АСТРОФИЗИКА

ТОМ 23 АВГУСТ, 1985 ВЫПУСК 1

УДК: 523—17:51

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА О ВИРИАЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФЛУКТУИРУЮЩЕГО СОСТАВА

Т. Б. ОМАРОВ

Поступила 19 ноября 1984
Принята к печати 8 мая 1985

Выводится обобщенная теорема о вириале для непрерывно изменяющейся в своем составе подсистемы частиц, выделенных по достаточно произвольному характерному признаку. Результат содержит в себе теорему о вириале, полученную Швейцем [1] для частного типа такой подсистемы, и ее более общие аналоги. В случае нестационарной по составу совокупности гравитирующих частиц, выделенных условием их самосогласованности, имеем соответствующее обобщение известного уравнения Пуанкаре—Эддингтона [2]. Рассматриваются приложения. В частности, полученная Мак-Кри [3] теорема о вириале для облака гравитирующих частиц, испытывающего давление на границе, и обобщенное уравнение Пуанкаре—Эддингтона для незамкнутой сферической гравитирующей системы с достаточно медленно изменяющимися массой и радиусом совпадают по форме. Отсюда динамическую реакцию этой незамкнутой системы на изменение ее состава можно интерпретировать как действие некоторого эффективного внешнего давления, приводимого в работе.

1. *Введение*. В работе Швейца [1] получена теорема о вириале для незамкнутой системы частиц, занимающей объем V с неизменной границей S: если $\vec{r}_i$ — радиус-вектор частицы, $\vec{p}_i$ — импульс, T_i — кинетическая энергия и $\vec{F}_i$ — действующая сила, то в среднем по промежутку времени $t_p \to \infty$ должно быть

$$\Big(\sum_{\vec{r}_i \in V} 2T_i + \vec{r}_i\vec{F}_i\Big)_{\text{ср.}} + \oint_S \vec{r}\,(\overleftarrow{p}(\vec{r}) - \vec{p}(\vec{r}))\,ds = 0, \tag{1}$$

где положено

$$\vec{p}(\vec{r}) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{P}(\vec{r})}{\Delta s}, \quad \Delta \vec{P}(\vec{r}) = \lim_{t_p \to \infty} \frac{1}{t_p} \sum_j \vec{p}_j(\vec{r}), \tag{2}$$

$$\overleftarrow{p}(\vec{r}) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \overleftarrow{P}(\vec{r})}{\Delta S}, \quad \Delta \overleftarrow{P}(\vec{r}) = \lim_{t_p \to \infty} \frac{1}{t_o} \sum_k \overleftarrow{p}_k(\vec{r}), \tag{2}$$

причем индекс j приписывается частицам, уходящим из системы за время t_p через элемент ΔS поверхности S, а индекс k относится к соответствующим присоединяющимся к системе частицам, для импульсов которых использовано обозначение $\overleftarrow{p}_k$. Вывод основан на непосредственном вычислении для рассмотренной системы первого члена соотношения (1). Ниже мы получили уравнение, содержащее величину $\sum_i 2T_i + \vec{r}_i\vec{F}_i$ для непрерывно изменяющейся в своем составе совокупности i-ых частиц с достаточно произвольным характерным признаком. Его можно рассматривать как обобщенную теорему о вириале для системы флуктуирующего состава. Усредняя уравнение по промежутку времени $t_p \to \infty$ для i-ых частиц, выделенных объемом V с границей S, получим результат Швейца (1). При этом можно дополнительно учесть возможную зависимость внешней границы S от времени. Выписывается также общий аналог соотношения (1) для системы флуктуирующего состава. В случае непрерывно изменяющейся по составу совокупности гравитирующих частиц, выделенных условием их самосогласованности, наше уравнение дает обобщение известного уравнения Пуанкаре—Эддингтона [2], относящегося к классической проблеме n-тел. Впечатляющим примером по нестационарности состава реальных систем большого числа гравитирующих тел является «канибализм» гигантских галактик в скоплениях [3]. В звездной динамике на основе уравнения Пуанкаре — Эддингтона дается формулировка теоремы о вириале, приложимой к каждому мгновенному состоянию медленно эволюционирующей системы [4]. Приводимое обобщение этого уравнения содержит в себе такую форму теоремы о вириале для самосогласованной гравитирующей системы нестационарного состава. Как известно, аналоги уравнения Пуанкаре — Эддингтона в проблемах, связанных с учетом в развитии гравитирующих систем различных добавочных сил, называются теоремами о вириале [5, 6]. Можно заметить, что теорема о вириале [5] для сферического облака гравитирующих частиц, испытывающего давление на границе, и обобщенное уравнение Пуанкаре — Эддингтона для незамкнутой сферической гравитирующей системы с достаточно медленно изменяющимися массой и радиусом совпадают по виду. Отсюда динамическая реакция такой незамкнутой системы на изменение ее состава интерпретируется как действие некоторого эффективного внешнего давления. Отмечается связь давления, соответствующего диссипации системы, с эффектами механики тел переменной массы [7]. Качественные оценки по обобщенному уравнению Пуанкаре — Эддингтона показывают, что динамическое следствие отрыва тел от системы с релятивистскими скоростями может быть существенным даже при малой утечке массы в этом процессе. Есть основание предполагать важную роль в динамической эволюции ядер активных галактик систематически повторяющихся эжекций плазмоидов [8] и черных дыр [9] с такими большими скоростями.

2. *Основное уравнение и его следствия.* Рассмотрим непрерывно изменяющуюся в своем составе подсистему частиц, выделенных по достаточно произвольному характерному признаку (система флуктирующего состава).

Можно выписать следующие соотношения:

$$\sum_i m_i r_i^2 = \left[\sum_{i_0} m_{i_0} r_{i_0}^2\right]_t - \left[\sum_j m_j r_j^2\right]_t + \sum_k m_k r_k^2, \tag{3}$$

$$\sum_i \frac{d}{dt} m_i r_i^2 = \left[\sum_{i_0} \frac{d}{dt} m_{i_0} r_{i_0}^2\right]_t - \left[\sum_j \frac{d}{dt} m_j r_j^2\right]_t + \sum_k \frac{d}{dt} m_k r_k^2, \tag{4}$$

где индекс i_0 придан массам и радиус-векторам частиц, образующих систему флуктуирующего состава в некоторый начальный момент времени t_0, индекс j — тем из i_0-ых частиц, которые по истечении времени $t-t_0$ оказываются не вошедшими в новый состав системы из i-ых частиц, а индекс k — тем из i-ых, которых не было среди i_0-ых.

Так как состав частиц с индексом i_0 фиксирован, то из уравнения (4) имеем

$$\frac{d}{dt}\sum_{i_0} m_{i_0} r_{i_0}^2 = \sum_i \frac{d}{dt} m_i r_i^2 + \left[\sum_j \frac{d}{dt} m_j r_j^2\right]_t - \sum_k \frac{d}{dt} m_k r_k^2. \tag{5}$$

Дифференцирование формулы (3) соответственно дает

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i r_i^2 = \left[\sum_j \frac{d}{dt} m_j r_j^2\right]_t - \frac{d}{dt}\sum_j m_j r_j^2 - \sum_k \frac{d}{dt} m_k r_k^2 +$$

$$+ \frac{d}{dt}\sum_k m_k r_k^2 + \sum_i \frac{d}{dt} m_i r_i^2. \tag{6}$$

Массы m_i, m_j и m_k считаются постоянными. Ради упрощения последующих выкладок припишем j-ым частицам одну и ту же массу m_a, а k-ым частицам — массу m_b. По виду конечного результата (основное уравнение) нетрудно будет усмотреть, что при этом не ограничивается его общность.

Выражению (6) придадим вид

$$\frac{d}{dt}\sum_j m_i r_i^2 = \left[\sum_j \frac{d}{dt} m_j r_j^2\right]_t - \sum_k \frac{d}{dt} m_k r_k^2 - m_a \frac{dn_a}{dt}\alpha_a -$$

$$- m_a n_a \frac{d\alpha_a}{dt} + m_b \frac{dn_b}{dt}\alpha_b + m_b n_b \frac{d\alpha_b}{dt} + \sum_i \frac{d}{dt} m_i r_i^2, \tag{7}$$

где $n_a\,(n_b)$ и $\alpha_a\,(\alpha_b)$ — число и среднее значение квадратов радиус-векторов j-ых (k-ых) частиц:

$$\alpha_a = \frac{1}{n_a}\sum_j r_j^2, \qquad \alpha_b = \frac{1}{n_b}\sum_k r_k^2. \tag{8}$$

Заменяя в формулах (3) и (4) величину $m_i r_i^2$ на $\frac{d}{dt} m_i r_i^2$, аналогично имеем

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{d}{dt} m_i r_i^2 = \left[\sum_j \frac{d^2}{dt^2} m_j r_j^2\right]_t - \sum_k \frac{d^2}{dt^2} m_k r_k^2 - m_a \frac{dn_a}{dt}\beta_a -$$

$$- m_a n_a \frac{d\beta_a}{dt} + m_b \frac{dn_b}{dt}\beta_b + m_b n_b \frac{d\beta_b}{dt} + \sum_i \frac{d^2}{dt^2} m_i r_i^2, \tag{9}$$

где $\beta_a\,(\beta_b)$ — среднее значение скоростей изменения квадратов радиус-векторов j-ых (k-ых) частиц:

$$\beta_a = \frac{1}{n_a}\sum_j \frac{dr_j^2}{dt}, \qquad \beta_b = \frac{1}{n_b}\sum_k \frac{dr_k^2}{dt}. \tag{10}$$

Обозначим через $(\partial M/\partial t)_a$ массу частиц, выбывающих из состава рассматриваемой системы в единицу времени, и пусть $(\partial M/\partial t)_b$ — аналогичная величина для частиц, поступающих в состав. Имеем

$$m_a \frac{dn_a}{dt} = \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a, \qquad m_b \frac{dn_b}{dt} = \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b. \tag{11}$$

Перейдем в выражении (7) к пределу при $t \to t_0$. С учетом того, что при этом $n_a \to 0$, $n_b \to 0$, получаем

$$\left[\frac{d}{dt}\sum_i m_i r_i^2\right]_{t_0} = -(\overline{r_a^2})_{t_0}\left[\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a\right]_{t_0} + (\overline{r_b^2})_{t_0}\left[\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b\right]_{t_0} +$$

$$+ \left[\sum_i \frac{d}{dt} m_i r_i^2\right]_{t_0}, \tag{12}$$

где положено

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{n_a}\sum_j r_j^2\equiv(\overline{r_a^2})_{t_0},\quad \lim_{t\to t_0}\frac{1}{n_b}\sum_k r_k^2\equiv(\overline{r_b^2})_{t_0}. \qquad (13)$$

Поскольку выбор начального момента t_0 произволен, то вместо соотношения (13) можно выписать уравнение

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i r_i^2=-\overline{r_a^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a+\overline{r_b^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b+\sum_i\frac{d}{dt}m_i r_i^2, \qquad (14)$$

в котором $\overline{r_a^2}$ и $\overline{r_b^2}$ — соответствующие аналоги величин $(\overline{r_a^2})_{t_0}$ и $(\overline{r_b^2})_{t_0}$:

$$\overline{r_a^2}\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta n_a'}\sum_{j'} r_{j'}^2,\quad \overline{r_b^2}\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta n_b'}\sum_{k'} r_{k'}^2, \qquad (15)$$

где число $\Delta n_a'$ ($\Delta n_b'$) и индекс j' (k') относятся к частицам, выбывающим из состава (поступающим в состав) системы в достаточно малом положительном промежутке времени $[t,\ t+\Delta t]$.

Следуя процедуре вывода уравнения (14), находим из выражения (9)

$$\frac{d}{dt}\sum_i\frac{d}{dt}m_i r_i^2=-\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a+\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_b}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b+\sum_i\frac{d^2}{dt^2}m_i r_i^2, \qquad (16)$$

где положено

$$\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta n_a'}\sum_{j'}\frac{dr_{j'}^2}{dt},\quad \overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_b}\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta n_b'}\sum_{k'}\frac{dr_{k'}^2}{dt}. \qquad (17)$$

В результате дифференцирование уравнения (14) дает

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i r_i^2=-\frac{d}{dt}\left[\overline{r_a^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-\overline{r_b^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b\right]-\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a+$$

$$+\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_b}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b+\sum_i\frac{d^2}{dt^2}m_i r_i^2. \qquad (18)$$

Введем момент инерции системы

$$I=\sum_i m_i r_i^2. \qquad (19)$$

Для совокупности i-ых частиц, подверженных действию силы F_i, имеем

$$\sum_i\frac{d^2}{dt^2}m_i r_i^2=\sum_i 2m_i\left[\left(\frac{d\vec r_i}{dt}\right)^2+\vec r_i\frac{d^2\vec r_i}{dt^2}\right]=2\sum_i 2T_i+\vec r_i\vec F_i. \qquad (20)$$

6—571

Из формул (18), (19) и (20) получаем следующее основное уравнение:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\overline{r_a^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-\overline{r_b^2}\left(\frac{\partial M}{dt}\right)_b\right]+\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-$$

$$-\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_b}\left(\frac{\partial M}{dt}\right)_b=\sum_i 2T_i+\vec{r}_i\vec{F}_i. \qquad (21)$$

Уравнение (21) выведено нами для системы флуктуирующего состава с достаточно произвольным характерным признаком, по которому выделяются в пространстве ее члены — i-ые частицы. Величины $\overline{(dr^2/dt)_a}$ и $\overline{(dr^2/dt)_b}$, заданные формулой (17), представляют собой средние значения скоростей изменения квадратов радиус-векторов тех частиц, которые соответственно считаются выбывающими из состава системы в данный момент времени и поступающими в него. Определенные формулой (15) величины $\overline{r_a^2}$ и $\overline{r_b^2}$ — средние значения самих квадратов радиус-векторов этих частиц.

Можно несколько развернуть вид уравнения (21) для случая незамкнутой системы, рассмотренной Швейцем при выводе теоремы о вириале (1). Обозначим через $\sigma_a(\vec{r}, t)$ и $\sigma_b(\vec{r}, t)$ поверхностные плотности на S отрывающихся от системы и присоединяющихся к ней частиц, и пусть в единицу времени из системы в целом уходит $(\partial n/\partial t)_a$ частиц, а поступает в нее $(\partial n/\partial t)_b$ частиц. Величины

$$\tilde{\sigma}_a(\vec{r}, t)=\sigma_a(\vec{r}, t)\frac{(\partial M/\partial t)_a}{(\partial n/\partial t)_a}, \qquad \tilde{\sigma}_b(\vec{r}, t)=\sigma_b(\vec{r}, t)\frac{(\partial M/\partial t)_b}{(\partial n/\partial t)_b} \qquad (22)$$

дают значения масс, проходящих в единицу времени через единицу площади границы S в объем V и обратно. Пусть функции $\vec{u}_a(\vec{r}, t)$ и $\vec{u}_b(\vec{r}, t)$ описывают распределения на S скоростей отрывающихся от системы и присоединяющихся к ней частиц.

Обратимся к формулам (15) и (17). Для $\Delta n_a'$ и $\Delta n_b'$ можно положить

$$\Delta n_a'=\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_a\Delta t, \qquad \Delta n_b'=\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_b\Delta t. \qquad (23)$$

В рассматриваемом случае имеем:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{j'} r_{j'}^2=\oint_S r^2\sigma_a(\vec{r}, t)\,ds, \qquad (24)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{k'} r_{k'}^2=\oint_S r^2\sigma_b(\vec{r},t)\,ds, \tag{25}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{j'}\frac{dr_{j'}^2}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{j'}2r_{j'}\frac{dr_{j'}}{dt}=2\oint_S \vec{r}\,\vec{u}_a(\vec{r},t)\,\sigma_a(\vec{r},t)\,ds, \tag{26}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{k'}\frac{dr_{k'}^2}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\sum_{k'}2r_{k'}\frac{dr_{k'}}{dt}=2\oint_S \vec{r}\,\vec{u}_b(\vec{r},t)\,\sigma_b(\vec{r},t)\,ds. \tag{27}$$

Соответственно уравнение (21) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\oint_S r^2[\tilde{\sigma}_a(\vec{r},t)-\tilde{\sigma}_b(\vec{r},t)]\,ds\right]+$$

$$+\oint_S \vec{r}\,[\vec{u}_a(\vec{r},t)\,\tilde{\sigma}_a(\vec{r},t)-\vec{u}_b(\vec{r},t)\,\tilde{\sigma}_b(\vec{r},t)]\,ds=\sum_i 2T_i+\vec{r}_i\vec{F}_i. \tag{28}$$

В частности, если граница S имеет сферическую форму, то в системе координат, связанной с центром сферы, должно быть

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}-\frac{1}{2}R^2\frac{d^2M}{dt^2}+R\left(\frac{dR}{dt}+\tilde{u}_{ra}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-$$

$$-R\left(\frac{dR}{dt}+\tilde{u}_{rb}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b=\sum_i 2T_i+\vec{r}_i\vec{F}_i, \tag{29}$$

где M и R — масса и радиус системы, а $\tilde{u}_{ra}$ и $\tilde{u}_{rb}$ — средние значения радиальных скоростей частиц, уходящих в данный момент времени с границы наружу ($\tilde{u}_{ra}\geqslant 0$) и внутрь ($\tilde{u}_{rb}\leqslant 0$):

$$\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b-\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a=\frac{dM}{dt}, \tag{30}$$

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r}\,\vec{u}_a(\vec{r},t)\,\tilde{\sigma}_a(\vec{r},t)\,ds=\tilde{u}_{ra}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a, \tag{31}$$

$$\oint_S \frac{\vec{r}}{r}\,\vec{u}_b(\vec{r},t)\,\tilde{\sigma}_b(\vec{r},t)\,ds=\tilde{u}_{rb}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b. \tag{32}$$

Усредним уравнение (28) по времени. Следуя работе Швейца [1], промежуток усреднения $[0, t_p]$ примем бесконечно большим ($t_p \to \infty$) и для самой системы положим

$$\lim_{t_p\to\infty}\frac{1}{t_p}\left[\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_{t_p}-\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_0\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t_p\to\infty}\frac{1}{t_p}\left[\left(\sum_i m_i\frac{dr_i^2}{dt}\right)_{t_p}-\left(\sum_i m_i\frac{dr_i^2}{dt}\right)_0\right]=0. \qquad (33)$$

В силу формул (14) и (19), для системы флуктуирующего состава имеем

$$\sum_i m_i\frac{dr_i^2}{dt}=\frac{dI}{dt}+\overline{r_a^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-\overline{r_b^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b, \qquad (34)$$

так что в рамках условий Швейца из уравнения (28) находим

$$\left(\sum_i 2T_i+\vec{r}_i\vec{F}_i\right)_{\text{ср.}}-\frac{1}{t_p}\int_0^{t_p}dt\oint_S\vec{r}[\vec{u}_a(\vec{r},t)\tilde{\sigma}_a(\vec{r},t)-\vec{u}_b(\vec{r},t)\tilde{\sigma}_b(\vec{r},t)]\,ds=0. \qquad (35)$$

Если внешняя граница S не зависит от времени, то

$$\left(\sum_i 2T_i+\vec{r}_i\vec{F}_i\right)_{\text{ср.}}-$$

$$-\oint_S\vec{r}\left[\frac{1}{t_p}\int_0^{t_p}[\vec{u}_a(\vec{r},t)\tilde{\sigma}_a(\vec{r},t)-\vec{u}_b(\vec{r},t)\tilde{\sigma}_b(\vec{r},t)]\,dt\right]ds=0. \qquad (36)$$

Соотношение (36) совпадает с теоремой о вириале (1). Формула (35) является обобщением этого результата Швейца на случай, когда внешняя граница системы изменяется со временем.

Возвратимся к основному уравнению (21). Усредним теперь его по промежутку времени $[0, t_p]$ при $t_p \to \infty$, считая также выполняющимся для системы флуктуирующего состава условие вида (33). С учетом формулы (34) получаем

$$\frac{1}{2}\left[\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_b}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b\right]_{\text{ср.}}=\left(\sum_i 2T_i+\vec{r}_i\vec{F}_i\right)_{\text{ср.}}. \qquad (37)$$

Соотношение (37) является общим аналогом теоремы о вириале (1), относящейся к частному типу системы флуктуирующего состава — незамкнутой системе, заключенной в определенном объеме и обменивающейся членами с внешним полем частиц через фиксированную граничную поверхность.

Рассмотрим теперь другой частный тип системы флуктуирующего состава в виде совокупности i-ых гравитирующих частиц, выделенных условием их самосогласованности. Введем кинетическую и потенциальную энергии системы в этом случае:

$$T = \sum_i T_i, \quad W = -\frac{1}{2} G \sum_{\mu \neq \nu} \frac{m_\mu m_\nu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|}, \tag{38}$$

где G — гравитационная постоянная, а индексы μ и ν приписываются членам пар, составленных из совокупности i-ых частиц. В инерциальной системе координат должно быть

$$\vec{F}_i = -\operatorname{grad}_{\vec{r}_i} W, \qquad \sum_i 2T_i + \vec{r}_i \vec{F}_i = 2T + W, \tag{39}$$

так что уравнению (21) можно придать вид

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\overline{r_a^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a - \overline{r_b^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a - \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_b}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b = 2T + W, \tag{40}$$

который является обобщением известного уравнения Пуанкаре—Эддингтона [2]

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + W, \tag{41}$$

относящегося к классической проблеме n-тел. В частности, уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\overline{r_a^2}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a\right] + \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a = 2T + W, \tag{42}$$

учитывающее только самосогласованность совокупности гравитирующих частиц убывающего состава, представляет интерес в связи с интенсивно диссипирующими звездными системами: если скорость диссипации будет слишком большой и звездная система не будет успевать в результате действия гравитационных сил принимать форму фигуры равновесия, то эта система должна будет иметь неправильную форму (вроде Мегеллановых Облаков) [4]. Соотношение (37) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\left[\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_b}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b\right|_{cp.}=(2T+W)_{cp.}. \tag{43}$$

Если соответствующее условие Швейца (33) выполняется в более сильной форме

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}=\text{const}, \tag{44}$$

то уравнение (40) с учетом формулы (34) приводит к выражению, применимому к каждому мгновенному состоянию непрерывно изменяющейся по составу совокупности гравитирующих частиц, выделенных условием их самосогласованности:

$$\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_a}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-\overline{\left(\frac{dr^2}{dt}\right)_b}\left(\frac{\partial M}{dt}\right)_b=2(2T+W). \tag{45}$$

Соотношение (45) является аналогом теоремы о вириале, выводимой в звездной динамике [4] из уравнения Пуанкаре—Эддингтона (41) для медленно эволюционирующей системы стационарного состава.

Можно обратиться к своеобразному синтезу рассмотренных выше двух частных типов системы флуктуирующего состава — к незамкнутой самосогласованной гравитирующей системе, занимающей область пространства с достаточно четкой границей и изменяющей свой состав через такую границу. В работе автора [10] уже приводилось уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}-\frac{1}{2}R^2\frac{d^2M}{dt^2}+R\left(\frac{dR}{dt}+\tilde{u}_{ra}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-$$

$$-R\left(\frac{dR}{dt}+\bar{u}_{rb}\right)\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b=2T+W, \tag{46}$$

являющееся соответствующим приложением формулы (29). Сделаем следующие качественные оценки по отдельным членам такого уравнения для диссипирующей системы $((\partial M/\partial t)_b=0)$. Если в процессе диссипации масса M и радиус R системы изменяются настолько медленно, что можно M аппроксимировать линейной функцией времени $(dM/dt = (\partial M/\partial t)_a=\text{const})$, а величиной dR/dt пренебречь в сравнении с радиальной скоростью отрывающихся частиц $(|dR/dt|\ll\tilde{u}_{ra})$, то имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}=2T+W+R\bar{u}_{ra}\frac{dM}{dt}. \tag{47}$$

В соответствии с формулой (38) примем

$$W \simeq -\frac{1}{2}\frac{GM^2}{R}. \tag{48}$$

Для отношения модуля члена $R\bar{u}_{ra} dM/dt$ к абсолютной величине потенциальной энергии W находим

$$\frac{R\bar{u}_{ra}\,|dM/dt|}{|W|} = \frac{\tilde{u}_{ra}}{\sqrt{GM/R}} \cdot \frac{2R}{\sqrt{GM/R}} \cdot \frac{|dM/dt|}{M}. \tag{49}$$

Здесь фигурируют характерное время системы (время «пересечения»)

$$t_1 = \frac{2R}{\sqrt{GM/R}} \tag{50}$$

и характерное время изменения массы

$$t_2 = -\frac{M}{dM/dt}. \tag{51}$$

При медленном изменении массы системы должно быть

$$\frac{t_1}{t_2} \ll 1. \tag{52}$$

Если радиальная скорость отрывающихся частиц $\bar{u}_{ra}$ значительно превышает параболлическую скорость на границе системы

$$\frac{\tilde{u}_{ra}}{\sqrt{2GM/R}} \gg 1, \tag{53}$$

то порядок отношения (49) будет отличным от порядка величины t_1/t_2, т. е. при условии (53) диссипация может существенно влиять на поведение гравитирующей системы даже при достаточно медленном изменении ее массы в этом процессе. К примеру, для ряда струй плазмоидов, эжектирующихся из ядер галактик, скорости определенно являются релятивистскими [8] (благодаря своему центральному положению ядро динамически автономно, и поэтому с чисто механической точки зрения может изучаться независимо от остальной части звездной системы [11]). Есть основание предполагать важную роль в динамической эволюции ядер таких систематически повторяющихся эжекций масс с большими скоростями.

В связи с тем, что полученное нами уравнение (21) содержит в себе теорему о вириале (1) и дает новые обобщения (35) и (37) этого результата Швейца, назовем его обобщенной теоремой о вириале для системы флуктуирующего состава. При этом мы также принимаем во внимание, что аналоги уравнения Пуанкаре — Эддингтона (41) в проблемах, связанных с учетом в развитии гравитирующих систем некоторых добавочных сил, называются теоремами о вириале [5, 6]. Одно из таких уравнений было получено Мак-Кри [5] для облака гравитирующих частиц, испытывающего давление p на границе:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}=2T+W-3pV, \tag{54}$$

где V — объем, соответствующий границе, причем $p>0$, если давление направлено внутрь. Теорема о вириале (54) выписывается еще для следующей цели.

3. *Физическая интерпретация.* Пусть в уравнении (46) масса M и радиус R гравитирующей системы нестационарного состава изменяются достаточно медленно:

$$\frac{dM}{dt}=\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b-\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a=\text{const},\quad \left|\frac{dR}{dt}\right|\ll\tilde{u}_{ra},\quad \left|\frac{dR}{dt}\right|\ll\tilde{u}_{rb} \tag{55}$$

и соответственно

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}=2T+W-R\left[\tilde{u}_{ra}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-\tilde{u}_{rb}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b\right]. \tag{56}$$

Выпишем теорему о вириале (54) для сферического объема $V=(4/3)\pi R^3$ радиуса R и давления $p=\gamma/R^2$, где коэффициент γ может зависеть от времени:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}=2T+W-4\pi\gamma R. \tag{57}$$

Уравнения (56) и (57), связывающие интегральные параметры гравитирующих систем I, T, W и R, будут эквивалентными, если равны числовые значения коэффициентов при R, т. е.

$$p=\frac{1}{4\pi R^2}\left[\tilde{u}_{ra}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a-\tilde{u}_{rb}\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b\right]. \tag{58}$$

Таким образом, динамическую реакцию сферической гравитирующей системы на изменение состава можно интерпретировать при достаточно медленном изменении массы и радиуса системы как действие эффективного внешнего давления (58). Качественно этот эффект очевиден для случая, когда имеем

$$R = \text{const}, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a = \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_b, \quad \tilde{u}_{ra} = -\tilde{u}_{rb}. \tag{59}$$

В самом деле, такая система эквивалентна облаку частиц стационарного состава, окруженному стенкой, при достижении которой частицы отскакивают в обратном направлении с сохранением радиального компонента скоростей соударения. Ту часть давления (58).

$$p_a = \frac{1}{4\pi R^2} \tilde{u}_{ra} \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_a, \tag{60}$$

которая связана с диссипацией системы, нетрудно понять с позиций реактивных сил, генерируемых частицами, отрывающимися с единицы площади граничной поверхности [7].

Астрофизический институт
АН Каз.ССР

THE GENERALIZED VIRIAL THEOREM FOR A SYSTEM OF FLUCTUATING COMPOSITION

T. B. OMAROV

The generalized virial theorem for a continuously changed in its composition subsystem of particles, which are distinguished by a sufficiently arbitrary characteristic feature, is deduced. The result contains the virial theorem, deduced by Schweits [1], for a particular type of such a system and its more general analogies. In the case of a totality of gravitational particles, having nonstationary composition and with the condition of a self-coordination of these particles, we have the appropriate generalization of the Poincare-Eddington equation [2]. The applications are considered. Specifically, the virial theorem deduced by Mc'Crea [5] for a cloud of gravitational particles subjected to a pressure near its bounds and the generalized Poincare-Eddington equation for an open spherical gravitational system with a sufficiently slowly changed mass and radius coincide in their forms. Hence, the dynamical relation of this open system on the changing of its composition can be interpreted as the action of some effective external pressure. The expression for this pressure is given in the article.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jan-Ake Sahweltz*, J. Phys. A. Math. Gen., 10, 507, 1977.
2. *С. Чандрасекар*, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, М., 1950.
3. *Дж. Острайкер*. Крупномасштабная структура Вселенной, Мир, М., 1981, стр. 393.
4. *К. Ф. Огородников*, Динамика звездных систем, ФМЛ, М., 1958.
5. *W. H. Mc Crea*, M. N. RAS., 117, 562, 1957.
6. *Дж. Бербидж, Э. М. Бербидж*, Происхождение и эволюция звезд, ИЛ, М., 1962, стр. 104.
7. *И. В. Мещерский*, Работы по механике тел переменной массы, ТТЛ, М., 1952.
8. *G. C. Perola, A. Ferrari*, Astrophysical Jets, Proc, Int. Workshop, Torino, 1982, Dordrecht e. a., 1983, p. 315.
9. *J. S. Shklovsky*, Estragalactic Radio Sources, IAU Symp. No. 97, ed. D. Heeschden, Dordrecht e. o., 1982, p. 475.
10. *Т. Б. Омаров*, Динамика гравитирующих систем Метагалактики, Изд. «Наука», Каз.ССР, Алма-Ата, 1975.
11. *В. А. Амбарцумян*, Проблемы эволюции Вселенной, Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1968, стр. 5.