УДК: 52:53

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ В ЗАДАЧАХ О ПЕРЕНОСЕ РЕЗОНАНСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛИНЕЙНО РАСШИРЯЮЩИХСЯ СРЕДАХ. I. ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДА ФОТОНОВ

С. И. ГРАЧЕВ

Поступила 5 февраля 1985

Принята к печати 6 мая 1985

Рассматривается перенос резонансного излучения в средах, расширяющихся изотропно или плоскопараллельно с постоянным по глубине безразмерным градиентом скорости γ . Наряду с трехмерными рассмотрена и одномерная среда. Предполагается полное перераспределение по частоте при рассеянии в сопутствующей системе координат. Показано, что при малых γ ядра интегральных уравнений, вероятности выхода фотонов и их преобразования Лапласа выражаются через функции на 1 меньше числа аргументов, являющихся комбинациями прежних аргументов (в число которых включается и параметр γ). Эти функции найдены для случаев доплеровского и степенного профилей коэффициента поглощения. При доплеровском коэффициенте поглощения в одномерной среде, а также при степенном профиле с лоренцевскими крыльями они выражаются через элементарные или известные специальные функции.

1. *Введение.* Крупномасштабные движения вещества, существенно влияющие на формирование линейчатых спектров, обнаружены в настоящее время у астрофизических объектов самой различной природы. Этим объясняется повышенный интерес к теории переноса резонансного излучения в движущихся средах. Изложение ее результатов и их астрофизических приложений можно найти в учебнике В. В. Соболева [1], в монографии Д. Михаласа [2], а также в обзоре [3]. Аналитическая теория разрабатывается для простейших моделей движущихся сред. Одна из таких моделей была рассмотрена В. В. Соболевым [4] (см. также [1]). Это — плоскопараллельная среда (плоский слой), расширяющаяся по нормали к слоям с постоянным по глубине безразмерным градиентом скорости $\gamma = (1/u) du/d\tau$. Здесь v — скорость расширения, u — средняя скорость теплового движения атомов, τ — оптическое расстояние в центре линии, измеряемое вдоль нормали без учета расширения среды. В [4] рассматривалась также и одномерная среда, расширяющаяся с постоянным γ .

Как показано в [4], в предположении о полном перераспределении по частоте в сопутствующей системе координат задача о переносе резонансного излучения в упомянутых моделях движущихся сред сводится к решению интегрального уравнения с симметричным разностным ядром, зависящим от параметра γ . К уравнению такого же типа сведена в [5] и задача о переносе в однородном изотропно расширяющемся шаре. Ядра этих уравнений не являются суперпозициями экспонент, что сильно усложняет задачу, не позволяя непосредственно использовать методы, детально развитые для неподвижной среды. Лишь сравнительно недавно были получены асимптотики ядер основных интегральных уравнений ([6, 7] — одномерная среда, [5] — изотропное расширение, [8] — плоскопараллельное расширение (см. также [9])), а также — асимптотики некоторых решений ([10] — изотропное расширение, [11] — плоскопараллельное расширение) при малых градиентах скорости γ . Случай малого γ наиболее важен как для объяснения наблюдений (см., например, [1], гл. V, § 27), так и для развития теории.

В настоящей (первой) части работы будет показано, что для указанных выше моделей движущихся сред ядерные функции и интегральные вероятности выхода, зависящие от двух аргументов τ и γ , в пределе малых γ выражаются через функции одного аргумента $t = \tau/\tau_c(\gamma)$, где $\tau_c(\gamma)$ — некоторое характерное оптическое расстояние, т. е. имеет место асимптотическое по γ подобие ядерных функций. При этом при $t \ll 1$ получаются известные асимптотики для неподвижной среды (они имеются в [12]). Аналогичное уменьшение числа переменных, которое можно назвать аэтомодельностью, имеет место и для монохроматической вероятности выхода, а также для преобразований Лапласа ядерных функций. Использование подобия основных функций позволяет получить аэтомодельные решения основных задач, что будет сделано в следующих частях работы.

2. Основные функции и соотношения. Основное интегральное уравнение для функций источников $S(\tau)$ имеет вид

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_a^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \gamma) S(\tau') d\tau', \quad (1)$$

где λ — альбеда однократного рассеяния, $a = -\infty$ и 0 соответственно для бесконечных и полубесконечных сред. Это уравнение описывает перенос резонансного излучения в одномерной расширяющейся среде [4], а также в трехмерных средах, расширяющихся по нормали к слоям (плоскопараллельно) [4] или изотропно [5], при плоском распределении первичных

источников $S_0(\tau)$ (τ — оптическое расстояние от некоторой начальной плоскости). Ядерная функция $K(\tau, \gamma)$ имеет следующую нормировку:

$$\int_0^{\infty} K(\tau, \gamma) d\tau = 1 - \beta(\gamma) \leq 1. \quad (2)$$

Для одномерной среды

$$K(\tau, \gamma) = K^1(\tau, \gamma) \equiv A \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) a(x + \gamma\tau) \exp\left[-\frac{1}{\gamma} \int_x^{x+\gamma\tau} a(x') dx'\right] dx, \quad (3)$$

$$\beta(\gamma) = \beta^1(\gamma) \equiv A\gamma(1 - e^{-1/A\gamma}), \quad (4)$$

а для трехмерных сред

$$K(\tau, \gamma) = \int_0^1 K^1(\tau/\mu, \gamma\chi(\mu)) d\mu/\mu, \quad (5)$$

$$\beta(\gamma) = \int_0^1 \beta^1(\gamma\chi(\mu)) d\mu, \quad (6)$$

где

$$\chi(\mu) = \begin{cases} 1, & \text{изотропное расширение,} \\ \mu^2, & \text{плоскопараллельное расширение.} \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $a(x)$ — профиль коэффициента поглощения ($a(0) = 1$), $x = (v - v_0)/\Delta v_D$ — безразмерная частота, A — нормировочная постоянная:

$A \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) dx = 1$, величина $\gamma\chi(\mu)$ — градиент скорости в направлении, составляющем угол $\arcs \cos \mu$ с осью τ .

Помимо ядерной важную роль в теории играют функции

$$L(\tau - \tau', \gamma) = \beta(\gamma) + \int_{\tau - \tau'}^{\infty} K(y, \gamma) dy \quad (8)$$

и

$$P(x'_p, x_p, \gamma\chi(\mu)) = a(x'_p) \exp[-l(x'_p, x_p, \gamma\chi(\mu))], \quad (9)$$

где
8—890

$$l(x', x, \gamma\chi(\mu)) = \frac{1}{\gamma\chi(\mu)} \int_{x_1}^{x_2} a(y) dy \quad (10)$$

— оптическое расстояние (с учетом расширения среды) на частоте x между точками τ' и τ вдоль луча, образующего угол $\arcsos \mu$ с осью τ , причем

$$x_1' = x - \gamma\chi(\mu) \tau'/\mu, \quad x_1 = x - \gamma\chi(\mu) \tau/\mu \quad (11)$$

— локальные частоты, т. е. частоты, измеренные в сопутствующей системе координат, а x — частота фотона в системе, связанной с начальным уровнем $\tau = 0$, который считается неподвижным.

Функции (8) и (9) (вторая, деленная на $|\mu|$) суть интегральная и монохроматическая вероятности выхода фотона с глубины τ' на глубину τ . Для интенсивности излучения имеем

$$I(\mu, \tau, x) = \int_{a^\pm} S(\tau') P(x', x, \gamma\chi(\mu)) d\tau'/\mu, \quad (12)$$

где при $\mu < 0$ берется $a^- = +\infty$, а при $\mu > 0$ — $a^+ = a$ и для одномерной среды, очевидно, $\mu = \pm 1$, $\chi(\mu) = 1$.

Введем, далее, вероятность ухода фотона на бесконечность в одномерной среде и ее двустороннее преобразование Лапласа:

$$P(y, \gamma) = P(y, -\infty, \gamma), \quad W(p, \gamma) = \overline{P}(p, \gamma). \quad (13)$$

Через $P(y, \gamma)$ выражается интенсивность излучения на бесконечности.

Важную роль в теории играет также преобразование Лапласа $\overline{K}(p, \gamma)$ ядра. Введем следующие обозначения:

$$U(p, \gamma) = \frac{1}{2} [\overline{K}(p, \gamma) + \overline{K}(-p, \gamma)], \quad V(y, \gamma) = U(iy, \gamma). \quad (14)$$

Если пометить верхним индексом *1» функции для одномерной среды, то согласно (5) для трехмерных сред имеем

$$\overline{K}^*(p, \gamma) = \int_0^1 \overline{K}^1(p\mu, \gamma\chi(\mu)) d\mu, \quad (15)$$

$$L^*(\tau, \gamma) = \int_0^1 L^1(\tau/\mu, \gamma\chi(\mu)) d\mu. \quad (16)$$

Эти соотношения говорят о фундаментальной роли одномерной среды при изучении основных функций, характеризующих перенос излучения.

Ниже мы получим автомодельные представления введенных выше основных функций при профилях коэффициента поглощения двух видов: доплеровском ($\alpha(x) = e^{-x^2}$) и степенном ($\alpha(x) \sim \alpha_0 |x|^{-2}$), обозначаемых в дальнейшем буквами *D* и *C*. Эти представления (обозначаемые знаком $\doteq$) являются пределами при $\gamma \rightarrow 0$ и фиксированных автомодельных переменных

$$t = \tau/\tau_c(\gamma), \quad z = [x \pm x_0(\gamma)]/\gamma\tau_c(\gamma), \quad q = p\tau_c(\gamma), \quad (17)$$

соответствующих оптической глубине τ , частоте x и параметру преобразования Лапласа p . Здесь

$$\tau_c(\gamma) = \begin{cases} 1/2\gamma \sqrt{\ln \tau_c(\gamma)} \\ \left(\frac{\alpha_0}{x-1}\right)^{1/(x-1)} \gamma^{-x/(x-1)}, \end{cases} \quad x_0(\gamma) = \begin{cases} \sqrt{\ln \tau_c(\gamma)}, & D \\ 0, & C. \end{cases} \quad (18)$$

Характерный масштаб $\tau_c(\gamma)$ представляет собой (по порядку величины) среднее расстояние между уровнями рождения и выбывания фотона из процесса рассеяний вследствие доплеровского смещения локальной частоты в расширяющейся среде. Согласно (17) и (18) при доплеровском коэффициенте поглощения автомодельная частота z вводится двумя способами (знаки « $\pm$ » в (17)), что дает различные представления для автомодельной монохроматической вероятности выхода (см. ниже формулы (22) и (23)), описывающие реальную вероятность выхода в окрестностях точек $x \approx \mp x_0(\gamma)$.

3. Автомодельное представление монохроматической вероятности выхода. Достаточно, очевидно, изучить монохроматическую вероятность $P(x'_1, x_1, \gamma)$ для одномерной среды ($\mu = \pm 1, \chi(\mu) = 1$). Переход в (9)–(11) при $\chi(\mu) = 1$ к автомодельным переменным (17) дает

$$P(x'_1, x_1, \gamma) \doteq p(z'_1, z_1)/\tau_c(\gamma), \quad (19)$$

$$l(x'_1, x_1, \gamma) \doteq l(z'_1, z_1), \quad (20)$$

где

$$z'_1 = z - t'/\mu, \quad z_1 = z - t/\mu, \quad (21)$$

причем

$$p(y'_1, y) = e^{-l(y', y)} \times \begin{cases} e^{\pm y'}, & D \\ (x-1)|y'|^{-2}, & C \end{cases} \quad (22)$$

и

$$l(y', y) = \begin{cases} \pm [e^{\pm y'} - e^{\pm y}], & D \\ y |y|^{-x} - y' |y'|^{-x}, & 0 \in [y', y] \\ \infty, & 0 \in [y', y] \end{cases} C. \quad (23)$$

Знаки « $\pm$ » в (22) и (23) соответствуют двум различным возможным определениям автомодельной частоты z согласно (17) при доплеровском профиле коэффициента поглощения. Заметим, что в (22) и (23), а также в последующих формулах с двумя знаками, берутся либо все верхние, либо все нижние знаки.

Функция $W(p, \gamma)$, введенная согласно (13), исследована нами ранее при $\gamma > 0$ в [13, 14], где она обозначалась через $\bar{F}(p, \gamma)$. Аналогичным образом можно исследовать и функцию $W(-p, -\gamma)$. В результате можно написать, что

$$W\left(\pm \frac{p}{\gamma}, \pm \gamma\right) = \gamma w^{\mp}(q) \exp(\pm 2qx_0^2(\gamma)), \quad (24)$$

где q и $x_0(\gamma)$ определены согласно (17) и (18)

$$w^-(q) \equiv w(q) = \begin{cases} \Gamma(1-q), & D \\ \int_0^{\infty} \exp[qy^{1/(1-x)} - y] dy, \operatorname{Re} q < 0, & C \end{cases} \quad (25)$$

$$w^+(q) = \begin{cases} (-1)^{-1-q} w(-q), & D \\ -w(-q(-1)^{1/(x-1)}), & C \end{cases} \quad (26)$$

здесь $\Gamma(q)$ — гамма-функция. Формула (26) содержит, вообще говоря, неопределенность вида $(-1)^s$. В дальнейшем, однако (во второй части работы), эта формула используется лишь при целых s , когда неопределенность исчезает. Функция $w(q)$ при степенном коэффициенте поглощения имеет в правой полуплоскости линию ветвления $(0, +\infty)$. На берегах разреза

$$w(y \pm i0) = -c(y) \pm id(y), \quad y > 0. \quad (27)$$

Входящие сюда функции (в других обозначениях) найдены в [14]. В случае лоренцевских крыльев ($x=2$) они выражаются через цилиндрические функции:

$$w(-q) = 2\sqrt{q} K_1(2\sqrt{q}), \quad c(y) = \pi\sqrt{y} N_1(2\sqrt{y}),$$

$$d(y) = \pi\sqrt{y} J_1(2\sqrt{y}). \quad (28)$$

4. Автомодельные представления ядерных функций. Для преобразования Лапласа ядра они были фактически получены нами в [13—15] (одномерная среда), [10] (трехмерное изотропное расширение) и [11] (плоскопараллельное расширение). Здесь мы уточним эти представления (так, при доплеровском коэффициенте поглощения мы используем более точное определение характерных длины $\tau_c(\gamma)$ и частоты $x_0(\gamma)$ (см. (18)) и расширим область их применимости. Итак, для преобразования Лапласа ядра справедливо следующее общее автомодельное представление:

$$\bar{K}(p, \gamma) \doteq 1 - nA\gamma q x_0^2(\gamma) - 2\pi A\gamma u(q), \quad q = p\tau_c(\gamma), \quad (29)$$

откуда следует, что

$$U(p, \gamma) \doteq 1 - \pi A\gamma [u(q) + u(-q)], \quad (30)$$

$$V(s, \gamma) \doteq 1 - \pi A\gamma v(y), \quad y = s\tau_c(\gamma), \quad (31)$$

где

$$v(y) = u(iy) + u(-iy). \quad (32)$$

В (29) константа $n = 2$ и 4 для трехмерных и одномерных сред соответственно. Аналитические свойства функции $u(q)$ играют важную роль при получении автомодельных решений. В большинстве случаев она имеет линию ветвления $(-\infty, 0)$ (степенной коэффициент поглощения; доплеровский коэффициент при плоскопараллельном расширении) или $(-\infty, -1)$ (доплеровский коэффициент поглощения при изотропном расширении трехмерной среды). На берегах разреза

$$u(-y \pm i0) = a(y) \pm ib(y), \quad y > 0 \text{ или } 1. \quad (33)$$

Аutomодельные представления самих ядерных функций получаются обращением (29). В итоге можно написать, что

$$K(\tau, \gamma) \doteq \frac{A\gamma}{\tau_c(\gamma)} k_1(t), \quad L(\tau, \gamma) \doteq A\gamma k_2(t), \quad (34)$$

причем согласно (8) $k_1(t) = -k_2'(t)$.

а) Одномерная среда. При доплеровском профиле коэффициента поглощения [15, 13]

$$u(q) = \frac{1}{2\pi} - \frac{q}{\pi} [C + \psi(1+q)], \quad u(q) + u(-q) = q \operatorname{ctg}(\pi q), \quad (35)$$

и тогда

$$v(y) = y \operatorname{cth}(\pi y), \quad (36)$$

$$k_1(t) = 2e^t(e^t - 1)^{-2}, \quad k_2(t) = \operatorname{cth}(t/2), \quad (37)$$

где C — постоянная Эйлера, $\psi(q)$ — логарифмическая производная гамма-функции. При степенном коэффициенте поглощения переход к автоматической оптической глубине t непосредственно в (3) дает

$$k_1(t) = 2(x-1)^2 \int_0^\infty [y(y+t)]^{-x} \exp[(y+t)^{1-x} - y^{1-x}] dy. \quad (38)$$

Для функции $u(q)$, которая фактически является преобразованием Лапласа от $k_1(t)$, в [14] получено (в других обозначениях) следующее представление:

$$u(q) = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} q^{-s} (s+1) \Gamma(s) \Gamma\left(1 + \frac{s}{x-1}\right) \varphi(s) ds, \quad (39)$$

где

$$\varphi(s) = \int_0^\infty [y^{1-x} - (1+y)^{1-x}]^{s/(1-x)} dy, \quad (40)$$

причем $\varphi(s)$ регулярна в полосе $-1 < \operatorname{Re} s = \sigma < -1 + 1/x$. Аналитическое продолжение $\varphi(s)$ на всю комплексную плоскость сделано в [14] (формулы (17) и (18); заметим, что правая часть (17) должна быть со знаком „+“, а x s в правой части (18) — со знаком „-“). Из него следует, что $\varphi(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s < -1 + 1/x$ имеет полюсы $s = -k(x-1) - n$, где $k, n = 0, 1, 2, \dots$, а в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -1$ — полюсы $s_n = (x-1)(n-1)/x$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (за исключением $s_1 = 0$: $\varphi(0) = -1/2$). Таким образом, подынтегральная функция в правой части (39) имеет в качестве особенностей на комплексной плоскости полюсы, лежащие на вещественной оси. Деформация контура интегрирования в (39) к этим полюсам дает разложения $u(q)$ по степеням q . Согласно (39) функция $u(q)$ имеет линию ветвления $(-\infty, 0)$. На берегах разреза для нее выполняется (33), причем $a(y)$ и $b(y)$ получаются из (39) подстановкой $q = ye^{\pm \pi i}$ и разделением ве-

щественной и мнимой частей. В случае лоренцевских крыльев ($\alpha = 2$) результаты выражаются через цилиндрические функции [14]:

$$u(y) = (\pi/2) y [J_1^2(x) + N_1^2(x)], \quad x = 2\sqrt{y}, \quad (41)$$

$$a(y) = (2/\pi) y K_1^2(x), \quad b(y) = 2y K_1(x) I_1(x). \quad (42)$$

Из (32) и (41) следует, что

$$v(y) = 4y v_1(x), \quad (43)$$

где

$$v_n(x) = \ker_n(x) \operatorname{ber}_n(x) - \operatorname{kei}_n(x) \operatorname{bei}_n(x) + \frac{2}{\pi} \ker_n(x) \operatorname{kei}_n(x), \quad (44)$$

а обращение (41) дает

$$k_1(t) = \frac{1}{2} u^3 e^u [K_1(u) - K_0(u)], \quad k_2(t) = u e^u K_1(u), \quad u = \frac{2}{t}. \quad (45)$$

Здесь использованы стандартные обозначения цилиндрических функций и функций Кельвина.

б) Изотропно расширяющаяся трехмерная среда. Согласно (15) и (5) можно написать, что

$$u(q) = \int_0^1 u^1(q\mu) d\mu, \quad k_1(t) = \int_0^1 k_1^1(t/\mu) d\mu/\mu, \quad (46)$$

где верхним индексом «1» помечены соответствующие функции, относящиеся к одномерной среде (см. предыдущий подраздел). Их подстановка в (46) дает соответствующие автомодельные функции при изотропном трехмерном расширении (при этом в случае доплеровского коэффициента поглощения в (35) используется разложение $\psi(1+q)$ на простые дроби (см. [16], стр. 957)). Ниже мы приводим результаты.

При доплеровском коэффициенте поглощения функция $u(q)$ имеет линию ветвления $(-\infty, -1)$. На берегах разреза выполняется (33), причем

$$a(y) = \frac{1}{2\pi} + \frac{y}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} + \frac{k}{y} + \left(\frac{k}{y} \right)^2 \ln \left| \frac{k-y}{k} \right| \right], \quad (47)$$

$$b(y) = [y] (1 + [y]) / 2y, \quad y > 1, \quad (48)$$

$$u(y) + a(y) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 + \frac{k}{y} \ln \left| \frac{k-y}{k+y} \right| \right), \quad (49)$$

где $[y]$ — целая часть y . Далее,

$$v(y) = y \int_0^1 \mu \operatorname{cth}(\pi y \mu) d\mu, \quad k_2(t) = \int_0^1 \operatorname{cth}(t/2\mu) d\mu. \quad (50)$$

При степенном коэффициенте поглощения (ср. с (39))

$$u(q) = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi^2 i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} q^{-s} \frac{1+s}{1-s} \Gamma(s) \Gamma\left(1 + \frac{s}{x-1}\right) \varphi(s) ds, \quad (51)$$

причем в случае лоренцевских крыльев ($x = 2$) (ср. с (41)—(45))

$$u(y) = (\pi/6) y [J_1^2(x) + N_1^2(x) + J_2^2(x) + N_2^2(x)], \quad x = 2\sqrt{y}, \quad (52)$$

$$a(y) = (2/3\pi) y [K_1^2(x) - K_2^2(x)], \quad (53)$$

$$b(y) = (2/3) y [K_1(x) I_1(x) + K_2(x) I_2(x)], \quad (54)$$

$$v(y) = (4/3) y [v_1(x) + v_2(x)], \quad (55)$$

$$k_1(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} u^2 e^u [2K_1(u) - K_2(u)], \quad u = 2/t, \quad (56)$$

$$k_2(t) = \frac{1}{3} u e^u [K_1(u) + K_2(u)] - \frac{t}{3}, \quad (57)$$

где $v_n(x)$ определена согласно (44). При получении этих формул (интегрированием (41)—(45) согласно (46)) были использованы таблицы неопределенных интегралов от цилиндрических функций (см. в [17], стр. 40 и 48).

в) Плоскопараллельное расширение. Как и в случае изотропного расширения, приводимые ниже результаты получаются интегрированием соответствующих результатов для одномерной среды (см. подраздел «а») по формулам (5), (15) и (16). При этом в автомодельных переменных (17) нужно учесть зависимость градиента скорости от направления, т. е. заменить γ на $\gamma \mu^2$ (как и при выводе (47)—(49), используется разложение $\psi(1+q)$ в (35) на простые дроби). В итоге в случае степенного коэффициента поглощения

$$u(q) = \int_0^1 \mu^2 u^2 (q \mu^{\frac{1+x}{1-x}}) d\mu, \quad k_1(t) = \int_0^1 \mu^{\frac{3x-1}{x-1}} k_1^2(t \mu^{\frac{x+1}{x-1}}) d\mu. \quad (58)$$

Подстановка сюда (39) дает

$$u(q) = \frac{1}{6\pi} - \frac{x-1}{2\pi^2 i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} q^{-s} \frac{s+1}{x(s+3)+s-3} \Gamma(s) \Gamma\left(1 + \frac{s}{x-1}\right) \varphi(s) ds. \quad (59)$$

По сравнению с (39) подынтегральная функция здесь имеет дополнительный полюс $s = 3(1-x)/(1+x)$. В случае лоренцевских крыльев ($x=2$) все результаты выражаются через цилиндрические функции:

$$u(y) = (\pi/6)y [J_1^2(x) + N_1^2(x) + J_0^2(x) + N_0^2(x)], \quad x = 2\sqrt{y}, \quad (60)$$

$$a(y) = (2/3\pi)y [K_1^2(x) - K_0^2(x)], \quad (61)$$

$$b(y) = (2/3)y [K_1(x)I_1(x) + K_0(x)I_0(x)], \quad (62)$$

$$v(y) = (4/3)y [v_1(x) + v_0(x)], \quad (63)$$

$$k_1(t) = \frac{u^2}{6} e^u K_0(u), \quad k_2(t) = \frac{u}{3} e^u [K_1(u) + K_0(u)], \quad u = \frac{2}{t}, \quad (64)$$

где $v_n(x)$ дается формулой (44). При нахождении этих формул использовались таблицы интегралов [17] (стр. 354).

Рассмотрим теперь случай доплеровского коэффициента поглощения. Зависимость градиента скорости от направления приводит в этом случае к слабому нарушению автомодельности (вида (29)—(31) и (34)) основных функций в некоторых областях изменения их аргументов. Это нарушение выражается в том, что функции u , v , a , b и $k_{1,2}$ (29) — (34) зависят от γ , причем эта зависимость слабая. Именно:

$$u(q, \gamma) = \frac{1}{6\pi} - \frac{q^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \int_0^k \frac{\mu(x/k, \gamma) x dx}{q+x}, \quad (65)$$

$$v(y, \gamma) = y \int_0^1 \mu(x, \gamma) x \operatorname{cth}(\pi y/x) dx, \quad (66)$$

$$k_2(t, \gamma) = \int_0^1 \mu(x, \gamma) x^3 \operatorname{cth}(tx/2) dx, \quad k_1(t, \gamma) = -k_2'(t, \gamma), \quad (67)$$

где

$$\mu(x, \gamma) = \left[\frac{\ln \tau_c(\gamma)}{\ln \tau_c(\gamma x^2)} \right]^{3/2}, \quad \mu(x, 0) = \mu(1, \gamma) = 1. \quad (68)$$

Функция $u(q, \gamma)$ имеет согласно (65) линию ветвления $q \in (-\infty, 0)$. На берегах разреза

$$u(-y \pm i0, \gamma) = a(y, \gamma) \pm ib(y, \gamma), \quad y > 0, \quad (69)$$

где

$$b(y, \gamma) = y^3 \sum_{k=1+[y]}^{\infty} \mu(y/k, \gamma)/k^3, \quad a(y, \gamma) = u(-y, \gamma), \quad (70)$$

причем интеграл в (65) при $q = -y < 0$ понимается в смысле главного значения. Выражение вида (65) для преобразования Лапласа ядра было получено в [11]. Заметим, что при $t \gg 1$ из (67) получается найденная в [8] асимптотика ядра, согласно которой на больших τ имеет место автомодельность другого (нежели (34)) вида, а именно: $K(\tau, \gamma) \sim f(\gamma\tau^2)$.

Представления (65) — (70) можно назвать «полуавтомодельными», так как переменные в них автомодельные, но имеется также слабая зависимость от параметра γ . Переход к пределу при $\gamma \rightarrow 0$ под знаками интегралов в (65)—(70) дает «чисто» автомодельные представления

$$u(y) + a(y) = \frac{1}{3\pi} - \frac{y^3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(2k - y \ln \left| \frac{y+k}{y-k} \right| \right), \quad (71)$$

$$b(y) = y^3 \sum_{k=1+[y]}^{\infty} k^{-3} \equiv y^3 \zeta(3, 1 + [y]), \quad (72)$$

$$v(y) = y \int_0^1 x \operatorname{cth}(\pi y/x) dx. \quad (73)$$

Заметим, что при $y \gg 1$

$$u(y) + a(y) \sim -\frac{2}{3\pi} - \frac{1}{\pi} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{1-\alpha}{\alpha}, \quad b(y) \sim \alpha + \frac{y-1}{2}, \quad (74)$$

где $\alpha = y - [y]$, $[y]$ — целая часть y .

5. *Заключение.* Отметим некоторые свойства полученных выше автомодельных представлений основных функций. Во-первых, они дают правильную нормировку основных функций (записанную с точностью до членов порядка $e^{-1/\Lambda\gamma} \ll 1$ при $\gamma \ll 1$):

$$\int_0^{\infty} K(\tau, \gamma) d\tau = 1 - \beta(\gamma) = 1 - L(\infty, \gamma) = K(0, \gamma) = V(0, \gamma) = 1 - A\gamma/m, \quad (75)$$

где $m = 1$ и 3 при изотропном и плоскопараллельном расширениях соответственно. Во-вторых, при $t \ll 1$ для ядерных функций и при $|q| \gg 1$ для их преобразований Лапласа получаются такие же асимптотики, как и в случае неподвижной среды (при доплеровском коэффициенте поглощения — с точностью до замены τ на τ_0 под знаком логарифма). В другом же пределе ($t \gg 1$, $|q| \ll 1$) автомодельные представления дают асимптотики основных функций, найденные нами ранее, т. е. они правильно описывают поведение основных функций при всех $\tau \gg 1$, $|p| \gg 1$. Исключение составляют автомодельные представления ядер при доплеровском коэффициенте поглощения. В области $t \gg 1$ ($\tau \gg \tau_c(\gamma)$) они не дают правильного поведения ядер в случае изотропного расширения (как одномерного, так и трехмерного), а при плоскопараллельном расширении для правильного описания нужно использовать полуавтомодельное представление (67). Тем не менее, как будет показано во второй части работы, соответствующие автомодельные решения применимы при всех $\tau \gg 1$.

Хорошая точность автомодельных представлений ядерных функций при степенном коэффициенте поглощения подтверждается численными расчетами. Так, в случае одномерной среды сравнение формул (45) для лоренцевского профиля коэффициента поглощения ($\alpha_0 = 1$, $A = 1/\pi$, $x = 2$) с неопубликованными расчетами ядерных функций В. В. Витязева при $\gamma = 10^{-2}$, 10^{-3} и 10^{-4} показало, что относительная ошибка этих формул составляет около 3% при $\tau = 10$ и непрерывно уменьшается с ростом τ (при $\tau = 100$ она меньше 0.05%).

Ленинградский государственный
университет

ASYMPTOTIC SCALING IN THE PROBLEMS OF RESONANCE RADIATION TRANSFER IN LINEARLY EXPANDING MEDIA. I. KERNELS OF INTEGRAL EQUATIONS, PHOTON ESCAPE PROBABILITIES

S. I. GRACHEV

Resonance radiation transfer is considered for media expanding isotropically or planeparallelly with depth independent dimensionless velocity gradient γ . One-dimensional medium is considered along with three-dimensional ones. Complete frequency redistribution is assumed for a scattering in a comoving frame of reference. The kernels of integral equations, photon escape probabilities and their Laplace transforms are shown in the limit of small γ to be expressed through the functions

of one less number of arguments which are the combinations of old arguments (including parameter γ among them). These functions are found for the cases of Doppler and power profiles of the absorption coefficient. They are expressed in terms of elementary or known special functions for power profile with Lorentz wings as well as for Doppler absorption coefficient in a one-dimensional medium.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1967.
2. Д. Михалас, Звездные атмосферы, (гл. 14), Мир, М., 1982.
3. В. П. Гринин, Астрофизика, 20, 365, 1984.
4. В. В. Соболев, Астрон. ж., 34, 694, 1957.
5. С. И. Грачев, Вестн. ЛГУ, № 1, 128, 1978.
6. В. В. Витязев, Вестн. ЛГУ, № 19, 124, 1973.
7. С. И. Грачев, Вестн. ЛГУ, № 1, 128, 1976.
8. С. И. Грачев, Вестн. ЛГУ, № 19, 114, 1977.
9. D. G. Hummer, G. B. Rybicki, Ap. J., 254, 767, 1982.
10. С. И. Грачев, Астрофизика, 14, 111, 1978.
11. С. И. Грачев, Депонировано в ВИНТИ, № 1007—78, 1978.
12. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
13. С. И. Грачев, Вестн. ЛГУ, № 1, 77, 1982.
14. С. И. Грачев, Вестн. ЛГУ, № 7, 85, 1982.
15. С. И. Грачев, Астрофизика, 13, 185, 1977.
16. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
17. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, Интегралы и ряды. Специальные функции, Наука, М., 1983.