

С.О. СИМОНЯН

**К РЕШЕНИЮ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ
ПАЛИНДРОМНЫХ ЗАДАЧ ТИПА $A(t) \cdot X^*(t) + X(t) \cdot A(t) = 0$**

Предложены аналитический метод для решения однопараметрических сопряженных аналогов матричных палиндромных задач, представляющий определенный теоретический интерес, а также численно-аналитический метод на его основе для решения научно-практических задач. Основным математическим аппаратом при разработке этих методов послужили дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова.

Ключевые слова: однопараметрические сопряженные аналоги матричных палиндромных задач, аналитический метод решения, дифференциальные преобразования, численно-аналитический метод решения, современные информационные технологии.

Введение. В работе [1] предложены методы решения однопараметрических матричных палиндромных задач типа

$$\underset{m \times m}{A(t)} \cdot \underset{m \times m}{X(t)} + \underset{m \times m}{X(t)} \cdot \underset{m \times m}{A(t)} = \underset{m \times m}{0}, \quad (1)$$

а в работе [2] – методы решения однопараметрических транспонированных аналогов матричных палиндромных задач, т.е. задач типа

$$\underset{m \times m}{A(t)} \cdot \underset{m \times m}{X^T(t)} + \underset{m \times m}{X(t)} \cdot \underset{m \times m}{A(t)} = \underset{m \times m}{0}. \quad (2)$$

Настоящая работа посвящена разработке методов решения однопараметрических сопряженных аналогов матричных палиндромных задач, т.е. задач типа

$$\underset{m \times m}{A(t)} \cdot \underset{m \times m}{X^*(t)} + \underset{m \times m}{X(t)} \cdot \underset{m \times m}{A(t)} = \underset{m \times m}{0}. \quad (3)$$

Математический аппарат**1. Редукция задачи**

Из соотношения (3) при $\det A(t) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}(t)$ имеем

$$X(t) = -A(t) \cdot X^*(t) \cdot A^{-1}(t),$$

откуда

$$X^*(t) = -[A(t) \cdot X^*(t) \cdot A^{-1}(t)]^* = -[A^*(t)]^{-1} \cdot X(t) \cdot A^*(t). \quad (4)$$

С другой стороны, из того же соотношения (3) следует, что

$$X^*(t) = -A^{-1}(t) \cdot X(t) \cdot A(t). \quad (5)$$

Далее, сопоставление (4) и (5) приводит к следующему выражению:

$$A^{-1}(t) \cdot X(t) \cdot A(t) = [A^*(t)]^{-1} \cdot X(t) \cdot A^*(t). \quad (6)$$

Теперь, умножив (6) на $A(t)$ слева и на $[A^*(t)]^{-1}$ – справа, получим

$$X(t) \cdot A(t) \cdot [A^*(t)]^{-1} = A(t) \cdot [A^*(t)]^{-1} \cdot X(t). \quad (7)$$

Далее, обозначив через

$$C(t) = A(t) \cdot [A^*(t)]^{-1}, \quad (8)$$

из (7) следует представление

$$C(t) \cdot X(t) - X(t) \cdot C(t) = 0, \quad (9)$$

по виду полностью совпадающее с соотношением (8) из работы [1].

Таким образом, в результате редукции - эквивалентных преобразований однопараметрического сопряженного аналога матричной палиндромной задачи (3), приходим к задаче с искомой неизвестной матрицей $X(t)$, перестановочной с матрицей $C(t)$. Однако, очевидно, определение матрицы $C(t)$ в соответствии с (8) связано с большими вычислительными затруднениями. Поэтому представим возможный численно-аналитический метод определения ее аппроксимирующего эквивалента на основе использования дифференциальных преобразований [3].

2. Определение матрицы $C(t)$

При условии $\det A^*(t) \neq 0 \Leftrightarrow \exists [A^*(t)]^{-1}$ из соотношения (8) имеем

$$C(t) \cdot A^*(t) = A(t). \quad (10)$$

Далее, предположим, что существуют дифференциальные преобразования

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K A(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad A(t) = \alpha_1(t, t_v, H, A(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (11)$$

$$C(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K C(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad C(t) = \alpha_2(t, t_v, H, C(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (12)$$

где $A(K)$ и $C(K)$ – матричные дискреты матриц $A(t)$ и $C(t)$ соответственно; $K = \overline{0, \infty}$ - целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; t_v - центр

аппроксимации; символ $\overline{\cdot}$ - знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\mathfrak{x}_1(\cdot)$ и $\mathfrak{x}_2(\cdot)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$ и $C(t)$ соответственно.

Теперь (10) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. При этом в соответствии с алгеброй дифференциальных преобразований будем иметь спектральное представление

$$\sum_{l=0}^K C(l) \cdot A^*(K-l) = A(K), K = \overline{0, \infty}. \quad (13)$$

Тогда из (14) имеем:

при $K=0$:

$$C(0) \cdot A^*(0) = A(0),$$

откуда

$$C(0) = A(0) \cdot [A^*(0)]^{-1}, \text{ если } \det A^*(0) \neq 0; \quad (14)$$

при $K=1$:

$$C(0) \cdot A^*(1) + C(1) \cdot A^*(0) = A(1),$$

откуда

$$C(1) = [A(1) - C(0) \cdot A^*(1)] \cdot [A^*(0)]^{-1}; \quad (15)$$

при $K=2$:

$$C(0) \cdot A^*(2) + C(1) \cdot A^*(1) + C(2) \cdot A^*(0) = A(2),$$

откуда

$$C(2) = [A(2) - C(0) \cdot A^*(2) - C(1) \cdot A^*(1)] \cdot [A^*(0)]^{-1}; \quad (16)$$

при $K=3$:

$$C(0) \cdot A^*(3) + C(1) \cdot A^*(2) + C(2) \cdot A^*(1) + C(3) \cdot A^*(0) = A(3),$$

откуда

$$C(3) = [A(3) - C(0) \cdot A^*(3) - C(1) \cdot A^*(2) - C(2) \cdot A^*(1)] \cdot [A^*(0)]^{-1}; \quad (17)$$

...

при K :

$$C(0) \cdot A^*(K) + C(1) \cdot A^*(K-1) + \dots + C(K-1) \cdot A^*(1) + C(K) \cdot A^*(0) = A(K),$$

откуда

$$C(K) = [A(K) - \sum_{l=0}^{K-1} C(l) \cdot A^*(K-l)] \cdot [A^*(0)]^{-1}. \quad (18)$$

Итак, вычислив матричные дискреты (14)-(18), в соответствии с правой частью (12) можно восстановить матрицу $C(t)$. В частности, при дифференциально-тейлоровских преобразованиях и $H=I$ будем иметь аппроксимирующий эквивалент матрицы (8) в виде представления

$$C(t) = \sum_{l=0}^K C(K) \cdot (t - t_v)^l. \quad (19)$$

3. Определение аналитических решений $X(t)$

Используя аппарат кронекеровых произведений матриц [4], матричное уравнение (9) представим в виде

$$[c(t) \otimes E^T - E \otimes c^T(t)]_{m^2 \times m^2} \cdot X^{\wedge}(t)_{m^2 \times 1} = \hat{0}_{m^2 \times 1} \quad (20)$$

или

$$G(t) \cdot X^{\wedge}(t) = \hat{0}, \quad (21)$$

где $G(t)$ – гиперматрица порядка m^2 ; $X^{\wedge}(t)$ – гипервектор

$$X^{\wedge}(t) = (x_{11}(t), \dots, x_{1m}(t); x_{21}(t), \dots, x_{2m}(t); \dots; x_{m1}(t), \dots, x_{mm}(t))^T \quad (22)$$

с размерами $m^2 \times 1$, порожденный матрицей

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1m}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \dots & x_{mm}(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

порядка m ; $E \equiv E^T$ – единичная матрица того же порядка, а символ $\otimes$ - знак кронекерова произведения матриц.

Из гиперматрично-гипервекторного однородного матричного уравнения (21) следуют условия

$$\text{а) } X^{\wedge}(t) = 0, \text{ если } \det G(t) = 0; \quad (24 \text{ а})$$

$$\text{б) } X^{\wedge}(t) = 0, \text{ если } \det G(t) \neq 0; \quad (24 \text{ б})$$

$$\text{в) } \hat{X}(t) \neq 0, \text{ если } \det G(t) = 0, \quad (24 \text{ в})$$

первые два из которых из-за тривиальности решений не представляют практического интереса, а третье обуславливает последовательное выполнение следующих операций для нахождения нетривиального решения $\hat{X}(t) \neq 0$:

- определение гиперматрицы $G(t)$;
- определение $\det G(t)$;
- составление уравнения $\det G(t) = 0$,
- определение корней этого уравнения $t_1, t_2, \dots, t_p$, где p – некоторое число, указывающее на количество этих корней.

Определение. Изолированные точки $t_1, t_2, \dots, t_p$ назовем сингулярными, т.к. в этих точках определители гиперматриц $G(t_i), i = \overline{1, p}$ равны нулю.

Замечание 1. Задача (3) (или (9)) имеет p ненулевых решений ($\hat{X}(t_i) \neq 0, i = \overline{1, p}$) на конечном множестве Ω сингулярных точек $t_1, t_2, \dots, t_p$ кронекеровой гиперматрицы $G(t)$, если $\Omega \neq \emptyset$, и не имеет ни одного ненулевого решения ($\hat{X}(t_i) = 0, i = \overline{1, p}$), если $\Omega = \emptyset$.

- определение числовых гиперматриц $G(t_i), i = \overline{1, p}$;
- определение числовых гипервекторов $\hat{X}(t_i), i = \overline{1, p}$ с учетом рангов $m^2 - r_i$ (где $0 < r_i \leq m^2$) гиперматриц $G(t_i), i = \overline{1, p}$, при которых можно произвольно выбрать $r_i, i = \overline{1, p}$ компонентов гипервектора $\hat{X}(t_i), i = \overline{1, p}$, а остальные $m^2 - r_i$ компонентов определять с точностью до этих выбранных значений;
- составление числовых матриц $X(t_i), i = \overline{1, p}$ решений исходной задачи в изолированных сингулярных точках $t_i, i = \overline{1, p}$;
- осуществление матричного аппроксимационного синтеза решения $X(t)$ с использованием числовых матриц $X(t_i), i = \overline{1, p}$ на основе методов теории аппроксимации [5].

Замечание 2. Для определения детерминанта кронекеровой гиперматрицы $G(t)$ можно использовать результаты, полученные в работе [6].

Замечание 3. Для решения уравнения (24в) можно использовать результаты, полученные в работе [7].

4. Определение численно-аналитических решений $X(t)$

Теперь перейдем к численно-аналитическому решению задачи (9), полагая, что существуют дифференциальные преобразования

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K X(t)}{dt^K} \Big|_{t=t_v}, K = \overline{0, \infty} \in \alpha_j(t, t_v, H, X(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (25)$$

иными словами - матричные дискреты

$$X(K) = \begin{bmatrix} X_{11}(K) & X_{12}(K) & \cdots & X_{1m}(K) \\ X_{21}(K) & X_{22}(K) & \cdots & X_{2m}(K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1}(K) & X_{m2}(K) & \cdots & X_{mm}(K) \end{bmatrix}, K = \overline{0, \infty}, \quad (26)$$

порожденные матрицей (23) в соответствии с левой частью соотношения (25).

Итак, гиперматричное уравнение (9) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. При этом получим спектральное представление

$$\sum_{l=0}^k C(l) \cdot X(K-l) - \sum_{l=0}^k X(l) \cdot A(K-l) = 0, K = \overline{0, \infty}, \quad (27)$$

откуда:

при $K=0$:

$$C(0) \cdot X(0) - X(0) \cdot C(0) = 0, \quad (28)$$

откуда

$$[C(0) \otimes E^T - E \otimes C^T(0)] \cdot \hat{X}(0) = \hat{0} \quad (29)$$

или

$$G(0) \cdot \hat{X}(0) = \hat{0}. \quad (30)$$

Из последнего гиперматрично-гипервекторного уравнения следуют условия

$$\text{а) } \hat{X}(0) = \hat{0}, \text{ если } \det G(0) = 0; \quad (31 \text{ а})$$

$$\text{б) } \hat{X}(0) = \hat{0}, \text{ если } \det G(0) \neq 0; \quad (31 \text{ б})$$

$$\text{в) } \hat{X}(0) \neq \hat{0}, \text{ если } \det G(0) = 0, \quad (31 \text{ в})$$

первые два из которых не представляют практического интереса из-за тривиальности решений, а третье представляет возможность определения нетривиальных решений. Действительно, если

$$\text{rang} G(0) = m^2 - r \quad (32)$$

(где $0 < r \leq m^2$), то при этом можно произвольно выбрать r компонентов гипервектора $\hat{X}(0)$, а остальные $m^2 - r$ компонентов определять с точностью до этих выбранных значений. Тогда, естественно, в качестве центров аппроксимации должны выступать сингулярные точки $t_1, t_2, \dots, t_p$, при которых могут быть определены гипервекторные дискреты $\hat{X}(0) \neq 0, \hat{X}(1), \hat{X}(2)$ и т.д.

Итак, с учетом (31в) и (32) имеем:

при $K=1$:

$$C(1) \cdot X(0) + C(0) \cdot X(1) = X(1) \cdot C(0) + X(0) \cdot C(1),$$

откуда

$$[C(0) \otimes E^T - E \otimes C^T(0)] \cdot \hat{X}(1) = -[C(1) \otimes E^T - E \otimes C^T(1)] \cdot \hat{X}(0),$$

или

$$G(0) \cdot \hat{X}(1) = -G(1) \cdot \hat{X}(0),$$

откуда

$$\hat{X}(1) = -G^+(0) \cdot G(1) \cdot \hat{X}(0); \quad (33)$$

при $K=2$:

$$C(2) \cdot X(0) + C(1) \cdot X(1) + C(0) \cdot X(2) = X(2) \cdot C(0) + X(1) \cdot C(1) + X(0) \cdot C(2),$$

откуда

$$[C(0) \otimes E^T - E \otimes C^T(0)] \cdot \hat{X}(2) = -[C(1) \otimes E^T - E \otimes C^T(1)] \cdot \hat{X}(1) - \\ - [C(2) \otimes E^T - E \otimes C^T(2)] \cdot \hat{X}(0),$$

или

$$G(0) \cdot \hat{X}(2) = -G(1) \cdot \hat{X}(1) - G(2) \cdot \hat{X}(0),$$

откуда

$$\hat{X}(2) = -G^+(0) \cdot [G(1) \cdot \hat{X}(1) + G(2) \cdot \hat{X}(0)]; \quad (34)$$

при $K=3$:

$$C(3) \cdot X(0) + C(2) \cdot X(1) + C(1) \cdot X(2) + C(0) \cdot X(3) = X(3) \cdot C(0) + X(2) \cdot C(1) + \\ + X(1) \cdot C(2) + X(0) \cdot C(3),$$

откуда

$$[C(0) \otimes E^T - E \otimes C^T(0)] \cdot \hat{X}(3) = -[C(1) \otimes E^T - E \otimes C^T(1)] \cdot \hat{X}(2) - \\ - [C(2) \otimes E^T - E \otimes C^T(2)] \cdot \hat{X}(1) - [C(3) \otimes E^T - E \otimes C^T(3)] \cdot \hat{X}(0),$$

или

$$G(0) \cdot \hat{X}(3) = -G(1) \cdot \hat{X}(2) - G(2) \cdot \hat{X}(1) - G(3) \cdot \hat{X}(0),$$

откуда

$$\hat{X}(3) = -G(0)^+ \cdot [G(1) \cdot \hat{X}(2) + G(2) \cdot \hat{X}(1) + G(3) \cdot \hat{X}(0)]; \quad (35)$$

...

при $K=K$:

$$C(K) \cdot X(0) + C(K-1) \cdot X(1) + \dots + C(1) \cdot X(K-1) + C(0) \cdot X(K) = \\ = X(K) \cdot C(0) + X(K-1) \cdot C(1) + \dots + X(1) \cdot C(K-1) + X(0) \cdot C(K),$$

откуда

$$[C(0) \otimes E^T - E \otimes C^T(0)] \cdot \hat{X}(K) = -[C(1) \otimes E^T - E \otimes C^T(1)] \cdot \hat{X}(K-1) - \dots - \\ - [C(K) \otimes E^T - E \otimes C^T(K)] \cdot \hat{X}(0),$$

или

$$G(0) \cdot \hat{X}(K) = -\sum_{l=1}^K G(l) \cdot \hat{X}(K-l),$$

откуда

$$\hat{X}(K) = -G(0)^+ \cdot \sum_{l=1}^K G(l) \cdot \hat{X}(K-l). \quad (36)$$

Итак, имея матричные дискреты (31в), (33), (34) - (36), в соответствии с правой частью (25) можно восстановить матрицы $X(t)_\nu, \nu = \overline{l, p}$. В частности, при дифференциально-тейлоровских преобразованиях [3] имеем

$$X(t)_\nu = -\sum_{l=0}^K X(K)_\nu \cdot (t-t_\nu)^l, \quad \nu = \overline{l, p}. \quad (37)$$

Замечание 4. Таким образом, в общем случае преобразованная и эквивалентная к исходной задаче (3) однопараметрическая матричная палиндромная задача (9) будет обладать решениями с соответствующими точностями в зависимости от количеств $K+1$ слагаемых в соотношениях типа (37). К тому же, при фиксированном центре аппроксимации $t_v, v \in \overline{1, p}$, в зависимости от выбора произвольных r компонент вектора $\hat{X}(0)_v, v \in \overline{1, p}$, может быть получено бесчисленное множество решений $\hat{X}(t)_v, v \in \overline{1, p}$. Следовательно, в результате организации численных процедур по определению решений задачи (3) в соответствии с численно-аналитическим методом в общем случае приходим к бесчисленному множеству решений $\hat{X}(t)_v, v \in \overline{1, p}$.

Замечание 5. При линейных по параметру t элементах матриц $C(t)$, очевидно, следует, что

$$G(K) \equiv 0, K \geq \overline{2, \infty}. \quad (38)$$

Следовательно, при этом соотношения по определению гипервекторных дискрет (33)-(36) вырождаются и приобретают вид

$$\begin{cases} \hat{X}(1) = -G^+(0) \cdot G(1) \cdot \hat{X}(0), \\ \hat{X}(2) = -G^+(0) \cdot G(1) \cdot \hat{X}(1), \\ \hat{X}(3) = -G^+(0) \cdot G(1) \cdot \hat{X}(2), \\ \dots\dots\dots \\ \hat{X}(K) = -G^+(0) \cdot G(1) \cdot \hat{X}(K-1), \end{cases} \quad (39)$$

откуда имеем

$$\hat{X}(K) = [-G^+(0) \cdot G(1)]^K \cdot \hat{X}(0), K \geq \overline{1, \infty}. \quad (40)$$

Дальнейшие процедуры по составлению матричных дискретов $\hat{X}(K)_v, K = \overline{0, \infty}, v \in \overline{1, p}$ и восстановлению матричных решений $\hat{X}(t)_v, v \in \overline{1, p}$ не представляют трудности.

Заключение. Таким образом, для решения однопараметрической матричной палиндромной задачи типа (3) предложен численно-аналитический метод, представляющий определенный научно-практический интерес и сравнительно легко реализуемый средствами современных информационных технологий [8, 9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических матричных палиндромных задач типа $A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) = 0$ // Известия НАН РА и НПУА. Сер. ТН. - 2019. - Т. LXXII, №3. - С. 418-428.
2. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических матричных палиндромных задач типа $A(t) \cdot X^T(t) + X(t) \cdot A(t) = 0$ // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника.- 2019.- №2.- С. 28-34.
3. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка, 1990.- 419 с.
4. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.- М.: Наука, 2010.- 560 с.
5. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы.- М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.- 632с.
6. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Вычисление определителей неавтономных матриц на основе ДТ-формализма // Известия НАН РА и ГИУА. Серия Техн. наук.- 1999.- Т. 52, №1.- С. 88-94.
7. **Симонян С.О.** Прикладные аспекты применения ДТ-преобразований при построении траекторий равновесных состояний динамических систем // Электронное моделирование.- 1993.- Т. 15, №2.- С. 58-65.
8. **Joshua Bloch.** Effective Java (3rd Edition). - Addisou-Wesley Professional, 2017.- 414p.
9. **Stormy Attaway.** Matlab: A practical Introduction to Programming and Problem Solving (3rd Edition). - Butterworth-Heinemann, 2013.- 560p.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 21.04.2020.

Մ.Հ. ՄԻՄՈՆՅԱՆ

$A(t) \cdot X^*(t) + X(t) \cdot A(t) = 0$ ՏԻՊԻ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՊԱԼԻՆԴՐՈՄԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Առաջարկվել է միապարամետրական մատրիցային պալինդրոմային խնդիրների համալուծ նմանակների լուծման անալիտիկ մեթոդ, որը ներկայացնում է որոշակի տեսական հետաքրքրություն, ինչպես նաև նրա հիման վրա՝ թվա-անալիտիկ մեթոդ՝ գիտա-գործնական խնդիրների լուծման համար: Այդ մեթոդների մշակման ժամանակ որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ են ծառայել Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունները:

Առանցքային բառեր. միապարամետրական մատրիցային պալինդրոմային խնդիրների համալուծ նմանակներ, լուծման անալիտիկ մեթոդ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, լուծման թվա-անալիտիկ մեթոդ, ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ:

S.H. SIMONYAN

**THE SOLUTION OF ONE-PARAMETRIC MATRIX PALINDROMIC PROBLEMS
OF THE TYPE $A(t) \cdot X^*(t) + X(t) \cdot A(t) = 0$**

An analytical method for solving one-parameter conjugate analogues of matrix palindromic problems of certain theoretical interest, as well as a numerical-analytical method based on it for solving scientific and practical problems is proposed. The main mathematical apparatus in the development of these methods are the differential transformations of G.E. Pukhov.

Keywords: one-parameter conjugate analogues of matrix palindromic problems, analytical method of solution, differential transformations, numerical-analytical method of solution, modern information technologies.