АСТРОФИЗИКА

ТОМ 23 АВГУСТ, 1985 ВЫПУСК 1

УДК: 52:53

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ В МАРЖИНАЛЬНО УСТОЙЧИВОМ ГРАВИТИРУЮЩЕМ ДИСКЕ

В. И. КОРЧАГИН

Поступила 15 февраля 1984

Принята к печати 10 апреля 1985

Рассмотрена эволюция коротких нелинейных волн плотности в диске на пределе устойчивости для произвольных значений радиального волнового числа k_r. Для волн с волновыми числами, не лежащими в минимуме дисперсионной кривой, поведение амплитуды описывается нелинейным параболическим уравнением, однако существование стационарных солитонных решений в такой системе невозможно, так как дисперсионное расплывание пакета отсутствует. Для волновых чисел, лежащих в минимуме дисперсионной кривой, возможно существование солитонных структур с детерминированной амплитудой.

В устойчивых гравитирующих дисках и в диске на пределе устойчивости возможно существование двух физически различных типов солитонов.

1. В работах [1—3] была развита нелинейная теория эволюции коротких волн в самогравитирующих газовых дисках, где в приближении кубической нелинейности получены решения типа взрывной неустойчивости и стационарное решение солитонного типа. Однако рассмотрение, проведенное в работах [1—3], справедливо для маржинально устойчивых дисков, для волнового числа k_r, соответствующего минимуму дисперсионной кривой. В работе [4] модель [1—3] уточнялась путем учета нелинейных эффектов пятого порядка по амплитуде возмущений. В работах [5—9] рассмотрена нелинейная эволюция тугозакрученных спиральных волн в устойчивом гравитирующем диске, где показано, что динамика огибающей спиральных волн в отличие от [1—4] описывается нелинейным параболическим уравнением.

В настоящей работе рассмотрена эволюция коротких волн плотности в маржинально устойчивом диске для произвольных значений радиального волнового числа k_r. В разделе 2 показано, что при $k \neq k_{\min}$ поведение амплитуды спиральной волны описывается, как и в [5—9], нелинейным параболическим уравнением. Однако вследствие того, что короткие волны в маржинально устойчивом диске не обладают дисперсией $\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}=0\right)$, стационарных солитонов огибающей, обусловленных балансом дисперсионного расплывания и нелинейного самосжатия, при $k \neq k_{\min}$ нет. Если $k=k_{\min}$, то, как показано Михайловским, Петвиашвили и Фридманом [1—3], в диске на пределе устойчивости возможно существование специфических солитонных структур с детерминированной, в отличие от солитонных решений нелинейного параболического уравнения, амплитудой. В разделе 3 обсуждается физическая природа таких структур, а также некоторые астрофизические следствия полученных решений.

Таким образом, в гравитирующих дисках возможно существование двух физически различных типов солитонов: в устойчивых дисках существование стационарных солитонных решений достигается балансом нелинейного самосжатия и дисперсии, а в маржинально устойчивом диске при $k = k_{\min}$ — балансом джинсовской неустойчивости, нелинейности и группового сноса пакета.

2. Будем исходить, аналогично [1—9], из системы нелинейных гидродинамических уравнений для отклонений от невозмущенных параметров однородного, дифференциально вращающегося диска, вызванных тугозакрученной волной плотности. Предполагая, что возмущения удовлетворяют изотермическому уравнению состояния, все величины обезразмерены на невозмущенные параметры диска, $b = 2\pi G\sigma_0/r_L\Omega_d^2(r_L)$, r_L — масштаб обезразмеривания, приходим, аналогично [4], к нелинейному уравнению для φ-компонента возмущенной скорости:

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t^2}\left(1+\frac{2\Omega_d}{\varkappa^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)^{-1}-\frac{2\Omega_d}{\varkappa^2}\left(1+\frac{2\Omega_d}{\varkappa^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{2\Omega_d}{\varkappa^2}\right)^2\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}\right)^2\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}\left(1+\frac{2\Omega_d}{\varkappa^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)^{-3}+\varkappa^2 v_\varphi+ib\,\mathrm{sign}\,k\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-$$
$$-c^2\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}\left(1+\frac{2\Omega_d}{\varkappa^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)^{-1}=0. \qquad (1)$$

Ограничимся в (1) третьим порядком теории возмущений. Тогда легко показать, что уравнение для нелинейной амплитуды волны в гравитирующем диске имеет вид:

$$i\frac{\partial v}{\partial t}-iu_g\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial k}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+$$
$$+\frac{1}{2\omega}\frac{4\Omega_d^2k^2}{\varkappa^4}\left\{c^2k^2-6\omega^2-\frac{2\left[c^2k^2-3\omega^2\right]^2}{2b\,|k|-3\varkappa^2}\right\}|v|^2v=0, \qquad (2)$$

где $u_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}$ — групповая скорость пакета волн.

Если дисперсия и коэффициент при нелинейности отличны от нуля, то уравнение (2), как хорошо известно, в системе, движущейся с групповой скоростью, допускает солитонные решения вида:

$$v(r, t) = A\,\frac{\exp i\left[u\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{1/2} r - \frac{1}{2}(u^2 - A^2)\alpha t\right]}{\operatorname{ch} A\left[\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{1/2} r - u\alpha t\right]}, \tag{3}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2\omega}\,\frac{4\Omega_d^2 k^2}{\varkappa^4}\left\{c^2k^2 - 6\omega^2 - \frac{2(c^2k^2 - 3\omega^2)^2}{2b|k| - 3\varkappa^2}\right\}^{*}, \quad \beta = -\frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial k},$$

а независимые параметры A и u в решении (3) определяют амплитуду и скорость солитона. Именно такая ситуация реализуется в устойчивом гравитирующем диске, где возможно существование стационарных нелинейных огибающих волн плотности [5—7].

Вопрос о существовании стационарных нелинейных решений в устойчивом гравитирующем диске обсуждался в работе Чурилова [6] и в недавней работе Абрамяна и Арутюняна [10]. В работе [6] найдены примеры частных решений уравнения (2) солитонного вида, движущихся с групповой скоростью. Там же отмечается, что для их реализации требуется довольно специальный выбор параметров системы. Однако общее решение (3) показывает, что для существования солитона огибающей спиральных волн специального выбора параметров не требуется.

В работе [10] приведен вывод нелинейного параболического уравнения, полученного в [5—7], а также получено выражение для нелинейной добавки к частоте, совпадающее с [11]. Однако отметим, что солитонное решение (19), полученное авторами [10], некорректно. Действительно. согласно нелинейному дисперсионному уравнению (11) работы [10] частота ν^2 отличается от ν_1^2 на величину $2a_2|\varepsilon_1|^2$, что тождественно зануляет правую часть нелинейного уравнения (13).

В маржинально устойчивом диске $\frac{\partial u_g}{\partial k} = 0$, и дисперсионное расплывание отсутствует. Действительно, для туго закрученных волн в маржинальном диске следует

$$u_g = \frac{2c^2k - b\operatorname{sign} k}{\pm 2c\left(k - \frac{b\operatorname{sign} k}{2c^2}\right)} = \pm c, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial u_g}{\partial k} = 0.$$

* Общее выражение для нелинейного коэффициента при произвольном показателе адиабаты получено в работе [11].

Таким образом, если k_r не лежит в минимуме дисперсионной кривой, существование стационарных солитонных решений типа (3) в устойчивом диске невозможно.

3. Рассмотрим случай, когда k_r соответствует минимуму дисперсионной кривой, Тогда $\omega \approx 0$, поэтому из (1) получаем, что φ-компонента скорости удовлетворяет уравнению вида:

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t^2} + \varkappa^2 v_\varphi + ib\,\mathrm{sign}\,k\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - c^2\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}\left|1 - \frac{2\Omega_d}{\varkappa^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{4\Omega_d^2}{\varkappa^4}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\right)^2\right|. \tag{4}$$

Уравнение (4) с точностью до несущественного в рассматриваемом приближении члена совпадает с уравнением (8) работы [3]. Будем искать его решение как и в [1—3] в виде $v_\varphi = \sum_l v_l e^{ikr}$, где $k = b\,\mathrm{sign}\,k/2c^2$, однако амплитуды волн v_l будем считать зависящими от координаты r и времени t. Для уравнений первой и второй гармоник приходим к выражениям:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} - \gamma_0^2 v_1 + c^2\frac{2\Omega_d}{\varkappa^2} 2ik^3 v_2 v_{-1} + c^2\frac{4\Omega_d^2}{\varkappa^4}k^4|v_1|^2 v_1 = 0, \tag{5}$$

$$v_2 = \frac{2\Omega_d}{\omega_{2k}^2} ikv_1^2(r, t), \tag{6}$$

где $-\gamma_0^2 = c^2k^2 - b|k| + \varkappa^2$.

Подставляя (6) в уравнение (5), окончательно получим

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} = \gamma_0^2 v_1 + \frac{4\Omega_d^2 k^2}{\varkappa^2}|v_1|^2 v_1. \tag{7}$$

Перейдем в (7) к переменным $\tau = t$, $\xi = r - ut$ в системе отсчета, движущейся со скоростью u:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - u\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2 v = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + \gamma_0^2 v + d^2|v|^2 v. \tag{8}$$

Стационарным решением уравнения (8), как показано в [1—3], является солитонное решение вида:

$$v(\xi) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{-\gamma_0^2}{d^2}}\,\mathrm{sech}\sqrt{\frac{\gamma_0^2}{a^2}}\,\xi, \quad \text{где} \quad a^2 = u^2 - c^2. \tag{9}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что, в отличие от солитонного решения (3), решение (9) обладает детерминированной амплитудой, определяемой параметрами диска.

Рассмотрим поведение во времени нелинейной амплитуды, считая ее независящей от радиуса. Согласно (7), временная зависимость амплитуды описывается уравнением:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \gamma_0^2 v + d^2v^3. \tag{10}$$

Проинтегрируем уравнение (10), имея в виду решение $dv/dt=0$ при $v=0$. Получим:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \gamma_0^2 v^2 + \frac{1}{2} b^2 v_4. \tag{11}$$

Из уравнения (11) видно, что в стационарном состоянии амплитуда равна $v = \sqrt{2}\sqrt{\frac{-\gamma_0^2}{d^2}}$, что совпадает с величиной амплитуды солитона в выражении (9). Таким образом, амплитуда солитонного решения (9), например в случае $d^2<0$, имеющем место при $\gamma<3/2$ [3], определяется балансом гравитационной неустойчивости и нелинейной стабилизации, в то время как амплитуда солитонного решения (3) опре деляется балансом нелинейного самосжатия и дисперсионного расплы вания пакета.

Из (9) следует принципиальное различие случаев $u<c$ и $u>c$. При $u>c$ солитонное решение существует с слабонеустойчивом ($\gamma_0^2>0$) диске, тогда как при $u<c$ решение (9) существует при $\gamma_0^2<0$ (см. [3]). Это различие можно понять следующим образом: уравнению (8) в линейном приближении соответствует дисперсионное соотношение вида:

$$(\omega - ku)^2 = c^3k^3 - \gamma_0^2. \tag{12}$$

Хорошо известно (см., например, [12], что при $u>c$ неустойчивость, описываемая дисперсионным уравнением (12), является конвективной, то есть возмущения при $u>c$ успевают «сноситься» раньше, чем нарастают. При $u<c$ неустойчивость в (12) является абсолютной. Поэтому существование медленных ($u<c$) стационарных решений возможно лишь в том случае, когда диск устойчив.

Как уже отмечалось выше, амплитуда солитонного решения (9) не может быть произвольной и определяется равновесными параметрами диска. Оценим максимальное значение амплитуды плотности, соответствующее солитонному решению (9). Для типичных параметров диска $r=10$ кпс, $\Omega_d=20$ км/с кпс, $\sigma_0=40$ $M_\odot$/пс^2, $c=20$ км/с получаем, что при $|\gamma_0/\Omega_d|\sim$

~ 0.1 максимальное значение возмущенной плотности в решении (9) меньше 7%. Это в несколько раз меньше наблюдаемых вариаций плотности в ветвях спиральных галактик. В устойчивом диске амплитуда солитона может быть произвольной и определяется только областью применимости приближения кубической нелинейности. Согласно [13], при параметрах, приведенных выше, приближение кубической нелинейности справедливо при $\tilde{\sigma}/\sigma_0 \lesssim 30\%$. Таким образом, солитоны в устойчивых гравитирующих дисках могут быть реально наблюдаемыми феноменами.

Ростовский государственный
университет

NONLINEAR DENSITY WAVES IN A MARGINALLY STABLE GRAVITATING DISK

V. I. KORCHAGIN

The nonlinear evolution of short density waves in marginally stable gaseous disk is considered. For arbitrary values of radial wave numbers the evolution of wave amplitude is described by a nonlinear parabolic equation. Dispersion is absent in the marginally stable disk. So the stationary solitary waves caused by the balance of dispersion and nonlinearity do not exist. The solitary waves with determined amplitude exist in the marginally stable disk if the radial wave number lies in the minimum of a dispersion curve. So in the gravitating disk two distinct types of solitary waves may exist. In stable disks their existence is caused by the balance of nonlinearity and dispersion, and in the marginally stable disks it is caused by the balance of Jeans instability and nonlinearity.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман*, Равновесие и устойчивость гравитарующих систем, Наука, М., 1976.
2. *А. Б. Михайловский, В. И. Петвиашвили, А. М. Фридман*, Письма ЖЭТФ, 26, 129, 1977.
3. *А. Б. Михайловский, В. И. Петвиашвили, А. М. Фридман*, Астрон. ж., 56, 279, 1979.
4. *М. Г. Абрамян*, Письма АЖ, 8, 751, 1982.
5. *В. И. Корчагин, П. И. Корчагин*, Астрофизика, 16, 273, 1980.
6. *С. М. Чурилов*, Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, Вып. 54, 147, 1980.
7. *В. И. Корчагин, П. И. Корчагин*, Астрофизика, 17, 823, 1981.

8. *В. И. Корчагин, П. И. Корчагин*, в сб. «Проблемы теории нелинейных и турбулентных процессов в физике», Киев, 1983.
9. *В. И. Корчагин, П. И. Корчагин*, Астрон. ж., 61, 814, 1984.
10. *М. Г. Абрамян, С. В. Арутюнян*, Письма АЖ, 10, 304, 1984.
11. *В. Л. Поляченко, С. М. Чурилов, И. Г. Шухман*, Астрон. ж., 57, 497, 1980.
12. Электродинамика плазмы, под ред. А. И. Ахиезера, Наука, М., 1974.
13. *В. И. Корчагин, П. И. Корчагин*, Астрон. ж., 62, 202, 1985.