А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 22 ИЮНЬ, 1985 ВЫПУСК 3

УДК: 52—64

ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДАХ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

А. К. КОЛЕСОВ

Поступила 13 июля 1984
Принята к печати 11 января 1985

Исследуется структура функций Грина задач теории переноса излучения в средах со сферической симметрией. Для коэффициентов отражения света от шара и от бесконечной среды со сферической абсолютно черной полостью получены линейные интегральные уравнения. Ядра и свободные члены этих уравнений выражаются через функцию Грина для бесконечного пространства. Угол падения излучения и оптический радиус шара входят в эти уравнения в качестве параметров. Выведены соотношения биортогональности собственных функций однородного уравнения переноса излучения на половинном промежутке изменения угловой переменной. Сопряженные функции, используемые в этих соотношениях, определяются через коэффициенты отражения света.

1. *Введение.* Для решения задач теории переноса излучения в плоских средах часто применяется метод Кейза [1]. Этот метод основан на разложении искомой интенсивности излучения (или соответствующей функции Грина) по полной системе собственных функций однородного уравнения переноса. Коэффициенты в таких разложениях определяются при помощи условий ортогональности. При этом в случае бесконечных сред используется ортогональность собственных функций в полном промежутке изменения угловой переменной μ $(-1 \leqslant \mu \leqslant 1)$ с весом μ. В случае же полубесконечных сред и плоских слоев конечной оптической толщины используется доказанная в работе [2] биортогональность системы собственных функций в половинных промежутках $(0 \leqslant \mu \leqslant 1$ или $-1 \leqslant \mu \leqslant 0)$ по отношению к системе сопряженных функций с весом $\mu H(\mu)$, где $H(\mu)$— введенная в теорию Чандрасекаром [3] H-функция. Условие биортогональности для половинного промежутка было сформулировано в другой форме Х. Домке [4]. Он показал, что собственные функции Кейза биортогональны в промежутке $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ с весом μ собственным функциям обобщенной задачи Милна.

Метод собственных функций может быть применен и для исследования полей излучения в средах неплоских геометрий, в частности, в сферически симметричных средах.

Обобщение этого метода на бесконечные однородные среды со сферически симметричными распределениями источников было проведено в случае изотропного рассеяния Н. И. Лалетиным [5], [6], гл. 7, а в случае неизотропного рассеяния — автором [7]. В работах [5—7] построена полная система ортогональных на промежутке [— 1, 1] собственных функций однородного уравнения переноса для сред со сферической симметрией и определены функции Грина для указанных бесконечных сред.

Способ решения задач о переносе излучения в плоских средах, основанный на введении H-функции, как известно (см., например, [6], гл. 8), не обобщается на среды неплоских геометрий. Однако, как будет показано ниже, условие биортогональности, сформулированное Х. Домке [4] для плоских сред, допускает обобщение и на случай сферически симметричных сред. При этом следует использовать соотношения между функциями Грина для бесконечного пространства, шара конечного оптического радиуса и бесконечной среды со сферической полостью.

В настоящей работе изучается общая структура функций Грина для различных сред со сферической симметрией. Для коэффициентов отражения света от шара и от бесконечной среды со сферической абсолютно черной полостью получены линейные неоднородные интегральные уравнения. Ядра и свободные члены этих уравнений выражаются через функцию Грина для бесконечного пространства. Угол падения излучения и оптический радиус шара (или сферической полости) входят в эти уравнения как параметры, так что искомые коэффициенты отражения по существу можно считать функциями одной переменной — угла отражения света. При помощи указанных коэффициентов отражения определены функции, образующие системы, биортогональные на промежутке [0, 1] с весом μ по отношению к системам собственных функций, исследованным в работе [7].

2. *Функция Грина.* Будем рассматривать перенос излучения в сферически симметричных однородных поглощающих и анизотропно рассеивающих средах. Обозначим через τ оптическое расстояние заданной точки среды от центра симметрии. Оптические свойства вещества этих сред будем характеризовать объемным коэффициентом поглощения α, альбедо однократного рассеяния $\lambda\,(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ и усредненной по азимуту индикатрисой рассеяния $p(\mu, \mu_1)$. Здесь μ_1 и μ — косинусы углов, составляемых с радиус-вектором направлениями соответственно падающего и рассеянного излучения.

Поле излучения в таких средах при произвольных сферически симметричных распределениях источников можно определить, если известна функция Грина $G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ уравнения переноса. Величина $G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ представляет собой плотность вероятности следующего события: квант света, распространявшийся под углом $\arccos \mu_1$ к радиус-вектору ($-1 < \mu_1 \leqslant 1$) в точке, находящейся на оптическом расстоянии τ_1 от центра симметрии, в результате диффузии попадет в некоторую точку, удаленную от центра симметрии на оптическое расстояние τ, и при этом направление его распространения будет составлять с радиус-вектором угол $\arccos \mu \, (-1 \leqslant \mu \leqslant 1)$.

Как известно (см., например, [6], гл. 7), функция Грина удовлетворяет однородному уравнению переноса:

$$\mu \frac{\partial G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)}{\partial \tau} + \frac{1-\mu^2}{\tau} \frac{\partial G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)}{\partial \mu} + G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) -$$

$$- \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{1} p(\mu, \mu') \, G(\tau, \mu', \tau_1, \mu_1) \, d\mu' = 0 \quad (\tau \neq \tau_1), \tag{1}$$

условию скачка на излучающей поверхности $\tau = \tau_1$:

$$G(\tau_1 + 0, \mu; \tau_1, \mu_1) - G(\tau_1 - 0, \mu; \tau_1, \mu_1) = \frac{\delta(\mu - \mu_1)}{2\pi\tau_1^2 \mu} \tag{2}$$

и условию взаимности

$$G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) = G(\tau_1, -\mu_1; \tau, -\mu). \tag{3}$$

Свойства функции Грина, определяемые уравнением (1) и условиями (2) и (3) являются общими для всех сред со сферической симметрией и не зависят от расположения граничных поверхностей.

Определенные требования на вид этой функции накладывают также условия на граничных поверхностях исследуемых сред (например, условие отсутствия внешнего излучения), а также условия ограниченности при $\tau = 0$ (если центр симметрии находится внутри среды) и стремления к нулю при $\tau \to \infty$ (если среда простирается сколь угодно далеко при больших τ). Свойства функции $G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$, вытекающие из этих требований, различны для разных сред.

3. *Структура функции Грина.* Выясним общий вид функции Грина для произвольных сферически симметричных сред.

Условие скачка (2), которому удовлетворяет функция $G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ для любой из рассматриваемых сред, таково же, что и для функции Грина $G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ для бесконечного пространства. Поэтому $G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ можно представить в виде суммы величины $G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ и некоторой непрерывной на излучающей поверхности $\tau = \tau_1$ функции.

Рассмотрим сначала первое из этих двух слагаемых. В работе [7] показано, что $G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ имеет следующий вид:

$$G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) = -\frac{1}{2\pi} \underset{\nu>0}{S} \frac{\nu^2}{N(\nu)} f(\tau, \mu, \pm\nu) f^*(\tau_1, \mu_1, \pm\nu), \tag{4}$$

причем знаки „плюс“ и „минус“ перед аргументом ν относятся соответственно к случаям $\tau > \tau_1$ и $\tau < \tau_1$. В формуле (4) символ $\underset{\nu>0}{S}$ обозначает суммирование по всем положительным (расположенным в порядке убывания) дискретным собственным значениям ν_k ($k = 1,\ldots, K$) и интегрирование по положительным собственным значениям ν непрерывного спектра, то есть

$$\underset{\nu>0}{S} F(\nu) = \sum_{k=1}^{K} F(\nu_k) + \int_0^1 F(\nu)\, d\nu, \tag{5}$$

$N(\nu)$ — нормировочные интегралы (см. [1, 7]), $f(\tau, \mu, \nu)$ — собственные функции рассматриваемого уравнения переноса, а $f^*(\tau, \mu, \nu) = f(\tau, -\mu, -\nu)$ — сопряженные собственные функции. Известно [7], что

$$f(\tau, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau\nu^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) R_n(\nu) K_{n+1/2}\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \tag{6}$$

при $\nu > 0$,

$$f(\tau, \mu, \nu) = -\sqrt{\frac{\pi}{2\tau\nu^3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) P_n(\mu) R_n(\nu) I_{n+1/2}\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \tag{7}$$

при $\nu < 0$,

$$f(\tau, \mu, +\infty) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\beta_n} \frac{P_n(\mu)}{\tau^{n+1}}, \tag{8}$$

$$f(\tau, \mu, -\infty) = -\frac{1}{2}. \tag{9}$$

Здесь $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра, $R_n(\nu)$ — полиномы, используемые в теории переноса излучения (см., например, [8], гл. 7), $I_{n+1/2}\left(\frac{\tau}{\nu}\right)$ и $K_{n+1/2}\left(\frac{\tau}{\nu}\right)$ — модифицированные функции Бесселя 1-го и 3-го родов соответственно,

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_n = \prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{x_m}{2m+1}\right), \quad n \geqslant 1, \tag{10}$$

x_m — коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра. Отметим, что собственные функции вида (8) и (9) используются только в случае чистого рассеяния (при $\lambda = 1$).

Собственные функции $f(\tau, \mu, \nu)$ подчиняются условию ортогональности на полном промежутке изменения переменной μ, а именно,

$$\int_{-1}^{1} f(\tau, \mu, \nu) f^*(\tau, \mu, \zeta)\, \mu d\mu = -\frac{N(\nu)}{\tau^2 \nu^2}\, \delta(\nu, \zeta), \tag{11}$$

где $\delta(\nu, \zeta) = \delta(\nu - \zeta)$ — дельта-функция при $\nu \in [-1, 1]$, $\zeta \in [-1, 1]$, $\delta(\nu, \zeta) = \delta_{ij}$ — символ Кронекера при $\nu = \nu_i \overline{\in} [-1, 1]$, $\zeta = \zeta_j \overline{\in} [-1, 1]$, $\delta(\nu, \zeta) = 0$ при $\nu \in [-1, 1]$, $\zeta \overline{\in} [-1, 1]$ или $\nu \overline{\in} [-1, 1]$, $\zeta \in [-1, 1]$.

Рассмотрим теперь второе из указанных слагаемых. Так как $G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ и $G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ — частные решения уравнения (1), то и это слагаемое тоже является частным решением уравнения (1), так что аналитическое выражение для него должно содержать собственные функции $f(\tau, \mu, \nu)$. Из условия (3) следует, что в это выражение должны входить также функции $f(\tau_1, -\mu_1, \zeta) = f^*(\tau_1, \mu_1, -\zeta)$. Следовательно, рассматриваемое слагаемое представляет собой линейную комбинацию произведений $f(\tau, \mu, \nu) f^*(\tau_1, \mu_1, -\zeta)$.

Таким образом, из вышеизложенного вытекает следующая формула, описывающая структуру функции Грина:

$$G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) = G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) - \\ -\frac{1}{2\pi} \underset{\nu\ \zeta}{S S} c(\nu, \zeta) f(\tau, \mu, \nu) f^*(\tau_1, \mu_1, -\zeta), \tag{12}$$

причем в соответствии с условием (3) $c(\nu, \zeta) = c(\zeta, \nu)$. Здесь S — символ суммирования и интегрирования по всем (и положительным, и отрицательным) собственным значениям.

Формула (12) дает общий вид функции $G(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ для любой сферически симметричной среды. При определении этой функции для конкретной среды следует найти величины $c(\nu, \zeta)$, используя условия на граничных поверхностях, в начале координат и на бесконечности. Выражения для $c(\nu, \zeta)$ будут содержать в качестве параметров оптические расстояния границ рассматриваемой среды от центра симметрии. Например, в случае шара величины $c(\nu, \zeta)$ будут зависеть от его оптического радиуса τ_0, а в случае сферической оболочки — от внутреннего t и внешнего τ_0 оптических радиусов. Если нас интересуют решения уравнения (1), регулярные в начале координат, то в соответствии со свойствами функций $f(\tau, \mu, \nu)$ (см. [7]) в формуле (12) мы должны положить $c(\nu, \zeta) = 0$ при $\nu > 0$ или $\zeta > 0$. Если же мы строим решения, стремящиеся к нулю на бесконечности, то следует принять $c(\nu, \zeta) = 0$ при $\nu < 0$ или $\zeta < 0$.

4. *Соотношения между функциями Грина.* Функции Грина для «внутренних» и «внешних» задач теории переноса излучения в шаре обозначим соответственно через $G_i(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ и $G_e(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$. Таким образом, функция $G_i(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ описывает световой режим в шаре оптического радиуса τ_0, а $G_e(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ — в бесконечной среде со сферической, абсолютно черной полостью такого же оптического радиуса.

Будем считать, что внешнее излучение, освещающее граничные поверхности исследуемых сред, отсутствует. Тогда граничные условия записываются следующим образом:

$$G_i(\tau_0, \mu; \tau_1, \mu_1) = 0 \quad \text{при } -1 \leqslant \mu \leqslant 0, \tag{13}$$

$$G_e(\tau_0, \mu; \tau_1, \mu_1) = 0 \quad \text{при } 0 < \mu \leqslant 1. \tag{14}$$

Структура рассматриваемых функций Грина дается формулой (12). Величины $c(\nu, \zeta)$ в выражениях для $G_i(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ и $G_e(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ обозначим соответственно через $c_i(\nu, \zeta)$ и $c_e(\nu, \zeta)$. Как было отмечено выше, из условий в начале координат и на бесконечности следует, что

$$c_i(\nu, \zeta) = 0 \quad \text{при } \nu > 0 \quad \text{или } \zeta > 0, \tag{15}$$

$$c_e(\nu, \zeta) = 0 \quad \text{при } \nu < 0 \quad \text{или } \zeta < 0. \tag{16}$$

Значения величин $c_i(-\nu, -\zeta)$ и $c_e(\nu, \zeta)$ при $\nu > 0$, $\zeta > 0$, определяемые граничными условиями (13) и (14) и зависящие от τ_0, будут получены в конце статьи.

Напишем соотношения между функциями $G_i(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$, $G_e(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ и $G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$, используя прием, предложенный в работе [9]. Представим себе сферический разрез в бесконечной среде на оптическом расстоянии τ_0 от центра симметрии. Анализируя траектории кванта, излученного на поверхности $\tau = \tau_1$ под углом $\arccos \mu_1$ к радиус-вектору, и принимая во внимание вероятностный смысл функций Грина, найдем, что

$$G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) = G_i(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)\, \theta(\tau_0 - \tau) + $$

$$+ 2\pi\tau_0^2 \int_0^1 G_i(\tau_0, \mu'; \tau_1, \mu_1)\, G_\infty(\tau, \mu; \tau_0, \mu')\, \mu' d\mu' \tag{17}$$

$$(0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_0),$$

$$G_{-}(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) = G_e(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)\,\theta(\tau - \tau_0) +$$

$$+ 2\pi\tau_0^2 \int_0^1 G_e(\tau_0, -\mu'; \tau_1, \mu_1)\, G_{-}(\tau, \mu; \tau_0, -\mu')\,\mu' d\mu' \tag{18}$$

$$(\tau_1 \geqslant \tau_0)$$

или же

$$G_{-}(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) = G_i(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)\,\theta(\tau_0 - \tau_1) +$$

$$+ 2\pi\tau_0^2 \int_0^1 G_{-}(\tau_0, -\mu'; \tau_1, \mu_1)\, G_i(\tau, \mu; \tau_0, -\mu')\,\mu' d\mu' \tag{19}$$

$$(0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0),$$

$$G_{-}(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1) = G_e(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)\,\theta(\tau_1 - \tau_0) +$$

$$+ 2\pi\tau_0^2 \int_0^1 G_{-}(\tau_0, \mu', \tau_1, \mu_1)\, G_e(\tau, \mu; \tau_0, \mu')\,\mu' d\mu' \tag{20}$$

$$(\tau > \tau_0),$$

где $-1 \leqslant \mu,\ \mu_1 \leqslant 1$, а $\theta(x)$ — функция Хевисайда: $\theta(x) = 1$ при $x > 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

Легко убедиться, что из свойства взаимности (3) функций Грина следует эквивалентность формул (17) и (18) формулам (19) и (20).

Из (17) и (18) вытекают, в частности, выражения для функций $G_i(\tau, \mu; \tau_0, -\mu_1)$ и $G_e(\tau, \mu; \tau_0, \mu_1)$, соответствующих случаю, когда излучающая поверхность совпадает с граничной ($\tau_1 = \tau_0$, $0 < \mu_1 \leqslant 1$). Действительно, подставляя (4) в (17) и (18) и используя формулы (12), (15), (16) и условия (13), (14), (11), получаем

$$G_i(\tau, \mu; \tau_0, -\mu_1) = -\frac{1}{2\pi} \mathop{S}_{\nu>0} \frac{\nu^2}{N(\nu)} U(\tau_0, \mu_1, \nu) f^*(\tau, -\mu, \nu), \tag{21}$$

$$G_e(\tau, \mu; \tau_0, \mu_1) = -\frac{1}{2\pi} \mathop{S}_{\nu>0} \frac{\nu^2}{N(\nu)} U^*(\tau_0, \mu_1, \nu) f(\tau, -\mu, \nu), \tag{22}$$

где

$$U(\tau_0, \mu_1, \nu) = f(\tau_0, \mu_1, \nu) - \frac{N(\nu)}{\nu^2} \mathop{S}_{\zeta>0} c_i(-\nu, -\zeta) f^*(\tau_0, -\mu_1, \zeta), \tag{23}$$

$$U^*(\tau_0, \mu_1, \nu) = f^*(\tau_0, \mu_1, \nu) - \frac{N(\nu)}{\nu^2} \mathop{S}_{\zeta>0} c_e(\nu, \zeta) f(\tau_0, -\mu_1, \zeta), \tag{24}$$

причем $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 < \mu_1 \leqslant 1$.

5. *Коэффициенты отражения.* Особый интерес для теории переноса излучения в сферически симметричных средах представляют коэффициенты

$\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)$ и $\rho_e(\mu, \mu_1, \tau_0)$ диффузного отражения света от шара и от бесконечной среды со сферической полостью соответственно. Эти величины определяются при помощи соотношений

$$\pi\tau_0^2 G_i(\tau_0, \mu; \tau_0, -\mu_1) = \rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0) + \frac{\delta(\mu - \mu_1)}{2\mu} e^{-2\tau_0\mu_1}, \tag{25}$$

$$\pi\tau_0^2 G_e(\tau_0, -\mu; \tau_0, \mu_1) = \rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0), \tag{26}$$

где $0 < \mu, \mu_1 \leqslant 1$.

По аналогии с коэффициентами отражения $\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)$ и $\rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)$ введем величину $\rho_\infty(\mu, \mu_1; \tau_0)$ для бесконечной среды, используя равенство

$$\pi\tau_0^2 G_\infty(\tau_0 - 0, \mu; \tau_0, \mu_1) = \rho_\infty(\mu, -\mu_1; \tau_0) + \\ + \frac{\theta(-\mu_1)}{2\mu}\left[\delta(\mu + \mu_1) e^{-2\tau_0\mu} - \delta(\mu - \mu_1)\right], \tag{27}$$

где $-1 \leqslant \mu, \mu_1 \leqslant 1$.

Отметим, что в выражениях (25) и (27) выделены сингулярные (содержащие дельта-функции) слагаемые, описывающие прямое излучение источников.

Из формул (25)—(27) и свойства (3) функций Грина следует симметрия коэффициентов отражения относительно угловых аргументов, то есть

$$\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0) = \rho_i(\mu_1, \mu; \tau_0), \quad \rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0) = \rho_e(\mu_1, \mu; \tau_0), \\ \rho_\infty(\mu, \mu_1; \tau_0) = \rho_\infty(\mu_1, \mu; \tau_0). \tag{28}$$

Полагая в формулах (17) и (18) $\tau = \tau_1 = \tau_0$ и используя (25)—(27), а также условие (2) скачка функции $G_\infty(\tau, \mu; \tau_0, \mu_1)$ при $\tau = \tau_0$, находим следующие линейные неоднородные интегральные уравнения для коэффициентов отражения:

$$\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0) = \rho_\infty(\mu, \mu_1; \tau_0) - \rho_\infty(\mu, -\mu_1; \tau_0) e^{-2\tau_0\mu_1} - \\ - 2\int_0^1 \rho_\infty(\mu, -\mu'; \tau_0) \rho_i(\mu', \mu_1; \tau_0) \mu' d\mu', \tag{29}$$

$$\rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0) = \rho_\infty(-\mu, -\mu_1; \tau_0) - \\ - 2\int_0^1 \rho_\infty(-\mu, \mu', \tau_0) \rho_e(\mu', \mu_1; \tau_0) \mu' d\mu'. \tag{30}$$

Аналогичное интегральное уравнение для коэффициента отражения света от плоской полубесконечной среды ранее было получено В. В. Ивановым [10].

Зная функцию $G_\infty(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ (см. [7]) и определив по формуле (27) величину $\rho_\infty(\mu, \mu_1; \tau_0)$, путем численного решения уравнений (29) и (30) можно вычислить и функции $\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)$ и $\rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)$.

В работах [11—13] исследовался световой режим в сферических оболочках и изучались функции пропускания и отражения света, частными случаями которых являются величины $\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)$ и $\rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)$. Для указанных функций были выведены интегродифференциальные уравнения, содержащие производные по τ_0. Преимущество уравнений (29) и (30) перед этими интегродифференциальными уравнениями состоит в том, что в них отсутствуют производные по τ_0, а аргументы τ_0 и μ_1 выполняют роль параметров, в результате чего при решении интегральных уравнений (29) и (30) искомые величины $\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)$ и $\rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)$ можно считать функциями одного аргумента — угловой переменной μ. Это обстоятельство сильно упрощает вычисления.

6. *Интенсивности излучения, выходящего из среды.* Если известны коэффициенты отражения $\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)$ и $\rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)$, то можно вычислить и интенсивности $I_i(\tau_0, \mu)$ и $I_e(\tau_0, -\mu)$ диффузного излучения, выходящего из рассматриваемых сред при любых сферически симметричных распределениях источников. Действительно, подставляя в формулы (19) и (20) при $\tau = \tau_0$ соотношения (25)—(27), получим выражения для $G_i(\tau_0, \mu; \tau_1, \mu_1)$ и $G_e(\tau_0, -\mu; \tau_1, \mu_1)$. Умножая каждое из этих выражений на функцию распределения источников в соответствующей среде, интегрируя по направлениям излучения и пространственному распределению источников и выделяя выражения, не содержащие дельта-функций, найдем $I_i(\tau_0, \mu)$ и $I_e(\tau_0, -\mu)$.

Рассмотрим, в частности, случай центрального точечного источника мощности L. В этом случае

$$I_i(\tau_0, \mu) = \frac{La^2}{4\pi}\left[G_i(\tau_0, \mu; 0, 1) - \frac{\delta(\mu - 1)}{2\pi\tau_0^2} e^{-\tau_0}\right], \quad (31)$$

$$I_e(\tau_0, -\mu) = \frac{La^2}{4\pi} G_e(\tau_0, -\mu; \tau_0, 1), \quad (32)$$

так что из формул (19), (20), (25)—(27) следует, что

$$I_i(\tau_0, \mu) = I_\infty(\tau_0, \mu) - I_\infty(\tau_0, -\mu)\, e^{-2\tau_0\mu} - 2\int_0^1 \rho_i(\mu, \mu'; \tau_0)\, I_\infty(\tau_0, -\mu')\, \mu' d\mu', \quad (33)$$

$$I_e(\tau_0, -\mu) = I_\infty(\tau_0, -\mu) - 2\int_0^1 \rho_e(\mu, \mu'; \tau_0)\, I_\infty(\tau_0, \mu')\, \mu' d\mu' \tag{34}$$

$$(0 < \mu \leqslant 1),$$

где $I_\infty(\tau_0, \pm\mu)$ — интенсивность излучения в бесконечной однородной среде на оптическом расстоянии τ_0 от точечного источника. Величина $I_\infty(\tau_0, \pm\mu)$ связана с функцией Грина $G_\infty(\tau_0, \pm\mu; 0, 1)$ соотношениями, аналогичными равенствам (31) и (32).

При решении более сложных задач теории переноса излучения в сферически симметричных средах можно воспользоваться сформулированными в следующем разделе статьи свойствами биортогональности собственных функций.

7. *Биортогональность на половинном промежутке.* Рассмотрим функции $U(\tau_0, \mu_1, \nu)$ и $U^*(\tau_0, \mu_1, \nu)$, входящие в выражения (21) и (22).

Получим сначала формулы, связывающие эти функции с собственными функциями $f(\tau, \mu, \nu)$ и $f^*(\tau, \mu, \nu)$ и коэффициентами отражения $\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)$ и $\rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)$. Подставляя равенства (4), (5), (21), (22), (25), (26) в (17) при $\tau \leqslant \tau_0$ и в (18) при $\tau \geqslant \tau_0$ и используя условие ортогональности (11), находим:

$$U(\tau_0, \mu_1, \nu) = f(\tau_0, \mu_1, \nu) - f(\tau_0, -\mu_1, \nu)\, e^{-2\tau_0/\mu_1} -$$
$$- 2\int_0^1 f(\tau_0, -\mu, \nu)\, \rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)\, \mu d\mu, \tag{35}$$

$$U^*(\tau_0, \mu_1, \nu) = f^*(\tau_0, \mu_1, \nu) - 2\int_0^1 f^*(\tau_0, -\mu, \nu)\, \rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)\, \mu d\mu, \tag{36}$$

где $0 \leqslant \mu_1 < 1$, $\nu > 0$. Формулы (35) и (36) определяют системы функций $U(\tau_0, \mu_1, \nu)$ и $U^*(\tau_0, \mu_1, \nu)$ для всех положительных собственных значений как дискретного, так и непрерывного спектров.

Из формул (17) при $\tau > \tau_0$ и (18) при $\tau < \tau_0$ вытекают дополнительные соотношения между $f(\tau_0, \mu_1, \nu)$, $f^*(\tau_0, \mu_1, \nu)$, $\rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)$ и $\rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)$, а именно,

$$f^*(\tau_0, -\mu_1, \nu) - f^*(\tau_0, \mu_1, \nu)\, e^{-2\tau_0/\mu_1} = 2\int_0^1 f^*(\tau_0, \mu, \nu)\, \rho_i(\mu, \mu_1; \tau_0)\, \mu d\mu, \tag{37}$$

$$f(\tau_0, -\mu_1, \nu) = 2\int_0^1 f(\tau_0, \mu, \nu)\, \rho_e(\mu, \mu_1; \tau_0)\, \mu d\mu, \tag{38}$$

где $0 \leqslant \mu_1 \leqslant 1$, $\nu > 0$.

Покажем, что системы функций $U(\tau_0, \mu_1, \nu)$ и $U^*(\tau_0, \mu_1, \nu)$ биортогональны на промежутке [0, 1] с весом μ по отношению к системам собственных функций $f^*(\tau_0, \mu_1, \nu)$ и $f(\tau_0, \mu_1, \nu)$ соответственно (при $\nu > 0$). Умножая обе части уравнения (35) на $\mu_1 f^*(\tau_0, \mu_1, \zeta)$, интнгрируя по μ_1 в пределах от 0 до 1 и принимая во внимание (37) и (11), приходим к следующему условию биортогональности систем $U(\tau_0, \mu, \nu)$ и $f^*(\tau_0, \mu, \nu)$:

$$\int_0^1 U(\tau_0, \mu, \nu) f^*(\tau_0, \mu, \zeta)\, \mu d\mu = -\frac{N(\nu)}{\tau_0^2 \nu^2} \delta(\nu, \zeta). \tag{39}$$

Аналогично из уравнений (36) и (38) вытекают условия биортогональности систем $U^*(\tau_0, \mu, \nu)$ и $f(\tau_0, \mu, \nu)$:

$$\int_0^1 U^*(\tau_0, \mu, \nu) f(\tau_0, \mu, \zeta)\, \mu d\mu = -\frac{N(\nu)}{\tau_0^2 \nu^2} \delta(\nu, \zeta). \tag{40}$$

Можно доказать и полноту систем функций $U(\tau_0, \mu, \nu)$ и $U^*(\tau_0, \mu, \nu)$.

Отметим, что функции $U(\tau_0, \mu, \nu)$ и $U^*(\tau_0, \mu, \nu)$ представляют собой аналоги собственных функций обобщенной задачи Милна для плоских сред (см. [4]).

Используя граничные условия (13), (14) и свойства (39), (40) биортогональности собственных функций, найдем коэффициенты $c_i(\nu, \zeta)$ и $c_e(\nu, \zeta)$, входящие в выражения вида (12) для функций Грина $G_i(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ и $G_e(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$. Подставляя в (12) равенства (15), (16), (21) и (22) и принимая во внимание (23) и (24), а также условие ортогональности (11), получаем следующие соотношения:

$$f(\tau_0, -\mu, \nu) = \frac{N(\nu)}{\nu^2} \mathop{S}_{\zeta>0} c_i(-\nu, -\zeta) f^*(\tau_0, \mu, \zeta), \tag{41}$$

$$f^*(\tau_0, -\mu, \nu) = \frac{N(\nu)}{\nu^2} \mathop{S}_{\zeta>0} c_e(\nu, \zeta) f(\tau_0, \mu, \zeta), \tag{42}$$

где $0 \leqslant \mu < 1$, $\nu > 0$. Умножая обе части уравнения (41) на $\mu U(\tau_0, \mu, \eta)$, интегрируя по μ в пределах от 0 до 1 и пользуясь условием (39), находим, что

$$c_i(-\nu, -\zeta) = -\frac{\tau_0^2 \nu^2 \zeta^2}{N(\nu) N(\zeta)} \int_0^1 U(\tau_0, \mu, \zeta) f(\tau_0, -\mu, \nu)\, \mu d\mu. \tag{43}$$

Аналогичным образом из (42) и (40) следует, что

$$c_e(\nu, \zeta) = -\frac{\tau_0^2 \nu^2 \zeta^2}{N(\nu)\, N(\zeta)} \int_0^1 U^*(\tau_0, \mu, \zeta) f^*(\tau_0, -\mu, \nu)\, \mu d\mu. \tag{44}$$

В формулах (43) и (44) $\nu > 0$, $\zeta > 0$.

Таким образом, формулы (12), (15), (16), (43) и (44) полностью определяют структуру рассматривавшихся функций $G_i(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ и $G_e(\tau, \mu; \tau_1, \mu_1)$ при произвольной индикатрисе рассеяния.

Отметим, что указанные функции Грина при изотропном рассеянии ранее исследовались в работе [14]. Эти величины представлены в виде разложений по собственным функциям уравнения переноса излучения в плоских средах. Коэффициенты в этих разложениях определены как решения некоторых линейных сингулярных интегральных уравнений.

Изложенный в настоящей работе метод исследования полей излучения в сферически симметричных средах может быть применен и к средам других типов симметрии, в частности, к средам с цилиндрической симметрией.

В дальнейшем автор предполагает изучить световой режим в сферических оболочках конечной оптической толщины и привести результаты соответствующих расчетов.

Ленинградский государственный
университет

THE RADIATION FIELD IN MEDIA WITH RADIAL SYMMETRY

A. K. KOLESOV

The structure of the problems of radiation transfer theory Green's functions for the media with radial symmetry is investigated. Linear integral equations for the light reflection coefficients are found for the cases of a sphere and an infinite space with a spherical black-body hollow. The kernel functions and the free terms of the equations are expressed in terms of the infinite space Green's function. The light incidence angle and the optical radius of the sphere or the spherical hollow are parameters in these equations. The half-range biorthogonality relations for the eigenfunctions of the homogeneous radiative transfer equation are derived. The adjoints are determined by means of the light reflection coefficients.

ЛИТЕРАТУРА

1. *К. Кейз, П. Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
2. *N. J. McCormick, I. Kuscer*, J. Math. Phys., 7, 2036, 1966.
3. *С. Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
4. *H. Domke*, J. Quant. Spectroscop. Radiat. Transfer, 15, 681, 1975.
5. *Н. И. Лалетин*, Атомная энергия, 20, 509, 1969.
6. Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов, Под ред. Я. В. Шевелева, Атомиздат, М., 1974.
7. *А. К. Колесов*, Астрофизика, 20, 133, 1984.
8. *В. В. Соболев*, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, М., 1972.
9. *В. В. Соболев*, ДАН СССР, 273, 573, 1983.
10. *В. В. Иванов*, Астрофизика, 12, 565, 1976.
11. *R. E. Bellman, R. E. Kalaba*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54, 1293, 1965.
12. *R. E. Bellman, H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba, S. Ueno*, J. Math. Phys., 9, 909, 1968.
13. *S. Ueno, H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba*, J. Math. Phys., 12, 1279, 1971.
14. *K. M. Case, R. Zelazny, M. Kanal*, J. Math. Phys., 11, 223, 1970.