АСТРОФИЗИКА

ТОМ 23 ОКТЯБРЬ, 1985 ВЫПУСК 2

УДК: 52:532

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ПАРАМЕТРИЗОВАННОМ ПОСТ-НЬЮТОНОВСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Н. П. БОНДАРЕНКО

Поступила 4 января 1985

Принята к печати 28 июня 1985

Вариационным методом получены условия равновесия идеальной вращающейся жидкости в параметризованной пост-ньютоновской гидродинамике, которые являются обобщением аналогичных условий равновесия в пост-ньютоновском приближении общей теории относительности. Интегрированием уравнений движения получен закон сохранения полной энергии.

1. *Введение.* В конце 60-х и начале 70-х годов была развита «теория гравитационных теорий» [1—7], которая достаточно полно охватывает большинство метрических теорий гравитации и является полезной как при анализе наблюдательных данных, так и при планировании экспериментов. В настоящее время эта теория, называемая обычно параметризованным пост-ньютоновским (ППН) формализмом [8] и учитывающая пост-ньютоновские (ПН) релятивистские эффекты, включает в себя 10 параметров, γ, β, ξ, α_1, α_2, α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4, значения которых зависят от конкретной рассматриваемой теории гравитации. Параметры γ и β связаны с классическими эффектами общей теории относительности (ОТО) и рассматривались еще в работах [9—11]. Параметр ξ связан с существованием выделенного положения в пространстве, обусловленного, например, влиянием галактики на гравитационную постоянную в данной точке (эффект Уайтхеда [6]), параметры α_1, α_2, α_3 связаны с существованием выделенной системы отсчета [5], а параметры α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 существуют в теориях гравитации, предсказывающих нарушение глобальных законов сохранения полного импульса [4].

Требование выполнения законов сохранения полного импульса сокращает количество параметров до трех, остаются только γ, β, ξ. Отметим, что в ОТО $\gamma = \beta = 1$, а в скалярной теории Бранса—Дикке [12]

$$\gamma = (1 + \omega)/(2 + \omega), \quad \beta = 1, \quad \xi = 0.$$

ППН формализм разрабатывался в основном для анализа экспериментальных и наблюдательных данных в пределах Солнечной системы. Но многие астрономические объекты, такие, например, как белые карлики и нейтронные звезды, можно считать ПН-объектами, так как для них релятивистские эффекты не очень сильны и могут быть посчитаны в рамках пост-ньютоновского приближения. Поэтому представляет интерес произвести исследование в ППН формализме фигур равновесия и их устойчивости и сравнить полученные результаты с ПНП ОТО и другими теориями.

Настоящая работа посвящена получению условий равновесия идеальной вращающейся жидкости в ППН гидродинамике, которые обобщают известные условия равновесия в ПНП ОТО [13—15], и является первой из планируемого цикла работ по фигурам равновесия в ППН формализме.

2. *Основные уравнения и законы сохранения.* Согласно Уиллу [3], в консервативной метрической теории гравитации и при $\xi = 0$ в рамках ППН формализма метрика имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{1}{c^4}(2\beta U^2 - 4\Phi),$$
$$g_{0\alpha} = \frac{1}{c^3}\left[\frac{1}{2}(4\gamma + 3)\, V_\alpha + \frac{1}{2} W_\alpha\right], \tag{1}$$
$$g_{\alpha\beta} = -\left(1 + \frac{2\gamma U}{c^2}\right)\delta_{\alpha\beta},$$

где

$$U(x, t) = G\int\limits_T \frac{\rho(x', t)}{|x - x'|}\, d\tau', \tag{2}$$

$$\Phi(x, t) = G\int\limits_T \frac{\rho(x', t)\,\varphi(x', t)}{|x - x'|}\, d\tau', \tag{3}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\gamma + 1)\, v^2 + \frac{1}{2}(3\gamma - 2\beta + 1)\, U + \frac{1}{2}\Pi + \frac{3}{2}\gamma\frac{P}{\rho}, \tag{4}$$

$$V_\alpha(x, t) = G\int\limits_T \frac{\rho(x', t)\, v_\alpha(x')}{|x - x'|}\, d\tau', \tag{5}$$

$$W_\alpha(x, t) = G\int\limits_T \frac{\rho(x', t)\, v_\beta(x')\,(x_\beta - x'_\beta)(x_\alpha - x'_\alpha)}{|x - x'|^3}\, d\tau', \tag{6}$$

ρ — плотность материи, Π — внутренняя энергия, P — изотропное давление.

Соотношения (1—6), как и все другие этой статьи, при $\gamma=\beta=1$ переходят в соответствующие соотношения ПНП ОТО [16]. Обобщение уравнений движения ньютоновской гидродинамики

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_\alpha)}{\partial x_\alpha}=0, \tag{7}$$

$$\rho\frac{dv_\alpha}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x_\alpha}+\rho\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\quad\left(\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) \tag{8}$$

в ППН гидродинамике имеют вид:

1. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+\frac{\partial(\rho^* v_\alpha)}{\partial x_\alpha}=0, \tag{9}$$

где

$$\rho^*=\rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2+3\gamma U\right)\right] \tag{10}$$

так называемая сохраняющаяся плотность, так как $dM/dt=0$, а

$$M=\int\limits_T\rho^*\,d\tau \tag{11}$$

— сохраняющаяся масса.

2. Уравнения Эйлера ($\alpha=1, 2, 3$)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma v_\alpha)+\frac{\partial}{\partial x_\beta}(\sigma v_\alpha v_\beta)-\rho\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{P\left[1+\frac{(3\gamma-1)}{c^2}U\right]\right\}+$$

$$+\frac{\rho}{c^2}\frac{d}{dt}\left[(5\gamma-1)Uv_\alpha-2(\gamma+1)V_\alpha\right]+\frac{2(\gamma+1)}{c^2}\rho v_\beta\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}+$$

$$+\frac{\rho}{2c^2}\frac{d}{dt}(V_\alpha-W_\alpha)-\frac{\rho}{2c^2}\rho v_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}(V_\alpha-W_\alpha)-$$

$$-\frac{2\rho}{c^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}+\varphi\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)=0, \tag{12}$$

где

$$\sigma=\rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(v^2+2U+\Pi+\frac{P}{\rho}\right)\right]. \tag{13}$$

Используя комплекс энергии — импульса Ландау—Лифшица [17], Унлл [4] получил следующие сохраняющиеся величины:

1. Массу-энергию

$$P^0 = c^2 \int_T \rho^* \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} U + \Pi \right) \right] d\tau. \qquad (14)$$

2. Импульс

$$P_\alpha = \int_T \pi_\alpha d\tau, \qquad (15)$$

где

$$\pi_\alpha = \rho^* \left\{ v_\alpha \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + (2\gamma + 1) U + \Pi + \frac{P}{\rho} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (4\gamma + 3) V_\alpha - \frac{1}{2} W_\alpha \right\}.$$

3. Момент количества движения

$$L_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \int_T x_\beta \pi_\gamma d\tau, \qquad (16)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — символ Леви-Чивитта.

4. Скорость центра масс

$$P_\alpha^0 = \int_T \rho^* x_\alpha \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{6\gamma - 1}{2} U + \Pi \right) \right] d\tau - P_\alpha t. \qquad (17)$$

5. Координаты центра масс

$$X_\alpha = \frac{\int_T \tilde{\rho} x_\alpha d\tau}{\int_T \tilde{\rho} d\tau}, \quad \left(\tilde{\rho} = \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(v^2 + \frac{6\gamma - 1}{2} U + \Pi \right) \right] \right), \qquad (18)$$

которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{dX_\alpha}{dt} = \frac{P_\alpha}{P_0}, \qquad (19)$$

т. е. центр масс движется равномерно со скоростью P_α / P_0.

Однако, как отметил Чандрасекар [18], для получения закона сохранения общей энергии при помощи комплекса Ландау—Лифшица необходима пост-пост-ньютоновская теория, которая для параметризованного формализма еще не создана. Поэтому получим закон сохранения энергии из уравнений движения (12).

3. Закон сохранения энергии. Домножим уравнения (12) на v_α и проинтегрируем их по объему тела T. Затем, следуя Чандрасекару [16] и используя его результаты, получим следующие соотношения:

$$\int_T v_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial t}(\sigma v_\alpha) + \operatorname{div}(\sigma v_\alpha \vec{v}) \right] d\tau = \frac{d}{dt}\int_T \left(\sigma v^2 - \frac{1}{2}\rho^* v^2 - \frac{1}{8c^2}\rho v^4 \right) d\tau - \\ - \frac{1}{2c^2}\int_T \rho \left[\Pi + (2-3\gamma)\, U + \frac{P}{\rho} \right] d\tau; \tag{20}$$

$$- \int_T \rho v_\alpha \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} d\tau = \frac{d}{dt}\int_T \left(-\frac{1}{2}\rho^* U^* + \frac{3}{2c^2}\rho U^2 \right) d\tau + \frac{1}{2c^2}\int_T \rho v^2 \frac{dU}{dt} d\tau, \tag{21}$$

где $U^* = U + \frac{1}{c^2} Q$, а Q удовлетворяет уравнению

$$\triangle Q = -4\pi G\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + 3\gamma U\right),$$

$$\int_T v_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[P\left(1 + \frac{3\gamma - 1}{c^2} U\right) \right] d\tau = \frac{d}{dt}\int_T \rho^* \Pi d\tau - \frac{1}{c^2}\int_T \rho U \frac{d\Pi}{dt} d\tau - \\ - \frac{1}{2c^2}\int_T \rho v^2 \frac{d\Pi}{dt} d\tau + \frac{1}{c^2}\int_T P \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3\gamma U\right) d\tau; \tag{22}$$

$$\frac{1}{c^2}\int_T \rho v_\alpha \frac{d}{dt}\left[(5\gamma - 1)\, U v_\alpha - 2(\gamma + 1)\, V_\alpha \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_T \rho \left\{ \left[(5\gamma - 1)\, U v^2 - 2(\gamma + 1)\, v_\alpha V_\alpha \right] + (\gamma + 1)\, v_\alpha V_\alpha \right\} d\tau - \\ - \frac{(5\gamma - 1)}{2c^2}\int_T \rho U \frac{dv^2}{dt} - \frac{(\gamma + 1)}{c^2} G \int_T\int_T \rho\rho' v_\alpha v'_\alpha \frac{d}{dt}\frac{1}{|x - x'|} d\tau d\tau'; \tag{23}$$

$$\frac{2(\gamma + 1)}{c^2}\int_T \rho v_\alpha v_\beta \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\gamma + 1}{c^2} G \int_T\int_T \rho\rho' v_\alpha v'_\alpha \frac{d}{dt}\frac{1}{|x - x'|} d\tau d\tau'; \tag{24}$$

$$\frac{1}{2c^2}\int_T \rho v_\alpha \frac{d}{dt}(V_\alpha - W_\alpha)\,d\tau = \frac{1}{2c^2}\frac{d}{dt}\int_T \rho v_\alpha (V_\alpha - W_\alpha)\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{4c^2}\frac{d}{dt}\int_T \rho v_\alpha V_\alpha d\tau + \frac{G}{4c^2}\int_T\int_T \rho\rho' v_\alpha v'_\alpha \frac{d}{dt}\frac{1}{|x-x'|}\,d\tau d\tau' +$$

$$+\frac{G}{2c^2}\int_T\int_T \rho\rho' v'_\beta (x_\beta - x'_\beta)\frac{x_\alpha - x'_\alpha}{|x-x'|^3}\frac{dv_\alpha}{dt}\,d\tau d\tau'; \tag{25}$$

$$-\frac{1}{2c^2}\int_T \rho v_\alpha v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}(V_\alpha - W_\alpha)\,d\tau =$$

$$= \frac{G}{4c^2}\frac{d}{dt}\int_T\int_T \rho\rho' v_\alpha v'_\beta (x_\alpha - x'_\alpha)(x_\beta - x'_\beta)\frac{d\tau d\tau'}{|x-x'|^3} -$$

$$-\frac{G}{4c^2}\int_T\int_T \rho\rho' v_\alpha v'_\alpha \frac{d}{dt}\frac{1}{|x-x'|}\,d\tau d\tau' -$$

$$-\frac{G}{2c^2}\int_T\int_T \rho\rho' v'_\alpha (x_\alpha - x'_\alpha)\frac{x_\beta - x'_\beta}{|x-x'|^3}\frac{dv_\beta}{dt}\,d\tau d\tau'; \tag{26}$$

$$-\frac{2}{c^2}\int_T \rho v_\alpha \left(\varphi\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha}\right)d\tau = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_T \rho U^2 d\tau -$$

$$-\frac{1}{c^2}\int_T \{\rho[(\gamma+1)v^2 + \Pi] + 3\gamma P\}\frac{dU}{dt}\,d\tau. \tag{27}$$

Складывая выражения (20)—(27) и немного преобразовывая, получим закон сохранения энергии в ППН формализме

$$\frac{d}{dt}\int_T E\,d\tau = 0, \tag{28}$$

где

$$E = \left(\sigma - \frac{1}{2}\rho^*\right)v^2 + \rho^*\Pi - \frac{1}{2}\rho^* U^* +$$

$$+\frac{\rho}{c^2}\left[-\frac{1}{8}v^4 + \frac{3\gamma - 2}{2}U^2 + \frac{(8\gamma - 3)}{2}v^2 U - \Pi U -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}v^2\Pi - \left(\gamma + \frac{3}{4}\right)v_\alpha V_\alpha - \frac{1}{4}v_\alpha W_\alpha\right] \tag{29}$$

— так называемая энергия единицы объема жидкости.

Учитывая значения σ и ρ^*, приведем выражение (29) к более удобному виду, которым и будем в дальнейшем пользоваться

$$E = \rho\left\{\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}U + \Pi + \frac{1}{c^2}\left[\frac{5}{8}v^4 + \frac{5}{2}\gamma v^2 U - \right.\right.$$

$$- \frac{3\gamma+2}{2}U^2 + (3\gamma-1)U\Pi + v^2\left(\Pi + \frac{P}{\rho}\right) -$$

$$\left.\left. - \left(\gamma + \frac{3}{4}\right)v_\alpha V_\alpha - \frac{1}{4}v_\alpha W_\alpha\right]\right\}. \tag{30}$$

4. *Условия равновесия*. Для нахождения условий равновесия идеальной вращающейся жидкости воспользуемся вариационным методом Ляпунова [19], который заключается в нахождении экстремума энергии (30) при заданной массе (11), импульсе (15), моменте количества движения (16) и центре инерции (18). Математически задача сводится к нахождению экстремума функционала

$$I = \int_T (E + \lambda\rho^* + a_\alpha\pi_\alpha + b_\alpha\tilde{\rho}x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\alpha\pi_\beta\Omega_\gamma)\,d\tau \tag{31}$$

при варьировании скорости v_α и плотности ρ. Здесь λ, a_α, b_α, Ω_α — неизвестные постоянные множители Лагранжа.

В дальнейшем мы используем следующие легко доказуемые соотношения:

$$\int_T \rho\delta U d\tau = \int_T U\delta\rho d\tau, \tag{32}$$

$$\int_T \rho v_\alpha \delta V_\alpha d\tau = \int_T v_\alpha V_\alpha \delta\rho d\tau + \int_T \rho V_\alpha \delta v_\alpha d\tau, \tag{33}$$

$$\int_T \rho v_\alpha \delta W_\alpha d\tau = \int_T v_\alpha W_\alpha \delta\rho d\tau + \int_T \rho W_\alpha \delta v_\alpha d\tau, \tag{34}$$

$$\int_T \rho\varphi\delta U d\tau = \int_T \Phi\delta\rho d\tau, \tag{35}$$

а также

$$\int_T \rho\delta\Pi d\tau = \int_T \frac{P}{\rho}\delta\rho d\tau, \tag{36}$$

которое следует из известного соотношения термодинамики

$$\rho \frac{d\Pi}{dt} = \frac{P}{\rho} \frac{dP}{d\rho}. \tag{37}$$

Вариация по ρ функционала (31), с учетом, что в слагаемых порядка $1/c^2$ имеет место [19]

$$a_\alpha = 0, \quad b_\alpha = 0, \quad v_\alpha = -\varepsilon_{\beta\gamma\alpha} x_\beta \Omega_\gamma, \tag{38}$$

дает

$$\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi + \frac{P}{\rho} + \lambda + \varepsilon_{\beta\gamma\alpha} x_\beta \Omega_\gamma v_\alpha + a_\alpha v_\alpha + b_\alpha x_\alpha +$$
$$+ \frac{1}{c^2} \left[-\frac{1}{8} v^4 - \frac{2\gamma + 1}{2} U v^2 + \frac{(9\gamma - 4\beta - 4)}{2} U^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) - 2\Phi + \frac{4\gamma + 3}{2} v_\alpha V_\alpha + \frac{1}{2} v_\alpha W_\alpha \right] = 0. \tag{39}$$

Вариация по v_α при тех же условиях дает

$$v_\alpha + \varepsilon_{\beta\gamma\alpha} x_\beta \Omega_\gamma + a_\alpha + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi + \frac{P}{\rho} + \lambda \right]. \tag{40}$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю в силу условий равновесия в ньютоновской гидродинамике [19]

$$\lambda = \frac{1}{2} v^2 + U - \Pi - \frac{P}{\rho}. \tag{41}$$

Поэтому из (40) остается

$$v_\alpha + \varepsilon_{\beta\gamma\alpha} \Omega_\beta x_\gamma + a_\alpha = 0. \tag{42}$$

Следуя [15], можно показать, что $b_\alpha = 0$ и что

$$a_\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\int\limits_T \rho \left(\frac{P}{\rho} v_\alpha - \frac{1}{2} W_\alpha \right) d\tau}{M_0}, \tag{43}$$

где $M_0 = \int\limits_T \rho d\tau$.

Постоянная $a_\alpha \neq 0$ означает отсутствие симметрии у фигуры равновесия в ньютоновском приближении относительно соответствующей плоскости, т. е. плоскости $x_\alpha = 0$. Поэтому для эллипсоидов Маклорена и Якоби $a_\alpha = 0$ и закон вращения (42) имеет обычный вид [19]:

$$v_\alpha = -\varepsilon_{\beta\gamma\alpha} x_\beta \Omega_\gamma, \tag{44}$$

что нельзя сказать о таких фигурах равновесия, как грушевидные. Однако смещением начала координат из центра инерции в точку с координатами X_γ^0, определяемыми соотношением

$$M_0 \varepsilon_{\beta\gamma\alpha} \Omega_\beta X_\gamma^0 = \frac{1}{c^2} \int_T \rho \left(\frac{P}{\rho} v_\alpha - \frac{1}{2} W_\alpha \right) d\tau, \tag{45}$$

можно добиться выполнения закона (44) и для несимметричных фигур равновесия.

Окончательно, подставляя (44) в (39), получим условия равновесия идеальной вращающейся жидкости в ППН формализме

$$-\lambda = -\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{1}{8} v^4 - \frac{2\gamma + 1}{2} U v^2 + \right.$$
$$+ \frac{(9\gamma - 4\beta - 4)}{2} U^2 - \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) \left(\Pi + \frac{P}{\rho} \right) -$$
$$\left. - 2\Phi + \frac{4\gamma + 3}{2} v_\alpha V_\alpha + \frac{1}{2} v_\alpha W_\alpha \right], \tag{46}$$

которые при $\gamma = \beta = 1$ переходят в условия равновесия ПН ОТО [13—15].

Киевский политехнический
институт

CONDITIONS OF EQUILIBRIUM FOR A PERFECT FLUID IN PARAMETRIZED POST-NEWTONIAN FORMALISM

N. P. BONDARENKO

Using a variational method, conditions of equilibrium of ideal rotating fluid in parametrized post-Newtonian hydrodynamics are derived, which generalize similar conditions of equilibrium in post-Newtonian approximation of general relativity. The motion equation has been integrated, the conservation of energy is inferred.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. Nordtvedt, Jr.*, Phys. Rev., 169, 1017, 1968.
2. *R. Baierlein*, Phys. Rev., 162, 1275, 1967.
3. *C. M. Will*, Ap. J., 133, 611, 1971.
4. *C. M. Will*, Ap. J., 169, 125, 1971.
5. *C.M. Will, K. Nordtvedt, Jr.*, Ap. J., 177, 757, 1972.
6. *C. M. Will*, Ap. J., 185, 31, 1973.
7. *Ч. В. Мизнер, К. С. Торн, Дж. А. Уилер*, Гравитация, Мир, М., 1977.
8. *К. М. Уилл*, в сб. «Общая теория относительности», ред. С. Хокинг, В. Израэль, Мир, М., 1983, стр. 11.
9. *A. S. Eddington*, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press, 1922.
10. *H. P. Robertson*, In "Space Age Astronomy", eds. A. J. Deutsch, W. B. Klemperer, Academic Press, London, New-York, 1962, p. 228.
11. *L. I. Schiff*, In "Relativity Theory and Astrophysics. I. Relativity and Cosmology", ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, Providence, 1967, p. 105.
12. *C. Brans, R. H. Dicke*, Phys. Rev., 124, 925, 1961.
13. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 148, 621, 1967.
14. *E. Krefetz*, Ap. J., 143, 1004, 1966.
15. *K. A. Pyragas, N. P. Bondarenko, O. V. Kravtsov*, Astrophys. Space Sci., 27, 437, 1974.
16. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 142, 1488, 1965.
17. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, Наука, М., 1973.
18. *S. Chandrasekhar*, Ap. J., 158, 45, 1969.
19. *А. М. Ляпунов*, Собрание сочинений, т. 3, изд. АН СССР, М., 1959