

Т.А. НАЛЧАДЖЯН

ОБ ОБОБЩЕНИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
МОДЕЛЕЙ

Изучается вопрос обобщения детерминированных математических моделей с точки зрения практического внедрения полученных оптимальных решений. Доказывается, что процесс внедрения оптимальных решений в реальных условиях всегда осуществляется с некоторой неопределенностью, в результате чего полученный реальный эффект становится значительно меньше ожидаемого теоретического уровня. Предлагается метод обобщения как линейных, так и нелинейных математических моделей.

Ключевые слова: математические модели, оптимальное управление, неопределенность, обобщение.

Введение. Известно, что основной целью математического моделирования является повышение эффективности существующих и проектируемых процессов и систем в различных отраслях науки и техники. Оптимальное управление исследуемыми процессами и системами должно обеспечить рациональное использование природных, сырьевых, материальных, энергетических, финансовых и трудовых ресурсов. Для достижения этой цели разработано и широко применяется множество методов и подходов оптимального управления.

В большинстве случаев задачи оптимального управления детерминированными процессами решаются относительно легко, так как методы и модели управления ими хорошо изучены. Однако обширный класс процессов характеризуется сложностью и случайным характером параметров управления, т.е. эти процессы являются не детерминированными, а стохастическими.

Большинство существующих методов исследования вероятностных (стохастических) задач рассматривают относительно узкий класс объектов, в которых входные и выходные параметры подчинены нормальному закону распределения. Решениям таких задач посвящена обширная литература.

Еще в 1968 году Я.З. Цыпкин писал, что “счастливые времена детерминизма уже прошли, и наука подошла к периодам стохастичности и адаптации” [1]. Автор справедливо отмечает, что существующие детерминированно-аналитические методы “обычно уводят далеко за пределы реальных задач”. Возникает вопрос: куда и насколько уводят?

Другой видный ученый Д.Б. Юдин в 1974 г., продолжая вышеприведенную мысль Я.З. Цыпкина, пишет: “Предметом стохастического программирования являются условные экстремальные задачи, в которых параметры условий, или составляющие решения, или те и другие являются случайными величинами” [2]. В этих словах кроется часть ответа на вышеуказанный вопрос.

Известно, что при принятии решений в условиях даже частичной неопределенности значительные трудности возникают при постановке задач, в которых наблюдаются тонкие ситуации прогнозирования и управления. В таких ситуациях в качестве цели управления рассматриваются модели не с жесткими, как в детерминированных моделях, а с вероятностными ограничениями. Здесь в качестве цели управления выбирают не экстремальные значения целевой функции, а ее математическое ожидание, что является более реалистическим подходом и обеспечивает физическую реализуемость оптимального управления.

При решении вероятностных задач часто экспериментальным путем определяются законы распределения вероятностей параметров управления, которые стараются подогнать под нормальный закон Гаусса, т.к. большинство существующих методов моделирования обоснованы при условии нормального распределения вероятностей параметров управления.

Но позже А.И. Орлов, с целью построения более адекватных математических моделей, задает вопрос: “Часто ли распределения результатов наблюдений являются нормальными?” [3]. Ответ на этот вопрос отрицательный.

Опыт наших многочисленных экспериментальных исследований тоже подтверждает отрицательность ответа на этот вопрос.

В экономических исследованиях последних лет появились работы, посвященные вариантности экономики и полос неопределенностей [4], в которых считается, что значения экономических показателей не являются постоянными величинами, а находятся внутри жестко заданных полос, внутри которых все значения равновероятны.

Постановка задачи и обобщение математических моделей. Считаем, что неучет реально существующих форм законов распределения управляющих параметров в ближайшем будущем станет причиной затруднения или полного отказа использования оптимизации посредством детерминированных моделей. Даже при практическом применении результатов детерминированной оптимизации часто на практике не обеспечивается получение ожидаемого эффекта, и реально полученные эффекты оказываются значительно меньше теоретически ожидаемой величины. Возникает вопрос: в чем причина такого несоответствия? На наш взгляд, основными причинами являются неучет неопределенностей в виде реальных форм законов распределения параметров управления и, как следствие, неадекватность моделей.

Для обоснования сказанного вспомним из математики: определенный интеграл

$$M[C(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} C(X)f(X)dX, \quad (1)$$

где $f(X)$ – дифференциальный закон распределения случайной величины X (вектора), является математическим ожиданием функции $C(X)$. Если же $f(X)$ ограничена слева и/или справа, то численное значение интеграла (1), которое является постоянной величиной, всегда будет меньше $M[C(X)]$.

Замечание. Так как предлагаемый метод обобщения математических моделей всегда сводится к вычислению определенных интегралов типа (1) при всевозможных законах распределения, то часто могут возникнуть затруднения при попытке получить аналитические решения. Следует отметить, что использование современных информационных технологий создает благоприятные условия для решения этой проблемы.

При внедрении результатов оптимизации определенными детерминированными моделями $C(X)$ оптимум X_{opt} является "заданием на систему", которое в течение реализации принимает случайные значения, распределенные по некоторому закону $f(X)$, т.е. применение оптимального задания практически подвергается имитации (статистическому испытанию), и в результате получается не $C(X_{opt})$, а $M[C(X)]$, которое всегда хуже, чем $C(X_{opt})$:

$$M[C(X)] \leq C(X_{opt}). \quad (2)$$

Покажем вышеуказанное несоответствие на элементарных примерах.

1. Пусть $C(x) := -x^3 - x^2 + 4x + 1$ - одномерная нелинейная модель, максимум которой находится в точке $X_{opt} = 0.875, C(0.875)=3$. График модели $C(X)$ показан на рис. 1.

Допустим, что в течение функционирования системы равномерно распределенная случайная величина с плотностью распределения $f(X) = 0,5$ в пределах $0 \leq X \leq 2$.

В результате внедрения получим: $M[C(X)] = \int_0^2 C(X)f(X)dX = 1,667, 1,667 < 3$. Условия этого примера графически показаны на рис.1.

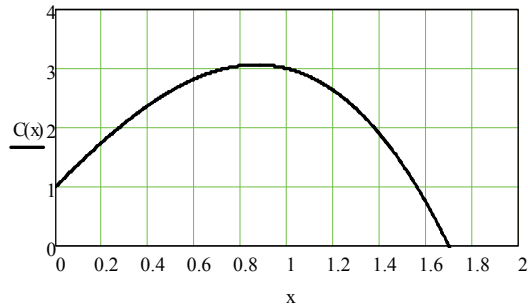


Рис.1. График модели $C(X)$

2. Рассмотрим эту же задачу в общем случае равномерного распределения. Пусть заданы

$$C(x) \text{ и } f(x) := \frac{1}{b-a}.$$

Математическое ожидание модели будет

$$M(C(X)) = \int_a^b \frac{1}{b-a} C(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b C(x) dx,$$

т.е. при равномерном распределении всегда закон распределения умножается на интегральную площадь детерминированной модели.

3. Пусть $C(x) = 2 + 3x - 4x^2$. $x_{opt} = 0,375$, $C(0,375) = 2,263$.

Если $f(x) := \frac{e^{-x}}{m}$, $m = 0,5$, пределы интегрирования от 0 до 1, то

$$M[C(x)] = \int_0^1 (2 + 3x - 4x^2) f(x) dx = 1,974, 1,974 < 2,563.$$

Условия этого примера графически показаны на рис.2.

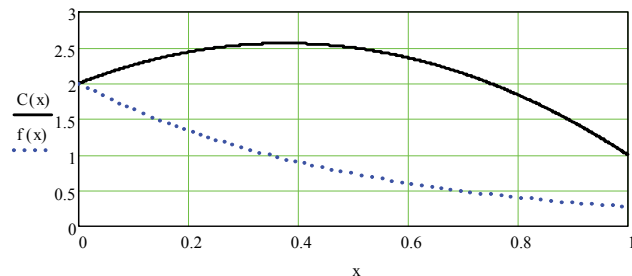


Рис.2. Условия задачи 3

4. Пусть, $C(x) := 2 + 3 \cdot x - 4 \cdot x^2$, $f(x) = \frac{x e^{\frac{-x^2}{2M^2}}}{M^2}$, $M = 0,4$,

$$x_{opt} = 0,375, C(375) = 2,563,$$

$$M[C(x)] = \int_0^1 C(x) f(x) dx = 2,218 < 2,563,$$

Условия примера 4 графически показаны на рис. 3.

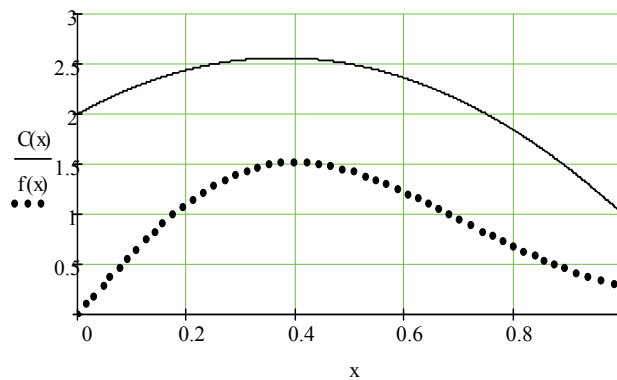


Рис.3. Условия примера 4

5. Двумерная задача. Пусть $C(X, Y) = 5 + [-(X - 1)^2 - (Y - 2)^2]$,

$$X_{opt} = 1, Y_{opt} = 2, C(1, 2) = 5,$$

$$f(X, Y) = \frac{X e^{\frac{-X^2}{2M^2}}}{M^2} \frac{Y e^{\frac{-Y^2}{2N^2}}}{N^2}, M = 1, N = 1.$$

Численное значение двойного интеграла определено в пределах: по x - от 1 до 3, а по y - от 2 до 4. $M[C(X, Y)] = 3.522 < 5$.

График двумерной модели показан на рис.4.

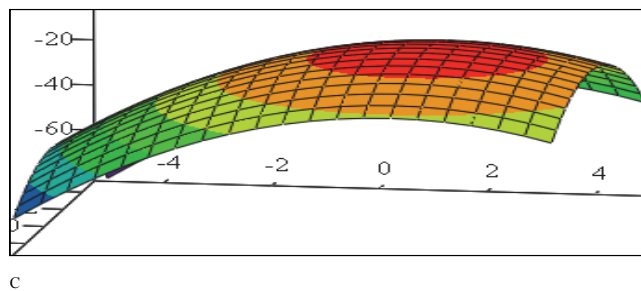


Рис.4. Поверхность двумерной модели $C(X, Y)$

6. Линейные модели. Пусть $C(x) = kx + n$, $k = 0,125$, $n = 0,1$,

$$a = 2, b = 4, s = 0,6, x_{opt} = 4, C(4) = 0,6, f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-b)^2}{2s^2}}}{s\sqrt{2\pi}},$$

$$M[C(x)] = \int_2^4 C(x)f(x)dx = 0,27, 0,27 < 0,6.$$

Условия этого примера графически показаны на рис.5.

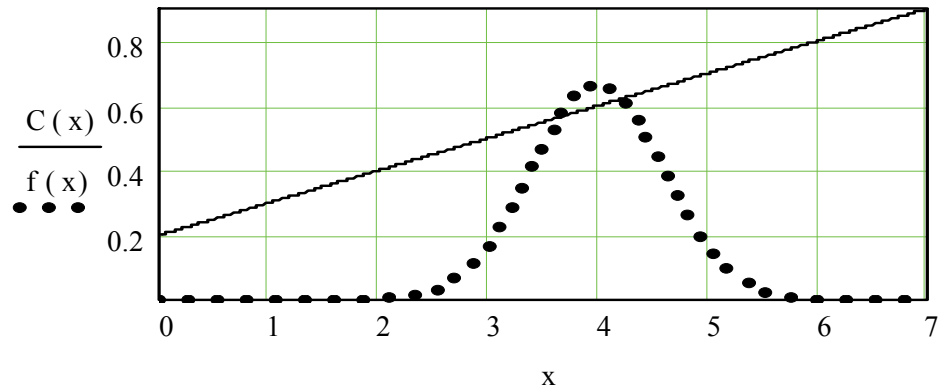


Рис.5. Условия примера 6

7. Пусть $C(x) = 0,1x + 0,2$, $f(x) = \frac{xe^{-\frac{(x-3)^2}{2M^2}}}{M^2}$, $M=2,5$.

Пределы интегрирования от 2 до 4. $x_{opt} = 4$, $C(x) = 0,6$,

$$M[C(x)] = \int_2^4 C(x)f(x)dx = 0,478, 0,478 < 0,6.$$

Условия этого примера графически показаны на рис.6,

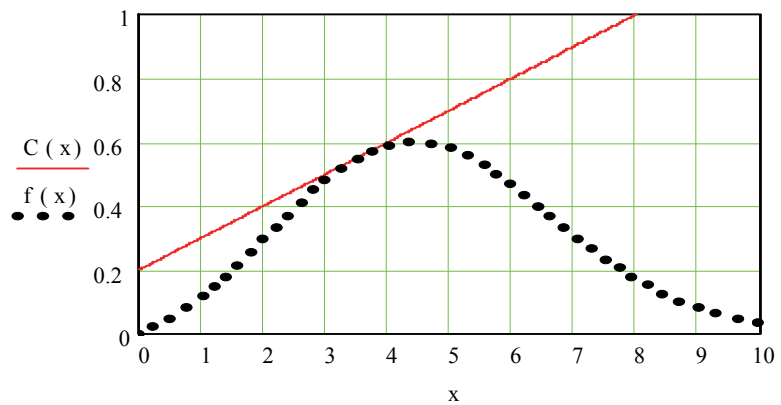


Рис.6. Условия примера 7

8. Рассмотрим линейную модель на минимум. Пусть

$$C(x) = 2x, x_{\min} = 2, C(2) = 4.$$

Пределы интегрирования - от 2 до 2,5,

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2}, \sigma = 1.$$

Тогда $M[C(x)] = \int_2^{2,5} C(x)f(x)dx = 4,56 > 4$.

Условия этого примера графически показаны на рис.7.

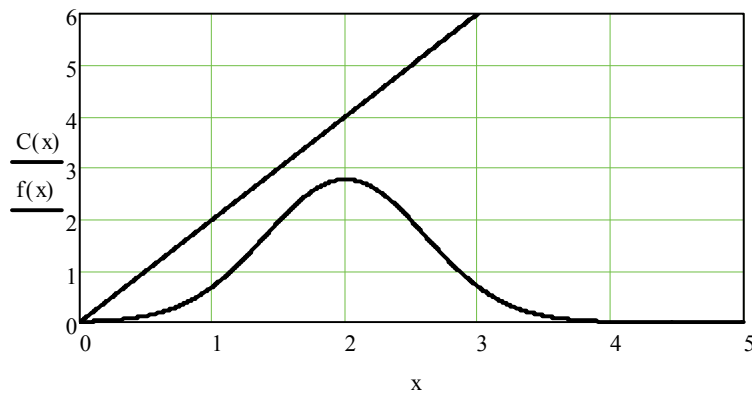


Рис.7. Условия примера 8

Для исследования всевозможных аналогичных задач на рис. 8 приведена блок-схема обобщенного алгоритма.

Замечание. При поиске максимального значения целевой функции в блоке 9 следует использовать знак “минус”, а при поиске минимума - знак “плюс”.

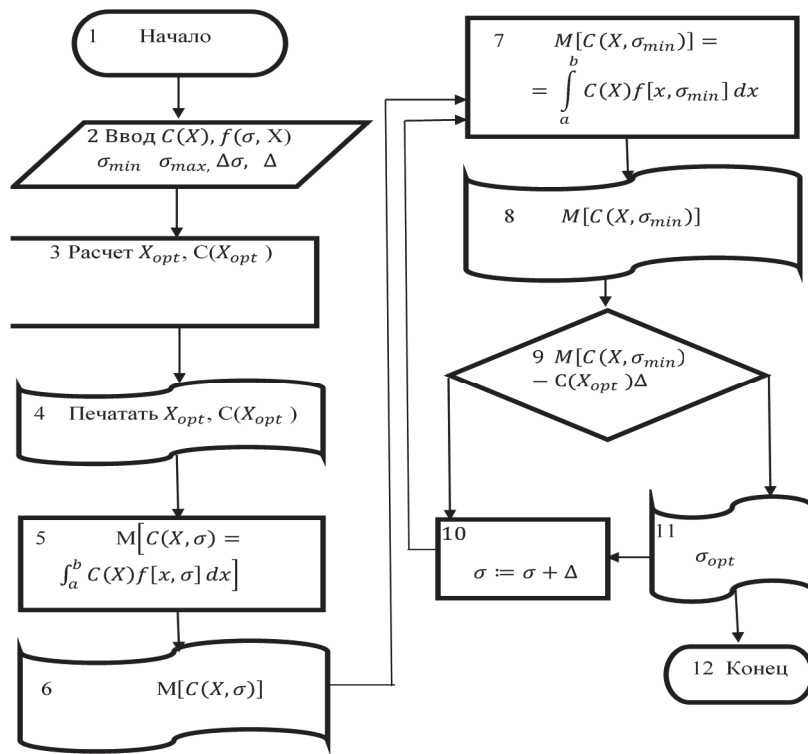


Рис.8. Блок-схема обобщенного алгоритма

Выводы

1. Задачи оптимального управления и ожидаемые эффективности, определенные детерминированными моделями, всегда неточны, так как внедренные детерминированные оптимальные управления на практике преобразуются в случайные величины с отличными от нуля дисперсиями.

2. При уменьшении дисперсии (например, при автоматическом регулировании оптимальной настройки) эффективность постепенно приближается к детерминированному оптимуму, никогда не достигая значения $C\langle X_{opt} \rangle$, т.е. всегда $C\langle X_{opt} \rangle > M[C(X)]$, когда ищется максимум, и $C\langle X_{opt} \rangle < M[C(X)]$, когда ищется минимум детерминированной модели.

3. Точное совпадение значений $C\langle X_{opt} \rangle$ и $M[C(X)]$ возможно только тогда, когда управление распределено по закону Дирака, что практически невозможно.

4. Реальное значение целевой функции зависит от типа законов распределения.

5. Для всех типов задач уменьшение дисперсии приводит только к постепенному асимптотическому приближению к $C\langle X_{opt} \rangle$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цыпкин Я.З.** Адаптация и обучение в автоматических системах.-М.: Наука, 1968.- 400 с.
2. **Юдин Д.Б.** Математические методы управления в условиях неполной информации.- М.: Сов.радио, 1974.- 400 с.
3. **Орлов А.И.** Эконометрика.- М.: Экзамен, 2002.- 576 с.
4. **Тавадян А.А.** Полосы неопределенности и вариантность экономики.- М.: Изд. “Флинта”, 2019.-104 с.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 30.01.2020.

Թ.Ա. ՆԱԼՉԱՋՅԱՆ

ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՑՎԱԾ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼՆԵՐԻ ԸՆՂԻԱՆՐԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Քննարկվում է դետերմինացված մաթեմատիկական մոդելների ընդհանրացման խնդիրը օպտիմալ վճիռների գործնական կիրառման տեսակետից: Ցույց է տրված, որ իրական պայմաններում օպտիմալ վճիռների ներդրման գործընթացները միշտ ընթանում են որոշակի անորոշության պայմաններում, որի հետևանքով ստացվող իրական արդյունքը զգալիորեն փոքր է լինում տեսականորեն ակնկալվող չափից: Առաջարկվում է ինչպես գծային, այնպես էլ ոչ գծային դետերմինացված մաթեմատիկական մոդելների ընդհանրացման մեթոդ:

Առանցքային բառեր. մաթեմատիկական մոդելներ, օպտիմալ կառավարում, անորոշություն, ընդհանրացում:

T.A. NALCHAJYAN

GENERALIZATION OF DETERMINISTIC MATHEMATICAL MODELS

The issue of generalizing the deterministic mathematical models from the standpoint of practical introduction of the obtained optimal solutions is considered. It is proved that the introduction of optimal solutions under real conditions is always carried out with some uncertainty, as a result of which the obtained real effect is considerably smaller than the anticipated theoretical level. A method for generalizing both linear and non-linear mathematical models is proposed.

Keywords: mathematical models, optimal control, uncertainty, generalization.