Любой сегмент сепаратрисы, содержащий особую точку, соответствует неограниченному отрезку на оси z , то есть описывает полное отражение волны от нелинейного полупространства. Если $C < 0$, наблюдаются две одинаковые моды стоячих волн (для каждого значения C) с противоположными фазами. Пространственный период зависит от значения C , в отличие от волн в линейных средах. Если $C > 0$, существует одна мода стоячей волны с периодическим изменением знака (сдвигом фазы на π) вдоль оси z . Выбор режима осуществляется путем установления граничных условий на соответствующей фазовой траектории [4–6].

При $P \neq 0$ фазовые траектории (рис.3) не обладают какой-либо интересной особенностью и имеют физическую интерпретацию, как в линейном случае с $\varepsilon > 0$ (рис.1). Если $C > C_1$, среда превращается в многослойную структуру со знакопеременной диэлектрической проницаемостью. Особая точка C_S указывает на существование бегущей волны.

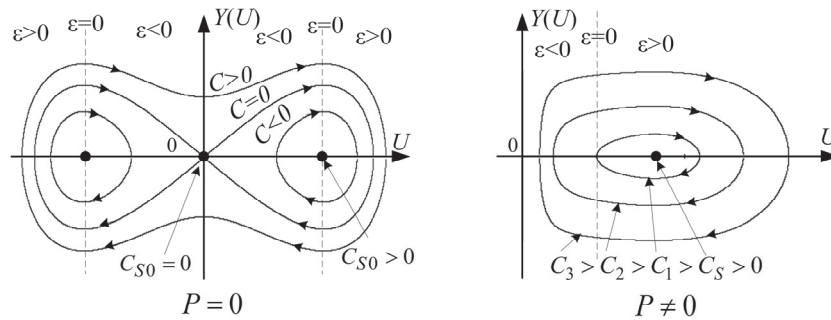


Рис.3. Фазовый портрет системы (3,4) для среды с кубической нелинейностью, когда $\varepsilon_0 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$.

4.3. Случай среды с $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$

Этот случай является наиболее сложным, в котором возможны четыре типа фазового портрета в зависимости от значения P (см. Табл.1).

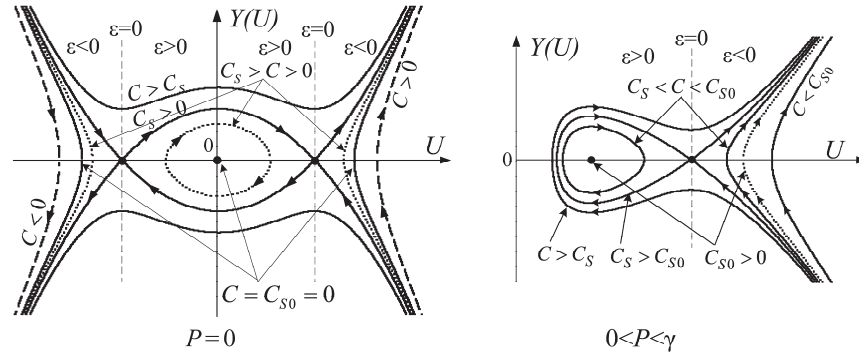


Рис.4. Фазовые портреты системы (3,4) для среды с кубической нелинейностью, когда $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$ в случаях $P = 0$ и $0 < P < \gamma$.

При $P = 0$ фазовые траектории стоячих волн (рис.4) при малых амплитудах поля аналогичны фазовым траекториям стоячих волн в линейной среде с $\varepsilon > 0$ (рис.1). Для больших амплитуд они аналогичны фазовым траекториям стоячих волн в линейной среде с $\varepsilon < 0$ (рис.1) и поэтому имеют физический смысл только в ограниченной области фазового пространства. Любой сегмент сепаратрисы, включающий особую точку, соответствует синхронным колебаниям асимптотически ($z \rightarrow \infty$) постоянной амплитуды.

Стоячие волны реализуются путем падения волн с одинаковой амплитудой на обе стороны ограниченной области физического пространства. Падающие волны малой амплитуды, которые не могут изменить знак диэлектрической проницаемости, возбуждают синхронные колебания с периодическим изменением амплитуды $U(z)$ (пунктирная линия $C_s > C > 0$). Диэлектрическая проницаемость остается положительной. Увеличение амплитуды падающих волн приводит к появлению сегмента сепаратрисы типа глаза. Если прикладываются большие амплитуды, мы попадаем на траекторию с $C < 0$ (пунктирная линия) с аperiodическим поведением. Уменьшая амплитуду, мы сначала достигаем траектории с $C = 0$. Дальнейшее уменьшение приводит к расходящимся ветвям сепаратрисы. Фазовые траектории с $C > C_s$ соответствуют граничным условиям с большими значениями U и Y .

При малых потоках энергии ($0 < P < \gamma$) наблюдается периодическое или аperiodическое распределение амплитуды поля (рис.4). Особая точка типа «центр» описывает бегущую волну, а особая точка типа «седло» описывает асимптотически ($z \rightarrow \infty$) бегущую волну. Если падающая волна имеет малую амплитуду, то мы остаемся в области с $\varepsilon > 0$ и получаем траектории, аналогичные траекториям для сред с $\varepsilon > 0$ (рис.2). Увеличение U преобразует траекторию в замкнутую сепаратрису.

Начиная с достаточно большой амплитуды U , мы попадаем на пунктирную траекторию или правее. Это дает аperiodическое поведение поля.

Уменьшение U превращает траекторию в расходящиеся ветви сепаратрисы. Любым отрезком сепаратрисы, содержащий особую точку, соответствует частичному отражению волны от полупространства.

Выбор режима осуществляется путем установления граничных условий на соответствующей фазовой траектории [4–6]. Наличие разных траекторий с одним и тем же значением C означает возможность бистабильности.

При $P = \gamma$ наблюдается только аperiодическое распределение поля (рис.5) и возникает особая точка типа «клюв». Все траектории могут быть реализованы только в ограниченной области физического пространства. Исключение составляют сегменты сепаратрисы, содержащие особую точку. Этот случай соответствует падению волны на нелинейное полупространство. Здесь нет полного отражения, как в случае линейной среды с $\varepsilon < 0$. Причина этого в том, что вдоль оси z из-за нелинейности устанавливается определенное распределение диэлектрической проницаемости.

При $P > \gamma$ (рис.5) особой точки нет и, соответственно, нет фазовой траектории, соответствующей неограниченной области физического пространства. Это приводит к заключению, что когда волна падает на нелинейное полупространство, происходит самоограничение потока энергии значением $P = \gamma$. Это явление было проанализировано путем прямого интегрирования системы дифференциальных уравнений (3,4) и получено согласие с качественным анализом [4].

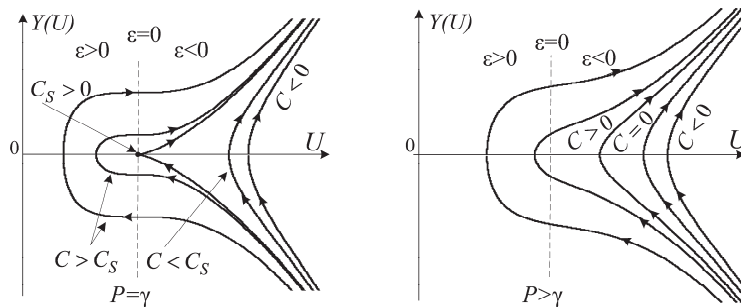


Рис.5. Фазовые портреты системы (3,4) для среды с кубической нелинейностью, когда $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$ в случаях $P = \gamma$, и $P > \gamma$.

5. Заключение

Анализ волновых процессов методом фазовой плоскости, разработанным в рамках МЭВ, показал свою полезность для нахождения и интерпретации всех возможных мод плоских электромагнитных волн в нелинейных средах с самодействием. Анализ показал наличие в нелинейном случае мод стоячей волны с постоянной амплитудой вдоль координаты. Они соответствуют особой точке

типа «центр» в средах с положительной нелинейностью. В средах с отрицательной нелинейностью особая точка типа седло описывает синхронные колебания с асимптотически ($z \rightarrow \infty$) постоянной амплитудой.

При наличии потока энергии бегущие волны соответствуют особым точкам, как и в линейном случае. Но в нелинейном случае существуют также фазовые портреты с особыми точками типа седло (для малых потоков) и типа клява (для потоков $P = \gamma$). Они описывают асимптотически ($z \rightarrow \infty$) бегущую волну. В среде с отрицательной нелинейностью наблюдается также явление самоограничения потока энергии прошедшей волны величиной $P = \gamma$.

Во всех рассмотренных случаях требуемый режим может быть реализован путем установления граничных условий в некоторой точке на соответствующей фазовой траектории.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин.** Теория колебаний, Москва: Наука, 1981. 568с.
2. **D.W. Jordan, P. Smith.** Nonlinear Ordinary Differential Equations, Oxford, 2007.
3. **H.V. Baghdasaryan, T.M. Knyazyan.** Optical and Quantum Electronics, **31**, 1059 (1999).
4. **H.V. Baghdasaryan.** Basics of the Method of Single Expression: New Approach for Solving Boundary Problems in Classical Electrodynamics. Monograph. Yerevan, Chartaraget, 2013, 164 p.
5. **H.V. Baghdasaryan, T.M. Knyazyan, A.A. Mankulov.** ICTON 2004, Conference Proceedings, 319, Poland, 2004.
6. **A.V. Daryan, H.V. Baghdasaryan, T.M. Knyazyan.** IRPhE2014, Proceedings of the International Conference on “Microwave and THz Technologies and Applications”, Armenia, Aghveran, “Gitutun”, 106, 2014.

PHASE-PLANE ANALYSIS OF SOLUTIONS OF THE HELMHOLTZ EQUATION FOR ELECTROMAGNETIC WAVES IN MEDIA WITH SELF-ACTION

H.V. BAGHDASARYAN, V.A. VARDANYAN, A.V. DARYAN

This article describes the application of the phase plane method for analyzing the behavior of stationary plane harmonic electromagnetic waves. The phase plane method allows a qualitative description of all possible solutions of Helmholtz nonlinear differential equation without performing numerical integration. All types of phase portraits for waves in the media with self-action are presented and their physical interpretation is discussed. Consideration is performed on the model of cubic nonlinearity without specifying the physical mechanism of nonlinearity. Peculiarities of the nonlinear case are discussed. The phenomenon of self-limitation of the transmitted wave power in a medium with negative nonlinearity is described.