АСТРОФИЗИКА

ТОМ 22 | ИЮНЬ, 1985 | ВЫПУСК 3

УДК: 524.726—423:530,145.7

СПИРАЛЬНЫЕ СОЛИТОНЫ В ПЛОСКИХ ГАЗОВЫХ ДИСКАХ ГАЛАКТИК

М. Г. АБРАМЯН

Поступила 19 мая 1982

Принята к печати 11 января 1985

Развита теория нелинейных возмущений самогравитирующего тонкого газового диска на грани гравитационной неустойчивости с учетом нелинейных членов пятого порядка включительно. Приближение пятого порядка устраняет неопределенности теории кубического приближения. Критическое значение поверхностного показателя политропы, ниже которого развивается взрывная неустойчивость диска, за счет членов пятого порядка нелинейности уменьшается на величину, пропорциональную квадрату амплитуды возмущений. Поправка к амплитуде и малые изменения профиля кубического солитона зависят от значения скорости возмущений. Исследован вопрос устойчивости солитонов и получены поправки к инкрементам кубических солитонов.

1. *Введение.* В теории спиральной структуры галактик наибольших успехов достигла теория волн плотности в плоских гравитирующих дисках. Обзоры успехов и трудностей этой теории даны в [1—3].

Дисперсионное уравнение спиральных волн плотности в тонком газовом диске в безразмерных обозначениях имеет вид

$$\nu^2 = 1 - |\chi| + u_s^2 \chi^2, \tag{1.1}$$

где

$$\nu = \frac{\omega - m\Omega}{\varkappa_0} \equiv \frac{m}{\varkappa_0}(\Omega_p - \Omega); \quad \chi = \frac{k}{k_0};$$

$$k_0 = \frac{\varkappa_0^2}{2\pi G\sigma_0}; \quad u_s = \frac{k_0}{\varkappa_0} v_s; \quad \varkappa_0 = 2\Omega\sqrt{1 + \frac{r}{2\Omega}\cdot\frac{d\Omega}{dr}}. \tag{1.2}$$

Здесь ω — частота; k, m — радиальное и азимутальное волновые числа. $\Omega_p = \dfrac{\omega}{m}$ и $\Omega(r)$ — угловые скорости спирального узора и материи диска, $\varkappa_0$ — эпициклическая частота, $\sigma(r)$ — поверхностная плотность массы диска, v_s — скорость звука, r — радиальная координата.

Дисперсионное уравнение (1.1) дает, что при $u_* < 1/2$ газовый диск гравитационно неустойчив и возмущения должны нарастать экспоненциально. При этом для максимального значения инкремента получаем

$$\gamma_0^2 = -\nu_1^2(\chi_0) = \frac{\chi_0}{2} - 1, \tag{1.3}$$

где

$$\chi_0 = \frac{1}{2u_*^2} \tag{1.4}$$

критическое значение безразмерного волнового числа, при котором дисперсионная кривая (1.1) имеет тривиальный минимум.

Одна из трудностей волновой теории спиралей — это вопрос генерации волн плотности, так как эффект дисперсии волн приводит к выталкиванию спирального узора из диска галактики за относительно короткое время. Предлагалось много механизмов генерации, в основе которых лежат различные виды неустойчивостей [4], внешние причины [5], возмущения центральных баров [6] и др. В работе [7] продемонстрирован интересный механизм (гидродинамический) генерации отстающих спиральных узоров для галактик с перепадом скорости на кривой вращения.

Возможно, наблюдаемое многообразие спиральных структур вызвано различием механизмов их генерации. Однако *не исключено, что в основе всего многообразия спиралей лежит единый, универсальный механизм генерации.* Такой универсальный механизм может быть описан в рамках нелинейной теории возмущений гравитирующего диска.

Действительно, с точки зрения нелинейной теории механизмом возбуждения спиральных волн могут служить слабые, даже случайные флуктуации. Можно предположить, например, что диск газа и звезд, по крайней мере в некоторых участках (реальные диски галактик весьма неоднородны по структуре), находится на пределе гравитационной неустойчивости. Здесь должны возникать и постепенно раскачиваться волны плотности. С ростом амплитуды волн и в результате их взаимодействия может появляться самосогласованная, более устойчивая нелинейная структура. Если она обладает свойствами, соответствующими реальным рукавам, то таким путем и решается проблема поддержания спирального узора без привлечения механизмов возбуждения волн внешними причинами.

Нелинейная теория неустойчивости самогравитирующего газового диска развивалась в работах [3, 8—13], а звездного диска — в [14]. Авторы работы [8] в приближении кубической по амплитуде возмущений нелинейности показали, что в диске, находящемся на грани гравитационной неустойчивости, в зависимости от характера начальных возмущений, могут возникнуть как взрывная неустойчивость, так и стационарные солитоны. Однако в рамках кубического приближения остается открытым вопрос поведения возмущений со звуковой скоростью ($w = u_s$), а также свойства возмущений в дисках с показателями политропы $\gamma = 1.5$; 2. Привлечение к рассмотрению членов пятого порядка по амплитуде возмущений может устранить указанные неопределенности теории и дать полную картину поведения возмущений малых, но конечных амплитуд.

В предлагаемой работе исследовано поведение возмущений газового самогравитирующего диска с учетом нелинейных эффектов пятого порядка включительно. Решению этой же проблемы были посвящены и работы [15—17], о которых будет говориться в разделах 3 и 4 настоящей статьи.

2. *Основное нелинейное уравнение.* Исходные уравнения, описывающие возмущения вращающегося тонкого газового слоя, общеизвестны — это уравнения движения вещества для радиальной v_r и азимутальной v_φ компонентов скорости, уравнения неразрывности и Пуассона, политропное уравнение состояния в поверхностных параметрах

$$p = \frac{v_s^2}{\varkappa} \sigma_0 (1 + \zeta)^\varkappa; \qquad v_s^2 = \varkappa \cdot \frac{p_0}{\sigma_0}, \tag{2.1}$$

где $\zeta = \dfrac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}$ —безразмерное возмущение поверхностной плотности диска, $\varkappa$ — поверхностный показатель политропы, связь которого с объемным показателем политропы γ различна для различных моделей диска. Если газовый диск одиночен, т. е. держится силами собственной гравитации, то [18]

$$\varkappa = 3 - \frac{2}{\gamma}. \tag{2.2}$$

Если же диск держится силами гравитации сфероидальной звездной подсистемы [19] или звездного диска [20], то имеем

$$\varkappa = 3 - \frac{4}{\gamma + 1}. \tag{2.3}$$

В общем случае, когда самогравитацией диска нельзя пренебречь по сравнению с гравитацией звездных подсистем, уравнение состояния в поверхностных параметрах не удается представить в простом степенном виде (2.1). Однако, если отношение объемных плотностей звездного компонента и газа в плоскости симметрии диска постоянно, то можно пользоваться связью (2.1) с (2.2), где коэффициент пропорциональности уже будет функцией от отношения объемных плотностей [19].

В главном порядке ВКБ-приближения, соответствующем туго закрученным спиралям ($kr \gg 1$), исключая из вышеуказанной системы уравнений возмущения давления, гравитационного потенциала, а также выражая возмущения радиальной скорости (u) и поверхностной плотности через возмущения азимутальной скорости (ε), с помощью точных соотношений

$$u = \frac{-\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}}{1+\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}}; \qquad \zeta = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}, \tag{2.4}$$

и подставляя в радиальный компонент уравнения движения, получим следующее нелинейное уравнение:

$$\frac{\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial\tau^2}}{1+\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}} - \frac{\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)^2}{\left(1+\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2} + \frac{\dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)^2}{\left(1+\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2} =$$

$$= -\left(1 + i\,\mathrm{sign}\,\chi\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\varepsilon + u_s^2\left(1+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^{\varkappa-2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2}. \tag{2.5}$$

В (2.4) и (2.5) использованы безразмерные обозначения

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{1}{\varkappa_0}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega\frac{\partial}{\partial\varphi}\right); \quad \rho = k_0 r; \quad u = \frac{k_0}{\varkappa_0}v_r; \quad \varepsilon = \frac{2\Omega k_0}{\varkappa_0^2}v_\varphi. \tag{2.6}$$

В главном порядке ВКБ-приближения уравнение (2.5), описывающее нелинейное возмущение газового самогравитирующего диска, является точным. Пока на возмущения не налагалось каких-либо (кроме $\chi\rho \gg 1$) ограничений. Теперь предположим, что возмущения поверхностной плотности все же малы, но конечны, и ограничимся пятым порядком нелинейности относительно этой величины. Кроме этого примем, что диск находится вблизи порога неустойчивости, т. е. период обращения диска намного мал по сравнению с характерным временем изменения возмущений $\left(\dfrac{\omega}{\Omega} \sim \nu_1 \ll 1\right)$. Так как конвективные члены в уравнении (2.5) имеют порядок величины $\left(\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)^2$ и выше, то в работе [8] ими пренебрегли, подразумевая, что на грани неустойчивости $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} \sim O(\varepsilon^2)$. Естественно, в приближении пятого порядка нелинейности учет указанных конвективных членов необходим. Заметим, что нелинейность в левой части уравнения (2.5) обусловлена конвективными членами, нелинейность же в правой части—градиентной силой давления. При $\varkappa=2$ градиент давления линеаризуется. Поэтому нелинейность уравнения (2.5) для дисков с $\varkappa=2$, находящихся в стационарном $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}=0\right)$ состоянии, исчезает. Для сохранения этого свойства уравнения (2.5) в пятом порядке нелинейности следует знаменатели разложить в ряд, оставляя их в левой части. Дело в том, что если умножить уравнение (2.5) на $\left(1+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)$ и после этого разложить в ряд, то при умножении вводится дополнительная нелинейность в правой части, которая не исчезает при $\varkappa=2$ и $\frac{\partial}{\partial\tau}=0$.

Метод исследования нелинейного уравнения (2.5) основан на следующих физических рассуждениях [8]. Как уже отмечалось, дисперсионное уравнение (1.1) линейной теории (в частности, оно получается из (2.5) если отбросить нелинейные члены и представить $\varepsilon\sim\exp(i\chi\rho+i\nu\tau)$) дает, что при $u_s<1/2$ газовый диск неустойчив по Джинсу и спиральные волны (с волновым числом χ_0) должны нарастать экспоненциально. Вскоре после начала развития неустойчивости начнут действовать нелинейные эффекты (впрочем, для рассмотрения нелинейных явлений предположение о гравитационной неустойчивости диска необязательно), которые прекратят экспоненциальный рост возмущений и приведут к образованию обертонных масштабов возмущений с волновыми числами, кратными χ_0. Тогда разлагая возмущения в ряд Фурье

$$\varepsilon(\rho,\tau)=\sum_{l}\varepsilon_l(\tau)e^{il\chi_0\rho},\tag{2.7}$$

подставляя в уравнение (2.5), исключая из уравнений для амплитуд различных мод возмущений амплитуды вторых и третьих мод, в рамках приближения пятого порядка получим следующее уравнение относительно амплитуды основной моды:

$$(1+a_{01}|\varepsilon_1|^2)\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\tau^2}+a_{02}\varepsilon_1^2\frac{\partial^2\varepsilon_{-1}}{\partial\tau^2}+a_{11}\varepsilon_1\left|\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau}\right|^2+a_{12}\varepsilon_{-1}\left(\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau}\right)^2=$$

$$=-\nu_1^2\varepsilon_1+a_2|\varepsilon_1|^2\cdot\varepsilon_1+a_{30}|\varepsilon_1|^4\cdot\varepsilon_1,\tag{2.8}$$

где

$$a_{01}=8-16(2-\varkappa)(\varkappa-1);\quad a_{02}=4(3-2\varkappa);\quad a_{11}=2a_{02};$$

$$a_{12} = a_{01} - a_{02}; \quad a_2 = a_{20} + \nu_1^2 a_{21}; \quad a_{20} = 2(2-\varkappa)(5-3\varkappa);$$

$$a_{21} = 8(2-\varkappa)(\varkappa-1); \quad a_{30} = \frac{1}{3}(2-\varkappa)(2706 - 4961\varkappa + 2976\varkappa^2 - 589\varkappa^3).$$

При получении уравнения (2.8) мы пользовались тем, что на грани гравитационной устойчивости

$$\nu_2^2 = \nu_{-2}^2 = 1 - 4\nu_1^2; \quad \nu_3^2 = 4; \quad \chi_0 = 2(1-\nu_1^2); \quad u_s^2\chi_0^2 = 1 - 2\nu_1^2,$$

где

$$\nu_l^2 = 1 - \chi|l| + u_s^2\chi^2 l^2. \tag{2.9}$$

Формальной подстановкой $a_{01} = a_{02} = a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{30} = 0$ из уравнения (2.8) получим аналогичное уравнение кубической нелинейности, рассмотренное в работе [8].

3. *Дисперсионное уравнение и взрывная неустойчивость диска.* В работе [8] на основе анализа уравнения кубического приближения было показано, что при частных начальных условиях типа $\nu_1^2 \ll a_{20}\cdot\varepsilon_{10}^2$, где ε_{10} — амплитуда начальных возмущений, может развиваться взрывная неустойчивость диска, если $\varkappa < 5/3$ ($\gamma < 3/2$). Для учета эффекта членов пятого порядка нелинейности на условие развития взрывной неустойчивости, запишем, исходя из (2.8), дисперсионное уравнение возмущений в рассматриваемом приближении:

$$\nu^2 = \nu_1^2 - A|\varepsilon_1|^2 - B|\varepsilon_1|^4, \tag{3.1}$$

где

$$A = a_{20} + \nu_1^2(a_0^+ - a_1^+ + a_{21}); \quad B = a_{30} - a_{20}(a_0^+ - a_1^+);$$

$$a_0^\pm = a_{01} \pm a_{02}; \quad a_1^\pm = a_{11} \pm a_{12}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим нейтрально устойчивый, по Джинсу, диск: $\nu_1^2 = 0$. При этом из (3.1) видно, что при $a_{20} > 0$ ($\varkappa < 5/3$) в рамках кубической нелинейности развивается взрывная неустойчивость. Стабилизирующее или дестабилизирующее действие членов пятого порядка нелинейности определяется знаком коэффициента B при $|\varepsilon_1|^4$. Анализ зависимости члена B от $\varkappa$ в физически интересной области $1 \leqslant \varkappa \leqslant 2$ показывает, что в области $1.092 < \varkappa < 1.742$ он получает отрицательные значения, и члены пятого порядка нелинейности играют стабилизирующую роль во взрывной неустойчивости диска. Однако очевидно, что стабилизирующий эффект существенен в окрестности $\varkappa = 5/3$, где коэффициент a_{20} близок к нулю. Здесь $B\,(5/3) = -2.5$. Для определения критического значения поверхностного показателя политропы, ниже которого может развиваться взрывная неустойчивость, представим

$$\varkappa_{cr} = \frac{5}{3} - \alpha |\varepsilon_1|^2 \tag{3.3}$$

и подставим в (3.1) с учетом $\nu_1^2 = 0$. В результате получим

$$\nu^2 = (2.5 - 2\alpha) |\varepsilon_1|^4, \tag{3.4}$$

откуда следует, что нелинейная стабилизация взрывной неустойчивости имеет место при $\alpha \leqslant 1.25$. т. е. $\varkappa_{cr} = 5/3 - 1.25 \cdot |\varepsilon_1|^2$. В рамках применимости развитой теории ($|\varepsilon_1|^2 \lesssim 0.1$) критическое значение поверхностного показателя политропы за счет члена пятого порядка нелинейности может уменьшиться на несколько процентов.

При $\varkappa = 2$ из (3.1), согласно вышеуказанному, получаем результат линейной теории: $\nu^2 = 1 - |x| + u_*^2/l^2$.

Влиянию нелинейных эффектов пятого порядка нелинейности на условие развития взрывной неустойчивости газового диска посвящены также работы [15, 17]. В работе [15] нелинейное уравнение написано для лагранжева смещения частиц диска от положений равновесия, между которым и возмущением азимутальной скорости ε, рассматриваемом в настоящей работе, имеется нелинейная связь. Отличие коэффициента при четвертом порядке B дисперсионного уравнения (3.1) от соответствующего коэффициента в работе [15] отчасти могло быть связано с вышеуказанной нелинейной связью лагранжева смещения и ε, а также с неучетом нестационарных членов в нелинейном уравнении. Однако в работе [15] (как и в [16]) для дисков с $\varkappa = 2$ коэффициенты при пятом порядке нелинейности почему-то не обращаются в нуль, хотя, как уже отмечалось, нелинейность в исходном уравнении исчезает. Заметим также, что метод, по которому определяется критическое значение показателя политропы для взрывной неустойчивости, в работе [15] основан на предположении о том, что член пятого порядка в исследуемой области показателя политропы ($1 \leqslant \varkappa \leqslant 2$) за счет очень больших значений коэффициента B (в работе [15] B действительно принимает большие значения), всегда больше члена кубической нелинейности. Очевидно, такое предположение выходит за рамки теории возмущений, применяемой в указанной работе, и применимо лишь в областях показателя политропы, где коэффициент при кубической нелинейности обращается в нуль. Здесь же заметим, что коэффициент B, приведенный в настоящей работе (см. (3.2)), принимает небольшие значения ($|B| \leqslant 12$ в области $1 \leqslant \varkappa \leqslant 2$), поэтому *нет основания считать характер разложения (3.1) асимптотическим.* Что касается работы [17], то расхождение ее результатов с настоящим рассмотрением вызвано тем, что в ней разложение в ряд в исходном уравнении (2.5) произведено после умножения его на $\left(1+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)$ (см. уравнение (1) работы [17]).

4. *Пространственная структура нелинейных возмущений.* Исследуем случай, когда нелинейные эффекты задерживают рост возмущений на некотором стационарном уровне.

Пусть в окрестности χ_0 возбужден узкий пакет волн с $\Delta\chi/\chi_0 \ll 1$. Для получения пространственной структуры этих возмущений следует записать уравнение (2.8) *для произвольного значения* безразмерного волнового числа χ, разложить в ряд коэффициенты этого уравнения в окрестности χ_0, где $\nu_1^2(\chi)$ имеет минимум, и перейти к координатному представлению. После этой процедуры, считая, что ε является функцией от комбинации $\eta=\rho-w\tau$ (стационарные прогрессивные волны), получим следующее нелинейное уравнение:

$$(w^2-u_s^2+(a_{01}w^2-b_{01}u_s^2)|\varepsilon_1|^2)\frac{d^2\varepsilon_1}{d\eta^2}+(a_{02}w^2-b_{02}u_s^2)\varepsilon_1^2\frac{d^2\varepsilon_{-1}}{d\eta^2}+$$
$$+(a_{11}w^2-b_{11}u_s^2)\varepsilon_1\left|\frac{d\varepsilon_1}{d\eta}\right|^2+(a_{12}w^2-b_{12}v_s^2)\varepsilon_{-1}\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\eta}\right)^2-$$
$$-i4b_2|\varepsilon_1|^2\cdot\frac{d\varepsilon_1}{d\eta}=-\nu_1^2\varepsilon_1+a_2|\varepsilon_1|^2\cdot\varepsilon_1+a_{30}|\varepsilon_1|^4\cdot\varepsilon_1, \tag{4.1}$$

где

$$b_{01}=4(2-\varkappa);\quad b_{11}=2b_{02}=2a_{20};\quad b_{12}=6b_2=6(2-\varkappa)(\varkappa-1).$$

Уравнение (4.1) описывает пространственно-временную структуру амплитуды туго закрученных нелинейных спиральных возмущений азимутальной скорости в дисках, находящихся на грани гравитационной неустойчивости. Это же уравнение получается методом медленно меняющихся амплитуд.

Аналогичное (4.1) уравнение в работе [16], помимо замечаний в предыдущем разделе, связанных с необращением в нуль коэффициента в члене пятого порядка нелинейности при $\varkappa=2$, не содержит производных амплитуд в нелинейных членах.

Представим решение уравнения (4.1) в виде

$$\varepsilon_1(\eta)=\varepsilon(\eta)\,e^{i\int\lambda(\eta)\,d\eta}, \tag{4.2}$$

где $\varepsilon(\eta)$ и $\lambda(\eta)$ — действительные функции. Так как амплитуда $\varepsilon_1(\eta)$ считается медленно меняющейся функцией $\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\eta}\sim O(\varepsilon^2)\right)$, то $\lambda(\eta)$ есть малая величина порядка ε или выше.

Подставляя (4.2) в (4.1), получим два уравнения относительно $\lambda(\eta)$ и $\varepsilon(\eta)$. Уравнение для $\lambda(\eta)$ имеет следующий вид:

$$(w^2 - u_s^2 + (a_0^- w^2 - b_0^- u_s^2)\varepsilon^2)\varepsilon \frac{d\lambda}{d\eta} + 2\lambda\{w^2 - u_s^2 +$$

$$+ [(a_0^- + a_{12}) w^2 - (b_{01}^- + b_{12}) u_s^2]\varepsilon^2\} \frac{d\varepsilon}{d\eta} = 4b_2\varepsilon^2 \frac{d\varepsilon}{d\eta}. \qquad (4.3)$$

Анализ решений этого уравнения показывает, что для возмущений, распространяющихся со звуковой скоростью ($w = u_s$), физически приемлемое решение получается лишь при $b_2 = 0$, т. е. для изотермических дисков ($\varkappa = 1$) и для дисков с $\varkappa = 2$. Для возмущений же с $w \neq u_s$ конечное при $\varepsilon = 0$ решение уравнения (4.3) в рассматриваемом приближении имеет вид

$$\lambda = \frac{b_2}{w^2 - u_s^2} \cdot \varepsilon^2. \qquad (4.4)$$

При этом уравнение для амплитуды $\varepsilon(\eta)$ представится в следующем виде:

$$(w^2 - u_s^2 + (a_0^+ w^2 - b_0^+ u_s^2)\varepsilon^2) \frac{d^2\varepsilon}{d\eta^2} + (a_1^+ w^2 - b_1^+ u_s^2)\varepsilon \left(\frac{d\varepsilon}{d\eta}\right)^2 =$$

$$= - \nu_1^2 \cdot \varepsilon + a_2 \cdot \varepsilon^3 + 3a_3 \cdot \varepsilon^5, \qquad (4.5)$$

где

$$3a_3 = a_{30} - \frac{3b_2^2}{w^2 - u_s^2}. \qquad (4.6)$$

Если нас интересует поведение возмущений со звуковой скоростью, то в уравнении (4.5), наряду с подстановкой $w = u_s$, следует в (4.6) заранее положить $b_2 = 0$.

Рассмотрим поведение возмущений с $w \neq u_s$. При этом решение уравнения (4.5), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{d\varepsilon}{d\eta}\right|_{\varepsilon=0} = 0; \quad \varepsilon|_{\eta=0} < \infty, \qquad (4.7)$$

имеет вид

$$\varepsilon^2(\eta) = \frac{\varepsilon_0^2}{1 + 2(1 - \mu\varepsilon_0^2) \cdot \mathrm{sh}^2 \frac{\eta}{\Delta}}. \qquad (4.8)$$

Параметры ε_0, μ, Δ определяются соотношениями

$$1-2\mu\varepsilon_0^2+\sigma\varepsilon_0^4=0, \tag{4.9}$$

$$\Delta^2=\frac{u_s^2-w^2}{\nu_1^2}, \tag{4.10}$$

$$\mu=\alpha+\frac{a_{20}}{4\nu_1^2}; \qquad \sigma=\beta\mu-\frac{a_3}{\nu_1^2}, \tag{4.11}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha=\frac{(a_0^++a_1^++a_{21})\,w^2-(b_0^++b_1^++a_{21})\,u_s^2}{4(w^2-u_s^2)},\\ \beta=\frac{2}{3}\cdot\frac{(a_1^++2a_0^+)\,w^2-(b_1^++2b_0^+)\,u_s^2}{w^2-u_s^2}.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Решение (4.8) в общем виде представляет солитон с амплитудой ε_0, распространяющийся вдоль радиуса диска со скоростью w. Ширина солитона определяется значением параметра Δ.

Уравнение (4.9) дает две амплитуды

$$\varepsilon_{0\pm}^2=\frac{\mu}{\sigma}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\sigma}{\mu^2}}\right). \tag{4.13}$$

Если

$$a_{20}\neq0; \quad w\neq u_s; \quad \nu_1^2\neq0, \tag{4.14}$$

при которых кубическое приближение дает солитонное решение [8]

$$\varepsilon^2(\eta)=\frac{2\nu_1^2}{a_{20}}\cdot\mathrm{sch}^2\sqrt{\frac{\nu_1^2}{u_s^2-w^2}}\cdot\eta, \tag{4.15}$$

отношение σ/μ^2 является малой величиной порядка ν_1^2, так что разложив квадратный корень в (4.13) в ряд, с учетом (4.11), получим

$$\varepsilon_{0-}^2\simeq\frac{1}{2\mu}\left(1+\frac{\sigma}{4\mu^2}\right)\simeq\frac{2\nu_1^2}{a_{20}}\left\{1-\frac{4\nu_1^2}{a_{20}}\left(\alpha-\frac{\beta}{4}+\frac{a_3}{4a_{20}}\right)\right\}; \tag{4.16}$$

$$\varepsilon_{0+}^2\simeq\frac{2\mu}{\sigma}\left(1-\frac{\sigma}{4\mu^2}\right)=\frac{2a_{20}}{\beta a_{20}-4a_3}+O(\nu_1^2). \tag{4.17}$$

При этом из (4.8) для структуры этих солитонов находим

$$\varepsilon_-^2(\eta)=\frac{\varepsilon_{0-}^2}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\eta}{\Delta}}\left(1+\frac{\sigma}{2\mu^2}\,\mathrm{th}^2\frac{\eta}{\Delta}\right); \tag{4.18}$$

$$\varepsilon_{+}^{2}(\eta)=\varepsilon_{0+}^{2}\left(1+\frac{a_{20}^{2}}{4a_{3}'\gamma_{0}^{2}}\operatorname{th}^{2}\frac{\eta}{\Delta}\right)^{-1}\cdot\operatorname{sch}^{2}\frac{\eta}{\Delta}. \tag{4.19}$$

Пренебрегая членами порядка ν_1^4, из (4.16) и (4.18) получим амплитуду и структуру солитона кубической нелинейности (4.15). Следовательно, солитон (4.18) является обобщением солитона кубической нелинейности, учитывающим эффекты пятого порядка нелинейности. Он обладает основными свойствами кубического солитона: является дозвуковым при $\nu_1^2>0$ и $\varkappa<5/3$ и сверхзвуковым — при $\nu_1^2<0$, $5/3<\varkappa<2$. Малые изменения структуры (формы, амплитуды) кубического солитона за счет членов пятого порядка явно зависят от значения групповой скорости w. При сверхзвуковых скоростях с ростом w амплитуда солитона увеличивается.

Решение (+) возникает в пятом порядке приближения по амплитуде возмущений и является результатом «компенсации» кубической нелинейности с нелинейностью пятого порядка. Поэтому амплитуда не исчезает при $\nu_1^2=0$. Вообще говоря, для решения (+) использованное нами разложение является несходящимся.

Теперь перейдем к рассмотрению случаев $a_{20}=0$; $w=u_s$, для которых кубическое приближение не дает ответа.

Рассмотрим сначала случай $a_{20}=0$, который имеет место для двух значений поверхностного показателя политропы: $\varkappa=5/3$ и $\varkappa=2$.

а) $\varkappa=5/3$. При этом решение уравнения (4.1), удовлетворяющее граничным условиям (4.7), имеет следующий вид:

$$\varepsilon^{2}(\eta)=\frac{\gamma_{0}}{\sqrt{-a_{3}}}\operatorname{sch}\frac{\eta}{\Delta}\cdot\left(1-\frac{\gamma_{0}\mu}{\sqrt{-a_{3}}}\operatorname{sch}\frac{\eta}{\Delta}\right), \tag{4.20}$$

где

$$\mu=\frac{2w^{2}-1.1u_{s}^{2}}{w^{2}-u_{s}^{2}};\qquad -a_{3}\approx\frac{4w^{2}-3u_{s}^{2}}{5(w^{2}-u_{s}^{2})};\qquad \Delta=\frac{1}{2\gamma_{0}}\sqrt{0.8w^{2}-0.6u_{s}^{2}}.$$

Это сверхзвуковой солитон, амплитуда которого с ростом скорости асимптотически стремится к значению $1.1\sqrt{\gamma_0}$.

б) $\varkappa=2$. Здесь уравнение (4.1) допускает конечное решение лишь при условии $\left.\frac{d\varepsilon}{d\eta}\right|_{\varepsilon=0}=\varepsilon_0'\neq 0$. При этом получаем решение, представляющее дозвуковую периодическую волну в неустойчивом по Джинсу диске:

$$\varepsilon^2(\eta) = \frac{\sqrt{u_s^2 - w^2}}{\gamma_0} \varepsilon_0' \cdot \mathrm{sn}\left(\frac{2w}{\sqrt{u_s^2 - w^2}} \eta;\ \frac{2w}{\gamma_0} \varepsilon_0'\right), \tag{4.21}$$

где $\mathrm{sn}(z, p)$ — эллиптическая функция Якоби модуля p.

Как важный случай для приложений к диску Галактики рассмотрим решение (4.18) для изотермического диска ($\varkappa = 1$)

$$\varepsilon^2(\eta) = \frac{\nu_1^2}{2} \mathrm{sch}^2 \frac{\eta}{\Delta} \left\{1 - \nu_1^2 \frac{2}{3}\left(5.5 - \frac{u_s^2 - 7w^2}{u_s^2 - w^2} \mathrm{th}^2 \frac{\eta}{\Delta}\right)\right\}. \tag{4.22}$$

В фигурных скобках представлена поправка к структуре кубического солитона (4.16). Форма искажения профиля кубического солитона в общем случае зависит от значения скорости w. Относительное уменьшение амплитуды горбовой части солитона не зависит от w. Уменьшение же амплитуды хвостовой части больше для волн с $u_s > w > u_s/\sqrt{7}$ и меньше для волн с $w < u_s/\sqrt{7}$. В частности, солитон с $w = u_s/\sqrt{7}$ имеет структуру кубического солитона.

Решение (4.19) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\varepsilon^2(\eta) = \varepsilon_0^2 \mathrm{sch}^2 \frac{\eta}{\Delta}\left(1 + \frac{4\varepsilon_0^2}{\gamma_0^2} \mathrm{th}^2 \frac{\eta}{\Delta}\right); \quad \varepsilon_0^2 = \frac{3(w^2 - u_s^2)}{7w^2 - u_s^2}, \tag{4.23}$$

амплитуда которого при близких к скорости звука скоростях достаточно мала для того, чтобы ряд в правой части (4.1) был сходящимся. Однако решение (4.19), как и (4.8), справедливо лишь при условии

$$\left|\frac{a_0^+ w^2 - b_0^+ u_s^2}{w^2 - u_s^2}\right| \varepsilon_0^2 \ll 1, \tag{4.24}$$

которое в вышеуказанных условиях не выполняется.

Уравнение (4.1) не имеет конечных, медленно меняющихся решений со звуковой скоростью $w = u_s$.

Уравнение (4.1) допускает периодические решения в виде эллиптических функций, удовлетворяющих граничным условиям $\left.\frac{d\varepsilon}{d\eta}\right|_{\varepsilon=0} = \varepsilon_0'$; $\varepsilon\big|_{\eta=0} < \infty$. Эти решения обобщают соответствующие кноидальные решения уравнения кубического приближения [13] и переходят к солитонным решениям настоящей работы при стремлении ε_0' к нулю.

5. *К устойчивости нелинейных возмущений диска.* Сначала *рассмотрим модуляционную неустойчивость* глобальных возмущений диска. Для этого исключим из нелинейного уравнения (2.8) собственную частоту ν_1

и запишем нестационарное нелинейное уравнение (с учетом пространственной дисперсии) в системе отсчета, движущейся со скоростью w. Решение этого уравнения представим в виде (4.3) слегка возмущенной амплитудой и фазой и линеаризуем уравнение относительно возмущенных величин, пренебрегая фоновой неоднородностью. Далее, представляя возмущения в виде $\exp(i\tilde{\chi}\rho + i\tilde{\nu}\tau)$, где $\tilde{\chi}$, $\tilde{\nu}$ — волновое число и частота модуляций, исключая возмущения амплитуды и фазы, получим дисперсионное уравнение модуляций $f(\tilde{\chi}, \tilde{\nu}) = 0$, представляющее биквадратное уравнение относительно $\tilde{\nu}$ с коэффициентами, зависящими от $\tilde{\chi}$. Указанное дисперсионное уравнение дает следующий критерий модуляционной неустойчивости, учитывающий эффекты пятого порядка нелинейности:

$$\tilde{\chi}^2 < \tilde{\chi}_{cr}^2 = \frac{3a_2}{u_s^2 - w^3}\varepsilon^2 + \frac{16 b_2^2 + 5a_3(u_s^2 - w^2) + 3a_2(b_0^+ u_s^2 - a_0^+ w^2)}{(u_s^2 - w^2)^2}\varepsilon^4. \quad (5.1)$$

Он обобщает критерий неустойчивости, полученный в работе [12] для гравитирующих дисков, в области минимума дисперсионной кривой (1.1). Первый член в выражении $\tilde{\chi}_{cr}^2$ представляет кубическую нелинейность, рассмотренную в [12], второй — нелинейность пятого порядка. Как и в случае взрывной неустойчивости, нелинейность пятого порядка эффективна в области $a_2 = 0$. При значении показателя политропы $\varkappa = 5/3$ имеем

$$\tilde{\chi}_{cr} = \frac{\sqrt{4.17\, w^2 - 0.01 u_s^2}}{u_s^2 - w^2}, \quad (5.2)$$

откуда следует, что неустойчивость возникает для возмущений, распространяющихся со скоростями $u_s > w > 0.04\, u_s$. С ростом w критическое волновое число модуляций растет.

Для дисков с $\varkappa = 2$ (5.1) дает $\tilde{\chi}_{cr} = 0$, так как нелинейные члены при этом обращаются в нуль.

Для изотермических дисков имеем

$$\tilde{\chi}_{cr} = 2\varepsilon\sqrt{\frac{3}{u_s^2 - w^2}}\left\{1 + \frac{19 u_s^2 - 9w^2}{u_s^2 - w^2}\varepsilon^2\right\}, \quad (5.3)$$

откуда видно, что для всех возможных значений скорости $w < u_s$ поправка пятого приближения приводит к увеличению критического значения волнового числа модуляций.

Теперь исследуем *устойчивость стационарного солитонного решения* (4.14) для изотермических дисков. Опять запишем нестационарное нелинейное уравнение в движущейся со скоростью w солитона системе отсчета, представив возмущения в виде

$$\varepsilon_1(\eta, \tau) = (\varepsilon(\eta) + \psi(\eta))\, e^{-i\nu_1\sqrt{1-m^2}\cdot\tau},$$

где $\nu_1\sqrt{1-m^2}$ ($\nu_1^2 > 0$ — диск устойчив по Джинсу) — частота возмущений, $\varepsilon(\eta)$ — стационарное решение (4.22), линеаризуем нестационарное уравнение относительно $\psi(\eta)$, учитывая при этом фоновую неоднородность. Получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{1-x^2}\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\psi}{dx} - 2\nu_1^2\lambda_1 x\frac{d\psi}{dx} +$$

$$+\left\{\frac{6}{1-x^2} - \frac{m^2}{(1-x^2)^2} + \nu_1^2\left(\tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{1-x^2}\right)\right\}\psi = 0, \quad (5.4)$$

где введена новая независимая переменная $x = \operatorname{th}\frac{\eta}{\Delta}$ и

$$\tilde{A} = \frac{2}{a_{20}}\left(12\alpha - 3\beta - \lambda_1 - 4\lambda_0 + 3\frac{a_3}{a_{20}}\right); \qquad \lambda_{0,1} \equiv \frac{a_{0,1}^{+} w^2 - b_{0,1}^{+} u_s^2}{w^2 - u_s^2};$$

$$\tilde{B} = \frac{2}{a_{20}}\left(m^2(a_0^+ + \lambda_0) - 3a_{21} - a_0^+ - \lambda_1 - 4\lambda_0 + 6\beta - 24\alpha + 24\frac{a_3}{a_{20}}\right). \quad (5.5)$$

Решение уравнения (5.4) должно удовлетворять граничному условию

$$\psi(x^2 = 1) < \infty. \quad (5.6)$$

Решим уравнение (5.4) методом теории возмущений. Представим

$$\psi(x) = \psi_0 + \nu_1^2\psi_1; \quad m^2 = m_0^2 + \nu_1^2 m_1, \quad (5.7)$$

с учетом которых из (5.4) получим уравнения

$$\hat{L}\psi_0 \equiv \left\{\frac{1}{1-x^2}\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + \left[\frac{6}{1-x^2} - \frac{m_0^2}{(1-x^2)^2}\right]\right\}\psi_0 = 0; \quad (5.8)$$

$$\hat{L}\psi_1 = 2\lambda_1\frac{d\psi_0}{dx} - \left[\tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{1-x^2} - \frac{m_1}{(1-x^2)^2}\right]\psi_0. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.8) описывает возмущения солитонов кубической нелинейности, рассмотренное в [14]. Его решение в виде присоединенных функций Лежандра

$$\psi_0(x) \sim P_2^{m_0}(x) \quad (5.10)$$

удовлетворяет граничному условию (5.6) при

$$m_0^2 < 0; \quad m_0^2 = 1; \quad m_0^2 = 4. \quad (5.11)$$

Случай $m_0^2 < 0$ соответствует ненарастающим осцилляциям (непрерывный спектр), $m_0^2 = 1$ — нейтральной стабильности солитона относительно пространственных возмущений $\psi_0 \sim x\sqrt{1-x^2}$; $m_0^2 = 4$ — слабой неустойчивости с инкрементом $\sqrt{3}\cdot\nu_1$ относительно возмущений $\psi_0 \sim$ $\sim (1-x^2)$.

Вычислим поправки к собственным функциям и собственным значениям (5.10) и (5.11), обусловленные членами пятого порядка нелинейности. Рассмотрим сначала неустойчивую моду

$$m_0^2 = 4; \quad \psi_0 \sim 1 - x^2. \tag{5.12}$$

Подставляя (5.12) в (5.9) и решая полученное уравнение, получим

$$\psi_1 \sim \frac{D_1}{1-x^2} + C_1 + B_1(1-x^2)\ln(1-x^2) + A_1(1-x^2), \tag{5.13}$$

где A_1, B_1, C_1, D_1 — постоянные коэффициенты, выражающиеся через параметры (5.5). Решение (5.13) удовлетворяет условию (5.6) при $D_1 = 0$, откуда для m_1 получаем

$$m_1 = \frac{4}{35}(6\tilde{A} + 7\tilde{B} + 4\lambda_1). \tag{5.14}$$

С учетом (5.7), (5.14) и (5.5) для инкремента нарастания рассматриваемой моды получим

$$\tilde{\gamma}_0 = \nu_1\sqrt{3}\left(1 + \nu_1^2\frac{19u_s^2 - 12w^2}{u_s^2 - w^2}\right), \tag{5.15}$$

т. е. инкремент растет.

Вычислим поправку к нейтрально-устойчивой моде

$$m_0^2 = 1; \quad \psi_0 \sim x\sqrt{1-x^2}. \tag{5.16}$$

Аналогичная процедура приводит к решению

$$\psi_1 \sim \frac{D_2 x}{\sqrt{1-x^2}} + C_2 x\sqrt{1-x^2}\ln(1-x^2) + B_2 x(1-x^2)^{3/2}, \tag{5.17}$$

удовлетворяющему условию конечности (5.6) при $D_2 = 0$. Последнее для m_1 дает

$$m_1 = \frac{2}{35}(4\tilde{A} + 7\tilde{B} - 2\lambda_1). \tag{5.18}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае знак поправки (5.18) решает вопрос устойчивости солитона. Здесь имеем слабую неустойчивость с инкрементом

$$\tilde{\gamma}_0 = \nu_1^2 \sqrt{14 + \frac{23.4\, u_s^2}{u_s^2 - w^2}}.$$

Автор признателен В. А. Антонову, В. Л. Поляченко, А. М. Фридману за полезное обсуждение работы и критические замечания.

Ереванский государственный
университет

SPIRAL SOLITONS IN THE FLAT GASEOUS DISKS OF GALAXIES

M. G. ABRAMIAN

The theory of non-linear perturbations of a self-gravitating thin rotating gaseous disk is developed taking into consideration terms of five degree nonlinearity. The five degree approach removes uncertainties of the theory based on the cubic nonlinearity approach. Critical value of the surface index of politropy, below which develops a break-up instability of the disk, decreases by a few percent. The correction to the amplitude and small changes of cubic soliton depend on its group velocity. The question of stability of the soliton is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. A. Kaplan, S. B. Pikel'ner*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 12, 113, 1974.
2. *Л. С. Марочник, А. А. Сучков*, УФН, 112, 275, 1974.
3. *В. Л. Поляченко, А. М. Фридман*, Равновесие и устойчивость гравитирующих систем, Наука, М., 1976.
4. *А. М. Фридман*, Итоги науки. (Астрономия), ВИНИТИ, 10, 61, 1975.
5. *A. Toomre*, A. J., 158, 899, 1969.
6. *S. I. Feldman, C. C. Lin*, Studies in Appl. Math., 52, 1, 1973.
7. *А. Г. Морозов, М. В. Невлин, Е. М. Снежкин, А. М. Фридман*, Письма ЖЭТФ, 39, 504, 1984.
8. *А. Б. Михайловский, В. И. Петвиашвили, А. М. Фридман*, Письма ЖЭТФ, 26, 129, 341, 1977; Астрон. ж., 56, 279, 1979.
9. *S. Ikeuchi, T. Nakamura*, Progr. Theor. Phys., 55, 1419, 1976.
10. *В. Л. Поляченко, С. М. Чурилов, И. Г. Шухман*, Астрон. ж., 57, 479, 1980.
11. *С. М. Чурилов*, Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, 54, 148, 1980.
12. *В. И. Корчагин, П. И. Корчагин*, Астрофизика, 16, 273, 1980

13. *М. Г. Абрамян. С. В. Арутюнян*, Письма АЖ, 10, 504, 1984; Тезисы докладов ГР—6, М., 1984, стр. 96.
14. *В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман*, Астрон. ж., 56, 957, 1979.
15. *А. Г. Морозов*, Астрон. ж., 58, 244, 1981.
16. *А. Г. Морозов*, Письма АЖ, 8, 636, 1982.
17. *М. Г. Абрамян*, Письма АЖ, 8, 751, 1982.
18. *C. Hunter*, Ann. Rev. Fluid Mech., 4, 219, 1972.
19. *М. Г. Абрамян*, Астрофизика, 14, 579, 1978.
20. *С. М. Чурилов, И. Г. Шухман*, Астрон. цирк., № 1157, 1981.