

УДК: 524.45—78—17:517.9

О САМОСОГЛАСОВАННОЙ МОДЕЛИ БОГАТЫХ СКОПЛЕНИЙ
ГАЛАКТИК. I. ГАЛАКТИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ
СКОПЛЕНИЯ

М. В. КОНЮКОВ

Поступила 15 июля 1982

Принята к печати 2 ноября 1984

Показано, что получение функции распределения для галактической составляющей скопления сводится, в конечном счете, к решению краевой задачи для гравитационного потенциала самосогласованного поля. Функция распределения определяется двумя основными параметрами. Построен алгоритм решения задачи и составлена программа ее решения. С ее использованием установлена область значений параметров задачи, для которой решения существуют. Предложенная схема распространена на случай существования в скоплении выделенного центрального тела с известным распределением плотности (например сD-галактики). Указан способ оценки параметров модели по результатам наблюдений скоплений галактик в оптическом диапазоне.

1. *Введение.* Наблюдения богатых скоплений галактик в оптическом и рентгеновском диапазонах указывают на то, что в их состав входят, по крайней мере, две составляющие: галактическая, состоящая из галактик скопления, и плазменная — полностью ионизованная плазма с температурами порядка 10^8 К [1, 2].

По развитым к настоящему времени представлениям плазменная составляющая скопления возникает при его эволюции либо за счет выноса газа из галактик скопления [3, 4], либо его захвата из межскопленческого пространства потенциальной ямой скопления [5]. В его разогреве наряду с диссипацией приносимой газом механической энергии существенную роль играет взаимодействие плазмы с галактиками скопления [1].

В процессе эволюции у богатых скоплений галактик возникает квазистационарное состояние, которому свойственны лишь медленные изменения как галактической, так и плазменной составляющих, в основном за счет столкновений галактик и их убегания из скопления. Значительный поток информации о богатых скоплениях (распределение яркости в оптическом и рентгеновском диапазонах, наличие рентгеновского излучения в линиях железа, указания на существование радиогало и т. п. [6, 7]) позволяет провести моделирование квазистационарного состояния богатых

скоплений галактик на основе достаточно обоснованных представлений о протекающих в них процессах. Моделирование такого рода проводилось, в частности, в работах Кавальери и Фуско-Фемиано [8, 9], однако рассмотренным там моделям свойственны следующие недостатки:

а) При поиске решения задачи для самосогласованного гравитационного поля использовалась схема расчета потенциала, предложенная Кингом [10, 11], которая, как будет показано ниже (см. раздел 3), неверна.

б) Плазменная составляющая в этих моделях не удерживается самосогласованным гравитационным полем и квазистационарное состояние возможно только при наличии «стенки».

в) Распределение различных сортов ионов по скоплению предполагается одинаковым.

На наш взгляд, это служит достаточно убедительным основанием для новой постановки задачи моделирования квазистационарного состояния богатых скоплений галактик, в которой отсутствуют перечисленные выше недостатки. Именно этому и посвящена предлагаемая работа.

2. Постановка и решение задачи для галактической составляющей. В основу моделирования галактической составляющей скопления положена схема [12], предложенная в работах Чандрасекара [13, 14] и Спитцера и Хэрма [15] для анализа шаровых скоплений. Ее основные предположения следующие:

а) Галактическая составляющая скопления приближается совокупностью материальных точек одинаковой массы, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона.

б) Состояние галактической составляющей описывается функцией распределения, удовлетворяющей кинетическому уравнению с самосогласованным гравитационным полем.

в) Столкновительный член кинетического уравнения может быть записан в приближении Фоккера—Планка.

г) Члены галактической составляющей, энергия которых превышает заданную величину, покидают скопление.

д) Условия в галактической составляющей таковы, что средний свободный пробег по отношению к столкновениям между галактиками значительно больше размеров системы, но время между столкновениями мало по сравнению со временем существенной эволюции системы.

е) Время релаксации галактической составляющей за счет самосогласованного поля (регулярных сил) значительно меньше времени релаксации, связанной со столкновениями (иррегулярным силам).

Предполагается, что основное время в процессе эволюции галактической составляющей находится в квазистационарном состоянии, описываемом следующей системой уравнений:

$$\bar{v} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi G m \int_{\bar{v}} f d\bar{v} - 4\pi G \rho_m(\bar{r}), \quad (1a)$$

где $f(\bar{r}, \bar{v})$ — функция распределения галактик, m — масса галактики, G — гравитационная постоянная, $\rho_m(\bar{r})$ — плотность массы, отличной от определяемой функцией распределения $f(\bar{r}, \bar{v})$, и φ — гравитационный потенциал. По теореме Лиувилля общим решением (1) является произвольная, один раз дифференцируемая функция интегралов движения, и таким образом поиск решения сводится к получению вида этой функции.

Из предположения (д) следует, что, начиная с некоторого момента времени, роль начальных условий задачи становится пренебрежимо малой и дальнейшая эволюция функции распределения определяется только столкновениями и убеганием. В этих условиях уравнение для функции распределения имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right)_{st}, \quad (2)$$

где $\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right)_{st}$ — столкновительный член кинетического уравнения. Для сферически-симметричного случая в пространстве скоростей уравнение (2) со столкновительным членом в форме, предложенной в [15], приводится к виду

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{x} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} + 2xf_0 \right) \right], \quad (2a)$$

где использованы безразмерные переменные

$$x = \frac{v}{V_0 \sqrt{2}}, \quad \tau = \frac{t}{T_R};$$

T_R — характерное время, введенное Чандрасекаром [13], V_0 — характерная скорость, а $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей.

Подстановка

$$f_0(\tau, x) = e^{-\lambda\tau} g(x) \quad (3)$$

в (2а) ведет к уравнению для $g(x)$:

$$\frac{1}{x^3} \frac{d}{dx} \left[\frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{x} \left(\frac{dg}{dx} + 2xg \right) \right] + ig = 0, \quad (4)$$

которое вместе с условиями

$$x = 0, \quad g = 1, \quad \frac{dg}{dx} = 0 \quad (4a)$$

$$x = x_*, \quad g = 0.$$

представляет собою задачу на собственные значения (x_* — скорость убегания из системы; $g(x) = 0$ при $x \geq x_*$). Если в r -пространстве имеет место сферическая симметрия, то при получении общего решения уравнения (1) можно ограничиться произвольной один раз дифференцируемой функцией интеграла энергии. Выберем решение задачи (4, 4а) в качестве такой функции. Тогда решение уравнения (1) записывается в виде

$$g(\xi, x) = g_0 \{ \sqrt{Vx^2 + 2[\psi_0 - \psi(\xi)]} \}, \quad (5)$$

где $\xi = r/r_0$ — безразмерное расстояние от центра скопления (r_0 — характерный размер задачи), а ψ_0 и $\psi(\xi)$ — значения безразмерного гравитационного потенциала в центре скопления и точке ξ

$$\psi_0 = \frac{\varphi_0}{2V_0^2}, \quad \psi(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{2V_0^2}$$

(в том, что (5) является решением уравнения (1) можно убедиться непосредственной подстановкой).

Функция распределения (5) обращается в нуль при $\xi \geq \xi_*$ (ξ_* — радиус галактической составляющей) и описывает в нулевом приближении по малому параметру задачи квазистационарное состояние с незначительным потоком массы через поверхность $\xi = \xi_*$, создаваемым убегающими галактиками. Учет убегающих галактик приводит к отличной от нуля функции распределения при $\xi \geq \xi_*$, что меняет краевое условие (4а) и вместе с ним и вид функции $g_0(x)$. Однако это изменение решения имеет первый порядок по малому параметру задачи и поэтому не учитывается*;

* При необходимости и функция распределения убегающих частиц, и вызванные ее существованием изменения функции $g_0(x)$ могут быть легко получены последовательными приближениями, причем в качестве нулевого используется полученное нами решение.

нами рассматриваются только решения типа «статистических структур» [17].

Пусть безразмерный потенциал в центре скопления равен ψ_0 . Тогда для существования галактической составляющей с плотностью, равной нулю, при $\xi \geq \xi_g$ скорость убегания можно выбрать в виде

$$x_e = \sqrt{2(\psi_0 - \psi_e)}, \quad (6)$$

где ψ_e — безразмерный параметр задачи, определяющей отличие x_e от скорости убегания на бесконечность $x_e^\infty = \sqrt{2\psi_0}$ (это отличие связывается с действием приливных сил со стороны окружающей скопление среды [18, 19]). Теперь безразмерную плотность галактической составляющей можно записать в виде

$$v[\psi(\xi)] = \frac{\int_0^{x_e} g_0 \{ \sqrt{x^2 + 2[\psi_0 - \psi(\xi)]} \} x^2 dx}{\int_0^{x_e} g_0(x) x^2 dx}. \quad (7)$$

Наряду с галактической составляющей, масса которой распределена с плотностью $v(\xi)$, в центре скопления могут существовать гигантские сD-галактики с известным распределением массовой плотности в них $v_m(\xi)$ (ξ_m — граница сD-галактики; $v_m(\xi) = 0$, $\xi \geq \xi_m$). Теперь гравитационный потенциал будет определяться и $v(\xi)$, и $v_m(\xi)$, и на границе скопления галактик в соответствии с теоремой Гаусса для потенциала [16] имеет место равенство

$$\psi_* = \frac{1}{\xi_*} \left\{ A_0 \int_0^{\xi_g} v[\psi(\xi)] \xi^2 d\xi + B_0 \int_0^{\xi_m} v_m(\xi) \xi^2 d\xi \right\}, \quad (8)$$

где $\xi_* = \max(\xi_g, \xi_m)$ — граница системы, а A_0 и B_0 — безразмерные параметры задачи, определяемые соотношениями

$$A_0 = \frac{4\pi G r_0^2 \rho_0}{2V_0^2}, \quad B_0 = \frac{4\pi G r_0^2 \rho_m(0)}{2V_0^2}, \quad (9)$$

ρ_0 — значение массовой плотности галактической составляющей в центре скопления, $\rho_m(0)$ — та же величина для сD-галактики. Поскольку сD-галактики погружены в скопление, $\xi_m < \xi_g$ и $\xi_* = \xi_g$. Однако пред-

лагаемая схема решения применима и в случае, когда скопление галактик погружено в распределение масс с известной плотностью $\nu_m(\xi)$. В этом случае ξ_m может быть больше ξ_g и $\xi_* = \xi_m$.

Определение гравитационного потенциала самосогласованного поля для галактической составляющей в присутствии масс, распределенных с плотностью $\nu_m(\xi)$, сводится к решению следующей нелинейной краевой задачи:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = -A_0 \nu(\psi) - B_m \nu_m(\xi),$$

$$\xi = 0, \quad \frac{d\psi}{d\xi} = 0, \quad (10)$$

$$\xi = \xi_*, \quad \psi_* = \frac{1}{\xi_*} \left\{ A_0 \int_0^{\xi_g} \nu[\psi(\xi)] \xi^2 d\xi + B_m \int_0^{\xi_m} \nu_m(\xi) \xi^2 d\xi \right\}.$$

Заметим, что нелинейная краевая задача (10) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению [17]. Действительно, воспользовавшись функцией Грина уравнения Пуассона в неограниченном пространстве

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

можно получить следующее нелинейное интегральное уравнение для потенциала:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{A_0}{4\pi} \int_{V_p} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\int_0^{x_*} g_0 \left\{ \sqrt{x^2 + 2[\psi_0 - \psi(\vec{r}')] } \right\} x^2 dx}{\int_0^{x_*} g_0(x) x^2 dx} d\vec{r}' +$$

$$+ \frac{B_m}{4\pi} \int_{V_p} \frac{\nu_m(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}', \quad (10a)$$

где V_p — область пространства с плотностью, отличной от нуля. При заданных безразмерных параметрах задачи $\{A_0, B_m, \psi_0\}$ и функции $\nu_m(\xi)$ поиск функции распределения галактической составляющей сводится к

1) Решению задачи на собственные значения (4, 4a) для получения функции $g_0(x)$ (существование и единственность доказаны, однако решение может быть получено только численными методами);

2) Решению краевой задачи (10) для определения распределения гравитационного потенциала самосогласованного поля $\psi(\xi)$ (задача решается только численно; пока нам не удалось доказать существование и единственность решения задачи (10));

3) Получению функции распределения галактической составляющей с использованием функции $g_0(x)$, $\psi(\xi)$ и определения (5).

Нами был разработан алгоритм поиска функции распределения галактической составляющей в соответствии с выписанной выше схемой (при решении задач (4, 4а) и (10) использовался метод «стрельбы» решения краевых задач [20]), составлена и отлажена программа*. С ее использованием было установлено существование решений задачи (4, 4а; 10) для достаточно широкого набора значений безразмерных параметров задачи. В качестве примера на рис. 1 приведены результаты решения при $A_0 = 30$, $\psi_* = 0.3$, $B_m = 0$.

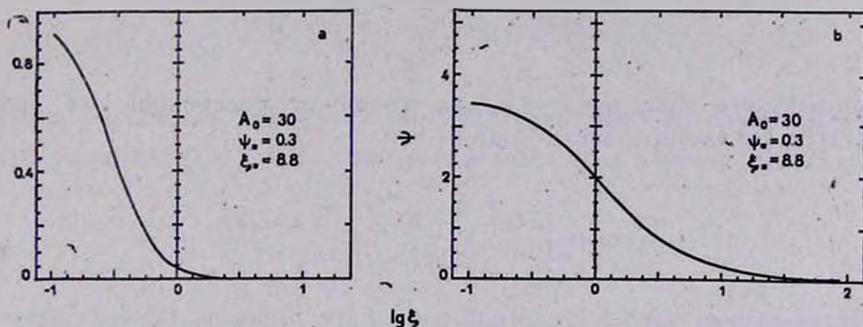


Рис. 1. Распределение плотности галактик и гравитационного потенциала для решения самосогласованной задачи (4, 4а, 10).

Значение потенциала в центре ψ_0 является решением задачи и для рассматриваемых нами значений безразмерных параметров задачи было единственным, а, следовательно, единственными были полная масса и энергия галактической составляющей скопления. Распределение потенциала в области $\xi < \xi_*$ давало решение задачи (10); вне определялось потенциалом шара радиуса ξ_* с массой, определяемой $\nu(\xi)$ и $\nu_m(\xi)$. При $\xi = \xi_*$ потенциал непрерывен.

3. Решения Кинга задачи определения гравитационного потенциала самосогласованного поля. Построение самосогласованных моделей, шаро-

* Программа решения задачи (4, 4а; 10) написана на языке FORTRAN-IV. Она, как и другие программы решения задач, рассматриваемых в работе, могут быть переданы автором любому лицу, заинтересованному в решении такого типа задач.

вых скоплений в рамках предположений, сформулированных в разделе 2, рассматривалось Кингбм [10, 11, 21]. Один из основных выводов работ состоит в том, что построение модели шарового скопления с плотностью, равной нулю за конечным расстоянием от центра, сводится к получению решения задачи Коши (здесь ψ является безразмерным гравитационным потенциалом распределенных в объеме масс в общепринятом смысле этого слова [22])

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = -A_0 \frac{\int_0^{x_e} g_0 \{ \sqrt{x^2 + 2(\psi_0 - \psi)} \} x^2 dx}{\int_0^{x_e} g_0(x) x^2 dx}, \quad (11)$$

$$\xi = 0, \quad \psi = \psi_0, \quad \frac{d\psi}{d\xi} = 0,$$

принимающего значение $\psi = \psi_*$ на конечном расстоянии от центра (в [11] $g_0(x)$ выбиралась в виде

$$g_0(x) = \begin{cases} k(e^{-x^2} - e^{-x_e^2}), & x \leq x_e, \\ 0 & x > x_e, \end{cases}$$

представляющем приближение при малых λ к решению (4, 4а) задачи на собственные значения с $\psi_* = 0$). Используя численные методы легко показать, что такие решения существуют даже при скорости убегания, определяемой соотношением $x_e = \sqrt{2\psi_0}$. При выбранных значениях параметров A_0 и ψ_* существует бесчисленное множество решений задачи (11) (см. рис. 1б [11]); численный эксперимент, проведенный нами, показал, что это имеет место и при $\psi_* \neq 0$. Ниже решения задачи (11) с плотностью, равной нулю за конечным расстоянием от центра, будем называть решениями Кинга. Между решениями Кинга задачи (11) и решениями задачи (4, 4а; 10) существует принципиальное различие: в условиях, когда задача (4, 4а; 10) вообще не имеет решений с плотностью, равной нулю за конечным расстоянием от центра, или имеет единственное, число решений Кинга задачи (11) бесконечно велико (они образуют однопараметрическое семейство). При постановке задач (4, 4а; 10) и (11) использовались одинаковые уравнения и упрощающие предположения. Однако полученные с их использованием множества решений различны, что указывает на неэквивалентность задач. Поэтому возникает вопрос: какую из задач следует

использовать при расчете модели галактической составляющей скопления по определяющим ее безразмерным параметрам задачи?

Для ответа на него рассмотрим свойства решений Кинга задачи (11) и решений краевой задачи (4, 4а; 10):

а) Для выбранных значений безразмерных параметров задачи A_0 и существует бесчисленное множество решений Кинга.

б) Среди решений Кинга с $\psi_* = 0$ нет обладающих свойством гравитационного потенциала.

Пусть $\psi_k(\xi)$ — любое решение Кинга, равное нулю при $\xi = \xi_k^k$. Тогда, используя выражение для плотности

$$\nu[\psi_k(\xi)] = \frac{\int_0^{\sqrt{2\psi_0}} g_0 \{ \sqrt{x^2 + 2[\psi_0 - \psi_k(\xi)]} \} x^2 dx}{\int_0^{\sqrt{2\psi_0}} g_0(x) x^2 dx} \quad (13)$$

и теорему Гаусса для потенциала [16], получаем значение гравитационного потенциала в точке $\xi = \xi_k^k$ масс, распределенных с плотностью (13)

$$\psi_* = \frac{A_0}{\xi_k^k} \int_0^{\xi_k^k} \nu[\psi_k(\xi)] \xi^2 d\xi > 0.$$

Но $\psi_k(\xi_k^k) = 0$ и, следовательно, $\psi_k(\xi)$ не удовлетворяет требованию непрерывности потенциала объемно распределенных масс.

в) Среди решений Кинга с $\psi_* \neq 0$, вообще говоря, есть обладающие свойством гравитационного потенциала. Существование их устанавливается численными методами и фактически сводится к решению краевой задачи (4, 4а; 10) с $B_m = 0$ одним из известных численных методов. На рис. 2 приведено множество решений Кинга для $A_0 = 30$, $\psi_* = 0.3$ вместе с прямой $\psi = \psi_*$. Все решения достигают прямой $\psi = \psi_*$, где плотность обращается в нуль, но только одно $\psi_b(\xi)$ дает распределение плотности, обеспечивающее выполнение равенства

$$\psi_* = \frac{A_0}{\xi_*} \int_0^{\xi_*} \nu[\psi_b(\xi)] \xi^2 d\xi, \quad (14)$$

необходимого и достаточного для того, чтобы $\psi_b(\xi)$ было гравитационным потенциалом объемно распределенных масс.

г) Для безразмерного параметра A_0 существует множество пар A значений параметра ψ^a и потенциала в центре ψ_0^a

$$\{\psi_0^a, \psi_*^a\}_{a \in A} \quad (15)$$

($\psi_0^a - \psi_*^a = \text{const}$), для которых решения Кинга приводят к тождественным функциям распределения.

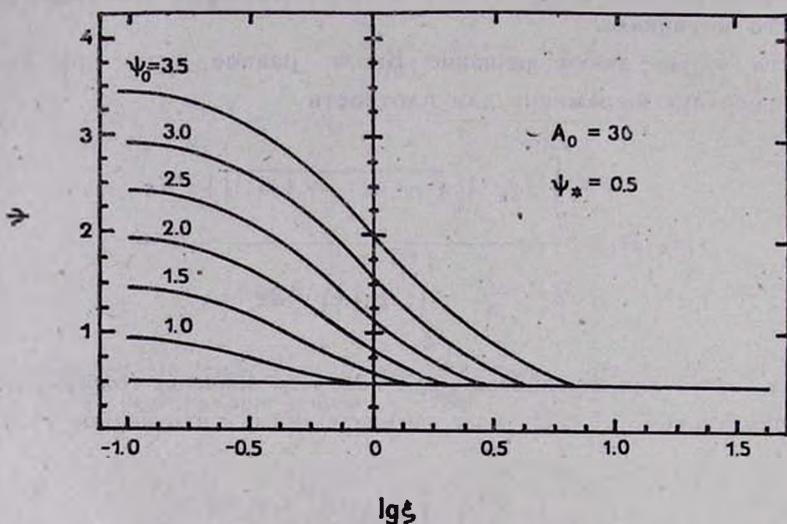


Рис. 2. Семейство решений Кинга.

д) Для выбранных значений безразмерных параметров A_0 и ψ_* краевая задача (4, 4а; 10), вообще говоря, имеет решение.

е) Решение краевой задачи (4, 4а; 10), как это следует из ее постановки, является гравитационным потенциалом объемно распределенных масс.

Приведенные выше свойства решений Кинга задачи (11) и краевой задачи (4, 4а; 10) служат основанием для вывода: при расчете моделей галактической составляющей скопления с заданным набором определяющих ее безразмерных параметров следует пользоваться решениями краевой задачи (4, 4а; 10).

Заметим, что поиск решений краевой задачи (4, 4а; 10) методом «стрельбы» сводится к выбору из множества решений Кинга того, которое удовлетворяет крайним условиям. Если же при решении задачи (4, 4а; 10) используются конечно разностные схемы или задача определения распределения потенциала сводится к решению интегрального уравнения (10а), то решения Кинга вообще не используются.

4. *Оценка параметров модели.* При оценке параметров модели по результатам наблюдений важно знать область значений безразмерных параметров, для которых задача (4, 4а; 10) имеет решение с плотностью, равной нулю за конечным расстоянием от центра. Поиск ее был проведен при $B_m = 0$. В этом случае введением независимой переменной

$$\xi_1 = A_0^{-1/2} \xi \quad (16)$$

система (10) приводится к

$$\frac{1}{\xi_1^2} \frac{d}{d\xi_1} \left(\xi_1^2 \frac{d\psi}{d\xi_1} \right) = \frac{\int_0^{x_0} g_0 [V x^2 + 2(\psi_0 - \psi)] x^2 dx}{\int_0^{x_0} g_0(x) x^2 dx},$$

$$\xi_1 = 0, \quad \frac{d\psi}{d\xi_1} = 0, \quad (17)$$

$$\xi_1 = \xi_{1*}, \quad \psi_* = \frac{1}{\xi_{1*}} \int_0^{\xi_{1*}} v[\psi(\xi_1)] \xi_1^2 d\xi_1.$$

Легко видеть, что существование решений с плотностью, равной нулю за конечным расстоянием от центра, зависит лишь от ψ_* .

Для определения значений ψ_* , допускающих решения этого типа, нами был проведен численный эксперимент. Его результаты дали основания для следующего вывода: решения задачи (4, 4а; 10) с плотностью, обращаемой в нуль за конечным расстоянием от центра, существуют только для значений ψ_* , принадлежащих интервалу

$$0 < \psi_* < 0.42, \quad (18)$$

(заметим, что решения Кинга задачи (11) существуют при любом значении параметра ψ_* ; на рис. 3 они приведены для $\psi_* = 0.5$). Самосогласованная модель для галактической составляющей скопления без сD-галактик и среды, в которую оно погружено, в используемых предположениях определяется только двумя безразмерными параметрами задачи $\{A_0, \psi_*\}$. Экспериментальная информация о галактической составляющей, адекватная модели, состоит из сглаженных распределений поверхностной плотности и дисперсии скоростей галактик. Оценка параметров модели по этой экспериментальной информации сводится к поиску точек в пространстве параметров (A_0, ψ_*) , для которой уклонение между рассчитанными и наблюдаемыми поверхностными плотностями и дисперсиями

минимально. Процедура оценок параметров и ошибок их определения стандартна [23].

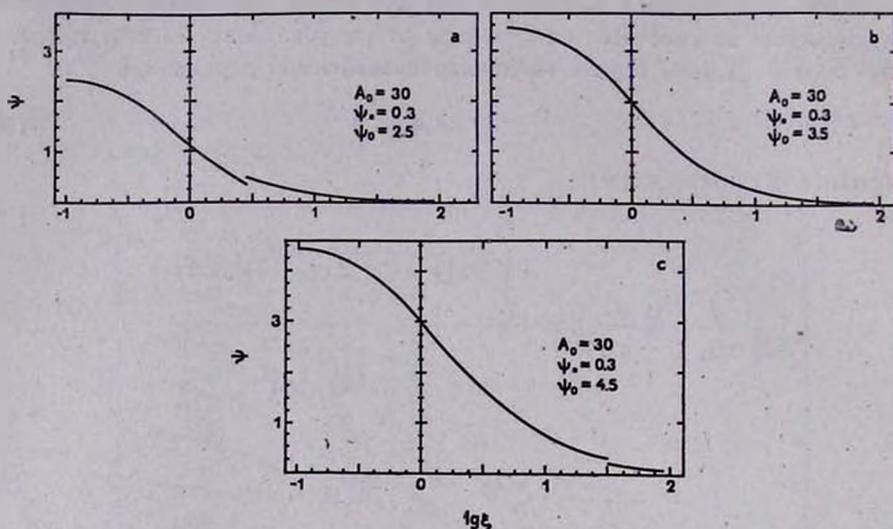


Рис. 3. Решения уравнения для потенциала при различных ψ_0 . В области, где плотность отлична от нуля они являются решениями задачи Коши; вне—определяются формулой для потенциала массы, распределенной в сфере радиуса $\bar{r} = \bar{r}_0$.

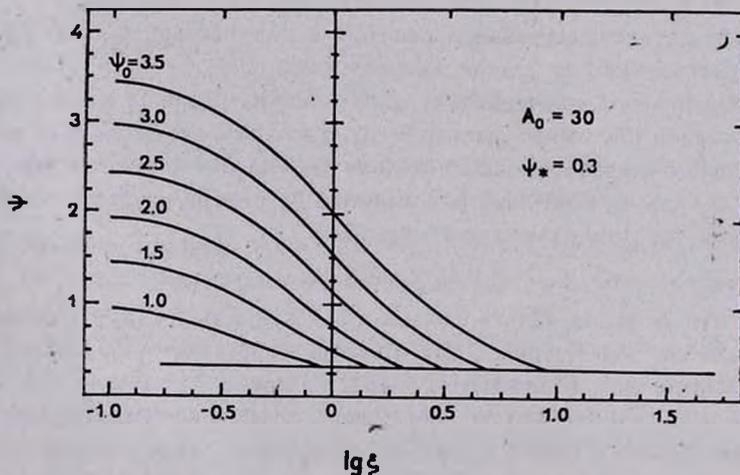


Рис. 4. Семейство решений Кинга при $\psi_* = 0.5$.

Автор благодарит В. Г. Горбацкого, А. Г. Губанова, Р. Д. Дагкесаманского и Л. М. Озерного за советы, обсуждение и доброжелательную критику.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева

ABOUT A SELF-CONSISTENT MODEL OF RICH CLUSTER
OF GALAXIES. I. GALAXY COMPONENT OF CLUSTER

M. V. KONUKOV

It has been shown that the distribution function of the galaxy component of a cluster is determined by the solution of a boundary problem for the gravitational potential of a self-consistent field. The distribution function is determined by two main parameters. The algorithm of the solution is built and used to obtain the region of parameters for which a solution exists. This way is extended onto the cluster of galaxies with a central body (for example cD-galaxies). A process is suggested to estimate the model parameters using optical observation of cluster of galaxies.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Fild, Mit. Astronomische Gesellschaft, 47, 1, 1980.
2. N. Bahcal, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 15, 1977.
3. N. S. Mathews, J. C. Backer, Ap. J., 170, 241, 1971.
4. A. Yahil, J. P. Ostrike, Ap. J., 185, 787, 1973.
5. J. E. Gunn, J. R. Goff, Ap. J., 176, 1, 1972.
6. R. Mushotzky, P. Serlemitsos, Ap. J., 225, 21, 1978.
7. B. Ballartí, L. Ferretti, Astron. Astrophys., 100, 323, 1981.
8. A. Cavaliere, R. Fusco-Femiano, Astron. Astrophys., 40, 137, 1976.
9. A. Cavaliere, R. Fusco-Femiano, Astron. Astrophys., 70, 677, 1978.
10. I. R. King, A. J., 70, 376, 1965.
11. I. R. King, A. J., 71, 64, 1966.
12. I. R. King, Ap. J., 174, 1123, 1972.
13. С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, М., 1947.
14. С. Чандрасекар, Принципы звездной динамики, ИЛ, М., 1948.
15. L. Spitzer, R. Härm, Ap. J., 127, 544, 1958.
16. Н. И. Идельсон, Теория потенциала, ГТТИ, М.—Л., 1932.
17. А. А. Власов, Статистические функции распределения, Физматгиз, М., 1966.
18. S. von Horner, A. J., 125, 461, 1957.
19. I. R. King, A. J., 67, 471, 1962.
20. Н. Н. Калиткин, Численные методы, Наука, М., 1978.
21. I. R. King, Quart. J. R.A.S., 22, 227, 1981.
22. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960.
23. Д. Худсон, Статистика для физиков, Мир, М., 1970.