АСТРОФИЗИКА

ТОМ 23 АВГУСТ, 1985 ВЫПУСК 1

УДК: 523—64

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА ПРИ ОБЩИХ ЗАКОНАХ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ЧАСТОТАМ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН, А. Х. ХАЧАТРЯН

Поступила 19 ноября 1984
Принята к печати 8 мая 1985

Рассматривается нелинейная изотропная задача переноса в плоскопараллельном слое газа, состоящего из двухуровенных атомов при общих законах перераспределения по частотам. Применение метода самосогласованных оптических глубин Амбарцумяна позволяет линеаризовать задачу и свести ее к линейному интегральному уравнению, хорошо изученному в линейной теории некогерентного рассеяния. Приведены результаты некоторых численных расчетов для полубесконечной среды в одномерном приближении в случае доплеровского уширения линии.

1. *Введение.* Как известно (см. [1—3]), линейное приближение к задачам переноса излучения в спектральных линиях законно при малых плотностях излучения, когда основная доля атомов находится в невозбужденном состоянии. В астрофизических объектах часто это условие не выполняется, и возникает необходимость учитывать нелинейные эффекты, связанные с заметным влиянием сильного поля излучения на локальные оптические свойства среды.

Нелинейные задачи переноса излучения представляют большой интерес не только в астрофизике, но и в оптике, теории лазеров и др. Эти задачи существенно сложнее соответствующих линейных задач. Нелинейная теория переноса начала развиваться за последние 20—25 лет. Существенным толчком для развития этой теории явился метод самосогласованных оптических глубин (СОГ) [1] академика В. А. Амбарцумяна. В работах [4, 5] был найден математический метод, примыкающий к методу СОГ. Применение метода работ [4, 5] позволило решить определенный круг астрофизически важных задач переноса [6—10]. Некоторые результаты работы [4] были заново получены в работе [11] (см. также [2]).

За указанное время в зарубежной литературе появился ряд работ [12—15], посвященных разработке методов решения нелинейных задач некогерентного рассеяния. Среди этих методов особое место занимает субординатный формализм Милки и Михаласа [12, 3] (так называемый

метод «полной линеаризации»). Реализация этого метода, как указали сами авторы, является весьма трудоемкой с вычислительной точки зрения. Заслуживает также внимания работа Хислея и Кнэра [13, 3], где применяется стандартный итерационный метод Фотрие.

В работе [16] выводятся и детально изучаются точные выражения профилей поглощения и излучения для газа, состоящего из двухуровенных атомов. В этой работе показано, что профиль излучения зависит не только от состояния поля излучения, но и от распределения скоростей возбужденных атомов. В [17] результаты работы [16] обобщаются на случай многоуровенных атомов, выводится удобное выражение для профиля излучения, которое сравнивается с выражением, полученным в работе [12]. Автор работы [17] обнаруживает некоторые расхождения двух результатов и рассматривает случаи, при которых этими расхождениями можно пренебречь.

В серии статей Н. Б. Енгибаряна, А. Г. Никогосяна и их соавторов [18—22] развивалась линейная теория переноса в спектральных линиях при общих законах перераспределения излучения по частотам при элементарном акте рассеяния. Оказывается, что сочетание методов работ [4, 20—22] позволяет решить нелинейные задачи переноса в спектральных линиях при общих законах некогерентного рассеяния, доводя задачу до численных результатов.

Рассмотрению одной такой задачи посвящена настоящая работа. Постановка рассматриваемой нами задачи согласована с работами [16, 17].

2. *Пусть плоскопараллельный слой* с геометрической толщиной z_0 равномерно заполнен двухуровенными атомами и свободными электронами. Пусть среда со стороны границы $z = 0$ освещается излучением, распределение которого по направлениям и частотам описывается интенсивностью $I_0(x, \eta)$, где $x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$ — безразмерная частота, измеренная в доплеровских ширинах, η — косинус угла падения. Тогда в каждой точке среды создается определенное поле излучения и распределения атомов по уровням.

Обозначим через $n_k(z)$ $(k = 1, 2)$ концентрацию находящихся на k-м уровне атомов на глубине z.

Имеем

$$n_1(z) + n_2(z) = n_0. \tag{1}$$

Следуя работе [16], введем функции распределения по скоростям для атомов, находящихся в основном и возбужденном состояниях,

$$F_k(z, \vec{v}) = n_k(z) f_k(\vec{v}); \quad (k = 1, 2). \tag{2}$$

Здесь $f_k(\vec{v})$ — нормированные функции распределения по скоростям:

$$\int F_k(z, \vec{v})\, d^3v = n_k(z); \quad \int f_k(\vec{v})\, d^3v = 1. \tag{3}$$

Суммарное распределение считается максвелловским:

$$n_1 f_1(\vec{v}) + n_2 f_2(\vec{v}) = n_0 f_0(\vec{v}),$$

где $f_0(\vec{v})$ — функция распределения Максвелла.

Уравнение переноса в спектральной линии имеет следующий вид:

$$\eta \frac{dI(z, x, \eta)}{dz} = -\frac{h\nu_0}{4\pi}[n_1 B_{12}\varphi(x) - n_2 B_{21}\psi(x)]\, I(z, x, \eta) + \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21}\psi(x) \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &I(0, x, \eta) = I_0(x, \eta) \text{ при } \eta > 0, \\ &I(z_0, x, \eta) = 0 \qquad \text{при } \eta < 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где использованы следующие общепринятые обозначения [3]; A_{21}, B_{12}, B_{21} — эйнштейновские коэффициенты переходов, $I(z, x, \eta)$ — искомая интенсивность излучения, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — нормированные профили коэффициентов поглощения и излучения. Они имеют вид (см. [16]):

$$\varphi(x) = \int f_1(\vec{v})\, q(x, \vec{v})\, d^3v, \tag{6}$$

$$\psi(x) = \int f_2(\vec{v})\, E(x, \vec{v})\, d^3v. \tag{7}$$

Здесь $q(x, \vec{v})$ и $E(x, \vec{v})$ (усредненные по направлениям) микроскопические профили поглощения и излучения соответственно, причем [16]

$$E(x, \vec{v}) = \frac{\dfrac{B_{12}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R_{\vec{v}}(x, x')\, dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' + a_{12} q(x, \vec{v})}{\dfrac{B_{12}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} q(x', \vec{v})\, dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' + a_{12}}, \tag{8}$$

a_{12} — коэффициент перехода вследствие электронных ударов первого рода,

$$R_{\vec{v}}(x, x') = \int R_{\vec{v}}(x, \vec{n}, x', \vec{n}')\, \frac{d\Omega}{4\pi}$$

усредненная по направлениям функция перераспределения по частотам для атомов, движущихся со скоростью $\vec{v}$.

В частности, когда в системе отсчета атома происходит полное перераспределение по частотам, имеем

$$R_{\vec{v}}(x, x') = q(x, \vec{v})\, q(x', \vec{v}). \tag{9}$$

Тогда из (8) следует

$$E(x, \vec{v}) = q(x, \vec{v}).$$

Уравнение стационарности записывается в форме

$$n_1 f_1(\vec{v}) \left[a_{12} + \frac{B_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(x', \vec{v})\, dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' \right] =$$

$$= n_2 f_2(\vec{v}) \left[a_{21} + A_{21} + \frac{B_{21}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', \vec{v})\, dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' \right]. \tag{10}$$

Здесь a_{21} — коэффициент перехода вследствие электронных ударов второго рода.

Интегрируя уравнение (10) по всем скоростям с учетом (6), (7), получаем:

$$n_1 \left[a_{12} + \frac{B_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\, dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' \right] =$$

$$= n_2 \left[a_{21} + A_{21} + \frac{B_{21}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x')\, dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' \right]. \tag{11}$$

Умножая обе части уравнения (10) на $E(x, \vec{v})$ с учетом (8), получаем

$$n_1 f_1(\vec{v}) \left[a_{12} q(x, \vec{v}) + \frac{B_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\vec{v}}(x, x')\, dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' \right] =$$

$$= n_2 f_2(\vec{v}) E(x, \vec{v}) \left[a_{21} + A_{21} + \frac{B_{21}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', \vec{v})\, dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' \right]. \tag{12}$$

Проинтегрировав последнее выражение по всем скоростям с учетом (6), (7), нетрудно получить следующее выражение для профиля излучения

$$n_2\psi(x) = \frac{n_1\left[a_{12}\varphi(x) + \frac{B_{12}}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x, x')\,dx' \int\limits_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\,d\eta'\right]}{a_{21} + A_{21} + \frac{B_{21}}{2} J(x)}. \tag{13}$$

Здесь

$$R(x, x') = \int f_1(\vec{v})\, R_{\vec{v}}(x, x')\, d^3v \tag{14}$$

функция перераспределения, усредненная по скоростям, а

$$J(x) = \frac{\int f_2(\vec{v})\, E(x, \vec{v})\, d^3v \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(x', \vec{v}) \int\limits_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\, d\eta' dx'}{\int f_2(\vec{v})\, E(x, \vec{v})\, d^3v}. \tag{15}$$

Рассматриваемая задача нами будет решена путем первоначального построения некоторого приближенного решения (которое мы назовем первым приближением) и дальнейшего уточнения этого решения (второе приближение).

В настоящей работе мы опишем способ построения первого приближения*, которое соответствует следующим упрощающим предположениям:

а) профили коэффициентов поглощения и вынужденного излучения в уравнении стационарности (11) одинаковы и равны, а коэффициент поглощения задается посредством

$$\frac{h\nu_0}{4\pi}\left[n_1B_{12} - n_2B_{21}\right]\varphi(x), \tag{16}$$

то есть уравнение переноса (4) заменяется следующим уравнением:

$$\eta\frac{dI(z, x, \eta)}{dz} = -\frac{h\nu_0}{4\pi}(n_1B_{12} - n_2B_{21})\,\varphi(x)\, I(z, x, \eta) + \frac{h\nu_0}{4\pi}A_{21}n_2\psi(x). \tag{17}$$

---

* Рассматриваемое нами первое приближение соответствует физическим допущениям, принятым рядом авторов [12, 13, 15].

б) Член, учитывающий вынужденное излучение в уравнении (13), можно записать в виде

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')\,dx' \int_{-1}^{1} I(z, x', \eta')\,d\eta'. \tag{18}$$

Отметим, что в работе [14] приведено сравнение профилей коэффициентов поглощения и вынужденного излучения и показано, что их отношение близко к единице в центре линии. Этот факт также является аргументом в пользу принятого нами первого приближения.

При вышеуказанных приближениях уравнение (13) и условие стационарности (11) принимают вид:

$$n_1\left[a_{12}+\frac{B_{12}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\,dx'\int_{-1}^{1}I(z, x', \eta')\,d\eta'\right]=$$

$$=n_2\left[a_{21}+A_{21}+\frac{B_{21}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\,dx'\int_{-1}^{1}I(z, x', \eta')\,d\eta'\right], \tag{19}$$

$$n_2\psi(x)=\frac{n_1\left[a_{12}\varphi(x)+\frac{B_{12}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}R(x, x')\,dx'\int_{-1}^{1}I(z, x', \eta')\,d\eta'\right]}{a_{21}+A_{21}+\frac{B_{21}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')\,dx'\int_{-1}^{1}I(z, x', \eta')\,d\eta'}. \tag{20}$$

Следуя методу работы [4], перейдем в уравнении (17) к новому аргументу τ, значение которого заранее неизвестно и зависит от решения самой задачи

$$d\tau=\frac{h\nu_0}{4\pi}(n_1B_{12}-n_2B_{21})\,dz; \qquad \tau_0=\int_0^{z_0}\frac{h\nu_0}{4\pi}(n_1B_{12}-n_2B_{21})\,dz, \tag{21}$$

$$\tau(0)=0$$

τ_0 — реальная оптическая толщина среды, которая пока неизвестна и подлежит определению.

Обозначим

$$I(z, x, \eta)=\overline{I}(\tau, x, \eta). \tag{22}$$

Тогда из (17) будем иметь

$$\eta \frac{d\overline{I}(\tau, x, \eta)}{d\tau} = -\varphi(x)\overline{I}(\tau, x, \eta) + \frac{n_2 A_{21}\varphi(x)}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}. \tag{23}$$

Из (19) и (20), определяя выражение

$$\overline{S}(\tau, x) = \frac{n_2 A_{21}\varphi(x)}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} \tag{24}$$

и подставляя в (23), получим:

$$\eta \frac{d\overline{I}(\tau, x, \eta)}{d\tau} = -\varphi(x)\overline{I}(\tau, x, \eta) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(x, x')\,dx' \int_{-1}^{1} \overline{I}(\tau, x', \eta')\,d\eta' + \frac{\lambda}{2}\varphi(x) f_0, \tag{25}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\overline{I}(0, x, \eta) = I_0(x, \eta) \quad \text{при } \eta > 0, \\ &\overline{I}(\tau_0, x, \eta) = 0 \qquad\quad \text{при } \eta < 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + a_{21} - \dfrac{B_{21}}{B_{12}} a_{12}}; \quad f_0 = \frac{2a_{12}}{B_{12}}.$$

Полученная линейная краевая задача (25), (26) равносильна следующему интегральному уравнению:

$$\overline{S}(\tau, x) = S_0(\tau, x) + \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(x, x')\,dx' \int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|\varphi(x'))\, S(\tau', x')\,d\tau', \tag{27}$$

где

$$\overline{S}(\tau, x) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(x, x')\,dx' \int_{-1}^{1} \overline{I}(\tau, x', \eta')\,d\eta' + \frac{\lambda}{2}\varphi(x) f_0, \tag{28}$$

$$S_0(\tau, x) = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(x, x')\,dx' \int_0^1 I_0(x', \eta')\, e^{-\frac{\tau}{\eta'}\varphi(x')}\,d\eta' + \frac{\lambda}{2}\varphi(x) f_0, \tag{29}$$

$E_n(\tau) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \eta^{n-2}\, d\eta$ — интегрально показательная функция n-го порядка.

Заметим, что уравнение (27) хорошо изучено в линейной теории переноса излучения [19—21].

Введем также предельную оптическую глубину y и толщину y_0 среды

$$y = \int\limits_0^z \frac{h\nu_0}{4\pi} B_{12}(n_1 + n_2)\, dz = \frac{h\nu_0}{4\pi} B_{12} n_0 z,$$

$$y_0 = \frac{h\nu_0}{4\pi} B_{12} n_0 z_0; \quad dy = \frac{h\nu_0}{4\pi} B_{12}(n_1 + n_2)\, dz. \tag{30}$$

Из (21) и (30) имеем:

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 - \frac{B_{21}}{B_{12}} n_2} = 1 + \gamma Q(\tau, \tau_0), \tag{31}$$

где

$$Q(\tau, \tau_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{S}(\tau, x', \tau_0)\, dx',$$

$$\gamma = \left(1 + \frac{B_{21}}{B_{12}}\right) \frac{B_{21}}{A_{21}}, \tag{32}$$

или, интегрируя соотношение (31) от 0 до y_0, получим

$$y_0 = \tau_0 + \gamma \int\limits_0^{\tau_0} Q(\tau', \tau_0)\, d\tau'. \tag{33}$$

Соотношение (33) дает возможность определить τ_0. В самом деле, если решить уравнение (27) для всех $\tau_0 \leqslant y_0$, то правая часть выражения (33) будет известной функцией. Тогда τ_0 будет корнем уравнения (33). Таким образом, для нахождения реальной оптической толщины придется решить семейство линейных интегральных уравнений вида (27), при всех значениях $\tau_0 \leqslant y_0$. Следует отметить, что в случае полубесконечной среды вопрос определения τ_0 не возникает, то есть если $y_0 = +\infty$, то $\tau_0 = +\infty$.

3. *Опишем метод решения* задачи переноса некогерентного изотропного рассеяния в полупространстве в одномерном приближении и приведем результаты некоторых численных расчетов. Этот метод опирается на результаты работы [20—22].

Уравнения переноса некогерентного рассеяния в одномерном приближении при отсутствии внутренних источников имеют вид [23, 24]

$$\pm \frac{dI^{\pm}(\tau, x)}{d\tau} = -\varphi(x) I^{\pm}(\tau, x) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, x')[I^{+}(\tau, x') + I^{-}(\tau, x')]\, dx'. \qquad (34)$$

Граничные условия суть:

$$I^{+}(0, x) = I_0^{+}(x); \qquad I^{-}(\infty, x) = 0, \qquad (35)$$

где $I^{\pm}(\tau, x)$ — искомые интенсивности излучения, идущего в сторону возрастания и убывания τ.

Как известно, для решения задачи диффузного отражения от одномерной полубесконечной среды достаточно определить функцию $\rho(x, x')$, имеющую следующий вероятностный смысл: если на среду падает квант с частотой x', то $\rho(x, x')\, dx$ есть вероятность того, что квант после ряда рассеяний выйдет из среды с частотой, лежащей в интервале $x, x + dx$.

Применением принципа инвариантности Амбарцумяна для функции $\rho(x, x')$ получаем следующее уравнение [23, 21]:

$$[\varphi(x) + \varphi(x')]\rho(x, x') = \frac{\lambda}{2} R(x, x') +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, x'')\rho(x'', x')\, dx'' + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x'') R(x'', x')\, dx'' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x'')\, dx'' \int_{-\infty}^{\infty} R(x'', x''')\rho(x''', x')\, dx'''. \qquad (36)$$

Отметим, что знание функции $\rho(x, x')$ позволяет решить не только задачу диффузного отражения от одномерной полубесконечной среды, но и дает возможность определить внутренний режим.

Из результатов работы [22] следует, что искомые интенсивности связаны между собой соотношением:

$$I^{-}(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x') I^{+}(\tau, x')\, dx'. \qquad (37)$$

В работах [18—21] существенным образом было использовано представление функции перераспределения в виде билинейного разложения

$$R(x, x') = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_k(x) \varphi_k(x'); \quad n \leqslant \infty, \tag{38}$$

где A_k — неотрицательные постоянные, $\{\varphi_k(x)\}$ — система ортонормированных функций с весом $\frac{1}{\varphi(x)}$ (см. [21]). Ниже мы будем считать систему функций $\{\varphi_k(x)\}$, ортонормированных с весом $\frac{1}{\varphi(x)}$. В представлении (38) $n = 1$ соответствует случаю полного перераспределения по частотам.

Решение уравнения (34) ищем в виде

$$I^{\pm}(\tau, x) = \sum_{k=1}^{n} I_k^{\pm}(\tau) \frac{\varphi_k(x)}{\varphi(x)}, \tag{39}$$

где коэффициенты разложения $I_k^{\pm}$ задаются выражением

$$I_k^{\pm}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I^{\pm}(\tau, x) \varphi_k(x)\, dx. \tag{40}$$

Умножая обе части уравнения (34) на $\varphi_m(x)$ и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом представления (38), соотношения (37) и ортонормированность функций $\{\varphi_k(x)\}$ с весом $\frac{1}{\varphi(x)}$ в n-ом приближении, получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно вектор-функции I_k^{+}:

$$\frac{dI_k^{+}}{d\tau} = -\sum_{m=1}^{n} G_{km} I_m^{+}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{41}$$

с граничным условием

$$I_k^{+}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} I_0^{+}(x) \varphi_k(x)\, dx, \tag{42}$$

где

$$G_{km} = \gamma_{km} - \frac{\lambda}{2}\left[C_{km} + \sum_{p=1}^{n} C_{kp} \rho_{pm}\right], \tag{43}$$

$$\gamma_{mk} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_m(x)\,dx, \qquad C_{km} = A_m\gamma_{km},$$

$$\rho_{mk} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x, x')\frac{\varphi_m(x)\varphi_k(x')}{\varphi(x')}\,dx\,dx'.$$

После определения I_k^+ из задачи (41), (42), I_k^- находим по формуле

$$I_k^-(\tau) = \sum_{m=1}^{n} \rho_{km} I_m^+(\tau). \tag{44}$$

Обратимся теперь к вопросу о нахождении ρ_{ik}. Уравнение (36) может быть сведено к матричному уравнению. Действительно, умножая обе части уравнения (36) на $\dfrac{\varphi_m(x)\varphi_k(x')}{\varphi(x')}$ и интегрируя по x и $-x'$ от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом ортонормированности функций $\{\varphi_k(x)\}$ с весом $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ в n-ом приближении, получаем следующее уравнение относительно матрицы $\tilde{\rho} = (\rho_{ik})$:

$$\tilde{\Gamma}\tilde{\rho} + \tilde{\rho}\tilde{\Gamma} = (J_n + \tilde{\rho})\tilde{L}(J_n + \tilde{\rho}). \tag{45}$$

Здесь J_n — единичная $n \times n$ матрица, а через $\tilde{\Gamma}$ и $\tilde{L}$ обозначены матричными элементами γ_{ik} и C_{ik} соответственно.

Существование канонического решения матричных уравнений вида (45) изучено в работе [25]. Каноническим решением уравнения (45) называется предел итерации

$$\tilde{\Gamma}\tilde{\rho}^{k+1} + \tilde{\rho}^{k+1}\tilde{\Gamma} = (J_n + \tilde{\rho}^k)\tilde{L}(J_n + \tilde{\rho}^k). \tag{46}$$

$$\tilde{\rho}^0 = 0$$

В работе [26] был предложен эффективный способ решения матричного уравнения (45). Ниже мы вкратце опишем этот способ.

Приведем симметричную матрицу $\tilde{\Gamma}$ к диагональному виду ($\tilde{\Gamma}$ — положительно определенная матрица), представляя ее в виде

$$\tilde{\Gamma} = uDu^{-1}, \tag{47}$$

где $D=(d_i\delta_{ij})$ — диагональная матрица с положительными элементами на диагонали, u — унитарная матрица.

Умножая обе части уравнения (45) справа на u и слева на u^{-1} с учетом (47), будем иметь

$$D\tilde{\tilde{\rho}}+\tilde{\tilde{\rho}}D=(J_n+\tilde{\tilde{\rho}})\tilde{\tilde{L}}(J_n+\tilde{\tilde{\rho}}),$$
$$\tilde{\tilde{\rho}}=u^{-1}\tilde{\rho}u;\quad \tilde{\tilde{L}}=u^{-1}\tilde{L}u. \tag{48}$$

Приведение матрицы $\tilde{\Gamma}$ к диагональному виду дает возможность очень просто найти элементы матрицы $\tilde{\tilde{\rho}}$. В самом деле, на k-ом шаге итераций имеем

$$\tilde{\tilde{\rho}}_{ij}^{k+1}=\frac{\lambda}{2}\frac{1}{d_i+d_j}\left[\tilde{\tilde{C}}_{ij}+\sum_{p=1}^{n}\tilde{\tilde{\rho}}_{ip}^{k}\tilde{\tilde{C}}_{pj}+\sum_{p=1}^{n}\tilde{\tilde{C}}_{ip}\tilde{\tilde{\rho}}_{pj}^{k}+\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\tilde{\tilde{\rho}}_{ip}^{k}\tilde{\tilde{C}}_{pq}\tilde{\tilde{\rho}}_{qj}^{k}\right]. \tag{49}$$

После определения $\tilde{\tilde{\rho}}$, матрицу $\tilde{\rho}$ находим по формуле

$$\tilde{\rho}=u\tilde{\tilde{\rho}}u^{-1}. \tag{50}$$

4. *Приведенные численные результаты* относятся к 4-му приближению ($n=4$) для доплеровского закона перераспределения.

$$\varphi(x)=e^{-x^2};\qquad R(x,x')=\int\limits_{\max(|x|,\,|x'|)}^{\infty}e^{-t^2}dt. \tag{51}$$

В качестве системы ортонормированных функций $\{\varphi_k(x)\}$ с весом $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ были взяты [26, 27]

$$\varphi_k(x)=\frac{(-1)^{k-1}e^{-x^2}H_{2k-2}(x)}{2^{k-1}\sqrt{(2k-2)!}\sqrt{\pi}};\qquad A_k=\frac{1}{2k-1}, \tag{52}$$

где H_{2k} — полином Эрмита порядка $2k$.

Как уже отмечено, учет эффектов некогерентного рассеяния в проблеме образования спектральной линии приводит к тому, что функция источника становится зависящей от частоты. На рис. 1 и 2 приведены графики функции источника $S(\tau,x)$, задаваемые формулой

$$S(\tau,x)=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R(x,x')}{\varphi(x')}[I^{+}(\tau,x')+I^{-}(\tau,x')]\,dx', \tag{53}$$

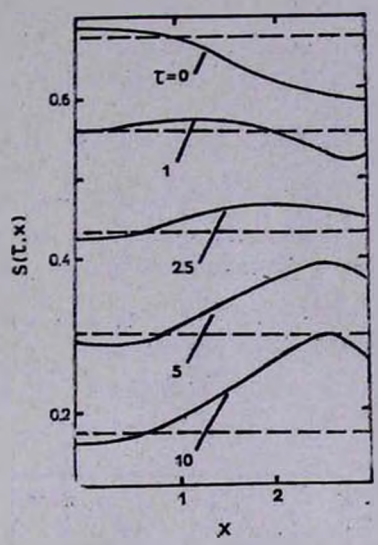

Рис. 1. Функция источников в полубесконечной среде для линии с $\lambda = 0.9$, пунктир — не зависящая от частоты функция источников, полученная на основе первого приближения ($n = 1$).

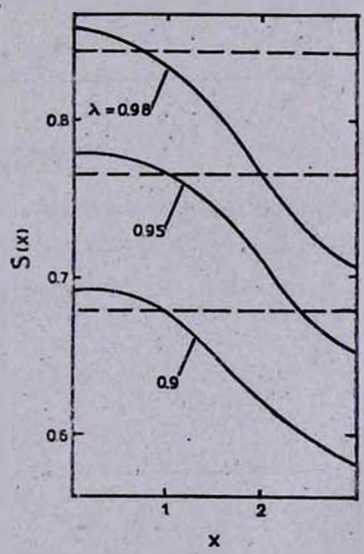

Рис. 2. Зависимость функции источников от частоты для различных значений λ при $\tau = 0$. Пунктир — не зависящая от частоты функция источников, соответствующей первому приближению ($n = 1$).

при различных значениях τ и λ. Пунктирные линии соответствуют первому приближению ($n = 1$)

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')[I^{+}(\tau, x') + I^{-}(\tau, x')]\, dx', \tag{54}$$

при котором функция источника не зависит от частоты.

Обратим внимание, что функция источника, даваемая в (54), не соответствует полному перераспределению, так как интенсивности $I^{\pm}(\tau, x)$ найдены при общем законе перераспределения.

На рис. 3 приведены графики функции $I^{-}(\tau, x)$ при некоторых значениях τ для линии с $\lambda = 0.9$.

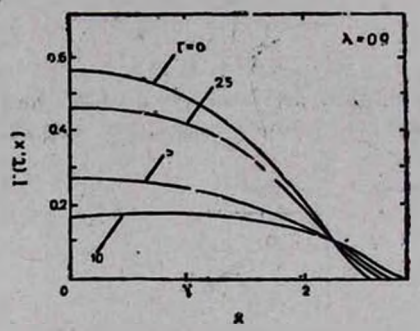

Рис. 3. Поле излучения внутри полубесконечной среды при $\lambda = 0.9$.

Следует отметить, что аналогичные расчеты выполнены в работе [15], где при решении уравнения (25) применяется обобщенный метод дискретных ординат.

Далее, на рис. 4 приведена зависимость профиля спонтанного излучения

$$\psi(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(x, x')[I^{+}(\tau, x') + I^{-}(\tau, x')]\, dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x')[I^{+}(\tau, x') + I^{-}(\tau, x')]\, dx'} \tag{55}$$

от частоты при $\tau = 0$ (на графике — сплошная линия) и для сравнения — профиля поглощения $\varphi(x) = e^{-x^2}$ (пунктирная линия).

Приведем некоторые численные результаты, отражающие связь между предельным и реальным оптическими глубинами y и τ в полубесконечной среде. Вычисления проведены по следующей формуле, вытекающей из (31):

$$y = \tau + \frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right) \varkappa \pi^{1/4} \int_0^{\tau} [I_1^+(\tau') + I_1^-(\tau')]\, d\tau', \tag{56}$$

где принято обозначение

$$\varkappa = \frac{B_{21}}{A_{21}} I_0^+,$$

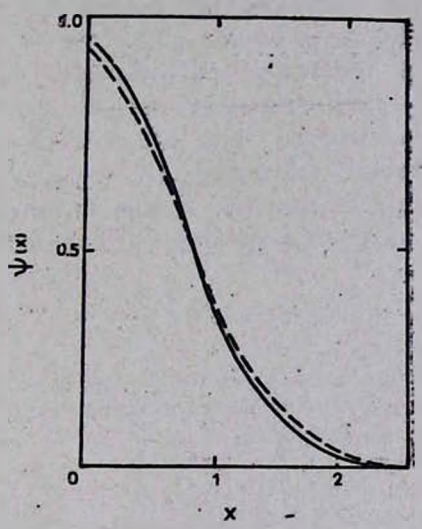

Рис. 4. ———— профиль излучения, — — — — профиль поглощения.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЕ y ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ τ И ПАРАМЕТРОВ λ И $\varkappa$

λ	$\varkappa$ \ τ	1	2	3	5	10	15
0.97	0.5	1.333	1.667	4.001	6.667	13.333	19.999
	0.7	1.467	2.933	4.401	7.333	14.666	21.999
	1	1.667	3.333	5.001	8.333	16.666	24.998
0.99	0.5	1.340	2.680	4.020	6.701	13.401	20.102
	0.7	1.476	2.952	4.429	7.381	14.762	22.143
	1	1.680	3.336	5.041	8.401	16.803	25.204

Определению реальной оптической толщины τ_0, а также нахождению степени возбуждения атомов в слое конечной толщины предполагается посвятить отдельную работу.

Институт прикладных проблем
физики АН Арм.ССР

NONLINEAR TRANSFER PROBLEM IN CASE OF GENERAL LAWS OF FREQUENCY REDISTRIBUTION

N. B. YENGIBARIAN, A. KH. KHACHATRIAN

The present paper considers the non-linear isotropic problem of transfer in plane parallel layer of gas consisting of two-level atoms, in case of general laws of frequency redistribution. Application of Ambarzumian's method of self-consistent optical depths allows us to linearize the problem and reduce it to a linear equation well-studied in the theory of non-coherent scattering. The paper also suggests certain results of numerical calculations for a semi-infinite medium in one-dimensional approximation in case of Doppler broadening of the line.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, В сб. «Теория звездных спектров», Наука, М., 1966.
2. *В. В. Иванов*, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
3. *Д. Михалас*, Звездные атмосферы, Мир, М., 1982.
4. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 1, 297, 1965.
5. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 2, 31, 1966.
6. *В. Ю. Теребиж*, Астрофизика, 3, 282, 1967.
7. *Р. С. Варданян. Н. Б. Енгибарян*, Уч. зап. ЕрГУ, 3, 28, 1968.
8. *Р. С. Варданян*, Уч. зап. ЕрГУ, 3, 36, 1972.
9. *Р. С. Варданян, Н. Б. Енгибарян*, ДАН Арм.ССР, 3, 135, 1969.
10. *А. Х. Хачатрян*, Тезисы докл. IV научной конференции молодых ученых и специалистов, Ереван, 1984.
11. *Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович*, ЖЭТФ, 52, 536, 1967.
12. *R. Milkey, D. Mihalas*, Ap. J., 185, 709, 1973.
13. *R. Heasley, F. Kneer*, Ap. J., 203, 660. 1976.
14. *R. Steinitz, R. Shine*. M. N. RAS, 162, 197. 1973.
15. *D. Hummer*, M. N. RAS, 145, 95, 1969.
16. *J. Oxenius*, JQSRT, 5, 771, 1965.
17. *J. Hubeny*, Bull. Astron. Inst. Cresh., 32, 271, 1981.
18. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 7, 573, 1971.
19. *Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 8, 213, 1972.
20. *N. B. Yengibarian, A. G. Nicoghossian*, JQSRT, 13, 787, 1972.
21. *М. С. Геворгян, Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян*, Астрофизика, 11, 455, 1975.

22. *Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян*, ДАН СССР, 217, 533, 1974.
23. *В. В. Соболев*, Вестн. ЛГУ, 11, 99, 1955.
24. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
25. *Н. Б. Енгибарян, В. Д. Тумасов*, Математический анализ и его приложения, Ереван, 1980.
26. *М. С. Геворгян, А. Х. Хачатрян*, Астрофизика, 22, 599, 1985.
27. *D. Hummer*, M. N. RAS, 128, 21, 1962.
28. *W. Unno*, Ap. J., 129, 388, 1959.