АСТРОФИЗИКА

ТОМ 23 ОКТЯБРЬ, 1985 ВЫПУСК 2

УДК 52—64

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НЕКОГЕРЕНТНОГО АНИЗОТРОПНОГО РАССЕЯНИЯ

А. Х. ХАЧАТРЯН

Поступила 28 января 1985
Принята к печати 8 мая 1985

Настоящая работа посвящена рассмотрению нелинейной задачи при общих законах перераспределения по частотам внутри спектральной линии с учетом неизотропности элементарного акта рассеяния. Делается предположение о совпадении профилей коэффициентов поглощения и вынужденного излучения. Применение метода работы [1] позволяет линеаризовать задачу и свести ее к системе линейных интегральных уравнений. Предлагается способ нахождения реальной оптической толщины слоя.

1. *Введение.* К настоящему времени опубликовано большое количество работ по нелинейным задачам переноса излучения [1—14]. Учет нелинейных эффектов в проблеме образования спектральных линий возникает при больших плотностях излучения, когда концентрация возбужденных атомов становится сравнимой с концентрацией атомов, находящихся в основном состоянии. Впервые в работах [1, 2] Н. Б. Енгибаряном был предложен математический метод решения нелинейных трехмерных задач. Этот метод опирается на метод самосогласованных оптических глубин В. А. Амбарцумяна [3]. В дальнейшем метод работы [1] был применен в работах [4—10] к решению различных нелинейных задач переноса излучения. Однако эти задачи рассматривались в основном при предположении об изотропности элементарного акта рассеяния (когда индикатриса рассеяния сферическая). Не учитывалась также зависимость функции перераспределения от угла рассеяния.

В работах [15—17] изучены линейные задачи некогерентного анизотропного рассеяния.

В настоящей работе, представляющей собой продолжение серии работ [9, 10], рассматривается нелинейная задача переноса в спектральной линии в изотермическом слое газа, состоящего из двухуровенных атомов с учетом некогерентности и неизотропности элементарного акта рассеяния. Делается упрощающее предположение о совпадении профилей коэффициентов поглощения и вынужденного излучения. Применение метода работы [1] позволяет линеаризовать задачу и свести ее к системе линейных интегральных уравнений. При решении задачи переноса в слое конечной толщины применяется метод работы [18], основанный на установлении связи между решениями задач в полупространстве и в слое конечной толщины. Предлагается эффективный способ нахождения функции $Q(\tau_0)$, посредством которого устанавливается связь между реальными и предельными оптическими толщинами, что означает полное решение задачи.

2. *Пусть плоскопараллельный слой* с геометрической толщиной z_0 равномерно заполнен атомами с двумя энергетическими уровнями и свободными электронами. Со стороны границы $z=0$ среда освещается внешним излучением, имеющим некоторое спектральное распределение. Будем предполагать, что профили коэффициентов поглощения и вынужденного излучения совпадают. Обозначим через n_k $(k=1, 2)$ число атомов в единичном объеме на глубине z, находящихся на k-ом уровне:

$$n_1(z)+n_2(z)=n_0. \tag{1}$$

Уравнение переноса в линии имеет вид:

$$\eta\frac{d\bar{I}(z, x, \eta, \varphi)}{dz}=-\frac{h\nu_0}{4\pi}\left(n_1-\frac{g_1}{g_2}n_2\right)B_{12}\alpha(x)\bar{I}(z, x, \eta, \varphi)+$$
$$+\frac{h\nu_0}{4\pi}n_2A_{21}\psi(x, \eta, \varphi) \tag{2}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered}\bar{I}(0, x, \eta, \varphi)=I_0(x, \eta, \varphi) \quad \text{при} \quad \eta>0,\\ \bar{I}(z_0, x, \eta, \varphi)=0 \quad \text{при} \quad \eta<0.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\bar{I}(z, x, \eta, \varphi)$ — интенсивность излучения частоты x, распространяющегося в направлении (η, φ) на глубине z, $\alpha(x)$ профиль коэффициента поглощения, g_k — кратность k-го уровня, B_{12}, A_{21} — эйнштейновские коэффициенты переходов, $\psi(x, \eta, \varphi)$ профиль спонтанного излучения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\psi(x, \eta, \varphi)\,dx\,d\eta\frac{d\varphi}{4\pi}=1. \tag{4}$$

Уравнение стационарности следующее:

$$n_2\psi(x, \eta, \varphi)\left[a_{21} + A_{21} + \frac{B_{21}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\alpha(x')\,\overline{I}(z, x', \eta', \varphi')\,dx'd\eta'\,d\varphi'\right] =$$

$$= n_1\left[a_{12}\alpha(x) + \frac{B_{12}}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}R(x, x', \gamma)\,\overline{I}(z, x', \eta', \varphi')\,dx'd\eta'd\varphi'\right], \quad (5)$$

где $R(x, x', \gamma) = \overline{R}(x, x', \gamma)\,X(\gamma)$ представляет собой произведение индикатрисы рассеяния $X(\gamma)$ и функции перераспределения по частотам при заданном угле рассеяния $\overline{R}(x, x', \gamma)$, γ — угол рассеяния, причем:

$$\cos\gamma = \eta\eta' + \sqrt{1-\eta'^2}\sqrt{1-\eta^2}\cos(\varphi-\varphi'). \quad (6)$$

Проинтегрировав уравнение (5) по всем направлениям и частотам, получим:

$$n_1\left[a_{12} + \frac{B_{12}}{4\pi}S\right] = n_2\left[a_{21} + A_{21} + \frac{B_{21}}{4\pi}S\right], \quad (7)$$

где

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\alpha(x')\overline{I}(z, x', \eta', \varphi')\,dx'd\eta'd\varphi'. \quad (8)$$

В уравнении (2) перейдем к новому аргументу τ, значение которого при каждом z зависит также от состояния поля излучения в слое $[0, z]$.

$$d\tau = \frac{h\nu_0}{4\pi}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2}n_2\right)B_{12}dz; \qquad \tau_0 = \int\limits_0^{z_0}\frac{h\nu_0}{4\pi}\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2}n_2\right)B_{12}dz, \quad (9)$$

$$\tau(0) = 0,$$

τ_0 — реальная оптическая толщина, которая пока неизвестна и подлежит определению.

При переходе в (2) к аргументу τ следует из уравнения стационарности (5), (7) определить величину

$$S(\tau, x, \eta, \varphi) = \frac{n_2A_{21}\psi(x, \eta, \varphi)}{\left(n_1 - \frac{g_1}{g_2}n_2\right)B_{12}}. \quad (10)$$

Оказывается, что как и в изотропном случае (см. [9]), величина $S(\tau, x, \eta, \varphi)$ линейно выражается через функцию $I(\tau, x, \eta, \varphi)$, а именно:

$$S(\tau, x, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} R(x, x', \gamma)\, I(\tau, x', \eta', \varphi')\, dx' d\eta' d\varphi' +$$

$$+ \frac{\lambda}{4\pi} \alpha(x) f_0, \tag{11}$$

где

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + a_{21} - \frac{g_1}{g_2} a_{12}}; \quad f_0 = \frac{4\pi a_{12}}{B_{12}}. \tag{12}$$

Тогда с учетом (9), (10), (11) уравнение (2) принимает вид:

$$\eta \frac{dI(\tau, x, \eta, \varphi)}{d\tau} = -\alpha(x) I(\tau, x, \eta, \varphi) + S(\tau, x, \eta, \varphi). \tag{13}$$

Граничные условия суть:

$$\begin{aligned} &I(0, x, \eta, \varphi) = I_0(x, \eta, \varphi) \text{ при } \eta > 0, \\ &I(\tau_0, x, \eta, \varphi) = 0 \qquad\qquad \text{ при } \eta < 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Уравнение (13) с граничными условиями (14) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$S(\tau, x, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \frac{d\eta'}{\eta'} \Bigg[\int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau')}{\eta'} \alpha(x')\right) \times$$

$$\times R(x, x', \eta, \eta', \varphi - \varphi') S(\tau', x', \eta', \varphi') d\tau' + \int_{\tau}^{\tau_0} \exp\left(-\frac{(\tau' - \tau)}{\eta'} \alpha(x')\right) \times$$

$$\times R(x, x', \eta, -\eta', \varphi - \varphi') S(\tau', x', -\eta', \varphi') d\tau' \Bigg] +$$

$$+ \frac{\lambda}{4\pi} S_0(\tau, x, \eta, \varphi). \tag{15}$$

Здесь

$$S_0(\tau, x, \eta, \varphi) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^1 R(x, x', \eta, \eta', \varphi - \varphi') I_0(x', \eta', \varphi') e^{-\frac{\tau}{\eta'} \alpha(x')} dx' d\eta' d\varphi' + \alpha(x) f_0. \tag{16}$$

В работах [15—17] приводится разложение функции перераспределения следующего вида, к которому мы не раз будем обращаться в настоящей работе:

$$R(x, x', \gamma) = \sum_{m=0}^{n} R_m(x, x', \eta, \eta') \cos m(\varphi - \varphi'), \tag{17}$$

где

$$R_m(x, x', \eta, \eta') = (2 - \delta_{0,m}) \sum_{i=m}^{n} \sum_{k=i}^{n} \overline{P}_i^m(\eta)\, \overline{P}_i^m(\eta')\, C_k^i \alpha_k(x)\, \alpha_k(x'). \tag{18}$$

Здесь $\overline{P}_i^m(\eta) = \sqrt{\dfrac{(i-m)!}{(i+m)!}}\, P_i^m(\eta)$, $P_i^m(\eta)$—присоединенные функции Лежандра, $\{\alpha_k(x)\}$ — ортонормированная система функций с весом $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$, а C_k^i — коэффициенты разложения:

$$C_k^i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{1} x^k P_i(x)\, dx. \tag{19}$$

Функция $S(\tau, x, \eta, \varphi)$ также представляется в виде:

$$S(\tau, x, \eta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} S_m(\tau, x, \eta) \cos m\varphi. \tag{20}$$

Тогда из (15) с учетом (17), (20) имеем

$$S_m(\tau, x, \eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=m}^{n} \overline{P}_i^m(\eta) \sum_{k=i}^{n} C_k^i \alpha_k(x)\, Q_{ik}^m(\tau) + \frac{\lambda}{4\pi} \alpha(x) f_0 \cdot \delta_{0,m}, \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{ik}^m(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_k(x') \int_0^1 \frac{\overline{P}_i^m(\eta')}{\eta'}\, d\eta' \Bigg\{ \Bigg[\int_0^{\tau} \exp\left(-\frac{(\tau-\tau')}{\eta'}\alpha(x')\right) \times \\ \times S_m(\tau', x', \eta')\, d\tau' + \\ + (-1)^{i+m} \int_{\tau}^{\tau_0} \exp\left(-\frac{(\tau'-\tau)}{\eta'}\alpha(x')\right) S_m(\tau', x', -\eta')\, d\tau' \Bigg] + \\ + I_0^m(x', \eta') \exp\left(-\frac{\tau}{\eta'}\alpha(x')\right) \Bigg\} dx'. \end{aligned} \tag{22}$$

Для определения функции $Q_{ik}^{m}(\tau)$ получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$Q_{ik}^{m}(\tau)=\frac{\lambda}{2}\sum_{j=m}^{n}\sum_{q=j}^{n}\int_{0}^{\tau_0}K_{ikjq}^{m}(\tau-\tau')\,Q_{jq}^{m}(\tau')\,d\tau'+\frac{\lambda}{2}\,Q_{0ik}^{m}(\tau), \tag{23}$$

где элементы матрицы-ядра имеют вид:

$$K_{ikjq}^{m}(\tau)=C_q^j\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_k(x)\,\alpha_q(x)\,dx\int_{0}^{1}\frac{\overline{P}_i^m(\eta)\,\overline{P}_j^m(\eta)}{\eta}\left[\frac{\tau}{|\tau|}\right]^{i+j}\exp\left(-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)\right)d\eta, \tag{24}$$

а свободный член

$$Q_{0ik}^{m}(\tau)=C_k^i\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_k(x)\int_{0}^{1}\overline{P}_i^m(\eta)\exp\left(-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)\right)I_0^m(x,\eta)\,dx\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}f_0\,\delta_{0m}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_k(x)\,\alpha(x)\int_{0}^{1}\frac{\overline{P}_i^m(\eta)\,d\eta}{\eta}\int_{0}^{\tau_0}\exp\left(-\frac{(\tau-\tau')}{\eta}\alpha(x')\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\tau}{|\tau|}\right]^{i+m}d\tau'. \tag{25}$$

Теперь займемся определением величины τ_0. Для этого воспользуемся связью между реальными $d\tau$ и предельными оптическими глубинами dy (см., например, [8]):

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{n_1+n_2}{n_1-\frac{g_1}{g_2}n_2}, \tag{26}$$

или интегрируя (26) по y от 0 до y_0, с учетом уравнения (7), получим:

$$y_0=\tau_0+\gamma\int_{0}^{\tau_0}S(\tau',\tau_0)\,d\tau'=\tau_0+\gamma Q(\tau_0), \tag{27}$$

где

$$S(\tau,\tau_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2\pi}S(\tau,x',\eta',\varphi')\,dx'd\eta'd\varphi';\quad \gamma=\left(1+\frac{g_1}{g_2}\right)\frac{c^2}{2h\nu_0^3}. \tag{28}$$

Соотношение (27) дает возможность определить τ_0. Действительно, если решить систему линейных интегральных уравнений (23) при всех значениях $\tau_0 \leqslant y_0$, то правая часть выражения (27) становится известной функцией от τ_0. Решая уравнения (27) относительно τ_0, находим зависимость истинной оптической толщины от предельной y_0.

3. *В настоящем разделе* мы предложим способ нахождения функции $Q(\tau_0)$.

Пусть плоскопараллельный слой с оптической толщиной τ_0 освещается излучением I_0^+.

В операторной форме уравнения переноса некогерентного анизотропного рассеяния при отсутствии внутренних источников энергии имеют вид:

$$\pm \frac{d\widehat{I}^{\pm}}{d\tau} = -A\widehat{I}^{\pm} + L^{+}\widehat{I}^{\pm} + L^{-}\widehat{I}^{\mp},$$
$$\widehat{I}^{+}(0) = I_0^{+}; \quad \widehat{I}^{-}(\tau_0) = 0; \quad \tau_0 \leqslant \infty. \tag{29}$$

Здесь $\widehat{I}^{\pm}(\tau)$ — искомые интенсивности излучения, идущего соответственно в сторону возрастания и убывания τ, и принимают значения из пространства M ограниченных вектор функций, $I_0^{+} \in M$; A — оператор умножения на функцию $\frac{\alpha}{\eta}$, а $L^{\pm}$ — интегральные операторы:

$$L^{\pm}f = \frac{\lambda}{4\pi\eta}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 d\eta' \int_{-\infty}^{\infty} R(x, x', \pm\eta, \eta', \varphi - \varphi') f(x', \eta', \varphi')\, dx'. \tag{30}$$

Интенсивности $\widehat{I}^{+}(\tau)$ и $\widehat{I}^{-}(\tau)$ связаны между собой соотношением (см. [18]):

$$\widehat{I}^{-} = \rho\widehat{I}^{+}, \tag{31}$$

где ρ — оператор отражения от полубесконечной среды и определяется из операторного уравнения Амбарцумяна:

$$A\rho + \rho A = L^{-} + L^{+}\rho + \rho L^{+} + \rho L^{-}\rho. \tag{32}$$

Если ρ известно, то $\widehat{I}^{+}$ определяется из задачи Коши:

$$\frac{d\widehat{I}^{+}}{d\tau} = (-A + L^{+} + L^{-}\rho)\widehat{I}^{+},$$
$$\widehat{I}^{+}(0) = I_0^{+}. \tag{33}$$

После нахождения $\hat{I}^+$ и $\hat{I}^-$ определяем функцию $S_\infty(\tau)$ из следующего равенства:

$$S_\infty(\tau) = \hat{I}^+ + \hat{I}^-. \tag{34}$$

Следуя работе [18], введем оператор $Y(\tau)$. Рассмотрим однородную полубесконечную среду. Из полубесконечной среды выделим слой конечной толщины τ. Пусть справа на границу τ этого слоя падает первичный поток излучения f_0. Тогда выходящее излучение после многократных рассеяний как в слое $[0, \tau]$, так и во всей среде, определяется некоторым линейным оператором Y, $f = Y \cdot f_0$.

Из принципа инвариантности Амбарцумяна и из определения $Y(\tau)$ следует, что этот оператор обладает полугрупповым свойством $Y(\tau_1 + \tau_2) = Y(\tau_1) \cdot Y(\tau_2)$ и определяется из следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered} \frac{dY}{d\tau} = -GY, \\ Y(0) = J, \end{gathered} \tag{35}$$

где J — единичный оператор, $G = \left(\frac{dY}{d\tau}\right)_{\tau=0}$ — инфинитизимальный производящий оператор полугруппы и имеет следующий вид:

$$G = A - L^+ - \rho L^-. \tag{36}$$

Знание операторов ρ и Y позволяет не только решить задачу отражения и пропускания слоя конечной толщины, но и дает возможность установить связь между внутренними режимами полубесконечного и конечного слоев. Указанная связь в операторной форме имеет следующий вид:

$$S_\infty(\tau) = S(\tau) + Y(\tau_0)\,\rho S(\tau_0 - \tau). \tag{37}$$

Соотношение типа (37) впервые было получено в работе [19] путем рассмотрения одного класса интегральных уравнений на полуоси и на конечном промежутке. Уравнение (37) было также получено в [20], исходя из физических соображений.

Интегрируя (37) от 0 до τ_0, получим

$$Q(\tau_0) = (J + Y(\tau_0)\,\rho)^{-1} \int_0^{\tau_0} S_\infty(\tau)\, d\tau. \tag{38}$$

Таким образом, мы предлагаем следующий путь нахождения функции $Q(\tau_0)$:

а) из (32) и (35) определяем ρ и Y;

б) интенсивности $\widehat{I}^+$ и $\widehat{I}^-$, описывающие внутренний режим полубесконечной среды, находим из задачи (33) и по формуле (31);

в) по формуле (34) определяем $S_\infty(\tau)$;

г) из соотношения (38) по известным ρ, Y и S_∞ определяем функцию $Q(\tau_0)$, а тем самым и реальную оптическую толщину слоя τ_0.

Перепишем операторное уравнение (32) в терминах ядер. Пользуясь представлением (17), (18), для азимутальных гармоник функции отражения получим [16, 17]:

$$\rho_m(x, x', \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4}\sum_{i=m}^{n}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{i+m} C_k^i \frac{\varphi_{ik}^m(x, \eta)\,\varphi_{ik}^m(x', \zeta)}{\zeta\alpha(x) + \eta\alpha(x')}, \tag{39}$$

где

$$\varphi_{ik}^m(x, \eta) = \overline{P}_i^m(\eta)\,\alpha_k(x) +$$

$$+ 2\eta(-1)^{i+m}\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty} \rho_m(x, x', \eta, \zeta)\,\overline{P}_i^m(\zeta)\,\alpha_k(x')\,d\zeta dx'. \tag{40}$$

Функции $\varphi_{ik}^m(x, \eta)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\varphi_{ik}^m(x, \eta) = P_i^m(\eta)\,\alpha_k(x) + \frac{\lambda}{2}(-1)^{i+j}\,\eta\sum_{j=m}^{n}\sum_{q=j}^{n} C_q^j\,\varphi_{jq}^m(x, \eta) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 \frac{\varphi_{jq}^m(x', \zeta)\,\overline{P}_i^m(\zeta)\,\alpha_k(x')\,dx'd\zeta}{\zeta\alpha(x) + \eta\alpha(x')}. \tag{41}$$

Раскрывая операторное уравнение (35), с учетом композиции ядер при умножении интегральных операторов, приходим к следующему функциональному уравнению:

$$\frac{dY(\tau, x, x', \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0)}{d\tau} = -\frac{\alpha(x)}{\eta} Y(\tau, x, x', \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) +$$

$$+ \frac{\lambda}{4\pi\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\int_0^{2\pi} R(x, x'', \eta, \eta', \varphi - \varphi')\, Y(\tau, x'', x', \eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0)\,dx''d\eta'd\varphi' +$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho(x, x'', \eta, \eta', \varphi-\varphi')\,dx''d\eta'd\varphi'\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}R(x'', x''', -\eta', \eta'', \varphi'-\varphi'')\,Y(\tau, x''', x', \eta'', \zeta, \varphi''-\varphi_0)\times$$

$$\times\,dx'''d\eta''d\varphi''. \tag{42}$$

Функцию Y представляем в форме

$$Y(\tau, x, x', \eta, \zeta, \varphi-\varphi_0)=\sum_{m=0}^{n}Y_m(\tau, x, x', \eta, \zeta)\cos m(\varphi-\varphi_0). \tag{43}$$

Тогда для функции $Y_m(\tau, x, x', \eta, \zeta)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{dY_m(\tau, x, x', \eta, \zeta)}{d\tau}=-\frac{\alpha(x)}{\eta}Y_m(\tau, x, x', \eta, \zeta)+B_m(\tau, x, x', \eta, \zeta),$$
$$Y_m(0, x, x', \eta, \zeta)=\frac{1}{2\pi}\delta(x-x')\,\delta(\eta-\zeta), \tag{44}$$

где

$$B_m(\tau, x, x', \eta, \zeta)=$$
$$=\frac{\lambda}{2\eta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^1 R_m(x, x'', \eta, \eta')\,Y_m(\tau, x'', x', \eta', \zeta)\,dx''d\eta'+$$
$$+\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^1\rho_m(x, x'', \eta, \eta')\,dx''d\eta'\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^1 R_m(x'', x''', -\eta', \eta'')\,Y_m(\tau, x''', x', \eta'', \zeta)\,dx'''d\eta''. \tag{45}$$

С учетом представления (18), а также соотношения (40), функцию $B_m(\tau, x, x', \eta, \zeta)$ можно представить в виде:

$$B_m(\tau, x, x', \eta, \zeta)=\frac{\lambda}{2\eta}\sum_{i=m}^{n}\sum_{k=i}^{n}C_k^i\,\varphi_{ik}^m(x, \eta)\,U_{ik}^m(\tau, x', \zeta), \tag{46}$$

где

$$U_{ik}^m(\tau, x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 \overline{P}_l^m(\eta')\alpha_k(x')Y_m(\tau, x', x, \eta', \eta)\,dx'\,d\eta'. \tag{47}$$

Формальное решение уравнения (44) имеет вид:

$$Y_m(\tau, x, x', \eta, \zeta) = \int_0^{\tau}\exp\left(-\frac{(\tau-\tau')}{\eta}\alpha(x)\right)B_m(\tau, x, x', \eta, \zeta)\,d\tau' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\delta(x-x')\,\delta(\eta-\zeta)\exp\left(-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)\right). \tag{48}$$

Умножая обе части уравнения (48) на $\overline{P}_l^m(\eta)\,\alpha_k(x)$ и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$ и по η от 0 до 1, с учетом (47) получим следующую систему линейных интегральных уравнений типа восстановления:

$$U_{ik}^m(\tau, x, \eta) = \frac{\lambda}{2}\sum_{p=m}^{n}\sum_{q=p}^{n}\int_0^{\tau}K_{ikpq}^m(\tau-\tau')\,U_{pq}^m(\tau')\,d\tau' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\overline{P}_l^m(\eta)\,\alpha_k(x)\,e^{-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)}, \tag{49}$$

где

$$K_{ikpq}^m(\tau) = C_q^{\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_k(x)\overline{P}_l^m(\eta)\,\varphi_{pq}^m(x, \eta)\exp\left(-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)\right)dx\frac{d\eta}{\eta}. \tag{50}$$

Следует отметить, что переменные x, η и m, входящие в (49), выступают в роли параметра.

Элементы матрицы-ядра $\|K_{ikpq}^m\|$ можно представить в виде суперпозиции экспонент

$$K_{ikpq}^m(\tau) = \int_0^{\infty}G_{ikpq}^m(s)\,e^{-\tau s}\,ds, \tag{51}$$

где

$$G^m_{ikpq}(s) = C^p_q \int\limits_{x(s)}^{\infty} \left[\alpha_k(x)\,\varphi^m_{pq}(x, s) + \alpha_k(-x)\,\varphi^m_{pq}(-x, s)\right] \overline{P}^m_i \left[\frac{\alpha(x)}{s}\right] \frac{dx}{s},$$

$$x(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \geqslant 1 \\ \alpha\,[x(s)] = s & \text{при } s < 1. \end{cases} \tag{52}$$

В случае монохроматического рассеяния уравнения (49) упрощаются и принимают вид:

$$U^m_i(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{p=m}^{n} \int\limits_0^{\tau} K^m_{ip}(\tau - \tau')\, U^m_p(\tau', \eta)\, d\tau' + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}}\, \overline{P}^m_i(\eta), \tag{53}$$

где

$$K^m_{ik}(\tau) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}}\, \overline{P}^m_i(\eta)\, x_k\, \varphi^m_k(\eta) \frac{d\eta}{\eta},$$

а функции $\varphi^m_k(\eta)$ определяются из следующего уравнения, хорошо изученного в линейной теории анизотропного рассеяния [21—23]:

$$\varphi^m_k(\eta) = \overline{P}^m_k(\eta) + \frac{\lambda}{2}\eta \sum_{i=m}^{n} (-1)^{i+k} x_i\, \varphi^m_i(\eta) \int\limits_0^1 \frac{\varphi^m_i(\eta')\, \overline{P}^m_k(\eta')\, d\eta'}{\eta + \eta'}. \tag{54}$$

Существование решения системы (49), а также его асимптотическое поведение изучено в работах [24, 25]. Решение системы интегральных уравнений (49) можно получить используя преобразование Лапласа. Уравнение можно решить также численно, с помощью рекуррентных соотношений, переходя от меньших τ к большим, начиная с $\tau = 0$.

Однако наиболее эффективным способом решения системы (49) нам представляется сведение ее к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения. Этот способ мы изложим ниже.

Подставим (51) в (49) и введём обозначение:

$$\Psi^m_{ik}(\tau, s, x, \eta) = \int\limits_0^{\tau} e^{-\tau s} e^{\tau' s}\, U^m_{ik}(\tau', x, \eta)\, d\tau'. \tag{55}$$

Продифференцировав (55) по τ, с учетом уравнения (49), относительно функций

$$V_{ikj}^{m}(\tau, s, \eta)=\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{ik}^{m}(\tau, s, x, \eta)\, \alpha_j(x)\, dx, \tag{56}$$

получим

$$\frac{dV_{ikj}^{m}(\tau, s, \eta)}{d\tau}=-sV_{ikj}^{m}(\tau, s, \eta)+\Gamma_{ikj}^{m}(\tau, \eta)+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=m}^{n}\sum_{q=p}^{n}\int_{0}^{\infty} G_{ikpq}^{m}(s)\, V_{pqj}^{m}(\tau, s, \eta)\, ds, \tag{57}$$

с условием

$$V_{ikj}^{m}(0, s, \eta)=0. \tag{58}$$

Здесь

$$\Gamma_{ikj}^{m}(\tau, \eta)=\frac{1}{2\pi}\overline{P}_i^m(\eta)\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_k(x)\,\alpha_j(x)\, e^{-\frac{\tau}{\eta}\alpha(x)}\, dx. \tag{59}$$

Полученная система интегро-дифференциальных уравнений (57) обладает известными преимуществами над системой (49) с вычислительной точки зрения.

В заключение автор выражает искреннюю признательность профессору Н. Б. Енгибаряну за обсуждения и полезные замечания.

Институт прикладных проблем
физики АН Арм.ССР

ON THE SOLUTION OF NONLINEAR PROBLEM OF NONCOHERENT ANIZOTROPIC SCATTERING

A. Kh. KHACHATRIAN

The present paper is devoted to the consideration of nonlinear problems on general laws of frequency redistribution within the spectral line taking into account nonisotropy of the elementary act of scattering. An assumption is made on the coincidence of the absorption coefficient profile with that of stimulated radiation. The method of paper [1] allows to linearize the problem and reduce it to a system of linear integral equations. A method for the determination of the real optical thickness of the layer is also suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 297, 1965.
2. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 2, 31, 1966.
3. *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм.ССР, 39, 159, 1964.
4. *В. Ю. Теребиж*, Астрофизика, 3, 282, 1967.
5. *Р. С. Варданян, Н. Б. Енгибарян*, ДАН Арм.ССР, 3, 135, 1969.
6. *Р. С. Варданян*, Уч. зап. ЕрГУ, 3, 36, 1971.
7. *Д. Михалас*, Звездные атмосферы, Мир, М., 1982.
8. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
9. *Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян*, Астрофизика, 23, 145, 1985.
10. *А. Х. Хачатрян, А. А. Акопян*, Астрофизика (в печати).
11. *R. Milkey, D. Mihalas*, Ap. J., 185, 709, 1973.
12. *J. Oxenius*, JQSRT, 5, 771, 1965.
13. *R. Hearley, F. Kneer*, Ap. J., 203, 660, 1976.
14. *D. Hummer*, M. N. RAS, 145, 95, 1969.
15. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 71, 1972.
16. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, ДАН Арм.ССР, 2, 91, 1972.
17. *А. Г. Никогосян*, ДАН СССР, 235, 786, 1977.
18. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 217, 533, 1974.
19. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, Мат. заметки, 19, 297, 1976.
20. *М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 225, 1049, 1975.
21. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
22. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах планет, ГИТТЛ, М., 1956.
23. *И. Н. Минин, А. Г. Пилипосян, Н. А. Шидловская*, Таблицы функций Амбарцумяна при неизотропном рассеянии, АО ЛГУ, 20, 1963.
24. *Р. Беллман, К. Кук*, Дифференциально-разностные уравнения, Мир, М., 1967.
25. *Л. Г. Арабаджян*, Дифференциальные уравнения, 20, 1050, 1984.