

УДК 524.3—17:51

ДВЕ МОДЕЛИ ПЛОСКИХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ
БЕЗ ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ

Б. П. КОНДРАТЬЕВ

Поступила 25 октября 1984

Принята к печати 8 мая 1985

Кинетическим методом построены самосогласованные модели бесстолкновительных эллипсоидальных дисков с квадратичным потенциалом, у которых ось вращения или ее перпендикулярна к главной плоскости (класс *i*), или лежит в ней (класс *ii*). Модель класса *i* имеет жидкий аналог среди дискообразных эллипсоидов Римана. Предложено качественное объяснение известному из наблюдений явлению искажения газовых и звездных дисков у плоских галактик.

1. *Введение.* В области исследований, посвященной динамике галактик, важной задачей является построение самосогласованных бесстолкновительных гравитирующих моделей. Свойства любой такой модели (как и любой жидкой фигуры равновесия) весьма существенно зависят от ориентации ее эллипсоида инерции относительно оси вращения. Например, модели с экваториальной плоскостью симметрии принципиально отличаются от моделей без нее. Законами же механики допускается существование как моделей с экваториальной плоскостью симметрии [1—3], так и без этой плоскости [4, 5]. Данная статья является развернутым вариантом тезисов [4]. Построены две модели эллипсоидальных дисков с квадратичным потенциалом. Первая модель представляет диск, вращающийся вокруг любой из двух главных осей. При вырождении получается круглый «кувыркающийся» диск. Внутренним движением частиц эта модель отличается от «кувыркающегося» жидкого диска [6]. Вторая модель представляет диск, ось вращения у которого не перпендикулярна к главной плоскости. Эта модель с «наклонным» вращением во всем подобна одному типу жидких дискообразных эллипсоидов Римана [6, 7]. Тем не менее, целесообразно все же построить такую модель именно кинетическим методом, адекватным духу задачи, а не с помощью громоздкого асимптотического предела получить ее из трехосного жидкого эллипсоида Римана.

2. *«Кувыркающиеся» диски.* Рассмотрим бесстолкновительный изолированный диск с границей

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1. \quad (1)$$

Пусть система отсчета, связанная с осями эллипса (ось Ox_3 перпендикулярна к плоскости диска), равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\Omega}(\Omega_1, 0, 0)$. Соотношения между a_1 и a_2 мы не устанавливаем, так что диск может вращаться вокруг любой главной оси. Уравнения движения частицы имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \Omega_1^2 x_2, \\ \ddot{x}_3 &= 0 = -2\Omega_1 \dot{x}_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где φ — гравитационный потенциал диска. Отсюда следует

$$\varphi = R(x_1) - \frac{\Omega^2}{2} x_2^2; \quad \ddot{x}_1 = \frac{\partial R}{\partial x_1}; \quad \dot{x}_3 = 0. \quad (3)$$

Чтобы решение этих уравнений имело физический смысл, потенциал φ должен быть квадратичным. Известно, что квадратичный потенциал имеет диск, полученный из однородного эллипсоида предельным переходом $a_3 \rightarrow 0$. Для такого диска поверхностная плотность σ и потенциал φ есть

$$\sigma = \sigma_0 (1 - x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2)^{1/2}, \quad (4)$$

$$\varphi = \text{const} - A_1 x_1^2 - A_2 x_2^2. \quad (5)$$

Сравнивая (5) и первую формулу в (3), находим угловую скорость $\Omega_1^2 = 2A_2$. Движение частицы сводится к одномерному гармоническому колебанию с частотой $\sqrt{2A_1}$ в направлении Ox_1 .

Фазовая функция распределения, как можно показать, имеет вид

$$f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{2A_1}a_1^2} \theta \left[x_1^2 - 2A_1 a_1^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) \right], \quad (6)$$

где $\theta[\dots]$ — ступенчатая функция. Компоненты дисперсии скоростей равны

$$\langle \dot{x}_1^2 \rangle = \frac{2}{3} A_1 a_1^2 (1 - x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2); \quad \langle \dot{x}_2^2 \rangle = 0. \quad (7)$$

Компонент $\langle \dot{x}_1^2 \rangle$ остается постоянным на семействе эллипсов, подобных

границе (1), и на последней обращается в нуль. Следует отметить, что границы могут касаться отнюдь не все частицы в диске.

Полная кинетическая $T_{кин}$ и потенциальная энергии $|W|$ модели равны

$$T_{кин} = \frac{1}{5} M (A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2), \quad (8)$$

$$|W| = - \iint \sigma(x_1, x_2) \left(x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) d^2x = \frac{2}{5} M (A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2), \quad (9)$$

так что выполняется теорема вириала $2T_{кин} = |W|$.

Среди жидких также существуют диски с вращением вокруг одной из главных осей [6]. У этих дисков, вращающихся с предельной (как и в нашем случае) угловой скоростью, имеется циркуляция параллельно оси вращения. У бесстолкновительной же модели циркуляции нет и форма диска поддерживается хаотическим движением частиц.

Следует отметить, что «кувыркающуюся» модель можно получить соответствующим предельным переходом из бесстолкновительного эллипсоида Фримана [2]. Однако этот способ не является прямым и наглядным в сравнении с описанным выше.

3. *Диск с наклонным вращением.* Рассмотрим теперь случай, когда отличны от нуля Ω_2 и любой из компонентов Ω_1 или Ω_2^* . Нет необходимости сразу делать определенное предположение относительно поверхностной плотности и потенциала: оставим их пока неопределенными. Полагая $\vec{\Omega}(\Omega_1, 0, \Omega_2)$, запишем уравнения движения частицы

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \Omega_2^2 x_1 + 2\Omega_2 \dot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) x_2 - 2\Omega_2 \dot{x}_1, \\ \ddot{x}_3 &= 0 = -\Omega_1 \Omega_2 x_1 - 2\Omega_1 \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Третье уравнение в (10) выражает условие сохранения плоской структуры диска и сразу дает один первый интеграл. Вообще, система (10) эквивалентна следующим трем уравнениям:

$$\dot{x}_1 = \frac{2}{3\Omega_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \quad \dot{x}_2 = -\frac{\Omega_2}{2} x_1, \quad (11)$$

и

* Можно доказать, что случай, когда отличны от нуля все три компонента угловой скорости, невозможен.

$$6 \frac{\partial \Phi}{\partial (x_1^2)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \frac{8}{3\Omega_3^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x_1^2) \partial x_2}, \quad (12)$$

где для удобства введена функция

$$\Phi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2) + \frac{\Omega_1^2 + \Omega_3^2}{2} x_2^2 \quad (13)$$

Чтобы задача была разрешена полностью, нужно найти общее решение уравнения (12). К сожалению, общее решение этого нелинейного уравнения найти не удастся. Однако одно частное решение найти нетрудно. Потребуем, чтобы первые интегралы (11) однозначно определяли поле скоростей по закону подобия в любой точке диска. Дисперсия скоростей тогда равна нулю, поэтому в данном случае существует полная аналогия между бесстолкновительным и жидким дисками (см. Введение). Для сохранения границы диска необходимо выполнение условия

$$\frac{x_1 \dot{x}_1}{a_1^2} + \frac{x_2 \dot{x}_2}{a_2^2} = 0. \quad (14)$$

Из уравнений (11)–(14) следует, что потенциал является квадратичной функцией

$$\varphi = \text{const} - \frac{1}{8} \Omega_3^2 \frac{a_1^2}{a_2^2} x_1^2 - \left[\frac{1}{2} \Omega_1^2 + \frac{1}{2} \Omega_3^2 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) \right] \cdot x_2^2. \quad (15)$$

Сравнивая (15) с выражением потенциала (5), находим компоненты вектора $\vec{\Omega}$

$$\Omega_3^2 = 8A_1 \frac{a_2^2}{a_1^2}; \quad \Omega_1^2 = 2 \left[\left(3 - 4 \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) A_1 + A_2 \right]. \quad (16)$$

В качестве единственного независимого параметра модели надо взять отношение $\frac{a_2}{a_1}$. С помощью второй формулы в (16) можно сделать выбор между a_1 и a_2 (это важно, так как по условию проекция вектора $\vec{\Omega}$ на ось Ox_2 равна нулю). Действительно, правая часть Ω_1^2 не может быть отрицательной, поэтому $3 + \frac{A_2}{A_1} \geq 4 \frac{a_2^2}{a_1^2}$. Но это неравенство выполняется только при $a_1 \geq a_2$ (так как последнее влечет $A_2 \geq A_1$). Равновесие требует, таким образом, чтобы вектор $\vec{\Omega}$ и наибольшая полуось диска a_1 лежали в одной плоскости (x_1, x_2) собственной системы координат модели.

Из формулы для Ω_1^2 следует также, что при $a_1 = a_2$ компонент Ω_1 обращается в нуль, поэтому круглый диск не может иметь „наклонного“ вращения. В другом предельном случае $\frac{a_2}{a_1} \rightarrow 0$ будет $\Omega_3 = 0$, т. е. иглообразная модель вращается только вокруг длинной оси.

Легко указать фазовую функцию модели

$$f(\vec{r}, \vec{r}) = \sigma(x_1, x_2) \left(\dot{x}_1 - \sqrt{2A_1} \frac{a_1}{a_2} \dot{x}_2 \right) \cdot \dot{x}_2 \left(\dot{x}_2 + \sqrt{2A_1} \frac{a_2}{a_1} \dot{x}_1 \right), \quad (17)$$

удовлетворяющую кинетическому уравнению $\frac{df}{dt} = 0$.

Внутри токи следуют по подобным границе (1) эллипсам, и так как завихренность $\vec{\zeta} = \text{rot } \vec{r}$ отрицательна ($\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = -\sqrt{2A_1} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right)$), то токи имеют обратное направление. Угол θ между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\rho}$, согласно формуле $\cos \theta = -2 \frac{a_2}{a_1} \left(3 + \frac{A_2}{A_1} \right)^{-1/2}$, изменяется от $\frac{\pi}{2}$ у иглообразной модели до π у круглого диска.

Компоненты полного момента вращения равны

$$L_1^{(0)} = \frac{1}{5} Ma_2^2 \Omega_1; \quad L_2^{(0)} = 0; \quad L_3^{(0)} = \frac{1}{5} Ma_1^2 \Omega_3. \quad (18)$$

Следовательно, вектор $\vec{L}^{(0)}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{\Omega}$:

$$\vec{L}^{(0)} = \frac{1}{5} Ma_2^2 \vec{\Omega}. \quad (19)$$

Отметим, что коэффициент пропорциональности в (19) равен моменту инерции диска относительно оси Ox_1 и не зависит от большой полуоси a_1 .

4. О возможной причине искажения дисков галактик. Рассмотрим одно любопытное свойство модели с наклонным вращением, когда диск не описывается более потенциалом (5). В таком неоднородном диске сила Кориолиса не является, вообще говоря, линейной функцией координат и компонент $\dot{x}_i$ в уравнениях (10) будет отличным от нуля. А именно: если в диске по-прежнему существуют противотоки, то выражение $-\Omega_1 (\Omega_1 x_1 + 2\dot{x}_2)$ имеет знак «—» в той части диска, где $x_1 > 0$, и знак «+» при

$x_1 < 0$. Вследствие этого правый конец диска получит изгиб вниз, а левый — вверх от главной плоскости (рис. 1). Эта картина сильно напоминает известное из наблюдений явление искажения ("warping") газовых и звездных дисков у многих плоских галактик (см., например, [8]). Возникает гипотеза: не объясняется ли "warping" тем, что полный момент галактики не перпендикулярен к основной плоскости диска. При этом не обязательно, чтобы диск галактики прецессировал [9] — достаточно и просто существования наклонного вращения. Из существующих гипотез данная естественно объясняет не только сам рисунок изгиба дисков, но и его долгоживущий характер. В подтверждение предложенной гипотезы отметим, что методом численного эксперимента [10] действительно обнаружен загиб краев диска при наклонном вращении.

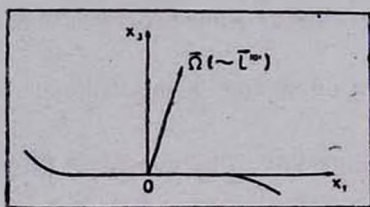


Рис. 1. Искривление неоднородного диска с наклонной осью вращения.

Автор благодарен В. А. Антонову за обсуждение гипотезы, предложенной в статье. (По мнению В. А. Антонова, представленная картина родственна действию волнового механизма искажения диска).

Астрофизический институт
АН КазССР

TWO MODELS OF FLAT STELLAR SYSTEMS WITHOUT A SYMMETRY PLANE

B. P. KONDRAT'YEV

Some self-consistent stellar dynamic models of rotating flat elliptical systems are constructed. The rotational axis of these models is inclined towards the disk's plane (class i) or else lies in it (class ii). The simple explanation for the warping of flat galaxies is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. C. Freeman*, M. N. RAS., 133, 47, 1966.
2. *K. C. Freeman*, M. N. RAS., 134, 1, 1966.
3. *K. C. Freeman*, M. N. RAS., 134, 15, 1966.
4. *Б. П. Кондратьев*, Тезисы Всесоюзной конференции «Структура галактик и звездообразование», Киев, 1983.
5. *Б. П. Кондратьев*, *Астрофизика*, 21, 499, 1984.
6. *C. Hunter*, *Ap. J.*, 162, 97, 1970.
7. *С. Чандрасекар*, *Эллипсоидальные фигуры равновесия*, Мир, М., 1973.
8. *G. Bertin, S. Casserfano*, *Astron. Astrophys.*, 103, 274, 1982.
9. *D. Lynden-Bell*, M. N., RAS., 129, 299, 1965.
10. *W. A. Mulder*, *Astron. Astrophys.*, 121, 91, 1983.