Известия НАН Армении, Физика, т.55, №4, с.455–464 (2020)

УДК 536.145

КВАНТОВАЯ ЗАПУТАННОСТЬ В СПИНОВЫХ ДИМЕРАХ: ЭФФЕКТЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И НЕОДНОРОДНЫХ g-ФАКТОРОВ

Ж.А. АДАМЯН[1,2*], С.А. МУРАДЯН[1], В.Р. ОГАНЯН[1]

[1]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
[2]Институт синхротронных исследований КЕНДЛ, Ереван, Армения

[*]e-mail: zhirayrad99@gmail.com

(Поступила в редакцию 27 февраля 2020 г.)

В работе рассматриваются двухкомпонентные системы модели Гейзенберга со спином-1/2 и смешанным спином-(1/2,1) и их квантовая запутанность, в частности зависимость запутанности от различных характеристик системы и внешнего магнитного поля. Квантовая запутанность в этой работе определяется двумя разными методами, а именно – «Отрицательность» и «Совпадение». Рассматривается зависимость соответствующих величин от множителей Ланде спинов, постоянных анизотропии системы и обменного взаимодействия частиц.

1. Введение

Квантовая запутанность, как одна из самых интригующих особенностей квантовой теории, в последнее время привлекает все больше внимания, поскольку она является ценным ресурсом в квантовой коммуникации и обработке информации [1–5]. Она лежит в основе схем квантовой телепортации [6–11], квантовых вычислений [12–14] и квантовой криптографии [15–17]. С другой стороны, понимание квантовой запутанности привело к прогрессу в изучении свойств черных дыр методами квантовой теории поля. Более того, запутанность обеспечивает новую перспективу для понимания квантовых фазовых переходов и коллективных явлений в физике многих тел и конденсированных сред. Запутанность является, пожалуй, самой фундаментальной, согласно Шредингеру, характеристикой, отличающей квантовую физику от классического мира. Гейзенберговские системы спиновых цепочек предоставляют довольно удобные условия для создания запутанных состояний и управления ими [18–21]. Было предложено создать квантовый компьютер с использованием цепочки Гейзенберга в различных системах, таких как квантовые точки [22], электронный спин [23], сверхпроводники [24]. Поэтому представляет большой интерес изучение запутанности в различных спиновых системах.

В этой работе рассматриваем две системы модели Гейзенберга: спин-1/2

полностью анизотропный *XYZ* димер с двумя разными, но изотропными множителями Ланде, и *Z* анизотропный димер со смешанным спином-(1/2,1). В работе решается задача отыскания оптимальных параметров для создания запутанных состояний и управления ими посредством магнитного поля.

2. Основные характеристики исследуемых систем

2.1. Гейзенберговская спин-1/2 двухчастичная система

Для спин-1/2 двухчастичной системы Гамильтониан будет иметь следующий вид [25]:

$$H = J((1+\gamma)S_1^x S_2^x + (1-\gamma)S_1^y S_2^y + \Delta S_1^z S_2^z) + D_z(S_1^x S_2^y - S_1^y S_2^x) - B(g_1 S_1^z + g_2 S_2^z), \quad (1)$$

где $S_{1,2}^{x,y,z}$ компоненты спин-1/2 оператора, g_1 g_2 множители Ланде соответственно первой и второй частиц, J обменное взаимодействие между частицами, Δ и γ постоянные Z и XY анизотропии, B магнитное поле направленное по оси z.

Для собственных значений и собственных функций гамильтониана имеем следующие выражения

$$\varepsilon_{1,2} = -\frac{J\Delta}{4} \mp \frac{1}{2}\sqrt{B^2 g_-^2 + D_z^2 + J^2}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{3,4} = \frac{J\Delta}{4} \mp \frac{1}{2}\sqrt{B^2 g_+^2 + J^2\gamma^2}, \quad (3)$$

$$\Psi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1+A_\mp^2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + A_\mp |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (4)$$

$$\Psi_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{1+B_\mp^2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + B_\mp |\downarrow\downarrow\rangle), \quad (5)$$

где введены следующие обозначения

$$A_\mp = \frac{Bg_- \mp \sqrt{B^2 g_-^2 + J^2 + D_z^2}}{\sqrt{J^2 + D_z^2}}, \quad (6)$$

$$B_\mp = \frac{Bg_+ \mp \sqrt{B^2 g_+^2 + J^2\gamma^2}}{J\gamma}, \quad (7)$$

$$g_\pm = g_1 \pm g_2. \quad (8)$$

Зависимость собственных значений энергии от магнитного поля показана на Рис.1. Как видно из графика, существует значение магнитного поля, при котором наблюдается переход между основными состояниями Ψ_1 и Ψ_3. Исходя из того, что собственные значения и собственные функции гамильтониана симметричны

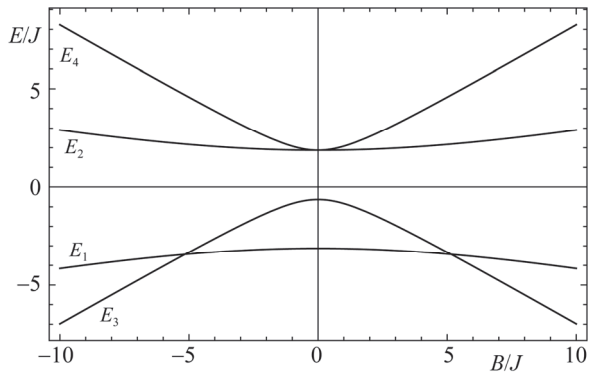

Рис.1. Зависимость собственных значений энергии от магнитного поля при $\Delta = 0.5$, $\gamma = 0.5$, $D = 0.1$, $J = 5$, $g_1 = 1$, $g_2 = 0.5$.

по отношению к знаку магнитного поля, будем рассматривать только положительные поля. Значение критического поля дается следующим выражением

$$B_c = \frac{\sqrt{2g_1g_2\Gamma_- + J\Delta\{(g_1^2+g_2^2)J\Delta + \sqrt{4g_1^2g_2^2(g_1^2+g_2^2)\Gamma_- + 2g_1g_2\Gamma_+) + (g_1^2-g_2^2)^2J^2\Delta^2}\}}}{2\sqrt{2}g_1g_2}, \quad (9)$$

где

$$\Gamma_\pm = D_z^2 + J^2(1 \pm \gamma^2). \quad (10)$$

Из выражений (4) и (5) видим, что при $g_- = 0$ получаются состояния $\Psi_{1,2} = 2^{-1/2}(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle)$ а при $g_+ = 0$ состояния $\Psi_{3,4} = 2^{-1/2}(|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle)$. В этих случаях зависимость от магнитного поля отсутствует.

2.2. Гейзенберговская двухчастичная система со смешанными спинами

Для Гамильтониана двухчастичной системы со смешанными спинами имеем

$$H = J(S_1^x\mu_2^x + S_1^y\mu_2^y + \Delta S_1^z\mu_2^z) + D(\mu^z)^2 - B(g_1S_1^z + g_2\mu_2^z), \quad (11)$$

где $S_1^{x,y,z}$ компоненты спин-1/2 оператора а $\mu_2^{x,y,z}$ спин-1 оператора.

Для собственных значений и собственных функций гамильтониана получим следующие выражения

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}J\Delta + D \mp \frac{B}{2}(g_1 + 2g_2), \quad (12)$$

$$\varepsilon_{3,4} = -\frac{1}{4}(J\Delta - 2D + 2g_2B) \mp \frac{1}{4}\sqrt{(J\Delta - 2D - 2g_-B)^2 + 8J^2}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{5,6} = -\frac{1}{4}(J\Delta - 2D - 2g_2B) \mp \frac{1}{4}\sqrt{(J\Delta - 2D + 2g_-B)^2 + 8J^2}, \quad (14)$$

$$\Psi_{1,2} = |\mp 1/2, \mp 1\rangle, \quad (15)$$

$$\Psi_{3,4} = C_1^{\pm}\,|-1/2,1\rangle \mp C_1^{\mp}\,|1/2,0\rangle\,, \tag{16}$$

$$\Psi_{5,6} = C_2^{\pm}\,|\frac{1}{2},-1\rangle \mp C_2^{\mp}\,|-\frac{1}{2},0\rangle\,, \tag{17}$$

где введены следующие обозначения

$$C_1^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm \frac{J\Delta - 2D - 2g_- B}{\sqrt{(J\Delta - 2D - 2g_- B)^2 + 8J^2}})}\,, \tag{18}$$

$$C_2^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 \pm \frac{J\Delta - 2D + 2g_- B}{\sqrt{(J\Delta - 2D + 2g_- B)^2 + 8J^2}})}\,. \tag{19}$$

Заметим, что при $g_- = 0$ состояния системы не зависят от магнитного поля. Состояния $\Psi_{3,4}$ имеют вид $|-1/2,1\rangle \mp |1/2,0\rangle$ при условии $g_- = \left(2D - J\Delta\right)/\left(2B\right)$, а состояния $\Psi_{5,6} = |1/2,-1\rangle \mp |-1/2,0\rangle$ при $g_- = \left(J\Delta - 2D\right)/\left(2B\right)$. На Рис.2 представлена зависимость собственных значений энергии от магнитного поля.

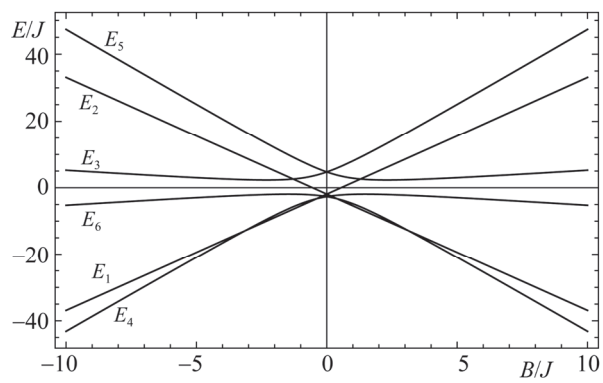

Рис.2. Зависимость собственных значений энергии от магнитного поля при $\Delta = 0.8$, $D = 0.1$, $J = -5$, $g_1 = 1$, $g_2 = -4$.

Система может находится в одном из $\Psi_{1,2}, \Psi_4, \Psi_6$ основных состояний. Для перехода между состояниями Ψ_1, Ψ_4 критическое магнитное поле

$$B_c^{1,4} = \frac{\Gamma \pm \sqrt{8g_1 g_2 J\left(J - 2\Delta D - J\Delta^2\right) + \Gamma^2}}{4g_1 g_2}, \tag{20}$$

где

$$\Gamma = 2Dg_1 + \Delta g_1 J + 2\Delta g_2 J. \tag{21}$$

Для перехода между состояниями Ψ_2, Ψ_6 имеем

$$B_c^{2,6} = -B_c^{1,4}. \tag{22}$$

3. Квантовая запутанность

Существуют различные методы для вычисления квантовой запутанности. В этой работе меру запутанности мы будем рассчитывать с помощью величин «совпадение» и «отрицательность».

Метод «совпадение» можно использовать только для систем с полуцелым спином а «отрицательность» для систем как с полуцелым, так и целым спинами [26].

3.1. Совпадение

Обозначим меру запутанности «совпадение» буквой C. Тогда

$$C = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4), \tag{23}$$

где λ_i собственные значения матрицы R в порядке убывания. R вычисляется по формуле.

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}} \quad , \tag{24}$$

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)\,, \tag{25}$$

где ρ матрица плотности, а ρ^* ее комплексное сопряжение.

В случае квантовой запутанности – при температуре системы $T = 0$, матрица плотности для разных состояний зависит только от собственных функций данного состояния и задается следующей формулой [27,28]

$$\rho_i = |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\,. \tag{26}$$

3.2. Отрицательность

Обозначим меру запутанности «отрицательность» переменной *Ne.* Тогда

$$Ne = \sum_{i=1} |\mu_i|, \tag{27}$$

где μ_i – отрицательные собственные значения ρ_1^T, транспонации матрицы плотности по отношению к одной подсистеме [29]

$$\langle i_1, j_2 | \rho_1^T | k_1, l_2\rangle = \langle k_1, j_2 | \rho | i_1, l_2\rangle\,. \tag{28}$$

4. Результаты

4.1. Спин-1/2 димер

Рассмотрим зависимость запутанности от g_2 при некоторых фиксированных значениях остальных параметров системы и магнитного поля.

Предполагая отсутствие квантовых переходов получим, что

максимальная запутанность для Ψ_1 соответствует точке $g_2 = g_1$, а для Ψ_3 – $g_2 = -g_1$. Отдаляясь от точек максимума запутанность будет монотонно убывать.

Зависимость же от магнитного поля при фиксированных параметрах системы следующая – запутанность имеет максимальное значение в точке $B = 0$ и убывает с ростом магнитного поля. Максимальное значение запутанности $C_{\max} = 0.5$ обусловлено свойствами данной системы.

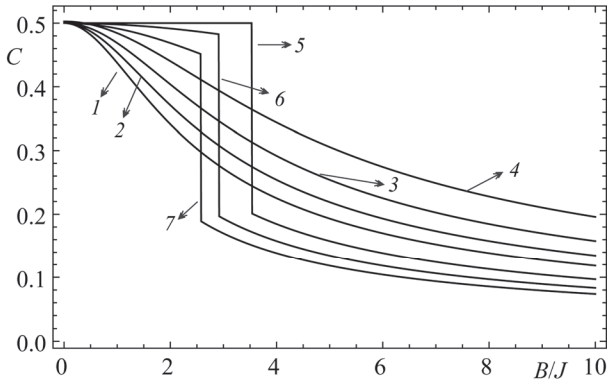

Рис.3. Зависимость совпадение от магнитного поля при $\Delta = 0.5$, $D = 0.1$, $\gamma = 0.5$, $J = 5$, $g_1 = 1$, где кривые *1–7* соответствуют значениям $g_2 = -2; -1.5; -1; -0.5; 1; 1.5; 2$.

Теперь рассмотрим зависимость C от магнитного поля для нескольких значений g_2 причем в этот раз учтем также квантовые переходы (см. Рис.3). Для отрицательных g_2 имеем, что система находится в состоянии Ψ_1 вне зависимости от магнитного поля. Максимальное значение достигается только в точке $B = 0$.

Для положительных же g_2 имеем переход $\Psi_1 \mapsto \Psi_3$ в критической точке, которая, вообще говоря, зависит от значения g_2. Максимум достигается до перехода при выполнении вышеупомянутых условий; переходу соответствует скачок

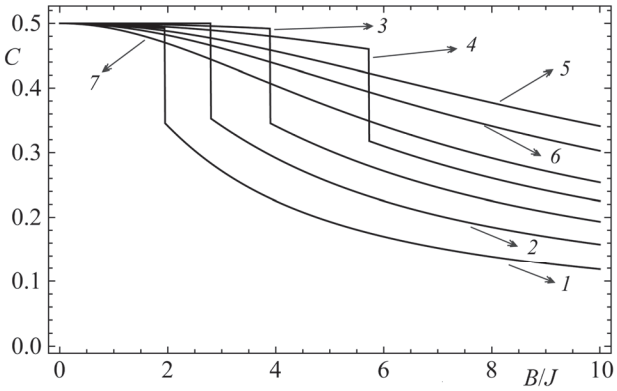

Рис.4. Зависимость совпадение от магнитного поля при $\Delta = 0.5$, $D = 0.1$, $\gamma = 2$, $J = 5$, $g_1 = 1$ где кривые *1–7* соответствуют значениям $g_2 = -2; -1; -0.5; -0.2; 0.2; 0.5; 1$.

вниз, после которого запутанность идет на спад.

Рассмотрим другой случай (см. Рис.4). Здесь для отрицательных g_2 имеет место переход $\Psi_3 \mapsto \Psi_1$. Максимум достигается до него, при $B = 0$ и $g_2 = -1$. При положительных g_2 система находится в состоянии Ψ_3. Уменьшению g_2 соответствует возрастание запутанности.

4.2. Спин-(1/2,1) димер

Как и в предыдущем случае, сначала пренебрежем квантовыми переходами и рассмотрим зависимость запутанности от g_2 при фиксированных значениях остальных параметров системы и магнитного поля.

Видим, что для Ψ_4 максимальная запутанность системы достигается при условии $g_2 = g_1 - (J\Delta - 2D)/(2B)$ а для Ψ_6 – $g_2 = g_1 - (J\Delta - 2D)/(2B)$. А с ростом магнитного поля запутанность монотонно убывает от максимального значения $Ne_{max} = 0.5$.

Теперь рассмотрим зависимость Ne от магнитного поля для нескольких значений g_2 (см. Рис.5). В этом случае при отрицательных g_2 система находится в состоянии Ψ_6. При положительных же g_2 имеем переход $\Psi_4 \mapsto \Psi_1$. Максимальное значение запутанности для $\Psi_{4,6}$ при данных параметрах соответствует условию $g_2 = 1 \mp 0.9/B$ соответственно.

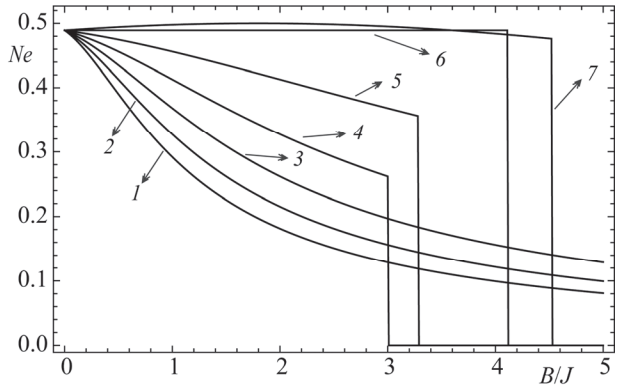

Рис.5. Зависимость отрицательности от магнитного поля при $\Delta = 0.8$, $D = 0.3$, $J = 3$, $g_1 = 1$, где кривые *1–7* соответствуют значениям $g_2 = -4; -3; -2; 3; 2; 1; 0.5$.

На Рис.6 при $g_2 < -2.2$ имеем переходы $\Psi_6 \mapsto \Psi_2 \mapsto \Psi_6$. При $-2.2 < g_2 < 0$ система находится в состоянии Ψ_6. При положительных g_2 происходит переход $\Psi_4 \mapsto \Psi_1$. Максимальное значение запутанности для $\Psi_{4,6}$ для данных параметров достигается при $g_2 = 1 \pm 2.3/B$ соответственно.

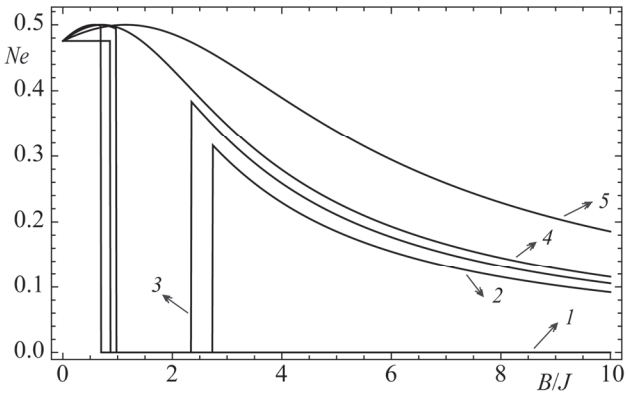

Рис.6. Зависимость отрицательности от магнитного поля при $\Delta = 0.8$, $D = 0.3$, $J = -5$, $g_1 = 1$, где кривые *1–5* соответствуют значениям $g_2 = 1; -3; -2.5; -2.2; -1$.

При заданных параметрах можно контролировать систему с помощью магнитного поля и достичь максимального значения запутанности при поле $B = \pm\left(J\Delta - 2D\right)/\left(2g_-\right)$ для состояний $\Psi_{4,6}$ соответственно.

5. Заключение

В данной работе была рассмотрена задача оптимизации и манипуляции квантовой запутанностью в двухспиновых квантовых системах, квантовых димерах. Были проанализированы две простейшие системы, димер со спинами 1/2 и смешанный димер со спинами 1 и 1/2.

В случае димера со смешанным спином воздействие любых заданных параметров системы можно компенсировать некоторым магнитным полем и таким образом получить максимальное возможное для системы значение запутанности.

В случае антиферромагнетика при повышении значения магнитного поля обе системы переходят в состояние с меньшей запутанностью. Для ферромагнетиков же при положительном g_1 существуют некоторые отрицательные значения g_2, при которых система переходит в состояние с большей запутанностью.

Это свойство весьма важно, так как указывает на весьма нетривиальный факт возможности реализации запутанных состояний в спиновых системах с чисто ферромагнитным взаимодействием между частицами. Запутанность возникает в этом случае из-за различия в знаках g-факторов, которое приводит к не коммутативности оператора магнитного момента и гамильтониана системы.

Авторы благодарны Н.С. Ананикяну и Л.Н. Ананикяну за плодотворные обсуждения, а так же А.Г. Саргсяну, М.Г. Асатрян, А.С. Котанджян за помощь в подготовке текста.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, V. Vedral.** Rev. Mod. Phys., **80**, 517 (2008).
2. **O. Gühne, G. Tóth.** Phys. Reports, **474**, 1 (2009).
3. **C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin, W.K. Wootters.** Phys. Rev. A, **54**, 3824 (1996).
4. **C.H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J.A. Smolin, W.K.Wootters.** Phys. Rev. Lett., **76**, 722 (1996).
5. **A.K. Ekert.** Nature (London), **358**, 14 (1992).
6. **C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters.** Phys. Rev. Lett., **70**, 1895 (1993).
7. **D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger.** Nature (London), **390**, 575 (1997).
8. **J. Cho, H.-W. Lee.** Phys. Rev. Lett., **95**, 160501 (2005).
9. **X.-M. Jin, J.-G. Ren, B. Yang, Z.-H. Yi, F. Zhou, X.-F. Xu, S.-K. Wang, D. Yang, Y.-F. Hu, S. Jiang, T. Yang, H. Yin, K. Chen, C.-Z. Peng, J.-W. Pan.** Nature Photonics, **4**, 376 (2010).
10. **M. Baur, A. Fedorov, L. Steffen, S. Filipp, M.P. da Silva, A. Wallraff.** Phys. Rev. Lett., **108**, 040502 (2012).
11. **G. Björk, A. Laghaout, U.L. Andersen.** Phys. Rev. A, **85**, 022316 (2012).
12. **P. Kok, W.J. Munro, K. Nemoto, T.C. Ralph, J.P. Dowling, G.J. Milburn.** Rev. Mod. Phys., **79**, 135 (2007).
13. **J. Kim, J.-S. Lee, S. Lee, C. Cheong.** Phys. Rev. A, **62**, 022312 (2000).
14. **A. Brodutch, D.R. Terno.** Phys. Rev. A, **83**, 010301(R) (2011).
15. **V. Vedral, E. Kashefi.** Phys. Rev. Lett., **89**, 037903 (2002).
16. **M. Sasaki et al.** Optics Express, **19**, 10387 (2011).
17. **A. Avella, G. Brida, I.P. Degiovanni, M. Genovese, M. Gramegna, P. Traina.** Phys. Rev. A, **82**, 062309 (2010).
18. **S. Bose**, Phys Rev. Lett., **91,** 207901 (2003).
19. **N.S. Ananikian, L.N. Ananikyan, L.A. Chakhmakhchyan, O. Roja.** Journal of Physics: Condensed Matter, **24**, 25 (2012).
20. **V.S. Abgaryan.** J. Contemp. Phys. (Armenian Ac. Sci.), **49,** 249 (2014).
21. **L.N. Ananikyan, H.A. Lazaryan.** J. Contemp. Phys. (Armenian Ac. Sci.), **46**, 184 (2011).
22. **G. Burkard, D. Loss, D.P. DiVincenzo**, Phys Rev. A, **59,** 2070 (1999).
23. **B.E. Kane.** Nature, **393,** 133 (1998).
24. **R. Vrijen, E. Yablonovitch, K. Wang, H.W. Jiang, A. Baladin,V. Roychowdhury, T. Mor, D. DiVincenzo.** Phys Rev. A, **62,** 012306 (2000).
25. **V. Ohanyan, O. Rojas, J. Strecka, S. Bellucci,** Phys. Rev. B, **92**, 214423 (2015).
26. **R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki.** Rev. Mod. Phys., **81**, 865 (2009).
27. **W.K. Wootters.** Phys. Rev. Lett., **80,** 2245 (1998).
28. **L. Amico, A. Osterloh, F. Plastina, R. Fazio, G.M. Palma.** Phys. Rev. A, **69,** 022304 (2004).
29. **G. Vidal, R.W. Werner.** Phys. Rev. A, **65**, 032314 (2002).

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԽՃՃՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍՊԻՆԱՅԻՆ ԵՐԿՄԱՍՆԻԿԱՆԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԵՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ g-ՖԱԿՏՈՐՆԵՐԻ ԷՖԵԿՏՆԵՐԸ

Ժ.Ա. ԱԴԱՄՅԱՆ, Ս.Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, Վ.Ռ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Տվյալ աշխատանքում կուսումնասիրվեն սպին-1/2 և խառը սպին-(1/2,1) Հայզենբերգի մոդելի երկմասնիկանի համակարգերը ու նրանց քվանտային խճճվածությունը, մասնավորապես խճճվածության կախումը համակարգի տարբեր բնութագրերից և արտաքին մագնիսական դաշտից: Աշխատանքում քվանտային խճճվածության կարգը որոշվում է երկու տարբեր մեթոդներով՝ "negativity" և "concurrence": Քնարկվում է համապատասխան մեծությունների կախումը սպինների Լանդեի g-ֆակտորներից, համակարգի անիզոտրոպության հաստատուններից և մասնիկների փոխանակային էներգիայից :

QUANTUM ENTANGLEMENT IN SPIN DIMERS: EFFECTS OF A MAGNETIC FIELD AND HETEROGENEOUS g-FACTORS

Z.A ADAMYAN, S.A MURADYAN, V.R. OHANYAN

In the work, the spin-1/2 Heisenberg dimer, the mixed spin-(1/2,1) Heisenberg dimer and their quantum entanglement are considered, particularly the dependence of the entanglement on the system characteristics and the external magnetic field. The quantum entanglement in this work is determined using two different methods, namely “Negativity” and “Concurrence”. The dependence of the corresponding quantities on spins’ Landé g-factors, system anisotropy constants and exchange constant is discussed.