УДК: 521.14

СТАЦИОНАРНЫЕ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ В БИМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

О. А. ГРИГОРЯН, Э. В. ЧУБАРЯН

Поступила 11 ноября 1984

Принята к печати 8 мая 1985

Рассмотрены стационарные аксиально-симметрические поля в рамках биметрической теории тяготений Розена. Вне распределения масс найдены аналитические решения в квадратичном по угловой скорости вращения приближении. Предложен метод нахождения метрики внутри распределения масс и определения внутренней структуры и интегральных параметров вращающихся объектов, состояние вещества в которых описывается однопараметрическим уравнением.

1. Уравнения Розена для аксиально-симметрических полей. Искривленное пространство — временное многообразие при наличии стационарно вращающейся материи относительно инерциальных систем отсчета, очевидно, обладает аксиальной симметрией. Коэффициенты метрического тензора, определяющего такое многообразие, зависят только от двух координат r и θ и угловой скорости вращения $\Omega = d\varphi/dx^0$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, \theta, \Omega). \quad (1.1)$$

Метрику плоского пространства выберем следующим образом [1] ($c = G = 1$):

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.2)$$

что означает выбор инерциальной системы отсчета, начало координат которой находится в центре конфигурации. Соответственно, метрика искривленного пространства будет

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\psi} dr^2 - r^2[e^{2\mu} (d\theta + \nu dr)^2 + e^{2\alpha} \sin^2\theta (d\varphi + \omega dt)^2]. \quad (1.3)$$

Очевидно, что все компоненты метрического тензора, кроме ω , зависят от четных, а ω — от нечетных степеней Ω . Задача состоит в определении компонентов метрического тензора $g_{\mu\nu}$ внутри и вне распределения масс.

Уравнения Розена запишем в виде

$$N_{\mu}^{\nu} = -8\pi k \left(T_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} T \delta_{\mu}^{\nu} \right), \quad (1.4)$$

где T_{μ}^{ν} — тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu}^{\nu} = (\rho + P) u_{\mu}^{\nu} - P \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (1.5)$$

P — давление, ρ — плотность, u^{μ} — 4-скорость материи. Компоненты N_{μ}^{ν} для метрик (1.2) и (1.3) приведены в работе [1]. В случае аксиальной симметрии из компонентов вектора 4-скорости отличны от нуля только u^0 и u^3 , причем [2]

$$u^3 = \Omega u^0, \quad (1.6)$$

$$u^0 = [e^{2\psi} - r^2 e^{2\alpha} \sin^2 \theta (\omega + \Omega)^2]^{-1/2}. \quad (1.7)$$

Так как система уравнений (1.4) неполна, к ней надо добавить уравнение состояния вещества и уравнения гидродинамического равновесия

$$T_{\mu;\nu} = 0, \quad (1.8)$$

которые, как известно, в теории Розена не являются следствием (1.4). Итак, полная система уравнений, позволяющая найти все функции, описывающие гравитационное поле, которое обладает аксиальной симметрией, такова:

$$\begin{aligned} N_0^0 &= -4\pi k (\rho + 3P) - 8\pi k r^2 e^{2\alpha - 2\psi} \Omega (\omega + \Omega) (\rho + P) \sin^2 \theta; \\ N_1^1 &= 4\pi k (\rho - P), \quad N_2^2 = 4\pi k (\rho - P); \\ N_3^3 &= 4\pi k (\rho - P) + 8\pi k r^2 e^{2\alpha - 2\psi} \Omega (\omega + \Omega) (\rho + P) \sin^2 \theta; \\ N_3^0 &= 8\pi k r^2 e^{2\alpha - 2\psi} (\omega + \Omega) (\rho + P) \sin^2 \theta; \\ N_1^2 &= 0; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$M(r, \theta) \equiv \int \frac{dP}{\rho + P} = -\Phi - \frac{1}{2} \ln (1 - r^2 e^{2\alpha - 2\psi} (\omega + \Omega)^2 \sin^2 \theta) + C;$$

$$P = P(\rho),$$

где $k = e^{\mu + \alpha + \Phi + \psi}$. В системе (1.9) введено обозначение $M = \int dP/(\rho + P)$, а уравнение непрерывности написано в интегральном виде, где C — постоянная интегрирования.

2. *Приближение* Ω^2 . Поставленную задачу удастся решить только методом теории возмущений. Малым параметром разложения служит безразмерная величина $\beta = \Omega^2/8\pi\rho_c$ (ρ_c — плотность вещества в центре конфигурации), малость которой обусловлена отношением энергии вращения конфигурации к ее собственной энергии (очевидно, что это отношение меньше единицы). Тогда функции, входящие в ξ_μ , можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^0 + \beta f; & \Phi &= \Phi^0 + \beta \varphi; & \nu &= \beta \zeta; \\ u &= \psi^0 + \beta u; & \alpha &= \psi^0 + \beta v; & \omega &= \sqrt{\beta} q, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где f, u, φ, v, ζ и q — функции r и θ , а ψ^0 и Φ^0 зависят только от r , так как соответствуют сферической задаче. Подобным же образом давление, плотность и функцию $M(r, \theta)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} P' &= P_0 + \beta F, & \rho' &= \rho_0 + \beta \rho, \\ M(r, \theta) &= m(r) + \beta N(r, \theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и здесь ρ_0, P_0 и $m(r)$ — величины, соответствующие статически-сферическому распределению масс.

Подставляя (2.1) и (2.2) в (1.9), получим систему уравнений во втором приближении теории возмущений.

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \frac{q^2 r^2}{2} e^{2\psi^0 - 2\Phi^0} \left(\frac{q_1}{q_0} + \frac{1}{r} \right)^2 \sin^2 \theta + q^2 e^{2\psi^0 - 2\Phi^0} \\ \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) + 12 \pi e^{3\psi^0 + \varphi^0} K(r) (\rho_0 + P_0) \sin^2 \theta = \\ = -4\pi e^{\psi^0 + 3\psi^0} (\rho_0 + 3P_0) \left[\varphi + f + u + v + \frac{\rho + 3P}{\rho_0 + 3P_0} \right]; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} -\Delta f + \frac{2}{r^2} (2f - u - v) + \frac{2}{r} (\zeta_2 + \zeta \operatorname{ctg} \theta) - \frac{q^2}{2} e^{2\psi^0 - 2\Phi^0} \sin^2 \theta = \\ = 4\pi e^{\psi^0 + 3\psi^0} (\rho_0 + P_0) \left[\varphi + f + u + v + \frac{\rho - P}{\rho_0 - P_0} \right]; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta (u + v) + \frac{2}{r^2} (2f - u - v) + \frac{2}{r} (\zeta_2 + \zeta \operatorname{ctg} \theta) + \\ + q^2 e^{2\psi^0 - 2\Phi^0} \cos^2 \theta + 12 \pi (\rho_0 + P_0) K(r) e^{\psi^0 + 3\psi^0} \sin^2 \theta + \\ + \frac{r^2 q^2}{2} e^{2\psi^0 - 2\Phi^0} \sin^2 \theta \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r} \right)^2 = \\ = -8\pi e^{\psi^0 + 3\psi^0} (\rho_0 - P_0) \left[\varphi + f + u + v + \frac{\rho - P}{\rho_0 - P_0} \right]; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta(u-v) - \frac{4}{r^2}(u-v)\operatorname{ctg}^2\theta + \frac{2}{r}(\zeta_2 - \zeta\operatorname{ctg}^2\theta) - \\ - \frac{2}{r}(u-v) - \frac{r^2q^2}{2}e^{2\psi-2\Phi_0}\sin^2\theta\left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r}\right)^2 = \\ = 12\pi e^{\Phi_0+3\psi}K(r)(\rho_0 + P_0)\sin^2\theta; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{r}(u_2 - f_2) - \frac{2}{r^3}(u-v)\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{2}\left(\zeta_{11} + \frac{4}{r}\zeta_1 - \frac{2\zeta}{r^2}\right) - \\ - \frac{1}{2r^3}\left(\zeta_{23} + \zeta_2\operatorname{ctg}\theta - \frac{\zeta}{\sin^2\theta}\right) - \frac{q^2}{4r}e^{2\psi-2\Phi_0}\sin 2\theta = 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$N = -\varphi + \frac{1}{2}r^2e^{2\psi-2\Phi_0}(q + \sqrt{8\pi\rho_C})^2\sin^2\theta + C_1, \quad (2.8)$$

где введены обозначения $\partial f/\partial r = f_1$ и $\partial f/\partial\theta = f_2$,

$$K(r) = \frac{2}{3}r^2e^{2\psi-2\Phi_0}(q + \sqrt{8\pi\rho_C})^2, \quad (2.9)$$

а также постоянная, входящая в (1.9), переобозначена

$$C = C_0 + \beta C_1.$$

Вместо функций u и v взяты их комбинации для обеспечения разделения переменных.

Решения полученной системы уравнений ищем в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum \varphi^l(r) P_l(\cos\theta); & f &= \sum f^l(r) P_l(\cos\theta); \\ \rho &= \sum \rho^l(r) P_l(\cos\theta); & P &= \sum P^l(r) P_l(\cos\theta); \\ \frac{1}{2}(u+v) &= \sum u^l(r) P_l(\cos\theta); & N &= \sum N^l(r) P_l(\cos\theta); \\ \frac{1}{2}(u-v) &= \sum \chi^l(r) P_l^{(2)}(\cos\theta); & \zeta &= \sum \zeta^l(r) P_l^{(1)}(\cos\theta), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $P_l(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, а $P_l^{(m)}(\cos\theta)$, $m = 1, 2$ — присоединенные полиномы Лежандра. Подставляя (2.10) в уравнения (2.3) — (2.8), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения искомых функций.

$$\Delta_l \varphi^l = \frac{2}{3}q^2e^{2\psi-2\Phi_0}\left(\delta_{0l} + \frac{1}{2}\delta_{2l}\right) + \left[\frac{q^2r^2}{3}e^{2\psi-2\Phi_0}\left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r}\right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + 8\pi e^{2\psi_0 + 3\chi_0} K(r) (\rho_0 + P_0) \left[(\delta_{0l} - \delta_{2l}) + \right. \\
 & \left. + 4\pi e^{2\psi_0 + 3\chi_0} (\rho_0 + 3P_0) \left(\varphi^l + f^l + 2u^l + \frac{\rho^l + 3P^l}{\rho_0 + 3P_0} \right); \right. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_l f^l - \frac{4}{r^2} (f^l - u^l) + \frac{2}{r} l(l+1) \zeta^l + \frac{q^2}{3} e^{2\psi_0 - 2\Phi_0} (\delta_{l0} - \delta_{l2}) = \\
 = -4\pi e^{2\psi_0 + 3\chi_0} (\rho_0 - P_0) \left(\varphi^l + f^l + 2u^l + \frac{\rho^l - P^l}{\rho_0 - P_0} \right); \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_l u^l + \frac{4}{r^2} (f^l - u^l) - \frac{1}{r} l(l+1) \zeta l + \left[\frac{q^2 r^2}{6} e^{2\psi_0 - 2\Phi_0} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r} \right)^2 + \right. \\
 \left. + 4\pi K(r) e^{2\psi_0 + 3\chi_0} (\rho_0 + P_0) \right] (\delta_{0l} + \delta_{2l}) + \frac{q^2}{3} e^{2\psi_0 - 2\Phi_0} \left(\frac{1}{2} \delta_{0l} - \delta_{2l} \right) = \\
 = -4\pi e^{2\psi_0 + 3\chi_0} (\rho_0 + P_0) \left(\varphi^l + f^l + 2u^l + \frac{\rho^l - P^l}{\rho_0 - P_0} \right); \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{r^3} (u^l - f^l) - \frac{2}{r^3} (l-1)(l+2) \chi^l - \frac{1}{2} \left(\zeta_{11}^l + \frac{4}{r} \zeta_1^l - \frac{2+l(l+1)}{r^2} \zeta^l \right) = \\
 = -\frac{q^2}{6r} e^{2\psi_0 - 2\Phi_0} \delta_{l2}, \quad (l \geq 1); \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_l \chi^l + \frac{2}{r^2} \chi^l + \frac{1}{r} \zeta^l = \frac{r^2 q^2}{12} e^{2\psi_0 - 2\Phi_0} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r} \right)^2 \delta_{l2} + \\
 + 2\pi e^{2\psi_0 + 3\chi_0} K(r) (\rho_0 + P_0) \delta_{l2}, \quad (l \geq 2); \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N^l = -\varphi^l + \frac{1}{2} K(r) (\delta_{l0} - \delta_{l2}) + C_1 \delta_{l0}; \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

$$\Delta_l \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

3. Решения уравнений поля вне распределения масс. Согласно (2.1) вне сферически-симметрического распределения масс от нуля отличны лишь два компонента метрического тензора, которые имеют вид [3]

$$\Phi^0 = -\frac{M}{r}, \quad \psi^0 = \frac{M'}{r}. \quad (3.1)$$

Первое приближение по угловой скорости позволяет определить функцию

$$q = \frac{c_1}{r^3} F\left(2, 4, -\frac{2(M+M')}{r}\right) = c_1 y e^y \left(\operatorname{ch} y - \frac{\operatorname{sh} y}{y}\right), \quad (3.2)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, а $y = (M+M')/r = m/r$. M , M' и c_1 — постоянные интегрирования [4].

Во втором по угловой скорости приближении имеем следующую систему уравнений:

$$\Delta_l \varphi^l = \frac{2}{3} q^2 e^{2\psi_0 - 2\psi_0} \left(\delta_{0l} + \frac{1}{2} \delta_{l2}\right) + \frac{q^2 r^2}{3} e^{2\psi_0 - 2\psi_0} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r}\right)^2 (\delta_{0l} - \delta_{2l}); \quad (3.3)$$

$$\Delta_l f^l - \frac{4}{r^2} (f^l - u^l) + \frac{2l(l+1)}{r} \zeta^l + \frac{q^2}{3} e^{2\psi_0 - 2\psi_0} (\delta_{l0} - \delta_{l2}) = 0; \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta_l u^l + \frac{2}{r^2} (f^l - u^l) - \frac{l(l+1)}{r} \zeta^l + \frac{q^2 r^2}{6} e^{2\psi_0 - 2\psi_0} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r}\right)^2 (\delta_{0l} - \delta_{2l}) + \\ + \frac{q^2}{3} e^{2\psi_0 - 2\psi_0} \left(\frac{1}{2} \delta_{l0} + \delta_{2l}\right) = 0; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{r^3} (u^l - f^l) - \frac{2}{r^3} (l-1)(l+2) \chi^l - \frac{1}{2} \left(\zeta_{11}^l + \frac{4}{r} \zeta_1^l - \right. \\ \left. - \frac{2+l(l+1)}{r^2} \zeta^l\right) = -\frac{q^2}{6r} e^{2\psi_0 - 2\psi_0} \delta_{l2}, \quad (l \geq 1); \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Delta_l \chi^l + \frac{2}{r^2} \chi^l + \frac{1}{r} \zeta^l = \frac{r^2 q^2}{12} e^{2\psi_0 - 2\psi_0} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r}\right)^2 \delta_{l2}, \quad (l \geq 2). \quad (3.7)$$

Вследствие симметрии конфигурации относительно экваториальной плоскости от нуля отличны только те функции φ^l , f^l , u^l и χ^l , индексы которых имеют четные значения. Что касается функций ζ^l , то они могут быть отличны от нуля и в случае нечетных значений l . В частном случае для $l=1$ уравнение (1.4) дает

$$\zeta_{11}^1 + \frac{4}{r} \zeta_1^1 - \frac{4}{r^2} \zeta^1 = 0. \quad (3.8)$$

Решения, удовлетворяющие данному уравнению и условиям конечности на бесконечности и в центре конфигурации следующие:

$$\zeta_{\text{out}}^1 = Ar, \quad \zeta_{\text{in}}^1 = B/r^4.$$

Из условий непрерывности ζ^1 и первой производной на границе $AR_0^4 = B/R_0$, $4AR_0^3 = -B/R_0^2$ следует, где $A = B = 0$, так как детер-

минант этой однородной системы отличен от нуля. Таким же образом можно доказать, что $\zeta^l = 0$ для любых нечетных l .

Для четных значений $l > 2$ искомые функции тождественно равняются нулю из-за линейности и однородности уравнений. Итак, задача сводится к интегрированию системы (3.3)—(3.7) для $l = 0$ и 2. При $l = 0$ в качестве неизвестных функций удобно брать следующие φ^0 , $X = \varphi^0 + f^0 + 2u^0$, $Y = f^0 - u^0$. Решения соответствующих уравнений, удовлетворяющих граничным условиям, следующие:

$$X_{\text{out}} = b_0 y;$$

$$\varphi_{\text{out}}^0 = a_0 y + \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[e^{2y} \left(1 - \frac{2}{y} + \frac{1}{2y^2} \right) + 1 + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{e^{-2y}}{2y^2} \right]; \quad (3.9)$$

$$Y_{\text{out}} = -3a_0 y^3 + \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[e^{2y} \left(\frac{5}{8y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2} - \frac{e^{-2y}}{8y^2} \right];$$

a_0 , α_0 и b_0 — постоянные интегрирования.

В случае $l = 2$ удобно выбрать следующие комбинации:

$$\begin{aligned} A &= \varphi^2 + f^2 + 2u^2; & B &= f^2 - u^2. \\ F &= \zeta^2 r, \\ \Gamma &= B - 2F + 2\chi^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из системы (2.11)—(2.16) следует, что

$$\Delta_2 \Gamma - \frac{14}{r^2} \Gamma = 0. \quad (3.11)$$

Это уравнение выполняется всюду, и внутри и вне конфигурации, и соответственно имеет следующие решения:

$$\Gamma_{\text{in}} = C_3 r^4, \quad \Gamma_{\text{out}} = C/r^5. \quad (3.12)$$

Из условий непрерывности на границе распределения масс следует, что $C = C_3 = 0$, так как детерминант

$$\begin{vmatrix} R^4 & -1/R^5 \\ 4R^3 & 5/R^6 \end{vmatrix} = 9/R^2 \neq 0,$$

где R — радиус конфигурации. Следовательно

$$\Gamma = B - 2F + 2\chi^2 \equiv 0 \quad (3.13)$$

или

$$2F = B + 2I^2.$$

Итак, для оставшихся функций имеем

$$A_{out} = b_2 y^3,$$

$$\varphi_{out}^2 = a_2 y^3 - \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[e^{2y} \left(1 - \frac{2}{y} + \frac{5}{4y^2} \right) + 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{e^{-2y}}{4y^2} \right],$$

$$B_{out} - 6\lambda_{out}^2 = (a_1 - a_2) y^3 + \varphi_{out}^2, \quad (3.14)$$

$$B_{out} + 6\lambda_{out}^2 = b_1 y + \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[e^{2y} \left(1 - \frac{2}{y} + \frac{1}{2y^2} \right) + 1 + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{e^{-2y}}{2y^2} \right].$$

Таким образом, вне распределения масс искомые функции имеют вид

$$\varphi_{out}^0 = a_0 y + \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[e^{2y} \left(1 - \frac{2}{y} + \frac{1}{2y^2} \right) + 1 + \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{e^{-2y}}{2y^2} \right],$$

$$u_{out}^0 = \frac{b_0 - a_0}{3} y + a_0 y^3 + \frac{c_1^2 m^2}{144} \left[e^{2y} \left(\frac{1}{8y^2} + \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2y^2} - \frac{5}{2y} - \frac{1}{2} - \frac{5e^{-2y}}{8y^2} \right], \quad (3.15)$$

$$f_{out}^0 = \frac{b_0 - a_0}{3} y - 2a_0 y^3 -$$

$$- \frac{c_1^2 m^2}{144} \left[e^{2y} \left(\frac{7}{4y^2} - \frac{4}{y} + 2 \right) - \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y} + 2 + \frac{e^{-2y}}{4y^2} \right],$$

$$\varphi_{out}^1 = a_2 y^3 - \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[e^{2y} \left(1 - \frac{2}{y} + \frac{5}{4y^2} \right) + 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{e^{-2y}}{4y^2} \right],$$

$$f_{out}^2 = \frac{1}{3} (b_2 - a_2 + a_1) y^3 + \frac{b_1}{3} y + \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[-\frac{e^{2y}}{4y^2} + \frac{1}{y} + \frac{e^{-2y}}{4y^2} \right],$$

$$u_{out}^2 = \frac{1}{3} \left(b_2 - a_2 - \frac{a_1}{2} \right) y^3 - \frac{b_1}{6} y + \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[e^{2y} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y} + \frac{3}{4y^2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} - \frac{e^{-2y}}{4y^2} \right],$$

$$i_{out}^2 = \frac{b_1}{12} y - \frac{a_1}{12} y^3 + \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[e^{2y} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2y} + \frac{1}{4y^2} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4y^2} \right],$$

$$F_{out} = \frac{1}{3} b_1 y + \frac{1}{6} a_1 y^3 + \frac{c_1^2 m^2}{48} \left[-\frac{e^{2y}}{4y^3} + \frac{1}{y} + \frac{e^{-2y}}{4y^3} \right],$$

$$b_1 = \frac{c_1^2 m^2}{24}.$$

4. Метод решения задачи внутри конфигурации. В результате интегрирования соответствующей системы уравнений внутри распределения масс возникают новые постоянные, значения которых вместе с постоянными, входящими во внешнее решение, определяются из условия непрерывности коэффициентов метрического тензора и их первых производных на границе конфигурации. Последняя определяется из условия $\rho(R) = 0$.

Разложим R по малому параметру β и по полиномам Лежандра. В исследуемом нами приближении получим

$$R = R_0 + \beta \sum d^l P_l(\cos \theta), \quad (4.1)$$

где R_0 — радиус конфигурации в случае сферической симметрии. Подставляя (4.1) в определение границы, получим

$$\rho(R) = \rho(R_0 + \beta \sum d^l P_l) = \rho(R_0) + \beta \sum_{d^l} \frac{d^l}{d\kappa} \rho^l = 0.$$

Используя разложение (2.10) для ρ и условие $\rho_0(R_0) = 0$, находим

$$\rho^l(R_0) + d^l \frac{d\rho_0}{dR} \Big|_{R=R_0} = 0$$

или

$$d^l = - \frac{\rho^l(R_0)}{d\rho_0/dR \Big|_{R=R_0}}. \quad (4.2)$$

Заметим, что подстановка разложения (4.1) в условия непрерывности метрических коэффициентов и их производных на границе $R(\theta)$ приводит к тому, что функции $\varphi^0, u^0, f^0, \varphi^3, u^3, f^3, \chi^2$ и F сшиваются на сфере с радиусом R_0 .

Как показано в работе [2], между ρ^l и N^l , P^l и N^l существует определенная связь:

$$\begin{aligned} P^l &= (\rho_0 + P_0) N^l, \\ \rho^l &= \frac{d\rho_0}{dP_0} (\rho_0 + P_0) N^l. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя обозначения $\varphi^0 + f^0 + 2n^0 = X$, $f^0 - u^0 = Y$, $\varphi^0 - C_1 = Z$, (3.10), а также соотношения (4.3) и

$$F = \frac{1}{2} (B + 2l^3), \quad (4.4)$$

$$N^0 = -\varphi^0 + \frac{1}{2} K(r) + C_1, \quad (4.5)$$

$$N^2 = -\varphi^2 - \frac{1}{2} K(r), \quad (4.6)$$

для новых неизвестных получим следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta_0 X - 8\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (3P_0 - \rho_0) X + 8\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (\rho_0 + P_0) \\ \left(3 - \frac{d\rho_0}{dP_0}\right) Z = 4\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (\rho_0 + P_0) \left(3 - \frac{d\rho_0}{dP_0}\right) K(r); \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 Z + 4\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (\rho_0 + P_0) \left(3 + \frac{d\rho_0}{dP_0}\right) Z - 4\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} \\ (\rho_0 + 3P_0) X = \frac{2}{3} q^2 e^{2\varphi^0 - 2\varphi^2} + \frac{q^2 r^2}{3} e^{3\varphi^2 - 3\varphi^0} \\ \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r}\right)^2 + 2\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} K(r) (\rho_0 + P_0) \left(7 + \frac{d\rho_0}{dP_0}\right); \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 A + 8\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (\rho_0 - 3P_0) A - 8\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (\rho_0 + P_0) \\ \left(\frac{d\rho_0}{dP_0} - 3\right) \varphi^2 = \frac{1}{2} K(r) \left(\frac{d\rho_0}{dP_0} - 3\right) 8\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (\rho_0 + P_0); \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 \varphi^2 - 4\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (\rho_0 - 3P_0) A + 4\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} (\rho_0 + P_0) \\ \left(\frac{d\rho_0}{dP_0} + 3\right) \varphi^2 = -2\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} K(r) (\rho_0 + P_0) \left(\frac{d\rho_0}{dP_0} + 7\right) + \\ + \frac{q^2}{3} e^{2\varphi^0 - 2\varphi^2} - \frac{q^2 r^2}{3} e^{2\varphi^0 - 2\varphi^2} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r}\right)^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 Y - \frac{6}{r^2} Y = \frac{q^2}{6} e^{2\varphi^0 - 2\varphi^2} - \frac{q^2 r^2}{6} e^{2\varphi^0 - 2\varphi^2} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r}\right)^2 - \\ - 4\pi e^{\varphi^0 + 3\varphi^2} K(r) (\rho_0 + P_0); \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\Delta_2(B - 6\chi^2) = \frac{2}{3} q^2 e^{2\varphi_0 - 2\varphi} - \frac{2q^2 r^2}{3} e^{2\varphi_0 - 2\varphi} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r} \right)^2 - 16\pi K(r) e^{4\varphi_0 + 3\varphi} (\rho_0 + P_0); \quad (4.12)$$

$$\Delta_0(B + 6\chi^2) = \frac{2}{3} q^2 e^{2\varphi_0 - 2\varphi} + \frac{1}{3} q^2 r^2 e^{2\varphi_0 - 2\varphi} \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{r} \right)^2 + 8\pi K(r) e^{4\varphi_0 + 3\varphi} (\rho_0 + P_0). \quad (4.13)$$

Уравнения (4.11), (4.12) и (4.13) интегрируются независимо, а (4.7) с (4.8) и (4.9) с (4.10) составляют системы для двух неизвестных функций в каждой. Для интегрирования этих уравнений используем их линейность.

Решения для (4.11), (4.12) и (4.13) ищем в виде

$$Y = \tilde{Y} + C_0 r^2, \quad (4.14)$$

$$B - 6\chi^2 = \tilde{G} + C_5 r^2, \quad (4.15)$$

$$B + 6\chi^2 = \tilde{H} + C_6. \quad (4.16)$$

$\tilde{Y}$, $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ — частные решения неоднородных уравнений соответственно. В окрестности центра конфигурации функции Y , $B - 6\chi^2$, $B + 6\chi^2$ ведут себя как

$$Y \simeq \text{const } r^2; \quad B - 6\chi^2 \simeq \text{const } r^2; \quad B + 6\chi^2 \simeq \text{const}. \quad (4.17)$$

Следовательно, начальные условия можно выбрать следующим образом:

$$\tilde{Y} \simeq r^2; \quad \tilde{G} \simeq r^2; \quad \tilde{H} \simeq 0. \quad (4.18)$$

Из условия сшивки решений (4.14), (4.15) и (4.16) на радиусе сферической конфигурации следует

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{2y_0}{5m} \left[\frac{6y_0}{m} (Y_0 - \tilde{Y}) + Y'_0 - \tilde{Y}' \right], \\ x_0 &= \frac{m}{30y_0^4} \left[\frac{4y_0}{m} (Y_0 - \tilde{Y}) - Y'_0 + \tilde{Y}' \right], \\ C_5 &= \frac{3}{5R_0^3} \left[2\varphi_0 - \tilde{G} + \frac{R_0}{3} (2\varphi'_0 - \tilde{G}') \right], \\ a_1 &= \frac{8R_0^3}{m^3} [(2\varphi'_0 - \tilde{G}') R_0 - 4\varphi_0 + 2\tilde{G}], \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$C_6 = R_0 (\xi'_0 - \tilde{H}') + \xi_0 - \tilde{H}, \quad b_1 = \frac{2R_0^2}{m} (\xi'_0 - \tilde{H}').$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi_0(r) \equiv \varphi_{\text{out}}^2 - a_2 y^2 = \frac{1}{2} (B_{\text{out}} - 6\chi_{\text{out}}^2 - a_2 y^2),$$

$$\xi_0(r) \equiv \varphi_{\text{out}}^0 - a_0 y = B_{\text{out}} + 6\chi_{\text{out}}^2 - b_1 y,$$

$$Y_0(r) \equiv Y_{\text{out}} + 3a_0 y^2,$$

$$y_0 = \frac{m}{2R_0}.$$

штрих обозначает производную по r .

Чтобы определить остальные постоянные, рассмотрим системы (4.7)—(4.8) и (4.9)—(4.10). Так как в этих системах неизвестные функции X , Z и A , φ^2 не разделяются, но системы линейны, то решения можно представить в виде

$$Z = \tilde{Z} + C_2 Z^{(0)},$$

$$X = \bar{X} + C_3 X^{(0)}, \quad (4.20)$$

$$A = \tilde{A} + C_3 A^{(1)} + C_4 A^{(2)},$$

$$\varphi^2 = \bar{\varphi} + C_3 \varphi^{2(1)} + C_4 \varphi^{2(2)}. \quad (4.21)$$

Поведение этих функций вблизи нуля следующее:

$$\begin{aligned} A &\simeq \text{const } r^2, & \varphi^2 &\simeq \text{const } r^2, \\ Z &\simeq \text{const } r^2, & X &\simeq \text{const}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Заметим, что если в системе (4.21) введены две постоянные C_3 и C_4 и соответственно две пары решений однородных уравнений с определенными начальными условиями, соответствующих уравнениям (4.9)—(4.10) — $(A^{(1)}, \varphi^{2(1)})$ и $(A^{(2)}, \varphi^{2(2)})$, то в (4.20) введение еще одной постоянной излишне, так как $Z(0) = 0$ уже определено из (4.5) и $N^0(0) = 0$.

Начальные условия, определенные поведением (4.22) вблизи нуля и уравнениями (4.7)—(4.10) в окрестности нуля, могут быть выбраны таким образом:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &\simeq 0; & Z^{(0)} &\simeq \frac{4\pi}{6} e^{\varphi_0(0) + 3\psi_0(0)} (\rho_0(0) + 3P_0(0)) r^2; \\ \bar{X} &\simeq 0; & X^{(0)} &\simeq 1 + \frac{8\pi}{6} e^{\varphi_0(0) + 3\psi_0(0)} (3P_0(0) - \rho_0(0)) r^2; \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\bar{A} \simeq 0, \quad A^{(1)} \simeq r^2; \quad A^{(2)} \simeq 0;$$

$$\bar{\varphi}^2 \simeq 0, \quad \varphi^{2(1)} \simeq 0; \quad \varphi^{2(2)} \simeq r^2.$$

Условия непрерывности этих функций на радиусе R_0 даются системами алгебраических линейных уравнений, решение которых дает

$$C_2 = -\frac{2y_0\bar{X} - m\bar{X}'}{2y_0X^{(0)} - mX^{(0)'}}$$

$$b_0 = -\frac{X^{(0)}\bar{X} - X^{(0)'}\bar{X}}{\frac{2y_0}{m}X^{(0)} - X^{(0)'}y_0}$$

$$a_0 = \frac{m}{2y_0'} [\xi_0' - \bar{Z}' - C_2Z^{(0)'}],$$

$$C_1 = \xi_0 - \bar{Z} + C_2Z^{(2)} + a_0y_0,$$

$$a_2 = \frac{1}{y_0^3} [C_3\varphi^{2(1)} + C_4\varphi^{2(2)} - \varphi_0 + \bar{\varphi}^{(2)}],$$

$$b_2 = \frac{1}{y_0^3} [C_3A^{(1)} + C_4A^{(2)} + \bar{A}],$$

$$C_3 = \left\{ \left(\frac{6y_0}{m} A^{(2)} + A^{(2)'} \right) \left[\frac{6y_0}{m} (\varphi_0 - \bar{\varphi}^2) + \varphi_0' - \bar{\varphi}^{2'} \right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{6y_0}{m} \bar{A} + \bar{A}' \right) \left(\frac{6y_0}{m} \varphi^{2(2)} + \varphi^{2(2)'} \right) \right\} / \delta;$$

$$C_4 = - \left\{ \left(\frac{6y_0}{m} \bar{A} + \bar{A}' \right) \left(\frac{6y_0}{m} \varphi^{2(1)} + \varphi^{2(1)'} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{6y_0}{m} A^{(1)} + A^{(1)'} \right) \left[\frac{6y_0}{m} (\varphi_0 - \bar{\varphi}^2) + \varphi_0' - \bar{\varphi}^{2'} \right] \right\} / \delta;$$

$$\delta = \left(\frac{6y_0}{m} A^{(2)} + A^{(2)'} \right) \left(\frac{6y_0}{m} \varphi^{2(1)} + \varphi^{2(1)'} \right) -$$

$$- \left(\frac{6y_0}{m} A^{(1)} + A^{(1)'} \right) \left(\frac{6y_0}{m} \varphi^{2(2)} + \varphi^{2(2)'} \right).$$

Определения этих постоянных дает возможность определить физические величины, характеризующие конфигурацию, такие, как добавки к массам и квадрупольный момент.

Ереванский государственный
университет
Институт прикладных проблем
физики АН Арм.ССР

STATIONARY AXIAL-SYMMETRIC GRAVITATIONAL FIELDS IN THE BIMETRIC THEORY

H. A. GRIGORIAN, E. V. CHUBARIAN

Stationary axial-symmetric gravitational fields in terms of the Rosen bimetric theory of gravitation are considered. The analytical vacuum solutions in quadratic angular velocity approximation are found. The method of finding the metric within the mass distribution and the determination of internal structure and integral parameters of rotating objects have been suggested. The state of matter in the objects is described by a parametric equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. V. Papoyan, A. V. Sarkisyan, E. V. Chubarian, *Astrophys. Space, Sci.*, 64, 65, 1979.
2. Д. М. Седракян, Э. В. Чубарян, *Астрофизика*, 4, 551, 1968.
3. N. Rosen, *Gen. Rel. Grav.*, 4, 435, 1973.
4. E. V. Chubarian, A. V. Sarkisyan, *Astrophys. Space Sci.*, 98, 1, 1984.